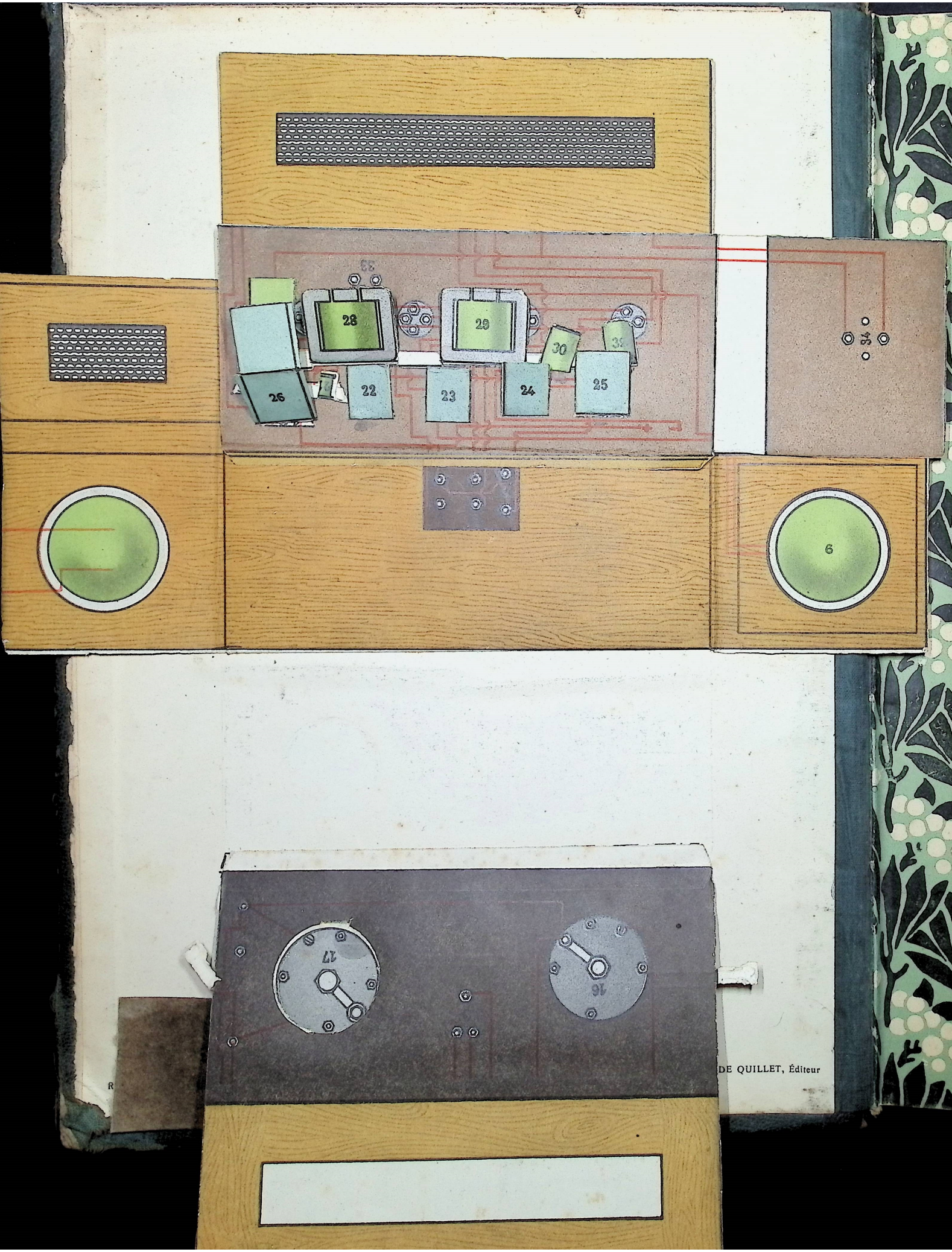
ENCYCLOPÉDIE AUTODIDACTIQUE QUILLET

APPAREIL DE T. S. F. «RADIO-SECTEUR»

CONSTRUCTION DES ÉTABLISSEMENTS PÉRICAUD



DE QUILLET, Éditeur

TABLE DES PLANCHES HORS-TEXTE

CONTENUES DANS CE VOLUME

Modèle démontable adapté à la reliure :

La Télégraphie et la Téléphonie sans fil

Pages

Longueurs, surfaces et volumes 304

Tableau des Unités 384

La Micheline 400

Le Graf Zeppelin 432

Spectres 528

GRANDES DIVISIONS DE CE VOLUME

POUR RÉUSSIR DANS LA VIE

Pages

La confiance en soi-même 3
Nos facultés mentales 4
Education de la volonté..... 4
Education de l'intelligence 8
Conseils aux parents éducateurs 9
Réussir; mais réussir à quoi ? 10

LA PHILOSOPHIE

Psychologie 13
L'intelligence 13
La sensibilité 15
La volonté 16
Esthétique 17
Logique 17
Logique formelle 17
Logique appliquée 18
Morale 26
Doctrines philosophiques et morales 26
Les conditions psychologiques de la vie morale 31
Objet et caractère de la morale 31
La conscience morale — Ses données — Obligation et responsabilité 31
Les mobiles de la conduite et les fins de la vie humaine 32
Les devoirs 34

GRAMMAIRE FRANÇAISE

Formation et développement de la langue 41
Notions préliminaires — Lettres, voyelles consonnes, signes orthographiques 44
Propositions — Phrases — Fonctions — Parties du discours 46
Le nom 47
Genre des noms 48
Formation du féminin des noms 48
Le nombre 49
L'article 50
L'adjectif 50
Le pronom 54
Le verbe 55
Conjugaisons 57
Différentes sortes de verbes 64
Conjugaisons particulières de quelques verbes .. 64
L'adverbe 69
La préposition 71
La conjonction 71
Les mots exclamatifs 71
Etude des phrases — Analyse 71
Emplois, sens ou syntaxe d'accord 73
Nomenclature grammaticale 76
Noms à double genre 77
Noms à double pluriel 78
Pluriel des noms propres 78
Pluriel des noms composés 79
L'article 80
L'adjectif 80
Le pronom 81
Pages
Le verbe 83
Rapport du verbe avec son sujet 83
Compléments du verbe 84
Emploi des temps de l'indicatif et du conditionnel 84
Emploi de l'indicatif et du subjonctif 85
Conditionnel 85
Participe 85
L'adverbe 87
La préposition 87
La conjonction 87
Ponctuation 88
Les expressions vicieuses 90
Dictionnaire des synonymes 95
Répertoire des synonymes 109

ARITHMÉTIQUE

Notions préliminaires 115
Numération décimale 116
Addition 118
Soustraction 119
Multiplication 121
Division 125
Problèmes sur les quatre opérations 128
Propriétés élémentaires des nombres entiers 129
Plus grand commun diviseur (P. G. C. D.) 131
Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres 132
Nombres premiers entre eux 132
Plus petit commun multiple de plusieurs nombres (P. P. C. M.) 133
Nombres premiers 134
Fractions 136
Opérations sur les fractions 139
Rapports — Proportions 142
Nombres décimaux 143
Opérations sur les nombres décimaux 144
Conversion des fractions en fractions décimales.. 146
Racine carrée 148
Système métrique 150
Grandeurs proportionnelles 152
Règle de trois 153
Règles d'intérêts 154
Règles d'escompte 155
Partages proportionnels 156
Règles de mélanges 157
Règles d'alliages 157
Corrigé des exercices 158

ALGÈBRE

Nombres algébriques 179
Addition et soustraction des nombres algébriques 179
Multiplication et division des nombres algébriques 182
Expressions algébriques 185
Opérations sur les expressions algébriques 186
Equations 192
Transformation des équations 192
Equation du premier degré à une inconnue 193
Equations du premier degré à plusieurs inconnues 196

Pages

Résolution des systèmes d'équations du premier degré à plusieurs inconnues 198
Problèmes du premier degré à plusieurs inconnues 200
Equation du second degré à une inconnue 200
Progressions et logarithmes 206
Table de logarithmes de 1 à 1.000 211
Intérêts composés 213
Corrigé des exercices d'algèbre 216
Notions sur la représentation graphique 233

GÉOMÉTRIE

Définition 245
Géométrie plane 246
La ligne droite 246
Triangles 248
Cas d'égalité des triangles 250
Perpendiculaires et obliques — Triangles rectangles 251
Droites parallèles 254
Somme des angles d'un triangle et d'un polygone convexe 255
Parallélogrammes 256
Figures symétriques 258
Le cercle 259
Mesure des angles 263
Usage de la règle et du compas 266
Figures semblables 270
Lignes proportionnelles dans le cercle 277
Constructions au moyen de la règle et du compas 278
Polygones réguliers 279
Mesure de la circonférence 281
Aires 284
Géométrie dans l'espace 289
Le plan 289
Droites et plans parallèles 293
Angles trièdres et polyèdres 295
Les polyèdres — Les volumes 297
Les corps ronds 303
Corrigé des exercices 310

TRIGONOMÉTRIE

Circonférence trigonométrique — Lignes trigonométriques 339
Résolution des triangles 348
Résolution numérique des triangles 360
Corrigé des exercices 364

PHYSIQUE

Introduction 373
Notions de mécanique 373
Principe de l'inertie — Forces 373
Mouvement — Vitesse — Accélération 377
Travail — Puissance — Energie 379
Machines simples 382

Pesanteur 387
Lois de la chute des corps 389
Pendule 395
Balance 397
Résistance des fluides au mouvement des corps 399
Choc des corps 401

Pages

Statique des fluides 405
Hydrostatique 405
Vases communicants 407
Pression et poussées sur les parois des vases 409
Principe d'Archimède 413

Statique des gaz 421
Pression atmosphérique 422
Loi de Mariotte 427
Machines à gaz 430
Pompes à liquides 433
Capillarité 435
Principe d'Archimède appliqué aux gaz 436
Hydrodynamique 438

Chaleur 443
Théorie moderne de la chaleur — Thermomètres 443
Dilatations — Dilatations linéaire et cubique .. 447
Chaleur spécifique — Calorimétrie 455
Changements d'état 459
Dissolution et cristallisation 462
Vaporisation 463
Machines à vapeur 471
Propagation de la chaleur 474

Acoustique 479
Etude du son 479
Qualités du son 483
Etude spéciale des corps vibrants 488
La voix — Le phonographe 496

Optique 499
La lumière — Propagation — Photomètres 499
Réflexion de la lumière 502
Miroirs sphériques 505
Réfraction de la lumière 509
Réfraction à travers les lames parallèles — Prisme 513
Lentilles sphériques 515
Instruments d'optique — Photographie 523
La vision 530
Dispersion de la lumière — Spectre 531
Vitesse de la lumière — Polarisation 534

Electricité 537
Magnétisme 537
Electricité statique 541
Sources électriques 544
Potentiel 546
Capacité 547
Condensation électrique 547
Effets des décharges électriques 549
Electricité dynamique 552
Effets calorifiques du courant 555
Effets chimiques du courant — Electrolyse 558
Piles et accumulateurs 560
Electromagnétisme 568
Aimantation par les courants 570
Galvanomètres et ampèremètres 573
Induction 575
Application des courants d'induction — Téléphone 576
Application des courants d'induction — Machines électriques — Courants alternatifs 578
Décharges dans les gaz raréfiés — Rayons X 581
Oscillations électriques 583

Systèmes d'unités 584

ENCYCLOPÉDIE AUTODIDACTIQUE QUILLET

TOME I

ENCYCLOPÉDIE AUTODIDACTIQUE QUILLET

L'ENSEIGNEMENT MODERNE ET PRATIQUE

PUBLIÉE EN COLLABORATION

PAR

UN COMITÉ D'UNIVERSITAIRES

POUR RÉUSSIR DANS LA VIE – LA PHILOSOPHIE
GRAMMAIRE FRANÇAISE – DICTIONNAIRE DES SYNONYMES – ARITHMÉTIQUE
ALGÈBRE – GÉOMÉTRIE – TRIGONOMÉTRIE – PHYSIQUE

TOME I

LIBRAIRIE ARISTIDE QUILLET
278, BOULEVARD SAINT-GERMAIN
PARIS VIIe
(STRASBOURG-BRUXELLES)
MCMXXXII

Merci, et
Bonne Lecture!

PRÉFACE

« Après le pain, l'éducation est le premier besoin d'un peuple. »
DANTON.

Voici le livre que son éditeur, autodidacte lui-même, a voulu et a réalisé, parce qu'il en a personnellement reconnu les nécessités et les vertus. Au sortir de l'école primaire, placé dans des conditions telles qu'il n'a pu bénéficier de l'enseignement direct des maîtres, il a dû s'assurer à lui-même, par ses propres moyens, cette instruction indispensable à la vie de toute personne qui a la légitime ambition de prendre sa place dans la société.

Mais cette instruction si précieuse, vaste ensemble de connaissances de tout ordre, éparse en de très nombreux livres dont il lui a fallu éprouver la qualité, la possibilité d'utilisation, il a dû la conquérir lentement et non sans de sérieuses difficultés.

C'est pourquoi, en pleine conscience des embarras, du temps dépensé, que suppose une semblable tâche, il a voulu épargner fatigues et recherches superflues à ceux qui, aujourd'hui en présence d'une situation qui fut la sienne, poursuivant le même but, ont les mêmes besoins et seront heureux qu'un des leurs, et qui les a bien compris, leur ait rendu la tâche infiniment plus facile, plus rapide, et tout assurée en ses résultats.

Il a fallu pour qu'une telle œuvre répondît entièrement à cette fin d'être l'instrument facile et complet de l'éducation par le livre, non seulement réunir en cette encyclopédie l'essentiel du savoir humain dans ses éléments les plus exacts, les plus à jour, mais encore, et surtout, observer une mise au point minutieuse, équilibrer judicieusement avec harmonie, les différentes catégories du savoir, et présenter tous ces chapitres à l'esprit de telle façon qu'il puisse les assimiler aisément. Nous n'avons pas un instant perdu de vue le but éminemment pratique et utilitaire de notre œuvre. Loin de toute érudition, vaine ou déplacée ici, nous sommes demeurés

dans le plan de l'instruction générale qui est le fait de l'homme éclairé, de bon ton, et qui est la meilleure armature de l'intelligence. La méthode a été dans l'élaboration de ces volumes, notre souci constant. Sûr de notre propre expérience, nous nous sommes entouré des collaborateurs les plus qualifiés par leur valeur professionnelle et surtout par leurs éminentes qualités de bon sens : ils ont travaillé avec nous dans la même pensée et dans le même cœur.

Tels sont les principes qui ont guidé la réalisation de notre encyclopédie. Pour mener à bien cette entreprise nous avons dû compter avec le temps. Il y a vingt ans que nous avons commencé de donner notre attention et nos soins à ces ouvrages; depuis vingt ans nous nous appliquons à les perfectionner. Ils ne sont pas seulement parmi les plus importants de ceux que nous avons édités; ils sont notre propre conception, notre pensée, notre œuvre ; et c'est avec le sentiment d'avoir servi la plus humaine des causes que nous les présentons aujourd'hui à notre grand public.

ARISTIDE QUILLET.

POUR RÉUSSIR DANS LA VIE

POUR RÉUSSIR DANS LA VIE

I

Ayez confiance en vous-mêmes ; tous les éléments de succès sont en vous.

Depuis la grande guerre, il semble que le rythme des existences humaines se soit accéléré. La « lutte pour la vie » est devenue plus ardente, nous ne cessons de courir pour satisfaire les appétits désordonnés qui nous ont saisis. L'âpreté des événements, l'incertitude du lendemain nous découragent, ou nous conduisent à poursuivre des jouissances immédiates, souvent démoralisatrices.

Nous menons une existence impersonnelle et stupide. Combien rentrent chez eux le soir, surmenés par le travail, désenchantés de leurs idéals sans cesse ruinés, devenus incapables de goûter le sain réconfort de leur modeste foyer.

Et chacun d'envier les individus qui, menant l'action selon leurs volontés, surgissent de la masse moutonnante et « font leur vie ». Puissants hommes d'affaires, politiciens avisés, artistes en renom, « ils ont de la chance ceux-là ! » — les plus acerbes ajoutent : « arrivistes ! ». Négligeons les charlatans de la fortune, aventuriers sans scrupules, qui exploitent la naïveté ou la bonté ; le bon sens populaire les a bientôt démasqués. Les vrais grands hommes furent ce qu'ils ont été par la seule force de leur génie. Bien sûr Alexandre, Napoléon, Shakespeare, Carnegie, Pasteur, furent des individus merveilleusement doués, pourvus de vertus supérieures, mais s'ils parvinrent à la puissance, à la richesse, à la gloire, c'est qu'ils surent développer et mettre en œuvre méthodiquement leurs facultés.

Il serait puéril de prétendre être quelque jour soi-même Napoléon ou Pasteur ; cependant il convient de ne pas se mésestimer : si nous usions de toutes nos facultés et de la meilleure façon, nous obtiendrions des résultats insoupçonnés. Etes-vous bien certain de savoir ce que vous valez, et par suite ce que vous pouvez ? Avez-vous toujours travaillé à valoir et à pouvoir davantage ?

Vous vous exaltez aux remarquables performances des athlètes ; chaque nouveau record des as sportifs vous enthousiasme. Ces hommes ne sont pas autrement bâtis que vous. Ce qui doit vous stupéfier, ce n'est pas le résultat merveilleux que vous applaudissez, c'est l'énergie qu'ils ont dépensée pour l'atteindre. Toute personne normalement douée, ne subissant pas de disgrâce physique peut approcher de ces prouesses. Il lui suffira de s'entraîner avec méthode et persévérance. La force et la résistance s'acquièrent, la vitesse et l'adresse s'apprennent. Si les champions ont ces qualités au plus haut degré, c'est qu'ils se sont acharnés à les parfaire ; jour par jour, le corps exercé devient plus fort, plus souple, le mouvement plus rapide et plus précis, capable de soutenir sans fatigue des efforts prolongés.

Vous n'avez pas été préparés au combat de la vie, il faut vous y entraîner de vous-mêmes. — Comme le corps, l'esprit peut devenir vif, actif, vigoureux. Les « as » des affaires, de la politique, des sciences, des arts, sont les athlètes de l'esprit. Comme les athlètes du corps, ils ont acquis : force, résistance, vitesse adresse. Ils ont astreint leurs puissantes facultés à un sévère entraînement ; ils ont pris résolument en mains leur propre éducation. Hélas, il faut apprendre le combat de la vie ; pour la plupart, nous sommes sortis de l'école, avec des armes : celles que donne l'instruction ; mais nous n'y avons pas appris la science de ces armes : nous n'y avons pas reçu une éducation. Montaigne disait déjà : « Mieux vaut tête bien faite que bien pleine » ; malgré leur mérite et leur bon vouloir, nos maîtres d'aujourd'hui ont dû s'attacher à entasser dans nos esprits les matières de programmes surchargés plutôt qu'à façonner les précieuses puissances de l'esprit. En dépit des sages conseils de nos parents, nous sommes aujourd'hui désarmés, désemparés, parce que le grand savoir dont on nous a nourris est de peu d'efficacité pour la vie ; on ne nous a pas appris à l'utiliser pour des fins pratiques. La vie s'est bien chargée de nous donner quelques leçons, mais ses leçons nous ont coûté cher ; nous avons si lourdement payé cette expérience, elle nous a tant accablés qu'il ne nous est parfois plus resté assez de force pour la mettre en œuvre ; et, au lieu de diriger les événements, nous nous laissons passivement conduire par eux. Nous créons en nous même notre propre stupéfiant.

Nous veillons jalousement à la santé de notre corps et nous n'avons aucun souci de la santé de notre esprit et de notre caractère. Cependant, c'est notre esprit et notre caractère que le surmenage de la vie moderne ruine le plus tôt et le plus sûrement. Et cependant, comme il existe de sûres méthodes de culture pour le développement et l'assouplissement du corps, il y a aussi des méthodes rationnelles de culture mentale pour le développement judicieux des facultés de l'esprit. Les hommes supérieurs ne sont devenus tels qu'à la suite d'une rude discipline volontairement imposée et poursuivie avec ténacité. Quiconque sait cultiver ses facultés natives, doit « arriver ».

Comprenez que vouloir « arriver », en toute ardeur, mais en toute loyauté, en toute honnêteté, n'est pas un projet égoïste. C'est un devoir envers vous-même de tendre au faîte de votre situation ; c'est surtout un devoir envers votre famille, envers ceux que vous aimez, c'est un devoir envers votre pays, qui est riche de tous les succès de ses enfants.

Nul ne saurait prétendre exposer une méthode universelle de rénovation mentale et morale ; chacun doit se faire la sienne propre. Toutefois les premières expériences et les premières conclusions d'une science désormais fondée, la *Psychologie Expérimentale* peuvent nous préciser certaines règles de conduite. Réflechissez,

vous comprendrez qu'il n'est pas nécessaire de ne compter que sur la chance; avec vos facultés propres, vous êtes une force, et vous pouvez devoir à vous-même et non au hasard votre mérite et votre succès; vous comprendrez que vous êtes une personnalité originale, capable d'avoir une valeur sociale unique; et qu'il convient que vous développiez cette combinaison des qualités que vous êtes seul à posséder.

II

Nos facultés mentales

Nos facultés sont diverses. — Avez-vous songé à examiner parfois les aspects innombrables sous lesquels se manifeste l'esprit humain ? Souhaitant utiliser cet esprit de la meilleure façon possible, avez-vous cherché à le pénétrer ? Ses activités multiples et disparates forment trois groupes: le sentiment, l'intelligence, la volonté.

Le Sentiment est en quelque sorte la faculté que nous avons d'enregistrer les faits par le moyen des réactions, pénibles ou agréables, qu'ils provoquent en nous. Le sentiment est primordial, notre personnalité affective déterminant généralement nos relations avec le monde extérieur; nous agissons bien ou mal suivant que nos sentiments et nos désirs sont élevés ou vulgaires. Les sentiments supérieurs nous perfectionnent; les bas appétits nous avilissent. Le sentiment, force toute spontanée, tout intuitive, doit donc être éduqué; il est des tendances qui doivent êtres extirpées, les plus vulgaires doivent être subordonnées aux plus élevées.

L'*Intelligence* est la faculté de connaître, de comprendre et d'utiliser les connaissances. Nos sens nous informent sur le monde extérieur; notre mémoire enregistre tout ce qui se présente aux sens et à l'esprit; mieux elle enregistre, plus nous enrichissons notre expérience et plus notre activité a de ressources à sa disposition.

Nous observons, nous réfléchissons, nous raisonnons en un mot, nous pensons et c'est là, pour ce qui nous intéresse ici, la faculté maîtresse de l'esprit: il nous importe avant tout de penser bien et de penser vite.

La *Volonté* est le principe directeur de notre activité; elle est mue par le sentiment et réglée par la réflexion. Elle met les actions suggérées par le désir sous le contrôle et la règle de la pensée.

Mais la volonté est la faculté maîtresse. — Analysez un mouvement de l'âme, vous y saisirez les mouvements combinés du sentiment, de l'intelligence, de la volonté; vous y verrez les trois formes de votre activité spirituelle enchevêtrées, et réagissant intimement l'une sur l'autre. Ainsi, c'est un désir, celui de vous instruire et de vous améliorer qui vous fait lire ces lignes; ce désir vous a poussé à la lecture qui est une action. Vos facultés intellectuelles sont entrées en jeu pour estimer la valeur de l'étude que vous allez faire. Votre volonté décida cette lecture et elle vous aidera à la poursuivre s'il surgit quelque obstacle. Désir, reflexion, décision furent presque simultanés; la collaboration étroite de vos facultés est évidente. Vous comprendrez alors que notre perfection mentale dépendra surtout du parfait état d'équilibre de nos trois facultés maîtresses. Il vous faudra ou soutenir leur faiblesse ou combattre leur outrance. C'est la volonté qui, réfrénant ou stimulant le sentiment et l'intelligence, créera l'harmonie intérieure de notre âme.

Nous envisagerons ici principalement les moyens d'éduquer, d'affermir notre volonté puisque c'est à elle que revient la charge de l'harmonie intérieure, puisque c'est à elle de coordonner nos diverses facultés, de contrôler toutes les puissances de notre corps et de notre esprit, d'établir notre autorité sur nous-même et sur les autres. C'est notre volonté qui fixe notre destin.

III

Education de la volonté

De même que notre constitution organique dépend essentiellement de notre hérédité, notre conditionnement spirituel: tendances, sentiments, facultés intellectuelles, est pour une large part inné. Notre caractère est d'ailleurs déjà esquissé dans ses grandes lignes à l'âge ou nous devenons capables d'en prendre conscience. Nous subissons incontestablement la loi d'un certain déterminisme et nous sommes prédisposés à sentir, à penser et à agir selon ce que nous ont faits l'hérédité et l'éducation. Beaucoup suivent sans réagir ces impulsions et s'excusent en disant: « c'était plus fort que moi », « je n'ai pas pu m'en empêcher », et ils se dissuaderont de résister en répétant les vieux aphorismes : « Chassez le naturel, il revient au galop », ou « On ne change pas sa nature ». Ces affirmations sont des sophismes, on peut modifier sa nature, si on ne peut pas la transformer radicalement par des moyens calculés, on peut imposer à la conscience la volonté de se libérer de ses servitudes. La plupart des hommes sont gouvernés les uns par les instincts et les appétits physiques; les autres par des préjugés, mais une élite a su conquérir son indépendance et se mettre sous la règle de la raison. Soyez parmi cette élite. Cultivez votre volonté.

Vous voulez devenir une forte personnalité, obtenir une meilleure situation, réaliser l'idéal que vous vous êtes défini; avant d'avoir esquissé le premier effort, vous êtes las et découragé, abandonné à votre irrésolution et votre nonchalance.

Nous allons vous indiquer par quels moyens, par quels exercices, vous réussirez à prendre la direction de vous-même.

Prenez conscience de vos forces. — Commencez par observer quelques prescriptions qui n'exigent pas une force de caractère particulière:

1° Ne vous imposez tout d'abord que des tâches réduites; chaque effort réussi facilitera le succès de l'effort suivant.

2° Ne vous épanchez pas au dehors. Gardez le silence quand vous n'êtes pas contraint de parler; soyez sobre de gestes, ne communiquez pas vos impressions, écoutez, parlez et ne commentez pas.

3° Quand vous parlerez, ne vous abandonnez pas à l'automatisme de la parole; choisissez vos expressions; n'accueillez pas la première qui se présente; faites effort pour découvrir celle qui rend le mieux et le plus fortement votre pensée. Parlez avec conviction mais non pas avec animation.

4° Ecoutez qui vous parle sans l'interrompre, quoi qu'il puisse vous en coûter. Dans une conversation vive soyez patient, ne vous exaltez pas.

5° N'approuvez pas ce qu'on dit devant vous dans le but d'être agréable à votre interlocuteur; vous-même, ne parlez pas pour vous faire valoir. Ne regardez qu'à la solidité des idées.

6° Pour parler ou pour juger, ne vous laissez pas influencer par des contingences extérieures, par le lieu, par la mine de vos voisins. Gardez la maîtrise de votre pensée.

Vous ne réussirez pas du premier coup à vous imposer ainsi à vous-même; à dégager vos forces des liens multiples qui les enserrent, qui les paralysent. Limitez vos ambitions, ne rêvez tout d'abord que de petites victoires; vous pouvez en gagner chaque jour quelques-unes. Vous êtes assuré du succès si seulement vous persévérez.

Cultivez la vigueur de l'esprit. — Le précédent entraînement vous a donné conscience de votre force. Désormais il vous faut amplifier votre pouvoir. Vous n'êtes plus irrésolu et nonchalant, vous croyez au succès; mais vous avez besoin sans cesse de forces

nouvelles. Nous allons vous indiquer les sources plus riches où vous pourrez puiser.

Concentrez votre esprit sur un objet et méditez. — Ne pensez qu'à une chose à la fois, mais absorbez-vous entièrement en elle; allez jusqu'au bout de votre pensée. Apprenez à observer rigoureusement, sans vous laisser distraire ou tromper par votre imagination, rapprochez, associez vos observations, bientôt vous serez surpris des progrès de votre esprit. Mais apprenez en même temps à changer brusquement le sujet de vos réflexions et entraînez-vous à le faire jusqu'à ce que vous y réussissiez sans aucune fatigue.

Les ouvrages sur l'éducation de la volonté proposent les exercices suivants :

Lisez chaque jour quelques pages d'un livre traitant des côtés essentiels de la vie ; concentrez votre esprit sur ce que vous lisez, ne lui permettez pas de s'en évader, s'il s'éloigne, ramenez-le, inlassablement. (Annie Besant).

Lisez cinq minutes et méditez un quart d'heure sur ce que vous venez de lire. (Les Théosophes).

En vous promenant, examinez attentivement les personnes que vous rencontrez, notez le plus exactement possible la coupe et la couleur de leurs vêtements, de leurs chaussures, de leur coiffure, leurs attitudes, leurs gestes, leurs manières. Procédez pour les choses d'une manière analogue et vous acquerrez vite la faculté de voir rapidement et de vous souvenir longtemps. (Durville).

Reconstruisez, trait par trait, le portrait d'une personne. Certes, s'il s'agit de quelqu'un que vous voyez fréquemment, à peine aurez-vous fermé les yeux qu'il vous semblera y avoir réussi, mais vraisemblablement vous n'aurez que les traits généraux de la physionomie, alors qu'il faut vous représenter si complètement ce visage que son image dans votre esprit devrait avoir la précision d'un dessin. Vous ne réussirez pas du premier coup dans cet exercice mais, si vous y persévérez vous y deviendrez maître. (Jagot).

Vous devrez vous appliquer à imaginer vous-même de semblables exercices pour développer la vigueur de votre attention et l'élasticité de votre esprit. En tous cas, efforcez-vous de ne jamais laisser dériver votre pensée; résistez à tout ce qui tend à vous en distraire : agitation du milieu, émotion, flatterie, etc.

Ménagez-vous des moments d'isolement. — Votre esprit gagnera en vigueur si vous savez le soustraire périodiquement à son ambiance habituelle. Isolez vous à certains moments. La sage coutume des vacances, ou des dimanches à la campagne est une mise en pratique agréable de ce précepte. Apprenez alors à changer totalement d'atmosphère.

M. Jagot nous donne des indications précises sur la mise en œuvre de ce procédé de détente mentale : « La position allongée, dit-il, est la meilleure pour faciliter la suspension des opérations mentales, mais dans la station assise on y peut obtenir aussi ce résultat avec quelque entraînement.

« Tout d'abord, on s'applique à bien relâcher tous les muscles et on s'assure que le corps repose de tout son poids; puis laissant tomber à demi les paupières, on exprime intérieurement l'intention de « rentrer en soi-même », c'est-à-dire de rompre momentanément tout contact avec l'extérieur.

«Si on s'applique à ces précautions préalables durant quatre à cinq minutes, on ne tarde pas à éprouver une sorte d'engourdissement agréable accompagné d'une fraîcheur qu'on sent courir le long des muscles et on éprouve une sensation de repos parfait.

«Ensuite on refuse son attention aux pensées qui se présentent, — déjà moins tumultueusement, — on s'applique à n'en suivre aucune ; les idées semblent alors passer en nous à peine perçues. Bientôt durant de courtes périodes de cinq, dix, trente secondes l'esprit est vide. Il arrive un moment où il reste vide, « Cet état délicieusement languide et qu'on a conscience de pouvoir faire cesser dès qu'on le voudra, repose mieux et plus rapidement que le plus profond sommeil, car le sommeil ne suspend jamais qu'une partie de l'activité psychique. » Avec un peu d'habitude, quelques secondes suffisent à se mettre complètement dans cet état d'isolement au cours duquel on récupère rapidement les forces dépensées précédemment.

« Napoléon paraît avoir eu connaissance de ce procédé. Parfois ses officiers le voyaient se retirer à l'écart et demeurer immobile comme s'il dormait profondément. Et cependant, il veillait. Si une cause urgente venait interrompre sa retraite, il manifestait instantanément une complète lucidité d'esprit. On dit que sa vigilance ne se relâchait ni jour ni nuit. C'est certainement grâce à un mode particulièrement satisfaisant de repos qu'il a pu surmonter les écrasantes fatigues de ses campagnes ».

Pratiquez l'auto-suggestion. — « Entrez-vous bien çà dans la tête ». Les camelots, la publicité moderne, utilisent journellement des formes ingénieuses de l'auto-suggestion. Lorsqu'une seule idée a réussi à vous accaparer, elle exerce en vous une influence extraordinaire et quasi-inconsciente. Il ne suffira pas d'ailleurs de se répéter mécaniquement : « J'ai de la volonté », « je suis patient » etc., mais il faudra s'efforcer de vivre en pensée, comme si on avait cette volonté ou cette patience. Toute suggestion doit être introduite d'une manière doucement persuasive.

Appliquez-vous à la maîtrise de soi. — Avec votre volonté déjà disciplinée, votre personnalité en quelques sorte concentrée, vous êtes désormais apte à vous gouverner. Nous prendrons de judicieux conseils dans quelques livres traitant du pouvoir de la volonté sur soi-même.

DEVENEZ LE MAITRE DE VOTRE CORPS. Vous n'ignorez pas l'influence de notre état physique sur notre état moral. Puisque nous voulons acquérir un plus satisfaisant équilibre de nos facultés spirituelles, nous devrons donc veiller à la parfaite intégrité de notre corps. Il est évident que le malade n'a pas la vitalité de l'homme sain; il est intoxiqué, et l'homme intoxiqué, écrit le Docteur Gaston Durville, «sent et voit au travers de ses toxines ». Une hygiène rationnelle nous préservera de cet empoisonnement, et par suite du trouble, de l'abattement, et du pessimisme qui en sont les conséquences. Même pour les individus particulièrement forts et résistants, les quatre conditions primordiales de l'équilibre physiologique sont: une alimentation saine, une abondante oxygénation et une circulation régulière du sang, des temps de repos et de sommeil réparateurs.

Observez une hygiène de l'alimentation. — Nous vous renvoyons pour le choix des aliments aux ouvrages spéciaux. Les aliments malsains sont d'ailleurs connus de tous. Nous ne vous donnerons qu'un conseil : Evitez tout excès de régime. Si vous aimez la choucroute, la dinde aux marrons, si votre estomac les supporte, mangez-en, mais n'en mangez pas tous les jours et ne vous en gavez en aucun cas. Pareillement n'entonnez pas des litres d'eau de Vichy pour remettre d'aplomb votre système digestif délabré, vous risqueriez de le détraquer plus encore. Le climat, la profession, les dispositions naturelles doivent décider de la meilleure alimentation.

Après quelques excès de table, une cure de fruits et d'eau de Vittel vous laveront les reins et le foie. Si vous n'avez pas à fournir de grands efforts physiques, soyez volontiers végétariens : les légumes frais, les céréales et les fruits, vous entretiendront un sang pur et vif. Les viandes sont des aliments reconstituants, aptes à réparer de lourdes dépenses corporelles.

Pratiquez une hygiène respiratoire. — Il vous faut oxygéner parfaitement votre sang. Apprenez donc à respirer. Vous pratiquez déjà la gymnastique suédoise

et les sports, continuez et si vous ne le faites pas encore exercez-vous aux **mouvements respiratoires.** En voici quelques-uns :

1° En vous basant sur le rythme de votre pouls, faites une profonde inspiration de 6 secondes, conservez l'air inspiré 3 secondes, expirez-le en 6 secondes environ, et gardez vos poumons vides pendant 3 secondes. Peu à peu, progressivement, amplifiez ce rythme respiratoire sans dépasser jamais la cadence 20 secondes-10 secondes. Cet exercice doit être fait le plus souvent possible et avec la plus grande attention. Bientôt vous aurez pris l'habitude d'aspirer et d'expirer au maximum de vos poumons.

2° Respiration diaphragmatique. — Étendez-vous sur votre lit. Placez les deux mains sur votre ventre. Fermez la bouche, et aspirez l'air par le nez en gonflant l'abdomen. Maintenez celui-ci tendu pendant une ou deux secondes à la fin de chaque aspiration; expirez ensuite lentement, videz vos poumons à fond. Quand votre abdomen est au plus bas, pressez-le de haut en bas avec vos mains.

Parfois, au lieu d'expirer l'air des poumons, retenez votre haleine, soulevez et rentrez le ventre à quatre ou cinq reprises, en vous servant des mains pour le presser de haut en bas. Mais quel que soit l'exercice, ne le poursuivez jamais jusqu'à la fatigue.

En pratiquant ces méthodes de respiration, non seulement vous absorberez plus d'oxygène qu'à l'ordinaire, mais vous obligerez l'air à se disperser, à circuler plus profondément dans les poumons. De plus vous ferez comme un massage et cette respiration abdomino-costale décomprimant le plexus solaire aura d'heureux effets sur vos nerfs : la pratique journalière des exercices méthodiques préviendra les états déprimants.

Aidez le sang à circuler. — Pour aider à la circulation du sang, douchez-vous à l'eau froide chaque matin au saut du lit; ou plus simplement, faites ruisseler de l'eau fraîche sur tout votre corps à l'aide d'une forte éponge. Aucune installation spéciale n'est alors nécessaire. Les personnes dont l'état de santé ne supporterait pas l'usage de l'eau froide se frictionneront le corps chaque matin, avec la paume de la main ou avec un gant de crin. Ces soins régularisent la circulation du sang, et débarrassent les pores de la peau des graisses et des poussières qui les obstruent.

Sachez vous reposer. — Votre organisme fonctionnant régulièrement, il ne faudra pas le surmener. Un sommeil paisible, d'une durée suffisante est indispensable pour compenser la fatigue de chaque jour. Il faut de bonnes nuits, pour s'assurer un esprit lucide et un corps alerte, avec le maximum de puissance et de résistance. Le manque de sommeil use rapidement et déprime. Mais si le repos retrempe la volonté, la volonté nous aidera à obtenir un sommeil plus réparateur. M. Jagot nous indique une excellente manière de trouver au lit un sommeil paisible et réparateur : Étendez-vous, les membres entièrement allongés. Cherchez une position agréable où chaque portion du corps repose de tout son poids, plutôt sur le côté droit, ou sur le dos ; si vous vous placez sur le dos, faites obliquer légèrement le corps vers la droite. Ceci réalisé — *la meilleure position du corps étant celle où vous êtes le plus à l'aise, — imposez-vous une immobilité complète,* les muscles bien détendus.

Prenez garde que votre poitrine ne soit ni comprimée, ni contractée. Assurez-lui un jeu facile. Placez la tête de manière à ne donner aucune fatigue aux muscles du cou.

Au bout d'un instant vous éprouverez peut-être le besoin de remuer et parfois d'une manière si impérieuse que vous y céderez avant d'avoir songé à résister. Reprenez alors la position primitive, imposez-vous à nouveau l'immobilité en surveillant le retour de l'impulsion : dès qu'elle réapparaît, efforcez-vous de n'y pas céder. Après un quart d'heure environ d'immobilité vous éprouverez une sorte d'engourdissement agréable et vous sentirez le sommeil vous gagner graduellement. La plus rebelle insomnie peut être ainsi vaincue si elle n'a pas pour cause un état maladif; vous jouirez d'un repos calme et profond.

Ayant dormi ainsi, vous vous réveillerez frais et dispos et vous lèverez volontiers. En outre vous retrouverez rapidement le contrôle de vos pensées. Essayez du procédé suivant : pour les raviver immédiatement, vous avez placé le soir, à portée de votre main, un ouvrage qui est pour vous particulièrement intéressant. Dés que vous vous éveillerez, prenez-le et continuez la lecture au point où vous l'avez laissée la veille. L'intérêt vous entraînera, et vous rendra rapidement votre netteté d'idées. Vous pourrez alors laisser le livre et penser rapidement aux occupations projetées pour la journée. Vous serez prêt à agir. N'oubliez jamais qu'un organisme bien équilibré est une des meilleures conditions de maîtrise intellectuelle.

COMMENT ON DEVIENT MAITRE DE SES FORCES SPIRITUELLES. — Vous ne manquez pas d'admirer l'aplomb de certaines personnes, la confiance qu'elles ont en elles, tellement assurée qu'autour d'eux chacun subit leur influence. Vous êtes timide; réfléchissez; au point où je vous suppose parvenu vous n'avez plus aucune raison pour l'être. Les individus que vous admirez sont ou bien d'une assurance en quelque sorte inconsciente, due à leur forte constitution ou à leur faible culture; ils seront souvent décontenancés, malgré l'apparence, ou bien au contraire, la confiance qu'ils ont en eux-mêmes, est raisonnée, ils n'en usent qu'avec à-propos et discernement. Il n'y a maintenant aucune raison pour que vous ne deveniez pas comme ceux-ci puisque vous possédez un ferme équilibre physique et un contrôle sûr de vos émotions sensorielles.

Soyez toujours parfaitement calme. — Il faut que vous en imposiez à ceux qui ont affaire à vous. Vous n'y parviendrez qu'en restant toujours calme. L'essentiel est de supporter flegmatiquement le premier choc de la surprise ou de l'indignation, vous éviterez les effets néfastes de l'irritation, de la fébrilité, de l'énervement, vous resterez maître de votre jugement, de vos énergies pour juger des situations et y parer. Vous ne réussirez pas de suite à conserver imperturbablement votre calme, mais chaque tentative réussie vous y aidera et préparera le succès définitif. La pratique de la respiration abdomino-costale précédemment décrite sera un des plus sûrs moyens de faire disparaître l'anxiété, l'angoisse, de prévenir les états déprimants, puisqu'il permettra d'éviter la contraction du plexus solaire consécutive à toute émotion.

Prenez l'attitude d'un homme froidement maître de lui. — Adoptez l'attitude de l'impassibilité, parce qu'il y a une très étroite relation entre l'attitude qu'on s'impose et l'état physique correspondant; le geste fortifie le sentiment qu'il veut exprimer. Modérez vos mouvements ; évitez tout mouvement impulsif, toute marque violente d'émotion, joyeuse ou triste. Évitez les exclamations, les sursauts, les agitations déplacées ; vous ne devez plus paraître subir l'influence de ce que vous entendez, ou de ce que vous voyez. Votre froideur inspirera de la crainte, du respect, donnera aux autres le sentiment de votre supériorité.

Ayez le regard ferme. — Vous n'êtes pas sans avoir remarqué qu'un regard décidé exerce toujours une forte impression, utilisez cette vertu en allumant toutes les flammes de vos yeux. Suivez pour cela les conseils suivants :

Placez-vous devant un miroir et dirigez votre regard sur votre propre image réfléchie dans la glace. Fixez le point situé entre vos yeux, à la racine du nez. Faites un effort pour garder les paupières immobiles et maintenir pendant trente secondes la fixité des yeux. Reposez-vous, trente secondes. Reprenez ensuite la première attitude, conservez-la durant une minute; reposez-vous une minute. Recommencez pendant deux minutes et

arrêtez un temps égal. Vous arriverez à garder ainsi le regard fixe durant deux, trois, quatre, cinq, dix minutes sans difficulté ni fatigue, vous pourrez désormais imposer votre regard à vos interlocuteurs. Faites l'exercice précédent devant une surface noire; mais, de plus, tâchez d'ouvrir vos yeux plus largement que d'habitude, en les dilatant. Il faut parvenir à les maintenir de la sorte pendant près de dix minutes.

En vous efforçant de lire chaque jour une page entière d'un livre sans cligner des yeux, vous entretiendrez en bonne forme la faculté de fixation développée par les deux exercices précédents. (P.-C. Jagot).

Lorsque vous aborderez une personne, et lorsque vous parlerez, mettez en œuvre l'aptitude que vous aurez ainsi acquise ; regardez fixement votre interlocuteur entre les deux yeux à la racine du nez : Vous ferez impression si votre regard est calme et ferme sans dureté. Lorsque vous écouterez parler, cessez de fixer ainsi votre regard ; déplacez-le légèrement vers la droite ou vers la gauche pour le reposer, et comme pour écouter plus attentivement.

Formez-vous une voix nette et expressive. — Le timbre de la voix peut émouvoir profondément. Pour donner à la vôtre un timbre persuasif et touchant, chantez bouche fermée. C'est un exercice qu'on peut faire chaque matin en s'habillant.

Les exercices suivants agissant sur l'articulation, donneront de l'assurance et de la pénétration à notre voix.

1° Lisez une demi page d'un livre en prolongeant et en détachant chaque syllabe. Par exemple : Pa-a-a-a - ri-i-i-is - eeeest - laaaa - caaaa - piiii - taaaa - leeee - deeee - laaa - Franhanhanhan - ceeee..., etc.

2° Si la sonorité du timbre détermine l'émotion, la netteté de l'articulation frappe l'esprit et donne à la parole le pouvoir de rendre passifs les cerveaux auxquels elle s'adresse. Pour acquérir une articulation nette lisez à haute voix en vous exerçant : *a*) à bien séparer les syllabes ; *b*) à articuler chaque consonne comme si elle était triple. Par exemple : Pppa - rrris - ccca - pppi - ttta - llle - ddde - llla - Fffrrrannn - ccce..., etc.

3° Faites le précédent exercice, mais en lisant de plus en plus vite, sans manquer de tripler les consonnes et de marquer un petit temps d'arrêt entre chaque syllabe (P.-C. Jagot).

Parlez d'un ton modéré. — Votre parole aura d'autant plus de pouvoir qu'elle sera nette et ferme mais modérée. Vous savez ce que vous voulez dire; chaque mot, chaque syllabe produisent leur effet, n'en prononcez jamais qui soient violents, impatients, discourtois, qui puissent blesser votre interlocuteur. Écoutez avec un visage impassible, évitez les exclamations, les interruptions; attendez pour répondre qu'on ait terminé ce qu'on a à vous dire. Sans nervosité, restez maître de vous-même, vous resterez maître de la conversation et vous obtiendrez gain de cause. Si vous éprouvez un échec, soyez certain que vos paroles calmes mais catégoriques préoccuperont votre adversaire, le suggestionneront et qu'en réalité la partie n'est pas définitivement perdue pour vous.

Surtout: observez les caractères et apprenez à les manœuvrer. — Votre action ainsi développée ne sera pas égale sur tous les individus ; il vous faudra connaître le caractère de ceux avec lesquels vous avez affaire, à la fois pour user des moyens particulièrement propres à les influencer, et pour ne pas vous laisser décontenancer vous-même par leurs ressources de combat. Vous avez affermi votre volonté, perfectionné vos facultés suivant les méthodes générales, mais c'est à des cas particuliers qu'il vous faut les appliquer chaque jour.

1° *Observez chacun sans parti-pris* : vous donniez telles intentions à cette personne, elle en a sans doute d'autres inattendues qui vous prendront au dépourvu ; celle-ci vous paraît telle, cherchez à pénétrer son jeu, vous la trouverez tout autre. Attendez-vous à tous les obstacles, aucun ne vous découragera.

2° *Ne trahissez jamais vos impressions*, bonnes ou mauvaises, mais interprétez-les aussitôt pour réaliser ce que vous avez en vue. Abrité derrière le masque flegmatique que vous avez pris, examinez de sang-froid tout événement qui vous sollicite, tout argument qu'on vous propose, afin de ne pas céder sans motifs supérieurs et de ne pas persister sottement devant une résistance que vous sentez infléchissable. Utilisez les circonstances, ainsi bien souvent, en écoutant parler votre adversaire, vous sentirez que tel moyen d'action que vous aviez intention d'employer aurait eu l'effet le plus désastreux, tandis que tel autre, auquel vous n'aviez pas pensé et que la conversation vous suggère, est précisement celui qui convient.

Laissez parler et faites parler, vous réussirez à découvrir la mentalité de votre interlocuteur, ses manières de voir, son jeu et vous tâcherez d'y adapter votre manœuvre.

3° *Gardez votre sourire, ne soyez jamais impérieux.* — Par votre aimable sérénité, vous créerez chez les autres l'état de réceptivité indispensable à votre succès ; vous aurez ensuite tout le loisir d'exposer paisiblement, sans précipitation, vos propres considérations. N'imposez rien brutalement, vous provoqueriez une résistance inébranlable ; revenez doucement sur le même sujet ; exposez sans insister toutes vos raisons; les plus entêtés seront amenés à réfléchir et souvent à se décider dans le sens que vous proposez. Sur ce point les conseils de M. Jagot sont tels qu'il n'y à rien à y aiouter, ni à en retrancher.

« Persuader, c'est faire naître dans l'esprit d'un individu les idées, les sentiments, les incitations que vous désireriez lui voir accepter. Chacun s'efforce, dans la vie, de se servir de la persuasion. Nous allons vous indiquer les principes les plus efficaces pour influencer les gens par la parole. Le fait de procéder suivant des règles exactes vous confère une supériorité évidente sur tous ceux qui les ignorent. En présence de quelqu'un que vous cherchez à suggestionner, vous le rendrez réceptif : 1° En évitant tout ce qui pourrait faire naître chez lui une disposition à rejeter vos suggestions ; 2° En prédisposant son esprit à subir l'influence que vous voudriez que vos paroles exerçassent.

« Pour cela il faut donc éviter de produire la moindre impression désagréable, irritante, ennuyeuse ou répulsive, car cette faute déterminerait une sorte de ressentiment portant votre interlocuteur à repousser les impulsions que vous cherchez à lui donner. Obséder quelqu'un par des objurgations justes ou non, manifester de l'emportement, prendre le ton du défi, employer des paroles blessantes ou se répandre en lamentations, c'est rendre impossible l'influence persuasive. Manifester impérieusement ou même clairement ce qu'on désire, c'est mettre la mentalité à laquelle on s'adresse sur la défensive et l'inciter à se dérober.

« Ne contrecarrez jamais catégoriquement aucune affirmation. Accueillez ce qu'on vous dit avec calme. N'ayez pas l'air d'avoir déjà une opinion contraire. Exprimez tranquillement et courtoisement s'il y a lieu des idées antagonistes de celles qu'on vient d'émettre et n'insistez jamais. Laissez la conversation suivre son cours et revenez ensuite sur le point contradictoire.

« Si les agissements d'une personne vous mécontentent, ne le manifestez pas extérieurement autrement que par des paroles pleines de mesure et de dignité. Ne soyez pas à un jour près pour gagner la partie. N'exposez pas vos griefs. Ne semblez pas subir une très profonde répercussion de la manière avec laquelle on agit envers vous. Gardez l'attitude de la personne qui est sûre d'obtenir ce qu'elle veut et qui n'est pas pressée, précisément parce qu'elle se sent certaine de l'obtenir. Vous pouvez, le cas échéant, exprimer vos constatations sur les actes dont il vous conviendrait d'éviter le retour, mais énumérez seulement des faits, ne les commentez pas, ne prononcez pas de jugement. De cette manière vous troublerez très profondément votre interlocuteur. Or, créer le trouble, facilite la persuasion ».

Conclusions. — Soyez certain que le contrôle incessant de vos attitudes, la sûreté de votre regard et de votre voix vous permettront d'acquérir bien vite une parfaite assurance. Tout effort en vue de vous dominer accroîtra la force de votre volonté. Étant sûr de vous, ne craignez jamais d'oser, vous obligerez les événements à prendre le cours qui vous est favorable. Maître de votre volonté, sachant gouverner vos sens, vos sentiments, vos facultés intellectuelles, vous serez au-dessus de la chance et de la malchance, vous serez le maître de votre destin.

Entraîné à la concentration de la pensée, vous êtes assuré de tirer de votre esprit toutes les ressources qu'il contient. Habitué à dominer tous vos états d'âme, à mobiliser rapidement votre énergie psychique, vous pourrez porter au plus haut point toutes vos facultés et toute votre activité. Confiant en vous-même, gardant votre assurance en toute occasion, hardiment persuasif, patient et tenace, vous pourrez désormais conduire votre destinée selon vos désirs.

Vous vous êtes habitué à voir les choses par vous-même, à former vos jugements en parfaite indépendance, vous pouvez donc ne compter que sur vous ; pour combattre les événements hostiles, la plus sûre de vos chances est bien véritablement votre propre effort. Vous avez appris à ne pas vous lamenter contre un destin contraire, mais à envisager avec calme les mesures à prendre pour le redresser. Vous savez que la résignation passive et la révolte aveugle sont pareillement absurdes. Aux hommes, vous opposez tout à la fois votre franchise honnête et votre art de diplomate; aux événements, votre habileté. Vous savez enfin que toutes les grandes carrières, toutes les grandes œuvres sont le fruit de la volonté patiente et persévérante.

Vous avez toutes les qualités de caractère indispensables au succès et c'est au caractère que tient le succès : écoutez cet hymne de Gustave Le Bon à la volonté qui en est la pièce maîtresse : « Parmi les forces diverses dont l'homme dispose pour lutter victorieusement contre les puissances qui l'étreignent, la volonté fut toujours la plus active. Divinité souveraine, elle fit sortir du néant, avec les merveilles des sciences et des arts, tout ce qui fait l'éclat des civilisations.

« En remontant la chaîne de l'Histoire, en recherchant comment certains peuples acquirent leur grandeur, comment les maîtres de la pensée obligèrent l'univers à livrer son mystère, on retrouve toujours, à la base de leur succès, une volonté forte.

« Si nous tâchons de découvrir ensuite, pourquoi tant de nations périrent après un long déclin, pourquoi Rome, jadis reine du monde, finit par tomber sous le joug des barbares, nous constatons que ces chutes profondes eurent également une même cause, l'affaiblissement de la volonté.

« Cette faculté est donc la qualité maîtresse des individus et des peuples. Le but primordial de l'éducation devrait être de la fortifier et non de l'affaiblir. Le difficile n'est pas de vouloir un instant, mais de vouloir sans trêve. Une volonté forte ne désespère jamais. J'en réchapperai malgré les Dieux, s'écriait Ajax, déjà enveloppé par les vagues que déchaînait la fureur de Neptune. La foi qui soulève les montagnes s'appelle la volonté. Elle est la véritable créatrice des choses. « Et si l'histoire moderne nous montre des nations s'élevant chaque jour, alors que d'autres restent stationnaires ou déclinent, la raison s'en trouve dans les qualités variables de volonté que ces nations possèdent. Ce n'est pas la fatalité qui régit le monde, c'est la volonté ».

Gustave Le Bon.

IV

Education de l'intelligence

La collaboration qui s'établit entre nos facultés est si étroite, qu'en fortifiant notre volonté, nous avons en même temps par cela même perfectionné notre esprit : sans cesse nous avons dû mettre en jeu notre faculté d'observation, notre imagination, notre mémoire, notre jugement. Cependant nous donnerons ici quelques conseils encore sur la culture de certaines facultés, en vue surtout de les adapter aux exigences prodigieuses de la vie économique moderne.

Mettez-vous en état de bien observer. — Nos connaissances et par suite dans une certaine mesure, nos façons de vivre dépendent pour une part importante de nos *sens*. S'ils sont en bon état physiologique, il nous faudra accroître leur puissance, c'est-à-dire développer d'une part *l'acuité et la rapidité de nos perceptions*, d'autre part notre *aptitude à observer*. Soyez curieux, écoutez regardez, flairez, touchez. Il conviendra que vos perceptions soient aussi rigoureuses, aussi nettes, aussi complètes que possible. A cet effet les exercices ne manquent pas ; il est aisé d'en imaginer. Ainsi, vous apprendrez à voir en développant :

1° Le sens des formes. Examinez un objet, observez-en le contour, puis l'ayant caché dessinez-le de mémoire. Comparez votre dessin et l'objet.

2° Le sens des distances, des dimensions et des proportions. Appréciez à l'œil la longueur d'une règle, d'une table, d'une rue. Vérifiez. Après quelques expériences, vous vous tromperez à peine. Pareillement évaluez des surfaces, des volumes et contrôlez vos évaluations. Tracez une ligne droite, puis à vue d'œil une autre qui ait une longueur double, triple, etc. Tracez des triangles ayant deux, trois côtés égaux. Essayez de dessiner à main levée, un carré, une circonférence.

3° Le sens des couleurs. Combien connaissez-vous de couleurs? déterminez leur nom exact. Distinguez les différentes nuances d'une même couleur. Apprenez à réassortir un tissu à l'aide de tissus de même teinte. Apprenez à évaluer l'intensité des lumières et les ombres.

Ne négligez aucun détail dans l'observation, la minutie de celle-ci en fera toute la valeur. Bien observer, c'est observer beaucoup de détails ; à cette condition seulement vos connaissances seront précises et originales.

Non seulement vous devrez percevoir avec exactitude, mais il vous faudra *interpréter* vos perceptions et pour cela les comparer et les enchaîner. Quoi que vous observiez, procédez méthodiquement, faites le tour de l'objet que vous examinez. Des sens aiguisés et une attention entraînée vous permettront des appréciations justes et rapides et un plein contact avec le monde extérieur.

Les livres sont un de nos principaux moyens d'instruction. Sachez lire. Apportez de l'attention à vos lectures et notez ce qui vous a particulièrement intéressé, vous le retiendrez plus sûrement. Sachez utiliser ce que vous ont appris les livres. La lecture est certes une distraction, mais il faut en faire aussi un moyen de perfectionnement.

Cultivez votre mémoire. — Tous les exercices qu'on fait pour développer les diverses facultés se soutiennent l'un l'autre; ainsi en fortifiant l'attention nous développons la mémoire et la mémoire intervient efficacement dans le perfectionnement de la plupart de nos moyens de connaissance et d'action : rapidité et sûreté de l'observation et du jugement, esprit de repartie, facilité d'élocution, étendue et multiplicité de nos connaissances, *tout dépend par quelque côté de la mémoire.*

Le jeu de cette faculté comporte trois phases successives : l'acquisition des souvenirs, leur conservation et leur rappel. L'*acquisition* est le pouvoir de retenir toute impression suggérée soit par la perception extérieure, soit par l'imagination et la pensée. Ce pouvoir dépend de la force et de l'intensité de l'impression primordiale et aussi de sa répétition. Or la force de l'impression dépend de l'acuité de ses sens organes de perception, de la curiosité de l'esprit, de la force d'attention, de la puissance de l'esprit d'analyse. La répétition dépend de notre seule volonté.

Un classement bien ordonné des connaissances en assurera la *conservation* d'ailleurs inconsciente. Classez donc vos idées ; rassemblez vos sensations éparses, liez-les en remarquant par quoi elles se ressemblent et par quoi elles s'opposent; de plus, sitôt que vous les avez éprouvées, ramenez-les à votre esprit, à plusieurs reprises, remarquez leur importance, vous aurez ainsi toutes chances pour les garder longtemps dans votre mémoire. C'est ainsi qu'il est bon chaque soir de noter brièvement les impressions de la journée en s'attachant à celles qu'on souhaite particulièrement retenir. Quand vous déchireriez vos notes, les souvenirs resteraient.

La facilité à *rappeler* ce qui est enfoui dans la mémoire dépend de l'intensité première des perceptions et des idées et de l'habileté avec laquelle vous saurez profiter des liaisons qui sont entre elles. Vous évoquerez un souvenir en vous replaçant en esprit dans l'ambiance primitive. Une idée reparaîtra dans la conscience en même temps que la série d'idées avec lesquelles elle est mécaniquement coordonnée : un seul détail précisé déclenchera la souvenance d'une longue suite de faits. La rapidité du rappel des souvenirs est une des facultés les plus précieuses : sans elle vous aurez toujours « l'esprit de l'escalier ». Attachez-vous donc à mettre en œuvre une judicieuse et subtile méthode d'association d'idées.

Vous vous attacherez à perfectionner une mémoire des formes, des proportions, des couleurs et en général de toutes les perceptions sensorielles : vous n'oublierez pas de développer l'acuité émotionnelle de vos souvenirs, de ressusciter autour d'une image les émotions qui ont accompagné la vue primitive de l'objet.

Les exercices utiles au développement de la mémoire sont si nombreux et si variés que nous devons omettre de les énumérer dans ce court exposé. Vous en imaginerez vous-même facilement; il en est d'amusants. *La mnémotechnie* est un des procédés de fixation les plus connus, il consiste à aider la mémoire en liant les mots entre eux de telle manière que leur suite puisse être déroulée sans la moindre difficulté. Pratiquez la mnémotechnie.

Disciplinez votre imagination. — Ne vous livrez pas à ses fantaisies, à ses inventions romanesques, ne vous bercez pas de ses illusions ; elle ne doit être que la servante de vos calculs. La concentration de la pensée à laquelle vous vous êtes entraîné vous permettra de la maîtriser, de faire un choix judicieux parmi l'abondance d'idées qu'elle vous offrira.

Il ne faut d'ailleurs pas l'étouffer, ni même l'affaiblir: c'est un ennemi bien dangereux , mais c'est un allié précieux. Donnez-lui des soins jaloux ; vous lui devez la plus grande part de votre originalité ; mais obligez-la à enfanter dans l'ordre. Dans un esprit mal équilibré, l'originalité est une source de déséquilibre. Combien d'artistes de talent, d'intelligences d'élite ne furent que des «ratés» pour avoir suivi leur fantaisie débridée, pour n'avoir pas su discipliner leurs moyens d'action. Dans le champ des activités humaines, il faut que vous choisissiez une voie bien déterminée, et que vous adaptiez résolument toutes vos facultés aux besoins de votre tâche ; votre imagination bien conduite vous découvrira un monde de possibilités insoupçonnées ; indisciplinée elle vous égarera à la recherche des chimères.

Jugement. — Le jugement vous aidera à épurer votre pensée, à évaluer vos sentiments à leur juste prix. Pour qu'il soit sain il faut, avons nous dit déjà, que votre corps soit en parfaite santé. Soumettez-vous aux règles de l'hygiène : un homme intoxiqué est incapable de juger sainement. La bonne santé assure la vigueur, le calme et la liberté de l'esprit.

Connaissez-vous vous-même, il vous sera plus facile de connaître les autres. Votre perspicacité dépendra de votre bon sens et de votre application à bien observer; méfiez-vous des impulsions de votre sensibilité.

Ayez de l'ordre dans vos spéculations, nous savons déjà que c'est la condition d'une judicieuse observation et d'une bonne mémoire; c'est aussi la condition de la clarté des idées. Descartes dit : « Divisez chacune des difficultés que vous examinez en autant de parcelles qu'il se peut et qu'il est requis pour les mieux résoudre. » Soyez précis ; au besoin écrivez vos pensées, les ayant mises sur le papier vous pourrez plus facilement les éclairer et les ranger dans l'ordre le meilleur.

Le discernement des caractères est de toutes les tâches du jugement la plus malaisée et cependant du choix judicieux des personnes qui nous entourent dépend notre bonheur, de l'estimation de celles que nous employons dépend notre succès. « Se tromper ou ne pas se tromper sur la valeur humaine, sur le prix comparatif des hommes et des choses, sur la place respective à donner à tout ce qui nous touche, et ce qui nous concerne, c'est la grande affaire. » (A. France). Jugez, ayez l'esprit en éveil sur les valeurs humaines ; vous arriverez à vous former cette intuition, cette pénétration instinctive ce tact psychologique qui est une des facultés maîtresse des conducteurs d'hommes. Vous ne pouvez « réussir » si vous n'avez pas à quelque degré cette précieuse habileté du jugement.

V

Conseils aux parents éducateurs

Vous qui êtes maintenant éduqués par l'effort de votre volonté, vous voudrez faire acquérir à vos enfants par vos soins de chaque jour les facultés mentales que vous avez jugé nécessaire de former en vous. Voici quelques conseils pour cette tâche que vous estimez certainement la plus grave de votre vie.

Formez les habitudes. — Commencez tôt à imposer certaines façons d'agir et de parler ; vous formerez par là même des façons déterminées de sentir et de penser. Efforcez-vous d'ailleurs de rendre les actions agréables, ne dispensez pas de l'effort, mais il faut que l'effort aboutisse : l'enfant ne vit que pour le moment présent : l'insuccès le décourage.

Sachez commander. — Rien qui soit au-dessus des forces de l'enfant, mais exigez une obéissance entière et immédiate, sans protestation ni réticences. Commandez en peu de mots, sur un ton sympathique et gai qui porte à l'action; si vous vous heurtez à un refus obstiné, n'ayez de cesse que vous n'ayez triomphé de ce mauvais vouloir, ne vous laissez désarmer ni par le rire, ni par les larmes.

Pour rendre l'obéissance facile, inspirez confiance à l'enfant en ne le trompant jamais ; gagnez son affection en l'aimant ; inspirez le respect en vous montrant à ses yeux supérieur en tout

Obtenez l'obéissance. — Sachez inspirer le respect. Vous ne vous ferez obéir ni par des flots de paroles, ni par des supplications, ni par des brutalités. Amenez l'enfant à vous obéir, en lui expliquant les raisons de vos ordres, et en faisant appel à ses bons sentiments. Vous devrez agir d'ailleurs selon les caractères. N'oubliez pas surtout qu'en face de l'enfant l'accord du père et de la mère doit toujours être absolu.

Usez modérément des récompenses et des privations. — Les récompenses doivent stimuler les bons sentiments et particulièrement le désir d'être agréable à autrui. Elles doivent être rares, simples et simplement données.

Ne soyez jamais nerveux avec des enfants. — Si vous êtes obligé de punir, ne faites pas de reproches devant des étrangers ; gardez-vous des injures, des humiliations trop blessantes, des menaces effrayantes ou grotesques, n'affectez pas le mépris, n'usez pas des coups, ni de la privation des aliments. Les moindres châtiments quand ils sont rares sont d'un très grand effet : l'expression du mécontentement, le blâme, quelque froideur, suffisent à gouverner des enfants qu'une mauvaise éducation n'a pas « gâtés ».

Soyez indulgents pour les fautes qui ne tiennent qu'à une étourderie accidentelle.

Ce qui a le plus d'effet en matière de châtiment, ce n'est pas le châtiment lui-même, c'est l'idée que l'enfant s'en fait.

Enfin agissez selon la sensibilité, selon le caractère propre de votre enfant. Prévoyez les effets de vos paroles et de vos actions et mesurez-les sur ces prévisions.

Cultivez la volonté du travail. — Vous ferez aimer le travail en le rendant agréable et en faisant éprouver le plaisir que donne une tâche bien accomplie. Sachez trouver le point sensible dans un naturel paresseux. Prenez garde que la paresse résulte souvent d'un mauvais état physique ou de l'erreur que vous commettez en obligeant votre enfant à faire une tâche pour laquelle il n'a pas les facultés requises. C'est vous qui êtes coupable et non pas lui si vous ne mesurez pas vos exigences à ses forces réelles. Encouragez-le, soutenez-le ; annoncez gaiement qu'un effort est nécessaire et faites constater avec complaisance le succès ; ménagez-lui des succès, paraissez convaincu de son mérite pour qu'il prenne lui-même une grande assurance: pratiquez l'auto-suggestion.

VI

Réussir ; mais réussir à quoi ?

Nous venons, en quelques pages, de vous esquisser une méthode d'action, mais n'y a-t-il rien à dire du but même de cette action?

1° Pour n'être pas un simple objet de contemplation, il faut que l'idéal de vie que nous voulons réaliser se traduise en tâches précises, qu'il marque des étapes déterminées afin que nous puissions savoir si nous progressons véritablement vers lui et que nous mesurions à chaque instant la distance qui nous en sépare. Il faut qu'il soit tel qu'un jour nous puissions l'atteindre. S'il ne se prête pas à ces déterminations pratiques il risque de nous nourrir sans cesse d'illusions et de préparer le désenchantement.

2° Mais pour être un idéal pratique il ne manquera pas d'élévation. Nous vous avons demandé d'être ambitieux, c'est-à-dire que l'idéal à réaliser ne doit pas être mesquin, il faut qu'il soit assez grand et assez noble pour vous animer d'un intérêt passionné. Il faut que l'intense désir qu'il éveillera en vous naisse des élans du cœur bien plus que des calculs de l'esprit. Rien qui soit digne d'estime ne peut être réalisé s'il n'y a pas, comme au cœur même de l'œuvre, une émotion animatrice.

« Toute vie qui n'a pour but que de ramasser de l'argent est une piètre vie » (Carnegie). Vous voulez arriver, oui. Non pas à être riche, cela ne signifie rien, mais à être heureux et utile. Pour être supérieur aux autres hommes il faut qu'un idéal supérieur vous exalte. Ne poursuivez pas de chimères, recherchez des résultats solides mais inspirez-vous d'intérêts élevés. Faites dès aujourd'hui le bilan clair et sincère de votre vie, décidez d'après votre passé ce que doit être votre avenir, mais décidez de vivre d'une manière généreuse; tout le monde y gagnera : les autres et vous-même.

LA PHILOSOPHIE

AVERTISSEMENT

Nous entendons aujourd'hui par philosophie l'ensemble des sciences qui étudient l'homme dans sa vie intérieure et dans ses rapports avec les autres hommes. La recherche philosophique est une des formes les plus hautes de l'activité humaine. C'est par leur philosophie que les Anciens demeurent illustres et dignes de notre admiration, leur pensée ayant atteint les sommets de la connaissance morale.

L'initiation philosophique est nécessaire à tout homme qui veut s'élever par la pensée et par la connaissance. L'effort qu'elle demande exige une certaine maturité, mais le développement qu'elle assure donne à l'esprit une ampleur qui n'est réservée qu'à l'élite.

La *psychologie* nous fait connaître un ensemble de faits, qui constituent ce qu'on appelle communément la « vie intérieure ». Le mécanisme de l'intelligence, les formes de la sensibilité et de la volonté sont analysés dans leurs manisfestations, leurs caractères, leurs déformations même. Ils sont étudiés suivant des procédés rigoureusement scientifiques, faits d'observations et d'expériences ; ainsi, par sa méthode, la phychologie a les caractères des sciences exactes et développe comme elle des qualités d'attention, de précision et de clarté. Reposant sur l'observation de soi et des autres elle donne, avec la connaissance de l'homme intellectuel et moral, de ses états et de ses possibilités, les moyens de se développer et de se perfectionner. Elle formule des lois aussi utiles à connaître que celles de la digestion, de la circulation et de l'hygiène. Observer les états de conscience, les conditions favorables à l'attention, les jeux de l'imagination, le mécanisme de la mémoire, la formation d'une idée, la construction d'un raisonnement ; analyser le développement des sentiments, leurs nuances infinies suivant les temps, les milieux et les individus, contrôler le rôle de la volonté et les lois de l'habitude n'est-ce pas se préparer à mieux connaître ses propres moyens et à les augmenter de façon rationnelle. Nous pouvons affirmer que la connaissance psychologique développe le jugement, la pénétration et l'esprit de finesse, qu'elle facilite les relations humaines, qu'elle donne à chacun plus de sûreté dans l'utilisation de ses propres facultés et assure son perfectionnement.

La logique, qui étudie tout spécialement les formes du raisonnement et leurs applications aux sciences corrige, par sa méthode rigoureuse, ce qu'un esprit pourrait avoir d'indécis et de flottant, et contribue à la formation d'une intelligence vraiment scientifique.

La morale enfin est une « *science du bien* » qui nous apprend à diriger notre vie. Dans ce chapitre, l'étude des principes moraux est précédée d'un examen des diverses philosophies depuis les plus anciennes. Cette histoire de la philosophie morale montre les tâtonnements et souvent même les contradictions de la pensée humaine à travers les âges. En constatant ces hésitations et ces incertitudes, le lecteur ne devra pas conclure à la négation de la morale... Au contraire. Il doit voir dans cet effort humain pour atteindre à la connaissance suprême, dépassant le domaine des sens et de l'expérience, un émouvant besoin d'idéal qui est déjà une vérité première. Il doit constater qu'à travers les oppositions de systèmes et d'écoles se font jour et demeurent quelques *vérités morales* invariables : la notion de la conscience, la notion du devoir et la notion de la justice.

Instruit par les recherches des grands philosophes il suivra mieux ensuite l'exposé des principes moraux qui doivent diriger la vie d'un homme de bien. Il comprendra que la conduite morale n'est pas affaire de hasard ou d'instinct mais le résultat d'une éducation, un ensemble d'habitudes raisonnées et l'exercice constant du jugement.

Ainsi compris, ce chapitre de la philosophie, que nous avons limité aux notions les plus indispensables, doit être considéré non seulement comme une initiation fondamentale, une préparation à la lecture des œuvres maîtresses, religieuses ou laïques, des temps anciens et modernes, mais aussi comme une préparation à la vie et au commerce des hommes.

LA PHILOSOPHIE

On désigne par le mot de philosophie, trois sortes d'études très différentes :

1° On appelle de ce nom une *Science universelle* qui embrasserait toutes les connaissances et s'efforcerait d'en rendre compte par des lois générales — une sorte de Science des sciences. C'est ainsi que les *Anciens* comprenaient la philosophie ; c'est ce cadre de la pensée scientifique qu'a voulu organiser *Auguste Comte* en établissant sa classification générale des sciences.

2° On appelle également Philosophie une *science spéciale*, dénommée parfois *Métaphysique*. Cette science retient des problèmes qui sont délibérément laissés de côté par les sciences positives, que ces sciences s'interdisent, à savoir : quelle est la *nature*, l'*origine* et la *fin* des choses. Nous laisserons complètement de côté, ici, ce genre d'études.

3° Enfin on appelle encore Philosophie un groupe de quatre sciences spéciales : la *Psychologie*, l'*Esthétique*, la *Logique*, la *Morale*. Ces sciences dites *morales* sont relatives à l'âme humaine. C'est d'elles que nous allons parler.

PSYCHOLOGIE

La psychologie est la *science des faits psychologiques* (pensées, sentiments, habitudes etc...) ; elle observe ces faits, les décrit, les classe et s'efforce de découvrir les lois qui les régissent.

I. Conscience et Subconscience. — Le caractère le plus frappant commun à tous les faits psychologiques, c'est qu'ils sont *conscients*, c'est-à-dire qu'*ils existent parce qu'ils sont perçus* ; une douleur qu'on n'éprouverait pas, une idée que nous n'aurions pas devraient être considérées pour nous comme inexistantes :

Toutefois il faut bien reconnaître pour le moins que les faits psychologiques ont une *vie subconsciente* : un souvenir dont nous n'avons pas actuellement conscience, un sentiment que nous n'éprouvons pas au moment présent bien qu'il soit essentiel à notre caractère, une de nos habitudes, qui n'a pas dans l'instant présent l'occasion de s'exercer existent bien sous une forme quelconque puisque d'un moment à l'autre ils peuvent paraître dans la conscience.

Il semble qu'il y ait comme un *seuil de la conscience*; au-dessous de ce seuil les faits psychologiques ont une sorte de vie latente ; quand ils le franchissent sous l'effet de l'activité psychologique, ils entrent dans la lumière de la conscience.

Celle-ci est donc, semble-t-il, comme le *champ lumineux* dans lequel passe momentanément une très petite fraction de la vie psychologique.

II. Les différentes sortes de faits psychologiques. — Les trois facultés. — Trois caractères irréductibles les uns aux autres permettent de classer les faits psychologiques en trois groupes distincts. 1° Les faits qui se rapportent à une *connaissance* (faits représentatifs ou intellectuels). 2° Ceux qui impliquent un *plaisir* ou une *douleur* (faits affectifs). 3° Ceux qui expriment un *effort*, une *tendance à l'action* (faits volitifs).

Chacun de ces groupes de faits s'appelle une *faculté*. On distingue ainsi trois facultés : *l'intelligence* (l'esprit), *la sensibilité* (le cœur), *la volonté* (le caractère). Mais il faut prendre garde que les faits des différents groupes sont constamment mêlés dans la vie psychologique et en action incessante les uns sur les autres ; ils ne se présentent jamais séparément.

A

L'Intelligence

ou ensemble des faits intellectuels

Les facultés de l'esprit sont relatives, avons nous dit, à la connaissance. Elles sont de trois sortes :

1° Celles qui ont pour objet l'*acquisition des connaissances*.

2° Celles qui en assurent la *conservation*.

3° Celles qui en provoquent la transformation ou, autrement dit, l'*élaboration*.

I. Acquisition des connaissances

LES SENS ET LA PERCEPTION EXTÉRIEURE

La connaissance a pour origine les données des sens ou *sensations* ; à ces données l'esprit mêle le souvenir de sensations anciennes, et construit de la sorte les objets du monde extérieur : cette activité de construction s'appelle la *perception extérieure*.

Tableau des sens et des sensations.

1° et 2° **Goût et odorat.** — Ces sens sont toujours intimement associés.

a) *Les saveurs* : le doux, le sucré, l'amer, le salé, l'acide. *Organe* du goût : les papilles de la langue.

b) *Les odeurs* fondamentales sont aromatiques, ambrosiaques, fragantes, alliacées, fétides, vireuses, nauséabondes (Linné). *Organe* : les muqueuses du nez.

3° **L'ouïe** : *source des sons* (vibrations périodiques), et des *bruits* (vibrations non périodiques).

Les sons se distinguent par la *hauteur*, l'*intensité*, le *timbre*. *Organe* : l'oreille.

4° **La vue** : source des *couleurs*. Les couleurs fondamentales sont le violet, l'indigo, le bleu, le vert, le jaune, l'orangé, le rouge. *Organe* : l'œil.

5° **Le toucher** qui est une collection de sens :

Sens dont le siège est dans la peau : sens du chaud, sens du froid, sens de la douleur (brulûre), sens du contact, du chatouillement, de la pression.

Sens cinesthésique : sensations venues des muscles, des tendons, des articulations.

6° **Sens statique** qui nous renseigne sur l'attitude verticale ou penchée de notre tête et sur les mouvements d'ensemble de notre corps. *Organe* : les canaux semicirculaires, l'utricule et le saccule de l'oreille interne.

7° **Sens cénesthésique** dont la sensation est la résultante des sensations de bien-être ou de malaise que nous envoient tous nos organes. Ce sens nous donne en quelque sorte le *ton vital* de notre organisme.

La Perception extérieure

1° *Elle construit les objets pour l'esprit* : c'est ainsi qu'elle rapproche et associe les sensations suivantes perçues naturellement par les sens (perceptions naturelles) : blanc, froid, poli, lourd et nous donne l'idée de boule de billard (perception acquise).

2° *Éducation des sens*. Nos sens s'exerçant en même temps, leurs données s'associent et le rappel d'une sensation ramène dans la conscience toutes les données qui s'y trouvent associées. La vue d'une boule qui ne devrait nous apporter que la sensation de tache colorée nous donne l'idée d'une sphère, qui est proprement un enseignement du toucher. Un sens se substitue ainsi à l'autre par l'éducation mutuelle que les sens accomplissent l'un par l'autre.

a) Les sens qui s'exercent à distance comme la vue, l'ouïe, l'odorat se substituent à ceux qui exigent le contact direct de notre corps (comme le toucher) et ainsi notre perception est rendue *plus étendue* et *plus rapide*.

b) Il arrive que cette substitution d'un sens à l'autre provoque des *erreurs de jugement* : Nous disons, par exemple, que le bâton plongé dans l'eau est brisé ; c'est par le toucher que nous devrions juger de l'état du bâton ; nous en jugeons hâtivement par la vue : il n'y a pas là une erreur de sens, mais une erreur de notre esprit dans l'interprétation d'une donnée d'un sens.

II. Conservation des connaissances

LA MÉMOIRE ET L'ASSOCIATION DES IDÉES

Les connaissances acquises sont conservées et rappelées en cas de besoin. Elles sont alors des *souvenirs*.

La faculté des souvenirs est la *mémoire* ; la loi selon laquelle les souvenirs se suggèrent les uns les autres s'appelle l'*association des idées*.

1° *Les degrés du souvenir*. — Un souvenir est dit : *latent* quand il est apte à reparaître mais non rappelé ; *incomplet* quand il est rappelé mais non reconnu comme souvenir (réminiscences) ;

complet mais *non précis* quand on ne sait pas à quelle époque ou à quel lieu le rattacher (non localisé) ;

complet et précis quand il est reconnu et localisé.

2° La mémoire peut être *facile* ou *difficile* quant à l'acquisition des souvenirs ; *tenace* ou *fugace* quant à leur conservation ; *prompte* ou *lente* quant à leur rappel.

3° *La conservation* des souvenirs dépend de différentes *conditions* ; les unes *physiologiques* : âge, état général de la santé ou de maladie, état présent de fatigue ou de vitalité, état de la circulation dans le cerveau.

Les autres *psychologiques* : la conservation des souvenirs dépend :

a) de la *répétition* ;

b) de l'*attention* provoquée elle-même par l'intérêt, l'intensité, la nouveauté de la connaissance, par les émotions fortes qui l'accompagnent.

4° *Le rappel des souvenirs* se fait grâce à l'association des idées, c'est-à-dire grâce aux associations qui lient les souvenirs les uns aux autres : un souvenir rappelé ramène avec lui ceux qui lui sont associés.

S'associent entre eux :

a) Les souvenirs qui ont été *contigus* dans le temps (Turenne et Condé), dans l'espace (Paris-Seine), dans le temps et dans l'espace (Robespierre, Danton, la salle de la Convention).

b) Les souvenirs *semblables* (deux personnes qui se ressemblent, une personne et son portrait).

5° *Pour fixer les souvenirs* nous disposons de deux moyens : porter une *attention* vive à ce que nous voulons retenir ou faire revenir souvent une image ou une idée devant notre esprit par la *répétition*. Pour faciliter le rappel des souvenirs nous pouvons user des *procédés* dits *mnémotechniques* qui consistent essentiellement à associer entre eux les mots représentant les notions à retenir : il suffit de se souvenir de l'un des mots pour que tous les autres reparaissent au même instant (Ex. : les phrases où l'on encadre les noms des préfectures et des sous-préfectures).

III. Élaboration des connaissances

L'ATTENTION

L'attention n'est pas une faculté spéciale de l'esprit : c'est un *mode* suivant lequel peuvent s'exercer toutes les facultés, principalement celles qui élaborent la connaissance.

L'attention concentre l'esprit sur *un seul objet* et elle découvre en lui une *richesse d'éléments* qui n'apparaîtrait pas sans elle. Elle est la condition indispensable de toutes les formes élevées de l'activité de la pensée ; l'esprit inattentif est stérile.

La forme attentive des facultés d'élaboration de la connaissance s'appelle la *réflexion*.

L'IMAGINATION

C'est la faculté relative aux *images*, c'est-à-dire aux sensations telles qu'elles reparaissent dans la mémoire en l'absence des objets auxquels elles se rapportent.

1° L'imagination peut se contenter de rappeler *simplement* les images ; elle est alors une simple forme de la mémoire (mémoire sensorielle) : on l'appelle *imagination reproductrice*. Les esprits se classent suivant leur faculté de rappeler particulièrement telle ou telle série de sensations (visuels, auditifs, moteurs, mixtes).

2° L'imagination proprement dite, involontairement (rêve, rêverie, somnambulisme) ou volontairement (travail de l'artiste ou du poète) forme des images nouvelles en combinant des images ou des éléments d'images anciennes. *C'est l'imagination créatrice*. Les inventions des poètes, les rêves des musiciens, les peintures, les plans de construction, les dessins et compositions, les objets fabriqués, les projets des hommes politiques, des militaires, des hommes d'affaires, des administrateurs, les hypothèses des savants, tout ce qui tient aux formes élevées de l'activité de l'esprit ne peut

se réaliser que par l'intervention préalable de l'imagination qui apporte les éléments et présente les premiers assemblages sur lesquels l'esprit applique ensuite la réflexion.

L'ABSTRACTION ET LA GÉNÉRALISATION

1° *L'abstraction* est la faculté qui permet de considérer à part une qualité d'un objet, la *généralisation* celle qui permet de reconnaître cette qualité dans une série d'objets, et d'en faire le type d'une classe (Ex. : on a remarqué dans un animal l'existence d'un squelette attaché à une colonne vertébrale (abstraction) ; ayant reconnu ce caractère chez une multitude d'animaux on en fait la caractéristique de tous ces animaux qu'on appelle alors des vertébrés (généralisation). L'abstraction et la généralisation aboutissent ainsi à la création d'*idées générales* (idée de vertébré).

2° Ces facultés sont véritablement au point de départ de la science qui généralise (lois, types) un caractère aperçu d'abord dans quelques objets ; aucune pensée même n'est possible sans elles.

3° Toutefois elles sont la source d'erreurs : quand on prend les abstractions pour des objets réels (Don Quichotte) et qu'on généralise outre mesure (Ex. : jugement général porté sur tous les membres d'une famille, d'un peuple à l'occasion de l'acte d'un individu).

LE JUGEMENT ET LE RAISONNEMENT

Le Jugement aperçoit et affirme un rapport *entre deux idées* (le *soleil* est *éclatant*) ; le raisonnement aperçoit et affirme un rapport *entre deux ou plusieurs jugements* (les arbres reverdissent car le printemps est arrivé.)

LES PRINCIPES DIRECTEURS DE LA CONNAISSANCE

La pensée dans son travail d'élaboration de la connaissance se soumet à un certain nombre de *notions* ou *principes premiers* qui sont en quelque sorte ses *connaissances fondamentales.*

1° Principes relatifs à la connaissance sensible (sensations) : notions d'*espace* et de *temps.*

2° Principes relatifs à la connaissance intellectuelle (idées générales, jugements, raisonnements).

Principes logiques (relatifs à la pensée).	*Principe de non contradiction : une chose ne peut pas à la fois* être *et* ne pas être.
	Principe d'*identité : ce qui est, est.*
Principes logiques (relatifs à la pensée).	Principe d'*exclusion du milieu* ou du tiers exclu : *une chose est ou n'est pas* (pas de milieu entre être et ne pas être).
Principes relatifs au réel (à ce qui existe. à l'*être*).	Principe de *raison suffisante : tout a une raison.*
	Principe de *cause : Tout ce qui commence d'arriver à une cause.*
	Principe de *loi : Les mêmes causes produisent les mêmes effets.*
	Principe de *fin : Ce qui existe est fait en vue d'une fin* ; c'est-à-dire d'un but. Ce principe est plus contestable que les précédents.

Certains philosophes pensent que ces principes résultent de notre expérience des choses, qu'ils sont en quelque sorte dans les choses elles-mêmes (Locke, Stuart Mill) : ce sont les philosophes de *l'empirisme*; d'autres que ce sont là les principes suivant lesquels est en quelque sorte construit notre esprit et que notre pensée les impose aux choses (Platon, Leibniz, Kant) : ce sont les philosophes du *rationalisme.*

LE LANGAGE

1° Le langage est le *moyen de communication de la pensée* entre les esprits. C'est aussi un *instrument* et même une *condition de la pensée* : il fixe les idées abstraites dans les mots ; sans les mots ces idées s'évanouiraient à chaque instant parce qu'elles n'existent pas dans la réalité ; c'est par le langage que la pensée se décompose elle-même en ses éléments et qu'elle peut les présenter côte à côte dans les phrases d'une façon distincte (analyse) ; c'est par l'ordre des mots, par les prépositions, par les conjonctions que la pensée indique distinctement les rapports qui existent entre ses éléments (synthèse).

2° Il y eut à l'origine un *langage naturel,* cris et gestes, auquel succéda le *langage artificiel : paroles* d'abord, *écriture* ensuite. L'écriture a été successivement :

1° Idéographique (dessinant les idées)	naturelle : dessin, puis dessin symbolique ;
	artificielle : dessin simplifié (hiéroglyphes).
2° Phonétique	syllabique puis alphabétique.

B

La Sensibilité ou ensemble des faits affectifs

1° Les faits de sensibilité sont caractérisés par le *plaisir* ou la *douleur.* Ceux-ci ne peuvent être définis : on ne peut que décrire leurs effets ou indiquer leurs causes. On peut dire en général que le plaisir résulte d'une activité conforme à notre nature, proportionné à nos forces et la douleur d'une activité contraire.

2° Le plaisir et la douleur ont deux sources :
a) Celles d'où naissent les *Émotions.*
b) Les *Inclinations.*

Les *émotions* sont des états de plaisir ou de douleur vifs, provoquant des impulsions. Les unes sont excitantes (colère), d'autres déprimantes (la peur). Les émotions sont liées à de *violents mouvements du corps.*

Les *inclinations* sont les *tendances profondes de notre nature* qui satisfaites ou contrariées provoquent le plaisir ou la peine. Ci-contre le tableau des principales inclinations :

Les Inclinations	personnelles	les *appétits* (besoins du corps)	*Nutrition* (besoin de manger, de boire, de respirer, etc.)
			Relation (besoin d'aller, de venir, etc.)
			Reproduction (besoin sexuel).
		les *inclinations proprement dites* (ou besoins de l'âme)	*Intelligence* (besoin de savoir).
			Sensibilité (besoin de bonheur).
			Volonté (besoin d'agir).
	sociales ou altruistes	*domestiques* (les sentiments de famille) ;	
		électives (amour, amitié) ;	
		philanthropiques (amour des hommes) ;	
		patriotiques, etc.	

Remarques :

1° On appelle *Sentiments* les états de sensibilité, vifs parfois mais non violents, qui tiennent aux inclinations de l'âme.

2° On appelle *Passions* les inclinations violentes et exclusives, tyranniques, souvent perverties et déviées de leur objet. Certaines ont un objet élevé (passion de la justice, de la vérité), mais ces dernières elles-mêmes comportent des excès. Le meilleur moyen de se guérir d'une passion basse est de laisser naître en soi une passion noble.

3° La contagion des émotions et des sentiments ou *Sympathie*. Comme les actes, les mouvements de sensibilité sont contagieux : la sympathie est, au sens propre du mot, cette sorte de *communion des cœurs*.

Elle a pour effet de renforcer les sentiments et les émotions : c'est ce qui explique que les mouvements de sensibilité des foules sont souvent violents.

C

La volonté ou ensemble des faits d'activité

On doit distinguer :

1° Des faits d'activité inconsciente : ceux de l'*instinct*.

2° Des faits d'activité consciente et intelligente : ceux de la *volonté proprement dite*.

3° Des faits d'activité d'abord conscients, puis passés dans l'inconscient : *les habitudes*.

L'INSTINCT

1° C'est une activité *machinale* et *aveugle* qui donne aux êtres vivants des *savoir-faire déterminés* (construire un nid, fabriquer du miel, tisser une toile, etc...) L'homme n'a que des rudiments d'instincts (savoir téter, remuer les mâchoires) ; l'instinct triomphe dans la vie animale, particulièrement chez les insectes.

2° L'activité instinctive diffère de l'activité intelligente en ce que le savoir-faire possédé pour une action déterminée ne peut servir à une autre action, même analogue : une mésange ne saura pas construire le nid de l'hirondelle.

3° Les différents instincts :

- **Instincts de conservation**
  - *de l'individu*
    - *instincts de chasse* (construction de pièges).
    - *instincts dans le choix des aliments.*
    - *instincts d'attaque et de défense* (l'habileté de l'amnophile qui paralyse sa proie, le mimétisme).
  - *de l'espèce*
    - *constitution de réserves* placentaires pour la progéniture (abeilles, fourmis).
    - *constitution de nids, d'abris* (castor).
- *Instincts de société*
  - *animaux parasites* ;
  - *troupes temporaires* d'oiseaux migrateurs ;
  - *sociétés permanentes* (d'abeilles, de fourmis).

LA VOLONTÉ

1° C'est l'activité *guidée par l'intelligence*, mise en mouvement par un désir et qui possède ce caractère très particulier de se croire *libre*.

2° La volonté est dans certains cas un *pouvoir d'impulsion*, dans d'autres cas un *pouvoir d'arrêt*. Par elle on agit et on s'abstient.

3° La volonté est la pièce maîtresse du *caractère*, c'est-à-dire de ce qui distingue essentiellement un homme d'un autre homme. Elle n'en est qu'un élément particulier avec les traits du tempérament, de la sensibilité, avec la tournure particulière de l'esprit, mais c'est elle qui détermine la hiérarchie de ces éléments, la prédominance de l'un d'eux sur tous les autres.

L'HABITUDE

1° C'est une modification de notre activité, commencée généralement avec pleine conscience par l'effort de l'attention avec les incertitudes que comporte l'action volontaire et qui s'achève en activité inconsciente, parfaitement sûre d'elle-même, toute semblable à un instinct.

2° L'habitude résulte de la *répétition* des actes.

3° Elle a pour conséquence :

a) D'affaiblir la conscience et en particulier les sensations et les sentiments ;

b) de rendre cependant plus impérieux le besoin de ces sensations et de ces sentiments ;

c) de libérer l'attention dans l'exécution d'actes devenus automatiques et rendre ainsi l'attention disponible pour d'autres objects.

4° L'habitude nous impose des *servitudes* souvent tyranniques mais elle nous enrichit d'*innombrables aptitudes*, celles que nous possédons naturellement étant très peu nombreuses. A côté de notre première nature elle nous forme ainsi une *seconde nature* incomparablement plus riche que la première.

ESTHÉTIQUE

1° La Psychologie est une science de faits, analogue par là aux sciences de la nature. Les sciences dont nous allons parler désormais : *esthetique, logique, morale,* étudient les règles d'une activité qui tend à réaliser un idéal : le *beau,* le *vrai,* le *bien.* On les appelle pour cela des *sciences normatives* ; elles s'accompagnent d'une science pratique ou *art.*

2° *L'Esthétique est la Science du Beau.* Elle en cherche les *caractères, les conditions, la nature.*

L'esthétique s'efforce de les dégager par la considération de ce qui fait la beauté des choses de la nature et des chefs d'œuvre de l'art. Elle arrive ainsi à dire que le beau c'est ce qui exprime vivement la *vie et l'âme,* ce qui se présente à la fois comme *un* et *multiple,* ce qui provoque un *plaisir désintéressé...* sans qu'aucune de ces formules exprime pleinement la nature de la Beauté.

3° *L'Art est la réalisation du beau dans les œuvres humaines.* Cette réalisation se poursuit soit dans le sens d'une production de la réalité naturelle fidèlement exprimée mais enrichie d'une âme *(tendance réaliste),* soit dans le sens d'une transformation de la réalité avec l'intention d'exprimer surtout les vues de l'esprit et les émotions de la sensibilité *(tendance idéaliste.)* Le point d'équilibre des deux tendances paraît être celui qu'exprime une formule célèbre : *le beau c'est la splendeur du vrai.*

LOGIQUE

1° *La Logique est l'étude des conditions (lois) de la pensée valable,* c'est-à-dire de la pensée dirigée de telle façon qu'elle aboutisse à des conclusions exactes.

2° *La logique formelle* est la partie de la logique qui fixe les lois de la pensée considérée en elle-même, sans tenir compte de l'objet auquel la pensée s'applique. *La logique appliquée* fixe les lois que doit suivre la pensée selon la nature des choses qu'elle étudie, c'est-à-dire selon la science à laquelle elle s'applique ; on l'appelle aussi *méthodologie.*

Logique formelle

La logique formelle étudie :

les *idées* énoncées par les *termes* ;
les *jugements* énoncés par les *propositions* ;
les *raisonnements.*

I. Les Idées

1° Elles représentent des choses (arbre) ou des qualités (éclatant) (voir Psychologie, Abstraction).

2° Elles sont dites *claires* ou *obscures* selon qu'on les distingue bien ou mal des idées voisines, *distinctes* ou *confuses* selon qu'on se rend compte exactement ou imparfaitement des éléments qu'elles rassemblent (l'idée de *soleil* est confuse pour un ignorant, distincte pour un astronome).

3° *La compréhension d'une idée* est l'ensemble des qualités qu'elle enferme (la compréhension de l'idée d'*arbre* est moins grande que celle de l'idée de *végétal*) ; *son extension* est le nombre d'êtres auxquels elle s'applique (l'idée d'*arbre* a moins d'extension que l'idée de *végétal*). La compréhension et l'extension d'une idée sont donc *en raison inverse l'une de l'autre.*

4° Pour *définir* une idée on indique le genre le plus proche de l'espèce qu'elle représente (table, chaise, bureau, armoire sont des espèces dont le genre le plus proche est meuble, les genres plus éloignés étant : objet fabriqué, objet). On complète la définition en ajoutant le caractère qui différencie l'idée à définir des autres espèces du genre prochain. On dira : une chaise est un *meuble* (genre prochain) *fait pour s'asseoir* (différence spécifique).

II. Les Jugements et les Propositions

1° *Le jugement* affirme quelque chose d'une chose : *le soleil est brillant.* Il s'exprime par une *proposition* dont les deux termes sont le *sujet* (soleil) et *l'attribut* (brillant) ; le mot qui affirme le rapport est le verbe ou *copule.*

2° *Les propositions* expriment des rapports d'*extension* et de *compréhension* entre des idées, parfois plutôt les uns, parfois plutôt les autres. Le tableau ci-dessous indique les jugements les plus communs.

Suivant *la quantité* (ou extension) les jugements et les propositions sont dits :		*universels : sujet* pris dans toute son extension : *tous les hommes sont mortels;*
		particuliers : sujet pris dans une partie seulement de son extension : *certains hommes sont lâches;*
		singuliers : sujet individuel : *Socrate* est mortel.
Suivant *la qualité* les jugements et les propositions sont dits :		*affirmatifs : attribut* affirmé du sujet : *tous* les hommes sont mortels ;
		négatifs : attribut nié du sujet : *nul homme n'est immortel.*
Suivant qu'on considère à la fois la *quantité et la qualité* les jugements et les propositions sont dits :	*universels*	*affirmatifs :* tout homme est mortel ;
		négatifs : nul homme n'est immortel.
	particuliers	*affirmatifs.* quelques hommes sont vertueux ;
		négatifs : certains hommes ne sont pas vertueux.

III. Les Raisonnements

Le raisonnement tire d'une proposition donnée une autre proposition. Si la proposition donnée est générale et qu'on en tire une proposition particulière, le raisonnement est dit *déductif* (déduction). Dans le cas inverse il est dit *inductif* (induction).

Nous parlerons du raisonnement inductif dans la logique appliquée.

La Déduction. — 1° La forme la plus simple et la plus rigoureuse du raisonnement déductif est le

syllogisme. Le tableau ci-dessous indique les dénominations relatives aux parties d'un syllogisme :

Prémisses	Majeure : Tout *homme* (moyen terme) est *mortel* (grand terme extrême).
	Mineure : Or *Pierre* (petit terme extrême) est un homme (moyen terme).
Conclusion :	Donc Pierre (petit terme extrême) est mortel (grand terme extrême).

Petit, grand ou moyen termes sont ainsi désignés à cause de leur *extension* relative.

2° La *figure* d'un syllogisme est la forme qu'il prend suivant la place du moyen terme dans les prémisses. *Le moyen terme peut être :*

a) Sujet de la majeure et attribut de la mineure (tout *homme* est mortel, or Pierre est un *homme* donc...

b) attribut de la majeure et de la mineure : Nul homme de bien ne *manque à sa parole*, or Pierre *manque à sa parole*, donc...

c) sujet de la majeure et de la mineure : Notre *âme* est immortelle. Or notre *âme* est imparfaite, donc il y a des êtres imparfaits qui sont immortels.

d) attribut de la majeure et sujet de la mineure. Cette figure n'est pas concluante.

En combinant dans les trois sortes de figures correctes les quatres sortes de propositions qu'on distingue en considérant la qualité et la quantité (v. tableau des propositions) on obtient 64 *modes* différents de syllogismes ; mais 19 de ces modes seulement sont concluants. Les scolastiques du Moyen Age ont trouvé les règles d'après lesquelles on doit juger de la valeur des syllogismes.

3° *Syllogismes et raisonnements déductifs particuliers.* — *Le sorite* qui est une suite de syllogismes (polysyllogisme) dont les conclusions intermédiaires sont sous-entendues. Tel est le sorite classique : ce qui fait du bruit remue, ce qui remue n'est pas gelé, ce qui n'est pas gelé est liquide, ce qui est liquide ne peut me porter, donc cette glace qui fait du bruit ne peut me porter.

Le dilemme qui enferme un contradicteur dans deux hypothèses seules possibles et aboutissant toutes deux à la même conclusion. Tel est le célèbre dilemne où Mathan, dans Athalie, prouve la nécessité de tuer le jeune Joas :

A d'illustres parents s'il doit son origine,
La splendeur de son sang doit hâter sa ruine ;
Dans le vulgaire obscur si le sort l'a placé,
Qu'importe qu'au hasard un sang vil soit versé.

L'argument à fortiori qui au lieu de démontrer directement une proposition en prouve une autre et prouve par là à plus forte raison la vérité de la première.

L'argument ad hominem qui fait état de circonstances spéciales à celui à qui on l'oppose ; et qui a par suite à l'égard de cette personne une valeur plus grande qu'à l'égard de toute autre personne.

L'argument par l'absurde qui pousse l'adversaire à des conséquences inadmissibles.

4° *Les erreurs ou sophismes de la déduction.* — *La pétition de principes* qui suppose justement dans les prémisses ce qui est en question.

Le cercle vicieux qui s'appuie pour démontrer une proposition sur une autre proposition qui n'est elle-même qu'une conséquence de la première.

L'ignorance de la question qui oublie la vraie question posée et prouve *à côté* de ce qui est demandé.

L'ambiguïté des termes qui se rencontre quand on prend au cours d'un syllogisme un même mot dans deux sens différents.

Logique appliquée ou Méthodologie des Sciences

A. — PRÉLIMINAIRES

I. La connaissance vulgaire et la connaissance scientifique

1° **Caractères comparés.** — L'étonnement, a dit Aristote, est le commencement de la science. Mais alors que la connaissance vulgaire se contente de savoir *le fait*, la connaissance scientifique veut connaître le pourquoi du fait, c'est-à-dire *sa cause*. Alors que la connaissance vulgaire est toute *spontanée*, la connaissance scientifique est *réfléchie*, elle nécessite un travail et des efforts méthodiques. En outre la connaissance scientifique n'avance rien qui ne soit susceptible de vérification expérimentale et de *preuve*.

2° **Les trois étapes de la connaissance.** — Selon Auguste Comte : « Chaque branche de nos connaissances a passé successivement par trois états différents. » Les deux premiers appartiennent à la connaissance vulgaire. Dans l'*état théologique ou mythologique*, l'esprit humain dirigeant essentiellement ses recherches vers la nature intime des êtres, vers les causes premières et finales des phénomènes, se représente ceux-ci comme le résultat de l'action directe et continue d'agents surnaturels plus ou moins nombreux, les dieux, dont l'intervention arbitraire explique toute les anomalies apparentes de l'univers. Dans l'*état métaphysique ou verbal* qui n'est au fond qu'une forme nouvelle de l'état précédent, les agents surnaturels sont remplacés par les forces abstraites, inhérentes aux êtres comme les vertus dormitives de l'opium et l'horreur que la nature aurait pour le vide selon les croyances des savants du Moyen Age. Enfin, dans l'*état positif*, l'esprit humain reconnaissant l'impossibilité d'atteindre les notions absolues, renonce à chercher l'origine et la destination de l'univers et à connaître les causes intimes des phénomènes, pour s'attacher uniquement à découvrir leurs *lois*, c'est-à-dire leurs relations invariables de succession et de similitude, par l'usage bien combiné du *raisonnement* et de l'*observation*.

3° **Les trois méthodes successives de la pensée.** — A ces trois moments du développement de la connaissance correspond l'usage de trois méthodes différentes : *une méthode d'autorité* dans la période religieuse ; *une méthode de raisonnement pur* exclusive de toute l'expérience dans la pensée métaphysique ; *une méthode de libre examen* et de *raisonnement*, subordonnées rigoureusement à l'*expérience* dans l'âge positiviste qui est le nôtre.

II. La science

La science, avons-nous dit, d'après Aristote, veut connaître la raison, le pourquoi du fait. C'est pour ce motif qu'aucune de nos sensations n'est science, bien que nous ne puissions connnaître les choses que par les sensations, car celles-ci ne disent jamais le pourquoi de rien. Les sens ne nous disent pas pourquoi la glace est froide, mais seulement qu'elle est froide. Bacon exprimait la même idée quand il disait que le savant est l'interprète de la nature.

Comment définir la science ? On peut la définir par son objet et par sa méthode.

1° **L'objet de la science.** — La science donne les raisons des choses en établissant des lois naturelles. Lachelier définissait les lois naturelles ; *la réduction du particulier à l'universel, du composé au simple, du contingent au nécessaire.*

a) *Réduire le particulier à l'universel*, c'est trouver une formule, une loi qui s'applique à tous les cas semblables après avoir fait de multiples expériences. Liard dans sa Science positive et métaphysique explique ainsi cette réduction du particulier à l'universel : « J'abandonne une pierre que je tenais entre les doigts : elle tombe ; j'abandonne de même un morceau de métal, un morceau de bois : ils tombent. Dans l'air, une balle de plomb et une balle de liège tombent avec des vitesses inégales ; dans le vide elles tombent avec une même vitesse. Considérons les faits : rien n'était plus divers. J'ai fait l'expérience avec des corps solides, une pierre, un morceau de fer, de plomb, de bois, avec des corps liquides ; j'ai constaté que les gaz étaient eux-mêmes soumis à l'action de la pesanteur ; j'ai fait l'expérience en différents lieux près du pôle, loin du pôle, à deux points diamétralement opposés du globe terrestre ; dans tous les cas, si divers qu'ils soient et qu'ils puissent être, j'ai trouvé un élément commun, la chute vers le centre de la terre. Quand je cesse de considérer les faits pour passer à la loi qui les régit, je néglige toutes les circonstances, toutes les variétés individuelles et particulières pour ne retenir que la propriété commune.... voilà les faits. Voici la loi : tous les corps tombent vers le centre de la terre et dans le vide avec la même vitesse.

b) De cette réduction du particulier à l'universel résulte *la réduction du composé au simple*. Quoi de plus simple que la loi trouvée en observant la chute des corps sous des formes multiples. Les exemples cités plus haut sont très disparates et très complexes, la loi qui les exprime est simple.

c) Enfin la loi scientifique *réduit le contingent au nécessaire* : « Cette pierre que j'abandonnais à elle-même tombait suivant la normale », écrit M. Liard, « la vitesse de sa chute s'accroissait proportionnellement au temps : c'étaient les faits. Mais rien ne me garantissait qu'elle ne pouvait pas rester suspendue en l'air, ou décrire en tombant telle ou telle courbe, ou tomber d'un mouvement uniforme ou uniformément retardé. Maintenant que j'en possède la loi, le fait et ses diverses circonstances essentielles me semblent nécessaires : mon esprit se refuse à concevoir que le contraire de ce qui a lieu se produise. La production d'un fait dont la loi est connue est nécessaire par rapport à cette loi. »

2° **La méthode de la science.** — La méthode consiste en la recherche des causes par le moyen de *l'analyse* et de la *synthèse*.

a) *La recherche des causes.* — Connaître les faits, c'est-à-dire les effets, ne constitue qu'une demi-science, un pur empirisme ; la véritable science, disait Bacon, est celle qui découvre les *causes* : « Vere scire per causas scire ».

Il convient de remarquer que le mot cause n'a pas ici le sens métaphysique d'essence des choses, ni le sens vulgaire de force créatrice. La cause et l'effet sont deux phénomènes dont les variations sont rigoureusement concordantes ; la loi naturelle énonce le rapport nécessaire de succession qui les unit : le transport d'un grain de sable par le vent s'explique par les lois mécaniques du choc et du mouvement.

b) *Analyse et synthèse.* — La recherche des lois, avons-nous dit, étant une réduction du composé au simple, il en résulte que les progrès de la science consistent à découvrir des lois de plus en plus simples, c'est-à-dire à déterminer la *hiérarchie des causes* subordonnées les unes aux autres, les plus générales étant les plus simples. Les diverses lois de la pesanteur, par exemple, ont été ramenées par Newton à la loi de l'attraction universelle. Pour remonter ainsi du composé au simple la science opère l'*analyse des faits* naturels. Comme cette analyse va des effets aux causes et du particulier au général, elle est *inductive*. C'est l'expérience qui permet d'opérer, les mathématiques exceptées, cette analyse *inductive*. Quand on a remonté du composé au simple, on peut opérer une marche inverse et redescendre du simple au composé, à l'aide de la déduction qui va du simple au composé, et du général au particulier, on suit alors la voie de la synthèse.

La synthèse vérifie l'analyse, ordonne nos connaissances d'une façon systématique, démontre logiquement que l'on retrouve le composé en partant du simple. C'est pour cela qu'on l'appelle la synthèse déductive ou démonstrative. L'analyse et la synthèse sont donc les deux procédés inverses de la méthode scientifique.

3° **Les caractères de la science moderne.** — La science moderne a les caractères distinctifs suivants :

1° L'expérience, très rare chez les anciens, y joue un rôle décisif ;

2° La mesure, les mathématiques y sont d'un usage courant et visent à constituer une sorte de mathématique universelle ;

3° le raisonnement n'y est plus un discours logique, il tend toujours à prendre la forme d'un raisonnement mathématique ;

4° la science n'est plus l'opinion subjective d'un individu, c'est une connaissance tout objective ;

5° elle est dirigée selon un parfait esprit de libre examen.

4° **Quelle est la valeur de la science ?** — *a*) A coup sûr, rien n'est plus utile, plus fécond en applications bienfaisantes que la science. En nous révélant les lois naturelles elle satisfait l'esprit, en nous révélant les causes des phénomènes, elle nous permet de pourvoir aux nécessités de l'existence, et de faire de ces causes une fois connues, les instruments de notre action, les agents de notre industrie. Elle nous permet de dominer la nature par le moyen des arts techniques qu'elle fonde.

b) Elle a une valeur éducative de première ordre, car elle habitue notre esprit à l'usage des méthodes de pensée rigoureuse et nous donne comme un respect religieux de la vérité.

c) Renan écrit dans l'*Avenir de la Science* : « La science et la science seule peut rendre à l'humanité ce sans quoi elle ne peut vivre : un symbole et une loi. Ce n'est pas une exagération de dire que la science renferme l'avenir de l'humanité, qu'elle seule peut lui dire le mot de sa destinée et lui enseigner la manière d'attendre sa fin. » Pour d'autres philosophes la science n'a qu'une valeur pratique, utilitaire, elle ne peut pas nous faire connaître le réel. Certes nous ne pouvons pas affirmer que nous connaissons les lois naturelles avec une objectivité absolue ; tout travail scientifique repose sur des hypothèses et des postulats. Il en résulte que toute loi scientifique est relative à deux points de vue : 1° Parce qu'elle ne porte que sur les relations des choses ; 2° parce que ces relations ne sont conçues que par leur relation avec notre esprit ; mais il n'en est pas moins vrai que la science s'efforce d'être de plus en plus près de la vérité objective, en diminuant la part de la relativité et de subjectivité qu'apporte l'effort de l'esprit.

III. Classification et Hiérarchie des sciences

Nécessité d'une classification. — Les premiers philosophes furent tout ensemble mathématiciens, physiciens, astronomes, médecins. Le développement que prit par la suite la science contraignit les savants à spécialiser leurs études. Cette division du travail a produit les fruits les plus brillants, mais elle est un danger pour la science même parce qu'elle isole des études qui peuvent s'éclairer les unes les autres. On a été ainsi amené à rapprocher les sciences dans une classification commune. « Une classification des sciences, dit d'Alembert, est comme une mappemonde de l'univers scientifique ; et l'on peut imaginer autant de classifications différentes de la connaissance humaine que de mappemondes de différentes projections. Chacun de ces systèmes pourra même avoir à l'exclusion des autres quelque avantage particulier ».

1° Classification d'ARISTOTE :

Selon qu'on se propose de	*connaître*	sciences *théoriques*	métaphysique, physique ; mathématiques.
	créer	sciences *poétiques*	rhétorique, poétique, dialectique
	utiliser	sciences *pratiques*	morale, économie politique.

2° Classification de BACON (XVIe s.) et d'ALEMBERT (XVIIIe s.).

Selon les *facultés intellectuelles* mises en jeu	MÉMOIRE *Histoire*	naturelle civile, politique, religieuse.
	IMAGINATION *Beaux arts*	Poésie, musique peinture, sculpture.
	RAISON *Philosophie*	*La nature* : mathématiques, physique, biologie *L'homme* : psychologie, logique, morale *Dieu* : métaphysique, théologie.

Ces deux classifications sont artificielles parce que :

1° Toute science est théorique ;

2° « L'étude de chaque science met toutes les facultés de l'esprit en exercice et contribue à les développer et à les perfectionner toutes. Nous les exercons même toutes à la fois dans chacune des opérations intellectuelles. » (Condorcet).

3° Classification d'AMPÈRE :

Selon les objets de la science	Sciences *cosmologiques* (le monde matériel)	a) *Cosmologiques proprement dites*	I. mathématiques II. physiques
		b) *Physiologiques*	III. naturelles IV. médicales
	Sciences *noologiques* (le monde de l'esprit)	c) *Noologiques proprement dites*	V. philosophiques VI. dialegmatiques (les signes d'expression de la pensée et du sentiment).
		d) *Sociales*	VII. ethnologiques VIII. politiques

Chacun des huit embranchements distingués ci-dessus se divise en deux sous-embranchements formant quatre *sciences* dites *de premier ordre* : chacune de celles-ci donne naissance à *deux sciences de deuxième ordre* qui se subdivisent chacune à leur tour en *deux sciences de troisième ordre*. Ampère obtient ainsi 128 sciences de troisième ordre qui existent ou qu'il convient de créer. A titre d'exemple nous donnons ci-dessous les divisions d'une des sciences de première ordre de l'embranchement des sciences philosophiques : la psychologie.

Psychologie (science de 1er ordre)	Psychologie *descriptive*	Sciences de 2e ordre	Psychographie (description des phénomènes de l'esprit). Logique (étude des formes abstraites de la pensée)
	Psychologie *explicative*		Idéogénie (cause et genèse de nos idées) Méthodologie (lois de la pensée appliquée aux sciences).

Sciences de 3e ordre

Critique : 1° Les sciences du troisième ordre ne sont pas déterminées d'après l'objet de la science mais d'après la nature du travail de notre pensée (description ou explication).

2° Ampère fait entrer les arts, c'est-à-dire les applications de la science, dans le cadre des sciences.

4° Classification d'AUGUSTE COMTE :

Sciences classées d'après leur *objet* mais dans un ordre de dépendance selon la *simplicité* et la *généralité* de cet objet	*La Mathématique*	*abstraite* : science du calcul *concrète* : géométrie, mécanique	
	La Physique ou science de la nature	*Physique inorganique* (science des corps bruts)	Physique céleste (positions et mouvements dans l'espace) : géométrie céleste (astronomie proprement dite). mécanique céleste. Physique terrestre : physique, chimie
		Physique des corps organisés	biologie (science de la vie individuelle). sociologie (science des groupes sociaux).

1° *Le mérite* particulier de la classification d'Auguste Comte c'est qu'elle établit une *hiérarchie* entre les sciences, non certes un ordre de dignité, mais un *ordre de dépendance réciproque*.

Elle range en effet les sciences en une seule série ou la *complexité* de leur objet est *croissante* et la *généralité décroissante*, les mathématiques ont l'objet le plus simple et le plus général, la sociologie l'objet le plus complexe et le plus particulier.

Il en résulte que « chaque science dépend des vérités de toutes les sciences qui la précèdent dans la classification additionnées des vérités particulières qui lui appartiennent en propre.

Ainsi les vérités des nombres sont vraies de toutes choses et ne dépendent que de leurs propres lois ; c'est pourquoi la science du nombre qui se compose de l'arithmétique et de l'algèbre peut s'étudier sans avoir égard à aucune autre science. Les vérités de la géométrie présupposent les lois du nombre ainsi qu'une classe spéciale de lois particulières aux corps étendus, mais n'en exigent pas d'autres : la géométrie peut donc s'étudier indépendamment de toutes les sciences sauf celle du nombre. La mécanique rationnelle présuppose, tout en étant sous leur dépendance, les lois du nombre et de l'étendue, et, avec elles, un groupe de lois, celles de l'équilibre et du mouvement. Les vérités de l'algèbre et de la géométrie ne dépendent nullement de ces dernières, et eussent été vraies, fût-il arrivé à celles-ci d'être le contraire de ce que nous les trouvons : mais on ne saurait comprendre et exposer les phénomènes de l'équilibre et du mouvement sans supposer les lois du nombre et de l'étendue telles qu'elles existent dans la réalité. Les phénomènes de l'astronomie... » (Stuart Mill. Auguste Comte et le Positivisme page 37).

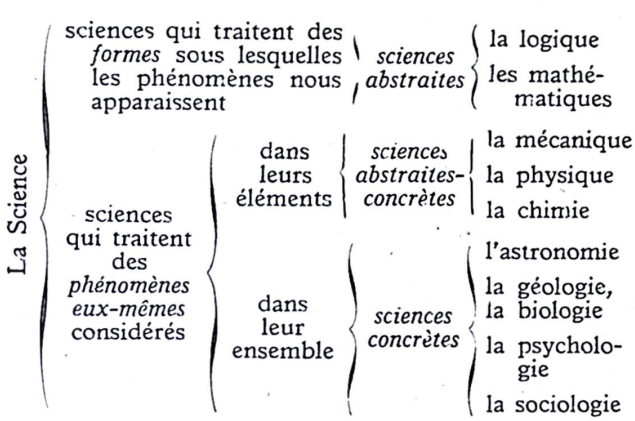
2° La classification d'Auguste Comte laisse de côté certaines sciences (logique, psychologie, économie politique, etc...) ; mais c'est qu'elles ne sont pas des *sciences fondamentales*, soit qu'elles se rattachent à l'une de ces dernières, soit qu'elles se démembrent, comme la psychologie, entre plusieurs sciences fondamentales. Auguste Comte estime que sa classification embrasse toutes les sciences, qu'elle est un tableau de toute science possible et que, par les idées qui l'organisent, elle a la valeur d'une philosophie.

3° *Il reste vrai* que le principe de sa hiérarchie est une vue exacte, une vue féconde sur l'ensemble du savoir humain ; que l'ordre de la classification est celui dans lequel s'est fait chronologiquement le développement *scientifique*, sinon le développement

empirique des sciences ; 3° que cet ordre est le meilleur pour l'étude ou l'enseignement des différentes sciences.

5° Classification de SPENCER :

Elle corrige celle de Comte en mettant la Logique en tête de la série des sciences comme étant la plus abstraite et la plus générale et la condition de toutes les autres et en restituant à la psychologie son rôle de science fondamentale.



B. — LES MÉTHODES

Méthode des sciences mathématiques

Définition — Axiome et postulat Démonstration

I. Caractères généraux. — Les *sciences mathématiques* sont les sciences exactes par excellence, elles s'occupent des *quantités*, des mesures, des nombres ; elles se servent de *raisonnements très rigoureux* et échappent ainsi aux chances d'erreur résultant de l'emploi des sens et de l'observation ; elles ont un *langage spécial* dont les termes, étrangers au langage ordinaire, ne prêtent à aucune équivoque, enfin elles font usage de signes et de symboles d'une clarté parfaite. Comme la méthode qu'elles emploient est la *démonstration* qui est une forme du raisonnement déductif, les logiciens considèrent les mathématiques comme se servant uniquement du *raisonnement déductif*, comme ne procédant que du général au particulier.

Les mathématiciens font observer qu'ils n'emploient pas uniquement la déduction mathématique, qu'ils procèdent souvent par *généralisation*, par exemple quand ils concluent de la somme des angles d'un triangle qui est un polygone particulier, le théorème général de la somme des angles de tout polygone.

II. Les éléments de la démonstration. — La déduction mathématique s'opère à l'aide de trois sortes d'éléments : les *définitions* — *les axiomes* — *les postulats*.

1° Les *définitions* sont le point de départ et comme les principes des démonstrations. Leur place en mathématiques est à l'origine de la science. Elles expriment l'opération intellectuelle par laquelle nous constituons une grandeur (circonférence, diagonale, bissectrice, fraction, racine carrée, plus grand commun diviseur). D'une définition on tire une première proposition, de celle-ci une seconde et ainsi de suite. Les définitions mathématiques ont pour caractères essentiels d'être *a priori, immuables et définitives*, différentes par là des définitions empiriques qui sont toujours révisables parce qu'elles n'expriment que les conclusions actuelles de la science.

2° Les *axiomes* sont des *principes évidents* par eux-mêmes, en vertu desquels nous démontrons la vérité des propositions (le tout est plus grand que la partie ; deux figures exactement superposables sont égales entre elles ; si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, si on en retranche des quantités égales, si on les multiplie, si on les divise par des quantités égales, les résultats sont toujours égaux). Bien que l'axiome soit nécessaire à la démonstration, *on ne l'énonce jamais explicitement*.

3° Les *postulats* sont des propositions qui ne sont pas évidentes par elles-mêmes, que l'on ne peut démontrer, que l'on admet pourtant comme vraies et desquelles on tire un grand nombre de conséquences. Tel le postulat d'Euclide : *par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.*

III. La démonstration. — 1° *Sa nature.* — La démonstration mathématique est un cas particulier de la déduction. C'est une suite de jugements ou propositions mathématiques dans lesquelles la copule égal est substituée à la copule est pour unir le sujet à l'attribut. C'est pour cela qu'un grand nombre de propositions mathématiques s'appellent équations. La démonstration consiste à passer de l'hypothèse à la conclusion par une série de substitutions qui sont des identités successives : $a=b$, $b=c$, donc $a=c$.

2° *Ses méthodes.* — Il y a trois méthodes de démonstration mathématique :

a) *La méthode ascendante ou analytique*, encore appelée plus simplement analyse, qui consiste à partir de la proposition que l'on veut démontrer, à chercher de quelle proposition elle est la conséquence logique, puis à remonter de celle-là à celle qui en est le principe et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne à une proposition déjà reconnue vraie. C'est une méthode de recherche.

b) *La méthode descendante ou synthétique*, encore appelée plus simplement synthèse, qui consiste au contraire à partir d'une proposition déjà démontrée et à descendre ensuite de principes en conséquences jusqu'à ce que l'on parvienne à la proposition qu'on veut établir. C'est une méthode d'exposition.

c) *La méthode indirecte ou par réduction à l'absurde* qui consiste à montrer d'abord que sur la question on peut faire un nombre limité d'hypothèses, puis raisonnant successivement sur toutes ces hypothèses, sauf une, on prouve qu'elles aboutissent à des conclusions absurdes ou impossibles : la dernière hypothèse est donc certainement vraie.

3° *Problèmes et théorèmes.* — On distingue en mathématiques les problèmes et les théorèmes : résoudre un problème, c'est trouver une grandeur inconnue au moyen de grandeurs données ou encore découvrir les propriétés que possède un nombre ou une figure. Démontrer un théorème, c'est prouver que telle grandeur possède telle propriété. Tous les théorèmes sont donc d'anciens problèmes résolus par des esprits supérieurs.

4° *Origine des notions mathématiques.* — Les mathématiques ont pour objet la recherche des rapports entre les *grandeurs*. Celles-ci sont les nombres, les figures, les mouvements ; ce ne sont pas des phénomènes à la manière de ceux qu'étudient les sciences de la nature : ce sont des notions construites par l'esprit (nombre 12, cercle, sphère etc.) ; des *notions*. On s'est demandé qu'elle était l'origine de ces notions. Voici comment les discussions ouvertes à ce sujet ont été résumées d'après les travaux de M. Henri Poincaré, par M. Abel Rey dans son «Précis de philosophie scientifique et morale» (Paris, Cornely p. 21 et 19) : « Deux théories sont en présence : dans la *première théorie* la mathématique est une promotion de la logique formelle, *la raison tire d'elle-même* toute la science mathématique par *intuition intellectuelle* (en ne retenant que la forme des relations qu'elle est susceptible d'établir entre les choses, et en éliminant leur contenu, c'est-à-dire les objets sur lesquels elles portent). Elle procède à la manière de la logique formelle. *L'autre théorie* prétend que si la mathématique était la continuation de la logique formelle, elle ne nous apprendrait jamais rien, parce que la logique formelle étant indépendante de toute réalité, ne saurait jamais rien nous apprendre ; on ne peut raisonner à vide ; il faut donc qu'à côté du raisonnement *l'intuition de certaines réalités sensibles* vienne féconder les

mathématiques. Les philosophes distinguent deux sortes d'intuitions : l'intuition intellectuelle et l'intuition sensible ou empirique. Ainsi on a cherché l'origine de notions mathématiques soit dans des intuitions intellectuelles, soit dans des intuitions sensibles.

a) *L'intuition intellectuelle, origine des notions mathématiques.* — Descartes a prétendu que l'esprit pouvait *connaître, indépendamment de toute expérience*, certaines réalités ; les notions mathématiques seraient de cet ordre. Kant a particulièrement mis en évidence que l'esprit ne pouvait rien connaître par lui-même, s'il n'était pas mis en rapport avec les objets de l'expérience. Seulement, il possède en lui la *faculté d'établir des rapports* entre ces objets, ces rapports *ne dépendant que de sa constitution propre*. De tels rapports comprennent entre autres les rapports de quantité et de situation dans l'espace, lesquels fournissent précisément les jugements synthétiques a priori, qui sont l'origine des notions mathématiques. H. Poincaré et la plupart des mathématiciens modernes trouvent que les mathématiques comportent plus d'arbitraire que ne laisserait supposer la théorie de Kant. Aussi disent-ils que *l'esprit est capable par sa seule activité de créer des rapports et des combinaisons* qui sans sortir de l'expérience peuvent cependant servir à analyser l'expérience : ce qui expliquerait que les combinaisons les plus utiles en ce sens soient celles que l'esprit a inventées, précisées et développées avec le plus de complaisance.

b) *L'intuition empirique, origine des notions mathématiques.* — Les empiriques (Stuart Mill), soutiennent par contre que l'intuition, d'où sortent les notions mathématiques, est l'intuition sensible ou empirique, *l'expérience*, qui est la source de toutes nos autres sciences. L'histoire des mathématiques nous montre en effet que les mathématiques sont sorties des nécessités du commerce, de l'échange et de l'arpentage. Elles ont traversé une longue période de tâtonnements, d'hésitations, d'expériences particulières, d'approximations absolument analogues à ce qui se voit aujourd'hui dans nos sciences expérimentales. *L'Histoire* permettrait donc d'affirmer que les notions mathématiques ont une origine empirique. Aujourd'hui même, est-il bien sûr que l'expérience ne joue pas un rôle en mathématiques. Certes, cette expérience n'a pas la même forme que dans les sciences physiques, c'est le plus souvent une expérience mentale, mais quand on résout un problème, quand on opère des constructions géométriques, quand on calcule, ne fait-on pas de véritables expériences?

Dans les parties nouvelles des mathémaitques ne dégage-t-on pas le théorème général d'un grand nombre de solutions particulières? Ainsi les fonctions qui traduisent les lois découvertes par les sciences expérimentales ne sont-elles pas des rapports complexes nouveaux dont le physicien, guidé par l'expérience, demande au mathématicien l'analyse?... la déduction mathématique est aujourd'hui considérée en général comme fondée non seulement sur les principes de la logique formelle, mais encore sur certaines intuitions spéciales, rationnelles, disent les uns, empiriques, disent les autres. Il est bien difficile de trancher d'une façon définitive le débat qui vient d'être esquissé.

Méthode des Sciences de la Nature

OBSERVATION — HYPOTHÈSE — EXPÉRIMENTATION

INDUCTION — DÉDUCTION — CLASSIFICATION

1° **Les étapes de la méthode.** — Quand le savant étudie un phénomène de la nature il part de certaines *observations*, puis il fait une *hypothèse*, l'hypothèse d'une loi, pour les expliquer ; il vérifie ensuite son hypothèse en instituant des *expériences* ; si les expériences sont concluantes, il érige l'hypothèse en loi par le moyen d'un raisonnement d'*induction* ou *d'analogie* ; par la suite, de cette loi il tire par *déduction* des conséquences qui sont des lois nouvelles.

2° **L'observation.** — Elle consiste à considérer attentivement un être, un phénomène, puis à examiner chacune de ses parties afin d'en découvrir la nature et la loi. a) *Sa légitimité.* — Ce qui fait la légitimité de l'observation c'est le fait que nous ne sommes pas juges de ce qui est, mais simplement spectateurs, et qu'ainsi nous devons admettre les données de l'observation telles qu'elles sont sans y rien ajouter et sans en rien retrancher. b) *Ses qualités.* — L'observation doit être *complète, précise* et *impartiale*. c) *Usage de l'expérience-observation.* — « Le plus souvent la nature offre d'elle-même à l'observation les phénomènes à expliquer ; l'attention suffit alors à les bien discerner d'avec les autres. Mais parfois nous n'en avons qu'une vue incomplète et trop rapide. Sans parler de ces phénomènes qu'une petitesse excessive ou un extrême éloignement auraient toujours dérobés à nos sens, sans le secours d'instruments tels que la loupe, le microscope, le télescope, il en est qui, bien que visibles, ne se laissent pas facilement observer et déterminer. Tels sont les phénomènes électriques : on ne peut fixer l'éclair qui jaillit de la nue. Aussi, avant de songer à expliquer les phénomènes électriques, a-t-il fallu les produire artificiellement dans des conditions où ils fussent observables. Dans ce cas, l'expérimentation intervient déjà pour préparer le terrain de la recherche scientifique. » Liard, Logique). d) *Usage des instruments.* — Pour bien observer, outre *l'attention, l'intégrité des sens* et *certaines aptitudes naturelles*, il faut donc disposer *d'instruments d'observation* susceptibles d'augmenter la puissance de nos sens (instruments grossissants), de préciser les observations faites (instruments de mesure), d'éviter les erreurs de l'observateur (instruments enregistreurs).

3° **L'hypothèse.** — *L'hypothèse est un principe admis comme une explication provisoire des faits.*

a) *Engendrée dans l'imagination.* — « En présence des secrets de la nature, l'esprit humain ne demeure pas inerte et passif ; en vertu d'une tendance invincible, il imagine des causes aux phénomènes dont les causes ne lui apparaissent pas spontanément ; cette tendance crée les mythologies populaires ; elle crée aussi la science ; seulement, alors que le peuple accepte, sans les soumettre au contrôle des faits, les explications qu'il imagine, le savant transforme ses hypothèses en interprétations, en explications véritables. » (Liard). On voit par là que l'imagination joue un très grand rôle dans la science, c'est par l'hypothèse que l'imagination appliquée à la science a quelquefois une puissance incalculable.

b) *Fille de l'observation.* — Mais l'hypothèse ne doit venir qu'après l'observation des faits et doit être tirée des faits mêmes que l'on a observés et que l'on veut expliquer. Il en résulte que l'hypothèse doit s'accorder avec les faits pour l'explication desquels elle a été imaginée. Si l'expérience ne la confirme pas, il faut la rejeter. L'hypothèse que la nature a horreur du vide n'a pu tenir contre ce fait observé que dans un tube où l'on fait le vide, le mercure ne monte pas au-dessus de 76 centimètres ; il fallut attribuer le fait à la pression atmosphérique.

c) *Abus des hypothèses mais nécessité des hypothèses.* — Les anciens et les savants du Moyen Age ont fait un véritable abus des hypothèses. Bacon les appelle des « vierges stériles » et il a contre elles les plus vives préventions : « ce qu'il faut attacher à l'entendement, dit-il, ce ne sont point des ailes, mais au contraire du plomb, un poids qui comprime son essor. » Newton disait « hypothèses non fingo ». Je ne feins pas d'hypothèse, et pourtant l'attraction universelle fut d'abord pour lui une magnifique hypothèse. On ne rencontre guère de belle découverte qui n'ait commencé par se produire sous cette figure. C'est sous forme d'hypothèses que Copernic, au XVIe siècle, s'opposant aux idées de Ptolémée, expose

le système du monde qui place le soleil au centre d'un univers et fait de la terre une planète tournant avec les autres planètes autour du soleil. Les fausses hypothèses elles-mêmes ont leur utilité quand elles se substituent à des croyances plus chimériques : Ainsi les tourbillons de Descartes ont préparé les voies au système de Newton. Mais le savant dans son laboratoire ne doit jamais imaginer que des hypothèses susceptibles, par leur nature, d'une vérification positive, et dont le degré de précision soit exactement en harmonie avec celui que comporte l'étude des phénomènes correspondants. En d'autres termes, les hypothèses vraiment scientifiques doivent constamment présenter le caractère de simples anticipations sur ce que l'expérience et le raisonnement auraient pu dévoiler immédiatement, si les circonstances du problème eussent été plus favorables.

d) *Les théories.* — Certaines hypothèses n'ont pas pour objet de servir de point de départ à la vérification expérimentale parce qu'elles ne sont pas vérifiables, soit qu'elles ne puissent jamais l'être, soit que nos moyens d'investigation soient encore trop imparfaits. Ce sont ces *explications très générales, ces vastes systématisations de faits* qu'on appelle des théories. Telles sont : *la théorie de l'évolution, la théorie de Laplace sur la formation des mondes, les explications générales sur la matière et sur l'énergie.* Les théories sont, dans l'activité scientifique, l'œuvre de l'esprit philosophique.

4° **L'expérimentation.** — a) *Son objet.* — Elle consiste à produire ou modifier artificiellement les phénomènes à étudier en vue de vérifier une hypothèse faite à le sujet. Bacon disait : « L'observateur lit, l'expérimentateur interroge, il faut tourmenter la nature pour lui arracher ses secrets. » Il appelait l'expérimentation d'un mot pittoresque « la chasse de Pan » (Pan, c'est la nature).

b) *Les règles de Bacon.* — Bacon donnait de l'expérimentation les règles suivantes. Il faut, disait-il : 1° *la varier*, c'est-à-dire la renouveler dans des conditions différentes ; 2° *l'étendre*, c'est-à-dire la répéter dans des conditions plus vastes ; 3° *la renverser*, c'est-à-dire la faire par un procédé, puis par le procédé contraire, opposer l'analyse à la synthèse ; 4° *la transférer*, c'est-à-dire la refaire sur des objets analogues, mais non identiques ; 5° *la prolonger*, c'est-à-dire la faire durer pour voir si un détail nouveau n'éclairera pas la recherche ; 6° *la compulser*, c'est-à-dire la pousser jusqu'à ce que le phénomène ait disparu. C'est ainsi que lorsqu'on a voulu déterminer la vitesse du son, on a montré d'abord que le son ne se transmettait pas dans le vide, puis on a déterminé sa vitesse dans l'air, dans l'eau et dans les corps solides, enfin, par des méthodes indirectes, on l'a déterminée dans un corps quelconque, solide, liquide ou gazeux.

c) Faits prérogatifs ou privilégiés. Parmi les faits à observer il en est qui sont plus aptes que d'autres à donner la clé du mystère qu'on veut percer. C'est à ces faits que le savant doit s'attacher.

5° **L'induction.** — Elle est la 4e *étape de la méthode*, celle qui aboutit à *formuler la loi.*

a) *Détermination de la cause.* — Cette étape consiste essentiellement dans la *détermination de la cause* par raisonnement sur les conditions et les résultats de certaines expériences. La *cause* d'un phénomène est son *antécédent* ; c'est l'antécédent qui se présente quand le phénomène est présent, qui disparaît quand il est absent, qui varie quand il varie. *Bacon* et *Stuart Mill* ont établi la série des expériences et des règles qui permettent d'affirmer la cause et par suite de rendre possible l'induction. Nous les résumons ci-dessous.

MÉTHODES DE RECHERCHE DES CAUSES

Méthode de Concordance	*Méthode de Différence*	*Méthode des Variations concomitantes*	*Méthode des Résidus*
Règle : Si deux ou plusieurs cas concordent seulement par la présence d'un seul antécédent, cet antécédent par où *ils concordent* est la cause cherchée.	*Règle* : Si un cas où un fait se présente et un cas où ce fait ne se présente pas ont tous leurs antécédents communs hors un seul, présent seulement dans le premier cas, cet antécédent par où ils *diffèrent* est la cause cherchée.	*Règle* : Quand un fait varie, si aucun des antécédents ne varie sauf un, l'antécédent qui varie est la cause cherchée.	*Règle* : Si on retranche d'un fait complexe ce qu'on sait être l'effet de certains antécédents connus, le reste ou *résidu* est l'effet de l'antécédent restant.
Exemple : Une cloche, une corde, un tambour qui rendent un son offrent un phénomène commun : une *vibration.* Celle-ci est la cause du son.	*Exemple* : entre de l'air qui produit une fermentation et de l'air qui n'en produit pas il n'y a qu'une différence : la présence dans un cas de certains germes : ces *germes* sont les causes de la fermentation. *(Expérience de Pasteur.)*	*Exemple* : Quand on place un baromètre à des altitudes différentes, seule la hauteur barométrique varie : le changement d'altitude, c'est-à-dire la pression atmosphérique est donc la cause de la variation barométrique. *(Expérience de Pascal).*	*Exemple* : Les mouvements d'une planète sont connus et calculés, or il se produit une perturbation dans ses mouvements. On forme l'hypothèse de l'existence d'un astre voisin inconnu, cause de la perturbation. *(Découverte de la planète Neptune par Le Verrier).*

b) L'induction proprement dite. C'est le raisonnement par lequel *on conclut* des résultats concordants d'un *certain nombre* d'expériences, au caractère *universel* de la relation que ces expériences ont révélé entre une cause et son effet. Si on généralise aussi hardiment quelques observations en une *loi* c'est qu'on admet comme principe indiscutable :

1° Que tous les phénomènes ont une cause.

2° Que toutes les causes produisent les mêmes effets.

6° **L'analogie** est une méthode de raisonnement qui conclut de certaines ressemblances visibles à des ressemblances cachées : Le chien doit ressentir la douleur puisque nous la ressentons car il y a entre lui et nous des analogies frappantes dans la constitution du corps, en particulier dans celle du système nerveux.

Cette forme de raisonnement est fondée sur l'*existence de plans communs d'organisation* dans les choses et les êtres de la nature.

Mais on se rend compte que l'analogie n'est pas une base solide pour fonder des vérités scientifiques. Son rôle est surtout de suggérer des hypothèses aux savants.

7° **La Déduction.** — Toutes les sciences de la nature, quand elles sont parvenues par l'induction à un certain degré de développement usent de la déduction : 1° *pour passer* de la science à l'art, *aux applications pratiques* ; 2° *pour systématiser un groupe de lois* et *renforcer* de toute la vigueur probante du raisonnement les *généralisations*, parfois hardies, de l'induction ; 3° pour *découvrir* des rapports nouveaux.

Lorsque, dit M. Rey dans l'ouvrage cité plus haut, on est amené en partant de lois particulières, à formuler une loi générale qui implique chacune de ces lois particulières, on peut déduire ces lois particulières de la loi générale. (Exemple : du principe de la conservation de l'énergie, on peut déduire le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail). Lorsque, dans une science, les lois auxquelles l'induction nous a permis d'atteindre sont si générales qu'elles sont impliquées par tous les faits qui font l'objet de cette science, et que, par conséquent, il semble impossible d'en dépasser la généralité, on les appelle des principes. Le rôle de la déduction consiste à redescendre de ces lois générales à d'autres qui le sont moins. Les sciences, dans la déduction, cherchent toutes à employer le raisonnement mathématique, quand elles le peuvent, parce qu'il est la forme la plus précise de la déduction. La déduction a pour but d'ordonner et de systématiser les résultats de l'induction, en partant des lois les plus générales. Quand on peut déduire des lois particulières de lois générales, ou des faits particuliers d'une loi, on dit qu'on a expliqué ces lois ou ces faits. Enfin la déduction a encore un rôle secondaire, mais très utile, dans les applications techniques. De toute loi particulière, on peut déduire par le calcul l'application de cette loi à tel ou tel fait particulier. (Exemple : application de la formule des miroirs convexes, à un miroir de foyer particulier et un objet placé à une distance déterminée. Problèmes de physique en général).

« Le mécanisme de la méthode dans le passage de l'induction à la déduction est en gros celui-ci : le savant avait trouvé par l'expérience une relation de cause à effet ; il avait fondé sur cette relation son induction, c'est pourquoi on dit que l'induction repose sur le principe de la causalité. Mais la relation de cause à effet ne s'offre au savant que sous la forme d'une succession de phénomènes. Ceci explique que l'induction expérimentale ne paraisse pas toujours absolument certaine, car deux phénomènes peuvent s'être succédés fortuitement dans toutes les expériences faites jusque là, et n'être nullement liés d'une façon nécessaire et constante, ce que révélera une nouvelle expérience. Pour se sentir absolument sûr de la relation de causalité, il faut qu'on puisse la déduire d'une relation plus générale. N'étant alors que la conséquence de cette relation plus générale, elle paraît nécessairement vraie si cette relation l'est aussi. C'est pourquoi le savant cherche toujours à déduire une relation donnée de relations plus générales, ou à montrer, lorsqu'il est arrivé aux relations les plus générales, que dans les rapports de causalité qu'elle expérimente, l'effet n'est que la cause transformée, c'est-à-dire à déduire alors l'effet de la cause. De toute façon, il cherche à donner à la science une forme déductive. »

8° **La classification.** — La classification est la méthode par excellence des sciences naturelles.

a) *Son procédé* consiste à répartir les êtres en groupes plus ou moins vastes (espèces, genres, familles, classes, ordres, embranchements), d'après leurs ressemblances et leurs différences.

b) *Différentes sortes de classifications. On appelle classification artificielle* celle qui est fondée sur des caractères généralement choisis arbitrairement ou en vue d'une utilité pratique (distinction des plantes en plantes fourragères, oléagineuses, saccharifères, en légumes, arbres fruitiers, etc...). Ces classifications réunissent dans un même groupe des objets très différents et séparent des objets très semblables.

On appelle *classification naturelle* celle qui est fondée sur l'ordre et le plan réel de la nature.

On appelle *classification génétique* celle qui reproduit l'ordre dans lequel les faits sont engendrés ; telle est la classification des espèces dans la théorie de l'évolution.

c) *Principes directeurs des classifications naturelles.* — Cette classification doit obéir aux principes suivants :

Principe de l'affinité générale en vertu duquel les êtres réunis dans une même classe doivent *se ressembler* entre eux plus qu'ils ne diffèrent les uns des autres et plus qu'ils ne ressemblent aux êtres des autres classes.

Principe de subordination des caractères ou principe de Jussieu, d'après lequel pour un groupement il faut considérer : 1° les caractères que l'on *appelle dominateurs*, c'est-à-dire ceux qui jouent le rôle le plus considérable dans la constitution des êtres ; 2° la subordination hiérarchique qui se trouve entre ces caractères. La forme extérieure importe bien moins que certains détails de structure intérieure : la baleine est plus proche du bœuf que des poissons.

Le principe de la série naturelle relatif à l'ordre dans lequel il convient d'ordonner les groupes formés d'après les deux principes précédents. Cet ordre n'est pas arbitraire, les groupes doivent être rangés en une série progressive, des êtres élémentaires aux êtres les plus parfaits. C'est ainsi qu'on rangera les vertébrés dans l'ordre suivant : poissons, batraciens, reptiles, oiseaux, mammifères.

d) *Valeur de la classification naturelle.* Nous ne possédons pas de classification véritablement naturelle. Nous ne connaissons ni tous les êtres, ni tous leurs caractères, ni l'importance relative de ces caractères. Une classification dite naturelle, ne représente que l'état provisoire de la science au moment où elle est établie.

Méthodes des Sciences Morales et Sociales

1° **Diversité des méthodes pour une même science.** — Quelle est la méthode des sciences morales et sociales ? La réponse à cette question n'est pas facile, car *ces sciences emploient plusieurs méthodes* et les savants ne sont pas toujours d'accord sur celle qui mène le plus sûrement à la découverte de la vérité. « *La détermination de la méthode dans telle ou telle science morale suppose un parti pris sur l'objet et les limites de cette science en particulier.* On ne discute plus sur la différence de l'algèbre et de la géométrie, sur l'objet propre de la physique et de la chimie, par suite, dans toutes ces sciences, les questions générales de méthode sont définitivement résolues : La méthode déductive est définitivement attribuée aux mathématiques, et la méthode expérimentale aux sciences physiques. Il est loin d'en être ainsi pour les sciences morales ; là les principes ne sont pas rigoureusement fixés ; les bases ne sont pas solidement assises ; les frontières ne sont pas rigoureusement délimitées ; par suite on n'est pas sans incertitude sur les méthodes à suivre. On s'entend en gros sur les objets des sciences morales ; mais quand il faut en venir aux précisions qu'exigent les questions de méthode, on se trouve en présence de *façons de voir opposées et partant de divergences parfois profondes sur les méthodes qu'il convient d'employer.* » (Liard).

2° **Ces sciences se pénètrent.** — Ce qui augmente encore la difficulté, c'est la façon dont se pénètrent le plus souvent la plupart des sciences morales. Par exemple l'histoire s'est incorporée comme facteur essentiel, à la plupart des sciences morales. « N'est-ce pas au fond une histoire, que cette psychologie évolutionniste, aux yeux de laquelle l'état présent des races civilisées est l'aboutissement d'un long passé de lentes transformations successives? La science des reli-

gions n'est-elle pas un fragment détaché de l'histoire générale ? La psychologie ne s'y rattache-t-elle pas aussi par les liens les plus étroits ? Le philologue recherche les lois suivant lesquelles s'assemblent les divers matériaux du langage ; mais ces matériaux ne sont pas des éléments inertes ; ils font partie d'organismes qui vivent ou ont vécu et qui, comme tous les organismes, se sont développés par évolution... l'histoire n'est-elle pas aussi au cœur même de la science politique ?... La science elle-même du droit positif fait de fréquents appels à l'histoire pour s'éclairer sur les origines et les transformations du droit. L'idée d'évolution est passée du domaine des sciences de la vie dans celui de la plupart des sciences morales. » (Liard).

Méthode historique

La méthode des sciences morales et sociales est la méthode historique pour tout ce qui concerne l'étude du passé.

L'histoire raconte les événements qui se sont accomplis pendant le cours des siècles au sein des diverses sociétés humaines et les explique en faisant ressortir l'enchaînement des causes et des effets. La connaissance du passé nous est fournie par les *documents*. « Chercher, recueillir les documents est donc une des parties, logiquement la première, et une des principales en matière d'histoire. En Allemagne, on lui a donné le nom d'heuristique » (Seignobos). Lorsque les matériaux sont recueillis on en détermine la valeur par les procédés de la *critique historique*.

1° **Les documents.** — Ils sont de trois sortes :

a) *Les légendes* ou traditions orales, transmises de bouche en bouche ; il les faut accueillir avec beaucoup de circonspection, car d'une part l'oubli de nombreux détails, d'autre part l'imagination des narrateurs défigurent souvent la vérité;

b) *les monuments* (édifices religieux, publics et privés, meubles, armes, bijoux, objets d'art, bas-reliefs, peinture, médailles), nous fournissent des données très précieuses, lorsqu'ils sont authentiques ;

c) *les textes écrits* (inscriptions, chartes, actes, lettres, mémoires, livres des historiens), nous donnent des détails plus précis et plus circonstanciés.

2° **La critique historique.** — La critique historique est la méthode d'examen qui permet de *distinguer les documents authentiques* de ceux qui sont suspects ; elle exige beaucoup de finesse, de pénétration et d'impartialité. Elle comporte une critique externe du document (ou méthode d'érudition ou philologique) et une critique interne (ou critique du témoignage).

La critique externe ou d'érudition ou philologique a pour objet de reconstituer le *texte exact* du document (comparaison des copies).

b) *La critique interne* vérifie la *sincérité*, l'*exactitude* et la *valeur* du document reconstitué par le philologue. (Un fait doit être immédiatement rejeté comme faux, s'il est impossible qu'il ait pu se produire. La vérité d'un récit est parfois prouvée par le nombre de ses témoins, qui n'ont pu se concerter pour nous tromper, d'autres fois il suffit du témoignage d'une seule personne si elle est digne de foi en raison de sa compétence et de sa sincérité).

3° **La résurrection du passé.** — Une fois en possession des éléments fournis par la critique des documents, l'historien reconstitue les faits, en faisant appel à l'imagination et au raisonnement, et en donnant aux faits l'aspect réel et vivant qu'ils avaient lorsqu'ils se sont produits. *Là est la part de l'art dans l'histoire.* Michelet appelait l'histoire « une résurrection du passé. »

Méthode de la Psychologie

La psychologie est une science de faits, comme les sciences de la nature. Comme celles-ci elle procèdera par voie d'observation et d'expérimentation.

L'observation psychologique. — Elle a deux formes :

1° **L'observation interne ou introspection** par laquelle le savant observe ses propres états de conscience. Elle implique chez lui le *pouvoir de se dédoubler* pour l'observation de soi-même. Elle procède d'ailleurs avec assez de sécurité encore en étudiant les états de conscience *tels que la mémoire les conserve* et les rapporte. Certes cette observation de soi comporte des *difficultés*, des *risques d'erreurs* et *de déformation de la réalité* ; mais il n'est aucune méthode d'une science complexe dont l'usage soit facile. En réalité l'introspection est le *mode naturel, direct, essentiel* par conséquent, de l'observation des faits psychologiques.

2° **L'observation externe.** — C'est l'observation des faits psychologiques à travers leurs manifestations extérieures *(paroles, gestes, actions)*. Cette méthode a pour rôle essentiel de *compléter* et de *confirmer* la précédente sans prétendre se passer de celle-ci.

Remarquons que l'interprétation des signes à laquelle elle est contrainte, introduit dans le travail scientifique des *chances d'erreurs*.

a) Cette observation est *directe* quand elle emploie la méthode des *tests*, ou celle des *questionnaires*.

« La méthode des tests, dit Hœffding, consiste dans la recherche chez un homme déterminé des caractères physiques et psychologiques qui lui sont propres ». Elle détermine : l'acuité sensorielle, la rapidité des fonctions mentales, la durée de l'attention vive, les qualités de la mémoire.

La méthode des questionnaires demande à une foule de personnes de répondre à des questions précises ; de leurs réponses on s'efforce de tirer des renseignements sur des états d'âmes généraux. Pour diverses raisons cette méthode n'est pas susceptible de résultats intéressants.

b) Il y a une observation externe *indirecte* des faits psychologiques par l'étude de l'histoire, du langage, de l'ethnographie et de toutes les manifestations humaines de l'esprit et de la sensibilité (religion, littérature, arts, droit, etc...).

c) Mettons à part *l'observation des maladies mentales* ou *psycho-pathologie*. Ces maladies sont une sorte d'expérimentation où la nature grossit certains faits (hypnose) ou en décompose d'autres (aphasie) à la manière de l'expérimentateur (maladies de la mémoire, de la volonté, de la personnalité etc.).

L'expérimentation est pratiquée par la *Psychophysiologie* qui étudie les rapports entre les phénomènes psychologiques et les phénomènes physiologiques qui les accompagnent (les émotions et les perturbations du corps), par la *Psychophysique* qui s'applique à certaines mesures d'intensité et de durée. Il faut remarquer que l'expérimentation ne peut porter en psychologie que sur les faits les plus élémentaires.

Méthode de la Sociologie

a) *La sociologie est l'étude des sociétés humaines.* Elle est une science de la nature des sciences naturelles ; sa méthode est nécessairement l'observation et l'expérimentation.

b) La méthode d'observation particulière de la sociologie est la *Statistique*. Celle-ci est « *le dénombrement des faits de tel ou tel ordre déterminé, accomplis dans une période donnée, et l'expression, soit par des tableaux de chiffres, soit par divers procédés graphiques, des résultats de ce dénombrement* ». (F. Faure, Revue internationale de l'enseignement, octobre 1891).

C'est dans l'Économie politique, qui est la science des richesses, que la statistique a son emploi le plus légitime.

c) L'expérimentation ne peut être essayée en sociologie que dans un champ restreint de vie sociale. Pour

l'ensemble des sociétés on peut considérer comme des expériences les transformations des sociétés du passé, en particulier les révolutions ; la *méthode historique* est l'un des moyens d'investigation de la sociologie.

L'Erreur et la Vérité

1° **Définition.** — On appelle *certitude* l'état subjectif d'un homme qui croit être en possession de la vérité. La certitude peut s'attacher aussi bien à une erreur qu'à une vérité.

On définit d'ordinaire la *vérité*, l'accord de la pensée avec les choses ; l'*erreur*, le désaccord de notre pensée avec les choses. (Rey).

2° **L'Erreur.** — *a*) L'erreur est un faux jugement que l'esprit tient pour vrai. *b*) L'erreur a sa *cause générale* dans la *faiblesse de notre esprit* et ses *causes particulières* dans le *mauvais emploi de nos facultés* et dans *l'ignorance des vraies méthodes.*

c) On peut classer les erreurs d'après les facultés qui les provoquent : erreurs des sens, erreurs de jugement, erreurs de raisonnement ou sophismes. Épicure avait déjà remarqué que les sens ne nous trompent pas, et que l'erreur des sens n'était qu'une erreur de jugement. Bacon avait fait de nos erreurs une classification ingénieuse, il les appelle des idoles ou fantômes qui assiègent l'esprit humain, il en fait quatre classes : 1° les erreurs de la race humaine, idola tribus, qui viennent de l'imperfection des sens, des préjugés, des passions ; 2° les erreurs individuelles, idola specus, qui proviennent du caractère de chaque homme, de ses préférences particulières ; 3° les erreurs de langage, idola fori, provenant du commerce avec les autres hommes, de l'ambiguïté des mots ; 4° les erreurs de système, idola theatri, les systèmes philosophiques étant comme des pièces de théâtre que les philosophes viennent jouer à tour de rôle sur la scène du monde.

d) *Pour éviter les erreurs.* — La principale cause de nos erreurs étant *l'imperfection de notre esprit*, l'erreur est toujours notre fait, et ne peut être complètement évitée. Mais, les erreurs qui proviennent du *mauvais emploi de nos facultés* peuvent être évitées : 1° par la connaissance exacte de la valeur et des ressources de chaque faculté. Nous ne demanderons pas à l'une d'elles les services qu'elle ne peut rendre, par exemple, nous ne demanderons pas à l'imagination l'explication des choses, comme le faisaient les anciens, nous ne confierons pas à l'autorité et au syllogisme la charge de la vérité, comme les hommes au Moyen Age ; 2° par l'effort énergique de la volonté sollicitant l'intelligence, dominant la sensibilité, par des habitudes de réflexion et de circonspection dans nos jugements.

e) *Le critérium de la vérité.* — Les philosophes ont toujours cherché le critérium, c'est-à-dire le signe de la vérité.

Voici ceux qu'ils ont invoqués :

1° L'autorité d'une personne, d'un livre, d'un corps constitué (église, académie...) ;

2° Le sens commun, ou bon sens, raison naturelle ;

3° le consentement universel ; c'est-à-dire l'opinion de la plupart des hommes ;

4° L'inconcevabilité de la négative (Spencer) en vertu de laquelle est vrai tout ce dont le contraire est inconcevable ;

5° l'évidence (Descartes et Spinoza). « D'après les cartésiens, la vérité d'une proposition s'impose toujours à nous avec une telle force que, quelle que soit notre volonté, cette volonté est obligée de s'incliner et d'adhérer elle-même de tout son pouvoir à cette proposition. » (Rey).

Aucun de ces critères, même celui de l'évidence auquel ils se ramènent tous, ne peut offrir un signe certain pour reconnaître une vérité. La preuve ne peut en être donnée que par le *grand nombre d'épreuves* qu'elle subit victorieusement.

MORALE

Avant d'étudier les diverses questions relatives à la morale, nous croyons utile de donner ici, d'après le remarquable ouvrage de Fouillée « Histoire de la Philosophie », un résumé des principales doctrines philosophiques et morales, de l'antiquité à nos jours.

Doctrines philosophiques et morales

I. Philosophie de l'Inde. — *a*) Les premières doctrines de l'Inde sont *polythéistes*. L'homme conçoit toutes les puissances de la nature à l'image de sa propre puissance, comme douées d'intelligence et de volonté. Ce polythéisme respire dans les hymnes des Védas.

b) La pensée hindoue adopte ensuite le *panthéisme*, qui fait le fond de la *religion brahmanique* : le monde est une émanation de Dieu ; Dieu l'engendre par amour, mais par amour mêlé de désir. En tant qu'il crée, Dieu est *Brahma* ; en tant qu'il détruit, il est *Siva* ; en tant qu'il conserve, il est *Vichnou* (la Trinité hindoue). A cette théorie de l'incarnation divine se joint celle de la *transmigration des âmes*. En vertu de cette loi, chaque être prend dans l'univers, la place et la forme qui conviennent à son degré de moralité. La morale brahmanique commande la *dévotion*, l'*humilité*, la *modestie*, la *patience* et le *pardon des injures*, l'*amour et le respect des faibles*, l'*amour et le respect de la femme*, le *respect des animaux*. Malgré sa grandeur, cette morale consacre dans l'ordre social l'injustice des castes et aboutit au despotisme sacerdotal.

c) Au ve siècle avant Jésus-Christ paraît dans l'Inde *Bouddha, le grand réformateur* : sa métaphysique et sa morale sont résumées dans les « quatre vérités sublimes » : 1° L'existence sensible est une illusion ; 2° le désir, qui résulte de cette existence, produit la douleur ; 3° l'illusion et la douleur de l'existence sensible peuvent cesser par le *Nirvâna*, qui est l'anéantissement de l'existence mobile au sein de l'existence immuable ; 4° on arrive au Nirvâna par le *renoncement absolu* à soi-même et par l'extinction de tout désir.

Toute la doctrine bouddhiste dérive de ces principes : l'égalité morale de tous les hommes, l'indépendance de la morale par rapport au sacerdoce, la substitution des devoirs moraux aux pratiques religieuses, la fraternité universelle, la charité, la douceur, l'humilité, la tolérance.

Malgré sa pureté, la morale du bouddhisme reste souvent loin de la réalité : la *charité* y est admirablement prêchée, mais l'idée du droit en est absente, les vertus civiques et politiques sont sacrifiées aux *vertus mystiques et contemplatives*.

II. Philosophie de la Perse. — L'idée qui domine la *métaphysique* de *Zoroastre*, le philosophe de la Perse, est celle d'un dualisme. Le monde est un mélange de lumière et de ténèbres, de vérité et d'erreur, de bien et de mal. *Orzmud, principe du bien* est la pensée, il a produit le monde par l'intermédiaire de la parole éternelle ou du verbe, expression de la vérité et de l'intelligence. *Ahriman, principe du mal* et des ténèbres, est la Matière : le bien va l'emportant sans cesse sur

le mal et Orzmud aura la dernière victoire. La *morale* de Zoroastre est conforme à sa métaphysique : le bien moral est la vérité, dont l'expression est la sincérité des paroles et la pureté des actions. De là le culte des Perses pour la sincérité et la pureté, images de la lumière visible et de la lumière invisible, qu'ils adorent sous le symbole du feu.

III. Philosophie des Celtes et Gaulois. — Les sages de la Gaule ou druides enseignaient de hautes doctrines où s'exprime le génie particulier des peuples gaulois : le culte de l'individualité, l'amour de la liberté, le mépris de la mort ; le dévouement était considéré en Gaule comme la première des vertus.

IV. Philosophie de la Chine. — Les philosophes chinois ont une *morale philosophique* sans cadre théologique. *Confucius* conçoit le *devoir* comme une loi *universelle, immuable, obligatoire* ; la loi de la terre est le perfectionnement, la loi du ciel est la perfection ; le vrai principe de toutes choses, c'est la moralité, supérieure à la nature et que le monde ne peut concevoir.

De ces principes, Confucius déduit les devoirs de justice ou de réciprocité, les devoirs de charité ou d'amour. Nous devons aimer les hommes de tout notre cœur, et agir envers eux comme nous voudrions qu'on agît envers nous. *Mencius* renouvelle et perfectionne cette doctrine en y ajoutant une *politique* : il demande une meilleure répartition de la propriété et des charges sociales ; il fait du prince le serviteur du peuple.

V. Philosophie des Hébreux. — Pour les Hébreux *Dieu* est une puissance libre qui crée le monde par un acte de libre volonté. L'homme est également une puissance libre qui obéit ou désobeit à Dieu par un acte de libre arbitre. *Les devoirs* découlent des attributs de Dieu, mais ils sont surtout négatifs et leur sanction est terrestre. Ils prêchent la douceur et l'amour des hommes : Ne fais pas aux autres ce que tu ne voudrais pas qu'on te fît. La doctrine *politique* est en faveur de la *théocratie* : la royauté est un mal ; les vrais chefs du peuple devraient être ses prêtres.

VI. Philosophie grecque. — Elle est représentée successivement par l'Ecole naturaliste d'Ionie, l'Ecole idéaliste pythagoricienne, les Sophistes, Socrate, Platon, Aristote, l'Epicurisme, le Stoïcisme, l'Ecole d'Alexandrie et la Philosophie chrétienne.

L'Ecole Naturaliste ou Ecole Ionienne (VIIe siècle av. J. C.), après avoir cherché l'explication des choses dans *la matière* avec *Thalès* de Milet, finit par reconnaître avec *Héraclite* que cette explication se trouve dans la pensée. Mais elle place alors la pensée dans la matière même qu'elle anime intérieurement. Rien n'est, Tout devient, Tout s'écoule, on ne se baigne pas deux fois dans les mêmes eaux d'un fleuve. Notre âme, étincelle du feu divin, ne participe à la vérité que quand elle participe à la pensée du Tout, à la raison universelle. Se résigner à la nécessité des choses, voilà la loi pratique. Mortelle dans sa partie individuelle, l'âme est immortelle dans ce qu'elle contient d'universel. Comme l'individu, la cité doit se nourrir de l'universel et façonner ses lois à l'image des lois de l'univers. *Anaxagore*, qui vit à Athènes vers 470, sort du naturalisme et place la pensée en dehors et au-dessus de la matière, qu'elle meut extérieurement. L'intelligence connaît tout : présent et avenir ; elle anime tout.

L'Ecole idéaliste est représentée par *Pythagore*. Pour les Pythagoriciens, la dernière explication des choses est dans les nombres qui régissent le monde. L'âme est un nombre. Dieu est l'*un*. La vertu est une harmonie, la justice un rapport de réciprocité, l'amitié un rapport d'égalité. Pythagore professe en outre la doctrine de la métempsychose.

Les Sophistes substituent le relatif et le vraisemblable à l'absolu et au vrai. Ils disent que tout n'est qu'une *apparence*. Ils affirment que tout est vrai *relativement* pour qui sait le soutenir, et que rien n'est vrai absolument. *En morale* ils substituent le bien relatif qui est l'agréable ou l'utile au bien absolu. *En politique* ils donnent l'autorité non au droit, mais à la force. Les plus célèbres sophistes furent PROTAGORAS et GORGIAS.

Socrate (469-399. Né à Athènes). Socrate dans sa jeunesse s'occupe de physique et d'astronomie.

a) *Une philosophie du Bien.*— Il admet avec Anaxagore que la vraie cause du monde n'est pas physique, mais intellectuelle, et il ajoute que l'intelligence même ne peut choisir qu'en vue du *bien*. Cette notion du bien, objet essentiel de l'intelligence et de la science, domine toute la philosophie de Socrate dont la pensée est orientée tout entière vers les questions morales.

b) *La méthode socratique.* — La méthode de Socrate ou dialectique des pensées se présente sous deux aspects : 1° *L'ironie*, qui s'attaque à la fausse science est mise en contraste avec la véritable science ; 2° la *maieutique*, accouchement des esprits, qui découvre la vérité, dont l'âme est grosse au moyen d'interrogations habilement conduites : Les procédés de la science sont l'induction et la définition. Socrate tend à tout réduire en idées.

c) *La morale de Socrate.* — De la dialectique des pensées découle la *dialectique des actions* ou *morale* : Celui qui a classé toutes choses dans sa pensée, donnant à chacune son rang, jugeant celle-là meilleure, celle-ci moins bonne, ne saurait contredire ses pensées dans ses actions. D'où *l'identité de la pensée et de l'action* qui suppose que la volonté choisit toujours ce que l'intelligence lui montre comme le meilleur. *Personne n'est donc méchant volontairement* : apprenez le bien, dit Socrate, et vous le pratiquerez ; instruisez les hommes et vous les rendrez meilleurs. L'homme de bien est à la fois savant et vertueux.

La vertu est donc une, malgré la diversité de ses formes : la vertu fondamentale est la Sagesse, qui produit le courage et la tempérance (vertus individuelles), la justice dont la bienfaisance est une partie (vertu sociale), la piété (vertu religieuse).

La théorie socratique de la *justice* est fondée sur l'existence de *lois non écrites, supérieures aux lois humaines*. Ces lois non écrites sont à la fois naturelles et divines, parce qu'elles sont rationnelles : ainsi se réconcilient la nature et la loi que les sophistes opposaient l'une à l'autre. La vraie loi est la nature même, c'est-à-dire la raison.

La bienfaisance est une forme de la justice : nous ne devons pas rendre le mal pour le mal, mais chercher en tout et pour tous le bien. Nous devons traiter les hommes en amis, être philanthropes. La femme est l'égale de l'homme dans *la famille*, elle peut même être supérieure à l'homme si elle est plus vertueuse. *Le travail* n'est pas servile, comme le croyait l'antiquité tout entière, il est noble.

d) *La politique.* — *La politique* est la science de ce qui est juste et utile à tous. C'est à celui qui possède le mieux cette science que le commandement doit appartenir : la violence, le nombre et le hasard sont sans autorité pour gouverner. De là une doctrine politique à tendance aristocratique. Mais les sages ne doivent pas gouverner par la force ; leur autorité vient de la persuasion : par là Socrate revient au principe démocratique de l'élection des magistrats par le peuple.

Platon (429-347. Né à Athènes). — Platon n'est pas seulement comme Socrate, dont il fut le disciple, un moraliste ; il professe une *métaphysique*. Pour lui le monde sensible n'est qu'une apparence et les sens ne nous font connaître que des ombres : seul l'esprit s'élève des apparences passagères aux réalités éternelles qui sont les *Idées*.

a) *Sa métaphysique.* — Sa théorie des idées peut se résumer ainsi : l'idée est pour les objets le principe de l'existence ; exister, ce n'est autre chose que *participer* aux idées Chaque homme n'existe que par sa participation à l'idée de l'humanité, comme la copie n'existe que par sa ressemblance au modèle. Dans sa théorie de l'amour du bien il montre que l'amour s'attache d'abord à la beauté des formes, puis à la beauté des âmes, qui se révèle dans les belles pensées. La vertu est la conformité de l'âme aux idées, la ressemblance avec Dieu.

b) *Sa morale.* — La sagesse, le courage et la tempérance produisent dans l'âme un ordre et une *harmonie* que Platon appelle la justice intérieure. La justice extérieure n'est que la réalisation d'un ordre analogue dans la société. La justice exige la bienfaisance.

c) *Sa politique.* — Le but de la *politique* est de rendre les hommes vertueux et heureux. De là *le pouvoir exorbitant qu'il attribue à l'Etat* sur l'individu : l'Etat est tout, l'individu n'est rien. La famille elle-même et la propriété doivent être, s'il le faut, sacrifiées à l'intérêt de l'Etat : de là le communisme de Platon dans son livre de « la République ». La pénalité n'est qu'une expiation.

Aristote (384-322. Né à Stagyre, en Thrace ; disciple de Platon ; précepteur d'Alexandre le Grand).

a) *Sa philosophie.* — Pour lui, l'être ne consiste pas comme Platon l'a cru, dans l'universel, mais dans l'individuel. L'acte le plus parfait c'est la pensée, c'est elle qui constitue l'existence, *exister c'est penser.* L'acte vraiment propre à l'homme n'est ni le mouvement, ni la vie, ni le plaisir, qui nous sont communs avec les êtres inférieurs, c'est l'exercice de la raison, c'est la pensée rationnelle.

b) *Sa morale.* — Aristote distingue : 1° Une vertu suprême : *la contemplation de la vérité* ou sagesse contemplative ; 2° les vertus pratiques, qui ont pour but de soumettre nos facultés à une sorte de discipline propre à les mettre au service de la sagesse contemplative. Les vertus pratiques ou inférieures consistent en un juste milieu entre les extrêmes. Ainsi le courage est un juste milieu entre la témérité et la lâcheté. L'exercice des vertus pratiques est un combat, mais leur récompense est la paix de la vertu contemplative.

La morale sociale comprend deux grandes vertus : l'amitié ou la philanthropie et la justice. D'où chez Aristote : 1° une théorie de l'*amitié* : l'amitié suppose l'égalité, notre ami est un autre nous-même. Il est meilleur et plus doux encore d'aimer que d'être aimé, de faire le bien que de le recevoir ; 2° une théorie de la *justice* : celle-ci est le respect de l'égalité. Elle a deux formes : une justice de distribution et une justice d'échange. La première réclame la distribution des biens entre les personnes proportionnellement au mérite. La seconde s'efforce de maintenir l'équivalence entre les objets échangés, soit dans les contrats de vente et d'achat, soit dans la réparation des torts.

c) *Sa politique.* — En *politique*, Aristote dit que l'Etat est une réunion *d'hommes libres et égaux.* Il réfute les théories communistes de Platon et montre que la propriété commune est moins bien gérée que la propriété individuelle. Il partage la société en hommes libres et en esclaves, fondant l'*esclavage* sur la nature même des choses. Il montre que la souveraineté appartient à tous ; sa politique est *démocratique.* Il expose une théorie des révolutions en indiquant que la cause de celles-ci est le mépris de la véritable égalité.

Le Pyrrhonisme, doctrine de Pyrrhon, est la doctrine du *scepticisme* : la sagesse consiste à ne rien affirmer et à toujours suspendre son jugement.

L'Epicurisme ou doctrine du philosophe *Epicure*, qui naquit à Athènes un peu avant la mort de Platon. Epicure affirme que toute connaissance vient des sens, que toute existence se réduit à la matière. *Le souverain bien est le plaisir stable*, non le plaisir mobile et fugitif. Toute la morale consiste dans l'art d'être heureux. Pour être heureux il faut être sage, sobre, scrupuleux et pratiquer l'amitié.

Le Stoïcisme. — L'école stoïcienne fut fondée à Athènes, vers l'an 300, par le philosophe *Zénon*. Les stoïciens professent que la matière est passive, que seule la raison est active. Leur doctrine morale comprend :

1° Une doctrine de la liberté : il y a dans l'individu un principe intime de liberté, à savoir la *volonté* faisant effort sur soi et luttant contre les obstacles extérieurs. Il y a des choses qui dépendent de nous, comme *la force d'âme*, c'est en elles que se trouve le bien proprement dit. La volonté seule peut être bonne ou mauvaise, les choses qui ne dépendent pas de nous, comme les richesses ou la santé sont agréables ou désagréables, vraies ou fausses, mais non à proprement parler bonnes ou mauvaises. Le bien moral est donc le seul bien.

2° Une doctrine de la *fraternité* et de la *justice* : la liberté ou raison qui est l'essence de l'homme, le rapproche de tous ses semblables, le monde entier est une famille ; les hommes sont citoyens de l'univers, l'esclavage blesse la fraternité et la justice.

3° Une doctrine du souverain bien qui est la vertu trouvant sa joie en elle-même. Le sage seul est libre, roi, heureux, égal ou supérieur aux dieux mêmes : il s'affranchit de plus en plus des passions et tend à *l'impassibilité.*

L'Ecole d'Alexandrie avec *Plotin* et ses successeurs s'est surtout occupée de questions théologiques. Sa doctrine philosophique est un néo-platonisme.

La Philosophie chrétienne. — La morale des philosophes chrétiens comporte :

1° Une théorie de la charité : celle-ci est l'amour de Dieu et l'amour de tous les hommes en Dieu, c'est le suprême principe de la morale, le souverain bien ;

2° une théorie de la liberté : la charité est libre par essence ;

3° une théorie de la société qui fonde celle-ci sur l'autorité et non sur le droit proprement dit. *Origène* et *Saint Augustin* sont les deux plus grands philosophes chrétiens de l'antiquité.

La Philosophie latine n'est qu'un reflet de la philosophie grecque ; avec le philosophe SÉNÈQUE, l'esclave EPICTÈTE, l'empereur MARC-AURÈLE, elle est stoïcienne.

VII. Philosophie du Moyen Age et de la Renaissance. — La philosophie du Moyen Age est la scolastique. Elle subordonne la philosophie à la théologie. Sa méthode d'explication est soit *logique ou dialectique*, soit *mystique.*

La Renaissance est caractérisée par l'étude de l'antiquité, la réforme religieuse, et les découvertes de la science qui préparent une nouvelle philosophie de la nature et par cela même une nouvelle philosophie de l'esprit.

VIII. Philosophie moderne. — XVIe siècle. — Philosophie italienne. — Selon Bruno et Campanella, tout est animé, il n'y a rien de mort, rien d'inanimé, rien de brut. Tous les êtres vivent, pensent et aiment Dieu.

Philosophie anglaise. — 1° FRANÇOIS BACON, grand chancelier d'Angleterre, dans son ouvrage le « Novum Organum » substitue l'*observation* et l'*expérimentation* au pur raisonnement des scolastiques dans l'étude de la nature.

2° Hobbes est surtout un sociologue. Pour lui tout est corps, la sensation est un mouvement, le plaisir et la douleur sont les ressorts de la machine humaine. Sa morale est celle de l'intérêt personnel. Il fonde le droit sur l'intérêt et sur la force. L'état de nature est un état de guerre où *l'homme est un loup pour l'homme* et où le plus fort est le maître. On passe de l'état de nature à l'état de société par un *contrat*, fondé sur l'inté-

rêt ; pour contraindre l'individu au respect du contrat, une force publique, puissante, est nécessaire. Hobbes réclame l'abdication de tous les droits au profit d'un *despote*.

XVIIe siècle. — Philosophie française. — Descartes (1596—1650). Le point de départ de la réflexion de Descartes est le *doute méthodique*. Mais ce doute est déjà une première affirmation : douter, c'est penser, je suis certain que je pense, penser c'est exister, je suis donc certain que j'existe. *Je pense donc je suis*, Cogito ergo sum. Descartes part de là pour établir *les règles de la méthode. Première règle* pour découvrir la vérité : n'affirmer que ce qui paraît évident. Selon Descartes, c'est la volonté qui affirme, c'est l'intelligence qui perçoit. Les règles secondaires concernent l'analyse, la synthèse et les dénombrements : Diviser le sujet en autant de parties qu'il est possible ; conduire par ordre ses pensées en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître ; faire des dénombrements si entiers qu'on soit assuré de ne rien omettre. A noter parmi ses théories celle si curieuse, mais si fausse, de l'automatisme des animaux, qui réduit les bêtes à n'être que de pures machines insensibles. *Descartes est le père de la philosophie moderne.*

Pascal (1623—1662). *Pascal* distingue trois ordres de choses : *la matière, la pensée, la charité*. Tous les corps ensemble ne valent pas le moindre des esprits. Pourtant la pensée n'est pas le principe absolu des choses, ce principe est la *charité*. Pascal n'admet qu'une charité surnaturelle et mystique qui se confond avec la grâce janséniste.

Spinoza. Sa philosophie procède d'une méthode géométrique à l'aide d'axiomes, de définitions et de démonstrations.

a) *Le déterminisme absolu.* — Cette méthode exclut la volonté humaine, c'est un essai pour réduire toutes choses aux lois d'une *nécessité absolue régissant à la fois l'être et la pensée*. L'homme n'est qu'un automate, ses pensées et ses passions s'expliquent géométriquement.

b) *Psychologie.* — Toute chose, autant qu'il est en elle, s'efforce de persévérer dans son être. Cet effort, quand il a conscience de soi s'appelle le désir. Ce qui satisfait le désir produit la joie, ce qui contrarie le désir produit la tristesse. Joie, tristesse et désir sont trois passions élémentaires d'où naissent toutes les autres. L'amour et la haine n'en sont que des dérivés.

c) *Morale.* — La morale de Spinoza est celle du déterminisme. *La nature n'a pas de but* et n'agit pas pour une fin ; elle est ce qu'elle ne peut pas ne pas être. *Le bien et le mal* ne marquent rien de positif dans les choses considérées en elles-mêmes, et *ne sont autre chose que des façons de penser*. Tout bien est relatif à nos désirs et se réduit à l'utile. L'utile est ce qui sert à nous procurer de la joie. La morale n'est donc que la science de l'utilité véritable, la science du bonheur qui ne se trouve que dans le développement de la raison, laquelle conçoit les choses sous l'idée de l'éternité. L'éternité de l'âme ne doit pas être considérée comme un salaire de la vertu, mais comme identique à la vertu même.

d) *Politique.* — La politique de Spinoza est celle de Hobbes améliorée. Dans l'état de nature, il n'y a pas d'autre droit que la force, mais le pacte social, fondement de la société, ne consiste pas, comme l'a cru Hobbes, dans une aliénation totale de la puissance individuelle. Cette aliénation, selon Spinoza, est impossible ; l'individu ne peut pas céder le pouvoir de penser : L'autorité sociale la plus forte n'est pas celle d'un despote mais celle d'un gouvernement fondé sur la volonté de tous, *d'un gouvernement républicain.*

Leibniz. — Il a l'ambition de concilier la philosophie cartésienne et la doctrine d'Aristote. Il est surtout connu par sa théorie de la *monade*. La monade est une force simple, une unité de force dont la nature est analogue à celle de nos âmes. Le monde est une hiérarchie de monades. Chaque monade agit en elle-même et par elle-même avec une entière spontanéité, comme si les autres n'existaient pas, mais dans le cadre d'une harmonie préalable. *La morale* de Leibniz montre que la liberté est la spontanéité de l'être intelligent qui connaît les raisons de ses actes. Le mal moral vient de l'ignorance et de l'erreur. Si le bien est vraiment libre, le mal ne l'est pas.

XVIIIe siècle. — Philosophie Anglaise et Ecossaise. — Locke vit à la fin du XVIIe siècle, mais sa philosophie est comme le point de départ de la philosophie du XVIIIe siècle. Selon lui, nous ne pouvons connaître l'essence même des choses, mais seulement des phénomènes : la limite de notre connaissance est celle de l'expérience.

En philosophie civile et politique, il proclame que tout droit est une liberté et que le premier des droits est la liberté elle-même. Il réfute Hobbes : l'état naturel n'est pas l'état où règne la tyrannie des plus forts, où triomphe l'inégalité entre les hommes, c'est un état de liberté et d'égalité. *Il existe des droits naturels antérieurs à la société civile et dont la société civile n'est que la protectrice* : le droit de propriété, dont le fondement est le travail, le droit de liberté individuelle (la condamnation de l'esclavage, le pouvoir paternel ramené à des devoirs), le droit de légitime défense, ayant pour conséquence le droit de punir.

La société civile et politique n'a pour but que de garantir les droits naturels ; elle est établie par un consentement commun, c'est-à-dire en vertu d'un *contrat*. Par ce contrat les hommes n'abandonnent pas leurs droits, mais seulement l'exercice personnel du droit de se faire justice. *Le pouvoir judiciaire est l'essence du pouvoir social*, il engendre le pouvoir législatif et le pouvoir exécutif. L'autorité des gouvernements a pour limites les droits naturels dont on leur a confié la défense. Locke préconise l'indépendance réciproque de la société civile et de la société religieuse.

Nous verrons plus loin les doctrines morales d'ADAM SMITH et de BENTHAM.

Philosophie française. — Elle est inspirée de la philosophie de Locke. *Diderot*, un des fondateurs de l'Encyclopédie, se représente la nature comme un grand Tout dont les individus sont les parties et dont l'universelle transformation est la loi. *D'Holbach* et *Lamettrie* professent le matérialisme, *Voltaire, Buffon, Montesquieu, Turgot, Rousseau* demeurent attachés à une philosophie spiritualiste.

Montesquieu. — a) *Les Lois.* — Montesquieu demande à la raison l'explication des lois morales et sociales. Ces lois sont les rapports nécessaires qui dérivent de la nature des choses. Elles sont relatives aux climats, aux gouvernements, aux mœurs des peuples.

b) *Les trois types de gouvernement.* — Les gouvernements sont de trois sortes :

1° Le gouvernement *despotique*, où le souverain n'a d'autre loi que sa volonté : le ressort du despotisme est la *crainte* ;

2° le gouvernement *monarchique* où le souverain commande selon les lois ; le ressort de la monarchie est une vertu de convention par laquelle chacun place sa vanité dans le respect de ses privilèges, cette vertu s'appelle *honneur* ;

3° le gouvernement *républicain* où le peuple est à la fois souverain et sujet : le ressort de la république est la *vertu politique* qui consiste dans l'amour de la patrie, de la liberté et de l'égalité.

c) *La séparation des pouvoirs.* — Montesquieu a posé le principe de la séparation des pouvoirs législatif, exécutif et judiciaire ; il proteste contre l'esclavage, demande l'abolition de la torture, l'institution du jury, l'adoucissement de la pénalité. Il réclame la tolérance religieuse. Il est un des premiers à parler du devoir d'assistance publique.

Voltaire soutient avec éloquence la cause de l'humanité, proteste contre la torture et contre l'intolérance religieuse, réclame la liberté politique et définit déjà la loi « la volonté de tous «

Rousseau. — a) *Le principe de sa politique.* Avec lui un mouvement nouveau se manifeste dans la philosophie sociale. Rousseau place le fondement de la justice sociale dans la *volonté libre*, qui est à la fois l'essence de l'individu et le principe de la société. Tout Etat doit être une association libre entre les citoyens. Le problème essentiel de la science sociale consiste à trouver une forme d'association qui défende et protège de toute la force commune la personne et les biens de chaque associé, et, par laquelle, chacun s'unissant à tous, n'obéisse pourtant qu'à lui-même et reste aussi libre qu'auparavant.

b) *Le contrat social.* — La solution de ce problème est le *contrat social* qui ne peut consister, comme Hobbes l'avait prétendu, dans l'aliénation de la liberté de tous au profit d'un seul. Selon Rousseau, la liberté qui est inaliénable en fait et en droit ne peut être aliénée qu'au profit de la liberté de tous. Rousseau croit qu'il n'y a pas alors aliénation, mais garantie et accroissement de la liberté.

c) *La loi est celle de la majorité.* — La loi est l'expression de la volonté universelle, et pour obtenir une expression de cette volonté universelle on consultera tous les membres de l'Association en convenant de suivre l'avis de la majorité.

d) *La nation et le gouvernement.* — Rousseau le premier distingue avec précision le *souverain*, qui est la société entière ou plutôt la volonté générale, et le *gouvernement*, qui est un ensemble d'hommes choisis par la société pour assurer l'exécution de la volonté générale ; l'état ou la nation ne doit pas être confondu avec le gouvernement. L'idéal de Rousseau consiste dans le gouvernement direct de tous par tous, mais comme les grands états sont contraints d'avoir recours au système représentatif, la nation ne doit avoir que des mandataires ou des commissaires toujours responsables, toujours révocables, et ayant un mandat défini. Rousseau n'admet pas que la volonté nationale abdique même momentanément en faveur de volontés individuelles : *les députés sont les mandataires de la nation et non ses représentants.*

Turgot et Condorcet développent des principes analogues à ceux de Montesquieu et surtout de Rousseau. Ils formulent pour la première fois avec précision la *doctrine du progrès et de la perfectibilité humaine.*

Philosophie allemande. — Kant. — Entre le dogmatisme et le scepticisme, Kant veut fonder une *philosophie critique*, dont le point de départ sera la critique de notre faculté de connaître, de notre raison, soit dans son usage théorique (critique de la raison pure), soit dans son usage moral (critique de la raison pratique). Nous étudierons la morale de Kant plus loin. Kant est l'auteur d'un projet de paix perpétuelle.

XIXe siècle. — Philosophie française. — Elle est représentée surtout par Maine de Biran, par Victor Cousin pour l'éclectisme, par Auguste Comte et l'école positiviste, par les économistes et les socialistes.

Maine de Biran (1766-1824) est un psychologue qui fait de la volonté l'élement essentiel de la vie psychologique. L'Ecole éclectique avec Victor Cousin (1792-1867) emprunte à chaque tendance philosophique, en vertu de ce principe : « les systèmes sont vrais parce qu'ils affirment, faux parce qu'ils nient ».

Les Economistes placent leur espérance de progrès social dans le jeu naturel des intérêts qu'ils croient harmoniques : « laissez faire, laissez passer ».

Le Saint-Simonisme et le Fouriérisme sont deux formes du *socialisme* : autoritaire avec **Saint-Simon** qui confie successivement l'autorité suprême à la science et à une religion nouvelle ; libérale chez **Fourier** qui préconise une association libre rendue attrayante par sa liberté, rémunérant chacun en raison composée « du capital, du travail et du talent ». Le Mutuellisme de **Proudhon** fonde la morale sur la justice, et la justice sur l'échange des services.

Renouvier, pour réagir contre les doctrines positivistes, restaure le kantisme en lui enlevant ce qu'il avait de trop systématique, de trop scolastique. De lui est né ce mouvement appelé *pragmatisme* qui estime une idée aux conséquences morales qu'elle entraîne.

Taine voit dans l'intelligence les conditions, la garantie de la moralité.

Renan qui fut un merveilleux écrivain fut moins un philosophe qu'un séduisant, un brillant amateur d'idées. On lui doit les premières études sérieuses d'exégèse.

Bergson, un contemporain, semble avoir renouvelé la philosophie en donnant le pas, dans la recherche de la vérité, à nos facultés d'intuition sur nos facultés d'analyse.

Léon Bourgeois a donné une forme systématique à une morale de la solidarité, *loi biologique, psychologique et sociale.* Cette doctrine poursuit tout ensemble la perfection individuelle et le progrès moral de l'humanité.

Philosophie allemande. — Fichte (1762-1814) nie l'existence du monde extérieur. **Schelling** (1775-1854) sans être un idéaliste aussi outrancier, tient le monde où nous vivons pour une dégradation du monde divin. **Hegel** (1770-1831) est aussi un idéaliste. Sa doctrine aboutit à proclamer la puissance absolue de l'Etat, la nécessité de la guerre entre les Etats, à faire de la victoire le signe de la supériorité morale d'un peuple, à proclamer que *le droit c'est la force.* **Schopenhauer** admet avec Kant notre impuissance à dépasser l'expérience, mais il croit une métaphysique, une théorie de l'univers possible dans les limites de l'expérience. Au plus bas degré du développement moral est l'égoïsme qui est l'affirmation ardente du vouloir vivre. Le sentiment moral a pour essence *la pitié* ; le plus haut degré de moralité est dans *l'anéantissement de la volonté de vivre* et par suite de tout égoïsme et même de toute individualité. Schopenhauer rejoint la morale bouddhiste. On parvient à cet anéantissement par l'*ascétisme.* Le monde où nous vivons est le plus mauvais des mondes possibles, le mal tient à la vie même. Schopenhauer est le philosophe du *pessimisme.* **Nietzsche** (1844-1900), élève de Schopenhauer, pense comme celui-ci que le monde est mauvais, que les volontés sont égoïstes. Mais il en conclut, lui, qu'il faut livrer bataille aux hommes, écraser leur égoïsme en faisant triompher le sien propre et devenir un *surhomme*, étranger au remords et à la pitié. Sa doctrine est celle de l'individualisme absolu.

Philosophie anglaise. — 1° Nous étudierons plus loin les doctrines morales anglaises, celles de **Bentham,** de **Stuart Mill,** de **Spencer** qui toutes, à des degrés divers, font de l'*utilité* le principe de la morale.

2° La philosophie naturelle a en Angleterre, au XIXe siècle, un de ses plus illustres représentants, avec **Darwin** (1809-1882). Darwin est un naturaliste qui, reprenant les idées du Français **Lamarck** (1744-1829), dit que *les espèces animales et végétales ne sont pas des cadres fixes* de la nature, que celle-ci a tiré toutes les espèces les unes des autres en partant des plus élémentaires pour aboutir aux espèces les plus élevées, par voie de *transformation* et d'*évolution.*

Tolstoï (1828-1910). Signalons enfin la doctrine de l'*humanitarisme absolu* du philosophe russe *Tolstoï* : ici l'humanité est tout, la fin de l'individu est tout entière en dehors de lui, il doit se *sacrifier à ses semblables* et suivre les élans de la pitié et de la charité. Tolstoï est d'accord en cela avec Schopenhauer qui disait que la *pitié* pressent l'unité des êtres, qu'elle est le grand mystère de la vie morale. Tolstoï rêve d'une *vie patriarcale* d'où les marchands et l'argent seraient bannis, il rêve la suppression des armées, des Etats, des Eglises, c'est-à-dire de toutes les forces de coercition ; il est contre « la justice, parce que le droit a recours à la force pour se défendre, il appelle de tous ses vœux le règne de la charité, parce qu'elle est l'amour répudiant tout usage de la force ».

Les conditions psychologiques de la vie morale

L'idéal moral ne doit pas être en opposition irréductible avec les traits fondamentaux de notre nature ; c'est un idéal humain qu'il doit offrir à nos efforts. Il convient donc de préciser les faits psychologiques dont cet idéal doit tenir compte.

I. La Sensibilité. — Elle *oriente notre pensée* dans le sens de nos *inclinations*, tourne vers elles nos souvenirs et nos imaginations. Elle crée nos aversions et nos désirs à l'égard de certains objets.

D'autre part ce sont des causes physiologiques, parfois héréditaires, des souvenirs, des sentiments plus simples qui agissent sur la sensibilité, ou forment les sentiments complexes ; la réflexion y est pour peu et notre volonté ne peut avoir sur la sensibilité qu'une action indirecte.

Nous ne pouvons avoir sur nos *émotions* qu'une action moindre encore, et seulement par le moyen d'une mise en jeu artificielle ou d'un arrêt des mouvements corporels qui les accompagnent.

II. La Volonté. — L'analyse de l'acte volontaire révèle trois phases successives :

1° *La conception* d'un acte, qu'accompagne la pensée des actes contraires ou incompatibles avec lui.

2° *La délibération*, pendant laquelle nous nous représentons les motifs opposés qui se disputent notre adhésion en nous efforçant de les subordonner aux idées qui dirigent généralement nos actions.

3° *La décision*, qui intervient quand mobiles (éléments de sensibilité) et motifs (éléments intellectuels) se sont coordonnés dans le sens de telle idée plutôt que de telle autre.

Au cours de ce débat entre motifs et mobiles, *le rôle de la volonté* est d'accorder une force particulière à l'une des idées en jeu en lui procurant le concours de l'*attention* et de la *réflexion*.

III. La Liberté. — Nous nous croyons libres, c'est à dire que nous croyons être les auteurs véritables de nos décisions.

Selon les *déterministes*, ce ne serait là qu'une illusion ; dans le débat des motifs et des mobiles ce sont, disent-ils, *les plus forts* d'entre eux qui l'emportent. Or motifs et mobiles résultent de notre tempérament, de notre caractère, de notre éducation, du milieu social où nous vivons, de circonstances etc... Notre volonté n'est qu'un rouage particulier du *mécanisme universel*.

Les partisans du *libre-arbitre* opposent que l'*attention* est une faculté qui nous libère de ce mécanisme en nous permettant de donner une force particulière à tel motif plutôt qu'à tel autre. Ils font remarquer d'ailleurs que la conscience psychologique n'a pas la rigidité d'un mécanisme, qu'elle est souple et vivante et que dès lors l'action de l'attention n'y est pas d'avance paralysée. Ils font remarquer enfin que si nos actions nous étaient, ainsi que le disent les déterministes, imposées en dehors de toute intervention de notre volonté, nous ne trouverions pas dans la *conscience morale* le sentiment de l'obligation et celui de la responsabilité ; ce seraient des sentiments absurdes.

La thèse de la liberté est plus vraisemblable que celle du déterminisme.

Objet et Caractère de la Morale

1° Les deux sens du mot morale. — Le mot *morale* du latin, mos, moris, signifie mœurs. Les moralistes ont étudié les mœurs de deux points de vue différnets : 1° à la manière de La Rochefoucauld, La Fontaine, La Bruyère et des écrivains dits « moralistes »; 2° à la manière des philosophes dont nous avons plus haut résumé les doctrines. On peut donc définir la morale soit la *science des mœurs*, soit la *science du devoir*. C'est dans ce dernier sens que nous l'entendons ici.

2° Comment on établit l'idéal moral. — *a*) On le construit le plus souvent *par le moyen du raisonnement*, en partant de certains principes de philosophie qu'on suppose justes.

Ex. : on pose comme indiscutable que les hommes sont libres et égaux et on en déduit la légitimité et les traits essentiels du régime démocratique.

Quant aux principes qui servent de point de départ on les tire soit de *dogmes religieux*, soit de l'examen de la *conscience morale*.

On estime alors que cette déduction d'idées est la seule méthode qui convienne à une science dont l'objet est de fixer un idéal et qui n'a pas par suite à chercher sa source dans les mœurs réelles des hommes que la morale a justement pour objet d'améliorer.

b) Par contre, certains moralistes pensent que la règle des mœurs doit *se tirer de l'observation des mœurs réelles*, de la même manière que les règles de l'hygiène se tirent de la biologie ; la morale ne serait qu'une *science appliquée*.

Parmi les moralistes, les uns tirent la loi morale de l'*observation de la nature psychologique* de l'homme, où ils croient voir une tendance générale à rechercher du bonheur (les philosophes utilitaires); les autres, les positivistes et les sociologues voient dans la morale une science appliquée des sciences sociales : ils cherchent *l'origine de la loi dans la sociologie*.

c) En réalité *nulle source ne peut suffire* à tous les besoins de la pensée et de la conscience ; nul système ne peut donner une réponse à toutes les objections qui peuvent lui être faites.

En réalité encore les systèmes de morale répondent à la situation philosophique, politique, sociale, économique du temps où ils s'imposent. Nul n'a pu se maintenir quand ces conditions ont changé.

d) Toutefois, si les systèmes sont divers, l'existence même de la morale s'impose par suite de certaines notions ou données fondamentales qui constituent ce qu'on appelle la *conscience morale*.

3° Morale théorique et morale pratique. — L'une traite *du devoir*, l'autre *des devoirs* ; l'une fixe les caractères généraux de la conduite, l'autre prescrit ce qu'il convient de faire selon que nos actions regardent nous-mêmes, ou les autres hommes et parmi ceux-ci nos parents, nos amis, nos concitoyens etc... etc.

La Conscience morale
Ses données
Obligation et responsabilité

I. La conscience morale. — 1° *Définition de la conscience morale.* — C'est la conscience psychologique appliquée aux faits moraux, c'est la connaissance qu'ont tous les hommes, quelles que soient les différences de temps, de pays, de civilisations, d'un certain idéal de

conduite qui s'impose à eux comme obligatoire, c'est en définitive la connaissance que nous avons de la valeur de nos sentiments, de nos idées et de nos actes, *c'est le discernement du bien et du mal.*

2° *La conscience est diverse.* — Suivant notre degré d'intelligence, de sensibilité, de volonté, suivant l'éducation reçue, les milieux fréquentés, la conscience diffère d'un individu à l'autre. Si l'on compare les peuples entre eux, on verra de semblables différences. C'est ainsi que les sauvages des îles Figi considèrent comme un devoir de tuer leurs parents devenus vieux, alors que les Indiens montagnards pratiquent toutes les vertus des peuples civilisés.

3° *La conscience varie.* — La même diversité se retrouve entre les différentes générations : les croyances morales des Français d'aujourd'hui ne sont pas celles des Français du Moyen Age. Toutes les contradictions de la conscience prouvent que la conscience évolue, que ses jugements et ses sentiments varient, mais partout se révèle un idéal moral.

4° *Il y a une éducation de la conscience.* — La conscience a son principe en nous, mais elle est dans ses prescriptions particulières le produit de l'éducation et de la nature. Comme le disait Mirabeau, s'il est contraire à la morale d'agir contre sa conscience, il ne l'est pas moins de se faire une conscience d'après des principes faux et arbitraires : l'obligation de faire l'éducation de la conscience est une des prescriptions les plus impératives de la morale.

II. Les données de la conscience morale. — Les données de la conscience morale sont *l'idée et le sentiment d'une obligation*, c'est-à-dire d'un devoir ; et l'idée et le sentiment d'une *responsabilité*, c'est-à-dire d'un mérite ou d'un démérite, entraînant une sanction, récompense ou punition.

Les notions d'obligation et de sanction diffèrent suivant que les morales professées sont *intuitives, naturalistes* ou *rationalistes.*

Les morales intuitives sont celles où l'on cherche dans la conscience même les principes de la morale.

Les morales naturalistes sont celles où on les cherche dans les faits psychologiques ou moraux.

Les morales rationalistes celles où l'on cherche dans la raison.

1° L'obligation morale. — a) *Dans les morales intuitives.* — *L'obligation* dans les morales intuitives a été analysée par le philosophe Kant. Selon lui, une seule chose peut être tenue pour bonne, c'est *une bonne volonté* qui se manifeste par des ordres donnés en nous à la personne morale. L'obligation, dit-il, est un commandement unique en son genre : un impératif de la conscience, un *impératif catégorique*, c'est-à-dire qui commande purement et simplement, sans conditions. L'impératif catégorique s'oppose à l'*impératif hypothétique* qui prescrit d'une manière conditionnelle. L'impératif hypothétique dira : « Si tu veux être riche, travaille » ; l'impératif catégorique : « Tu dois travailler ». L'acte de l'impératif catégorique *n'est pas un moyen* en vue d'une fin (être riche), il est à lui-même sa propre fin (il faut que tu travailles).

Cette obligation morale est *universelle* en ce sens qu'une fois dégagée de tout ce qui n'est pas elle, elle est la même partout, et chaque individu en a une idée claire et distincte. Elle est *à priori* parce qu'elle ne vient pas de l'expérience, mais directement de la conscience.

b) *Dans les morales naturalistes.* — *L'obligation* dans les morales naturalistes et utilitaires n'est que l'effet de l'*expérience et de l'hérédité* qui la fixent dans la conscience. Elle n'est ni universelle ni à priori. Selon ces morales l'homme est d'abord guidé dans ses actions par l'intérêt personnel, par l'égoïsme, ce n'est que peu à peu qu'il s'élève au désintéressement. Arrivé là, il considère comme obligatoires tous les actes qui renforcent le lien social, parce qu'il éprouve un sentiment de malaise quand il ne satisfait pas son instinct social. L'obligation morale sort ainsi de l'expérience.

c) *Dans les morales rationalistes.* — *L'obligation* dans les morales rationalistes dérive de l'idée du bien, d'un idéal qui prend sa source dans la raison (les stoïciens).

2° La responsabilité morale. — La responsabilité morale est un sentiment qui nous fait éprouver pour nous-mêmes de la satisfaction ou du remords suivant que nous avons fait le bien ou le mal ; de l'estime, de l'admiration, du respect, du mépris ou de l'indignation pour les autres suivant qu'ils ont bien ou mal agi.

a) Ces sentiments et les idées qui y sont jointes (responsabilité, mérite et démérite, sanction) sont considérés par les *morales intuitives et rationalistes* comme des *éléments primitifs*, fondamentaux *de notre nature.* Elles les renforcent généralement par les sanctions d'une vie future.

b) Au contraire les *morales naturalistes* dérivent ces idées et ces sentiments de l'*expérience.* Les uns et les autres sont un enrichissement de notre nature. Selon ces doctrines les vraies sanctions de nos actes ne sont pas celles surajoutées de la conscience. Ce sont : 1° *les sanctions naturelles*, conséquences de nos actions à l'égard de notre santé et de nos biens : les vices ruinent notre santé et notre fortune ; l'homme vertueux échappe à ces maux. Cependant il faut reconnaître que le vice n'est pas toujours puni. 2° *les sanctions légales* infligées par les tribunaux. Mais un grand nombre de mauvaises actions échappent à la répression (ingratitude, mensonge etc...) ; la justice est sujette à erreur. 3° *la sanction de l'opinion* : celui qui fait le bien est estimé, celui qui fait le mal est méprisé ; mais l'opinion est souvent injuste, aveugle, hésitante.

c) Certains philosophes (Nietzsche, Reclus, Guyau) ont proposé des morales ne comportant *ni obligations, ni sanctions.* L'élite morale peut s'en satisfaire ; l'homme de bien n'agit pas en vue d'une récompense ; mais la majorité des hommes ont besoin du stimulant ou du frein des sanctions.

d) *Concluons* sur la valeur des différentes sanctions. Elles ont toutes leur prix. Mais il faut reconnaître que c'est vis-à-vis de nous-mêmes que nous sommes d'abord moralement responsables ; *les sanctions fondamentales sont celles de la conscience* ; les autres viennent y ajouter leur poids mais nous n'acceptons le jugement d'autrui (opinion et tribunaux), celui des événements (sanctions naturelles) qu'autant qu'ils s'accordent avec le témoignage de notre conscience.

Les Mobiles de la conduite et les fins de la vie humaine

Les *mobiles de la conduite* sont les impulsions qui nous font agir.

Les *fins de la vie humaine* sont les termes, les buts auxquels tendent nos actions. La morale théorique a précisément pour but de chercher quelle est, au regard de la conscience, la fin de la vie humaine. Il y a plusieurs réponses à cette question, d'où les diverses morales.

MORALE DU PLAISIR

1° Morale du plaisir pur. — Cette doctrine dit que *le bien est le plaisir poursuivi sous toutes ses formes aveuglément et sans choix.* Elle fut enseignée au IVe siècle avant notre ère par *Aristippe de Cyrène.* Ses disciples, *les Cyrénaïques*, conduits au dégoût de la vie par cette morale de la volupté, en vinrent à prêcher le suicide au point que leurs écoles furent fermées par l'autorité publique.

Les phalanstères de Fourier. — Dans les temps modernes *Charles Fourier*, philosophe du début du XIXe siècle, essaya dans une doctrine plus modérée de reprendre le principe du plaisir, ou, comme il dit, de la *passion.* Selon lui il convient de permettre à chaque homme de suivre ses passions sans rencontrer d'obstacles de la part de ceux qui ont les mêmes passions que lui. Il

crut y réussir en groupant es hommes en petites communautés de 1.800 à 2.000 personnes, appelées *Phalanstères*, dans lesquelles aux douze passions principales correspondaient douze genres d'occupations différentes, chaque homme choisissant l'occupation qui convenait à sa nature.

2° **La doctrine d'Epicure.** — Prendre les plaisirs sans choix, sans discernement, c'est se condamner à la souffrance. L'homme raisonnable arrive vite à comprendre qu'il y a pour lui avantage à se priver de certains plaisirs et même à affronter certaines douleurs : *le Bien n'est donc pas le plaisir pur, c'est le plaisir poursuivi avec intelligence et discernement* ; tel est le principe de la doctrine d'Epicure.

Epicure distingue *les plaisirs en mouvement* qui s'altèrent, causent des douleurs et sont instables, et *les plaisirs en repos* qui sont en réalité les plaisirs du souvenir et de l'imagination, qui sont stables et toujours à notre disposition. Epicure, après avoir constaté que chercher le plaisir et fuir la douleur est la loi universelle des vivants, ajoute que l'homme, animal intelligent et raisonnable, doit appliquer son intelligence à la recherche du plaisir en prenant pour guide la raison.

De ce précepte général il tire les quatre règles suivantes de la conduite : 1° prenez le plaisir qui ne doit être suivi d'aucune peine ; 2° fuyez la peine qui n'amène aucun plaisir ; 3° fuyez la jouissance qui doit vous priver d'une jouissance plus grande, ou vous causer plus de peine que de plaisir ; 4° prenez la peine qui vous délivre d'une peine plus grande ou qui doit être suivie d'un grand plaisir. L'Epicurisme recommande toutes les vertus au nom du plaisir qu'elles procurent et des avantages qu'on en retire. Certes, l'épicurisme peut produire la sagesse pratique, mais qu'est-ce que cette frugalité qui n'est qu'un calcul en vue d'épargner l'estomac? Qu'est-ce que cette bienfaisance qui n'a pour but que de susciter en notre faveur la bienfaisance d'autrui? D'ailleurs le plaisir le plus sûr est toujours relatif et par cela même instable ; de plus il ne dépend pas de nous.

La morale du plaisir est d'une médiocre élévation sous toutes ses formes ; même sous la forme que lui donne Epicure elle n'est pas sûre d'atteindre son pauvre objet.

MORALE DU SENTIMENT

Cette doctrine se fonde sur divers sentiments : la pitié, l'honneur, la sympathie.

Son théoricien le plus qualifié fut ADAM SMITH, philosophe écossais du XVIIIe siècle qui érige la *sympathie* en règle de conduite. Pour lui *les actions bonnes sont celles qui attirent la sympathie, les actions mauvaises, celles qui excitent l'antipathie.* C'est par sympathie que nous nous efforçons d'être agréables et utiles aux autres. La sympathie explique toutes les vertus.

ROUSSEAU croit de même que *l'homme est naturellement bon,* qu'il prend plaisir à faire le bien. Notre devoir sera donc d'obéir aux inspirations du cœur ; le mal vient de la violence que nous faisons à nos sentiments naturels sous la contrainte de la civilisation.

La doctrine du sentiment nous propose comme fin les affections proprement dites, elle nous dit de nous laisser guider par le cœur. S'il est exact que le sentiment soit un ressort puisssant de l'activité, il n'en reste pas moins qu'il est parfois capricieux et aveugle. MUSSET disait : l'esprit n'y voit pas clair avec les yeux du cœur. C'est la raison seule qui peut nous dire si nos sentiments sont purs, elle seule peut fixer leur valeur morale.

MORALE DE LA RAISON OU DU DEVOIR

La morale utilitaire et celle du sentiment érigent en loi de la conduite un mode de notre sensibilité, l'égoïsme ou les sentiments altruistes. Après *Socrate,* une lignée de philosophes ont pris la raison pour guide de la conduite. Leur doctrine a trouvé sa systématisation la plus parfaite dans la morale de KANT.

Morale de Kant. (Philosophe allemand du XVIIIe siècle). — Jusqu'à Kant, on faisait reposer la morale de la raison sur la métaphysique. Kant, après avoir démontré dans la *Critique de la raison pure* que la raison est impuissante à sortir d'elle-même pour atteindre le fond même des choses, pour saisir la nature de l'âme et prouver l'existence de Dieu, montre, dans la *Critique de la raison pratique* que l'on peut faire reposer toute une métaphysique sur la notion d'obligation morale qui lui paraît avoir une certitude absolue. Selon lui la raison est régulatrice de la volonté et lui impose un *commandement d'une nature spéciale, le devoir* qui est un *impératif catégorique,* dont nous avons une *intuition* directe et universelle.

Pour avoir une conduite vraiment morale, nous devons agir uniquement par respect pour le devoir, sans aucun autre motif d'action. Kant considère même que le plaisir que nous pourrions avoir à faire le bien est nuisible à la moralité.

Il donne les deux formules qui doivent diriger toutes nos actions, en considérant l'homme comme une *personne raisonnable et libre,* inviolable en soi et en autrui :

1° *Agis toujours de telle sorte que le principe de ton action puisse être érigé en loi universelle.*

2° *Agis toujours en prenant la personne humaine, chez toi et chez les autres, comme fin et jamais comme moyen.*

Cette morale est admirable comme détermination de l'idéal de la volonté humaine, mais elle suspecte trop le cœur et ne tient pas compte de l'imperfection de la nature humaine.

La morale de la raison, comme la morale du sentiment, est une *morale intuitive* qui cherche dans la conscience, le mobile et la fin de la vie humaine.

Doctrines morales de l'Utilitarisme. — Ce sont celles des philosophes qui prétendent que notre conduite doit tendre à atteindre le plaisir, à éviter la souffrance, pour trouver *le bonheur.* Le bonheur est une moyenne des plaisirs et des peines où les premiers l'emportent sur les secondes. Dans le sens de ces doctrines ce qui est *utile* c'est ce qui contribue au bonheur.

1° MORALES DE L'INTÉRÊT PERSONNEL

Tous les philosophes de l'antiquité pensaient que l'observation d'une doctrine morale, même fondée sur la raison, doit conduire au bonheur. La doctrine d'Epicure, bien qu'établie sur le plaisir est une doctrine du bonheur, c'est-à-dire utilitaire. Epicure montre que nous avons intérêt à être tempérants, bienfaisants, justes, courageux.

Mais les anciens ne se sont pas aperçus que notre bonheur est lié à celui du plus grand nombre et que pour être heureux il faut rechercher dans une certaine mesure le bonheur d'autrui. C'est sur cette considération qu'ont été établies les morales anglaises de l'intérêt général, celles de Bentham, de Stuart Mill, de Spencer.

2° MORALES DE L'INTÉRÊT GÉNÉRAL

BENTHAM, juriconsulte, philosophe et publiciste anglais du XVIIIe siècle, enseigne qu'en législation et en morale, on ne doit admettre d'autre règle que l'utilité. Cela seul est bon qui nous est utile à nous-mêmes, qui est en même temps utile aux autres. Il faut, dit-il, rechercher : « *le plus grand bonheur pour le plus grand nombre.* »

Avant d'accomplir un acte, nous devons donc nous demander quel plaisir il en résultera pour nous et pour les autres hommes. Bentham pense qu'on peut par une sorte d'arithmétique morale résoudre la question au moyen du calcul ; il suffirait selon lui de donner un coefficient aux *qualités* reconnues dans les plaisirs et les peines qui suivent un acte. Exemple: le calcul appliqué à la tempérance et à l'ivrognerie donne les résultats suivants :

conduite qui s'impose à eux comme obligatoire, c'est en définitive la connaissance que nous avons de la valeur de nos sentiments, de nos idées et de nos actes, *c'est le discernement du bien et du mal.*

2° *La conscience est diverse.* — Suivant notre degré d'intelligence, de sensibilité, de volonté, suivant l'éducation reçue, les milieux fréquentés, la conscience diffère d'un individu à l'autre. Si l'on compare les peuples entre eux, on verra de semblables différences. C'est ainsi que les sauvages des îles Figi considèrent comme un devoir de tuer leurs parents devenus vieux, alors que les Indiens montagnards pratiquent toutes les vertus des peuples civilisés.

3° *La conscience varie.* — La même diversité se retrouve entre les différentes générations : les croyances morales des Français d'aujourd'hui ne sont pas celles des Français du Moyen Age. Toutes les contradictions de la conscience prouvent que la conscience évolue, que ses jugements et ses sentiments varient, mais partout se révèle un idéal moral.

4° *Il y a une éducation de la conscience.* — La conscience a son principe en nous, mais elle est dans ses prescriptions particulières le produit de l'éducation et de la nature. Comme le disait Mirabeau, s'il est contraire à la morale d'agir contre sa conscience, il ne l'est pas moins de se faire une conscience d'après des principes faux et arbitraires : l'obligation de faire l'éducation de la conscience est une des prescriptions les plus impératives de la morale.

II. Les données de la conscience morale. — Les données de la conscience morale sont *l'idée et le sentiment d'une obligation*, c'est-à-dire d'un devoir ; et l'idée et le sentiment d'une *responsabilité*, c'est-à-dire d'un mérite ou d'un démérite, entraînant une sanction, récompense ou punition.

Les notions d'obligation et de sanction diffèrent suivant que les morales professées sont *intuitives, naturalistes* ou *rationalistes.*

Les morales intuitives sont celles où l'on cherche dans la conscience même les principes de la morale.

Les morales naturalistes sont celles où on les cherche dans les faits psychologiques ou moraux.

Les morales rationalistes celles où l'on cherche dans la raison.

1° **L'obligation morale.** — a) *Dans les morales intuitives.* — *L'obligation* dans les morales intuitives a été analysée par le philosophe Kant. Selon lui, une seule chose peut être tenue pour bonne, c'est *une bonne volonté* qui se manifeste par des ordres donnés en nous à la personne morale. L'obligation, dit-il, est un commandement unique en son genre : un impératif de la conscience, un *impératif catégorique*, c'est-à-dire qui commande purement et simplement, sans conditions. L'impératif catégorique s'oppose à l'*impératif hypothétique* qui prescrit d'une manière conditionnelle. L'impératif hypothétique dira : « Si tu veux être riche, travaille » ; l'impératif catégorique : « Tu dois travailler ». L'acte de l'impératif catégorique *n'est pas un moyen* en vue d'une fin (être riche), il est à lui-même sa propre fin (il faut que tu travailles).

Cette obligation morale est *universelle* en ce sens qu'une fois dégagée de tout ce qui n'est pas elle, elle est la même partout, et chaque individu en a une idée claire et distincte. Elle est *à priori* parce qu'elle ne vient pas de l'expérience, mais directement de la conscience.

b) *Dans les morales naturalistes.* — *L'obligation* dans les morales naturalistes et utilitaires n'est que l'effet de l'*expérience et de l'hérédité* qui la fixent dans la conscience. Elle n'est ni universelle ni à priori. Selon ces morales l'homme est d'abord guidé dans ses actions par l'intérêt personnel, par l'égoïsme, ce n'est que peu à peu qu'il s'élève au désintéressement. Arrivé là, il considère comme obligatoires tous les actes qui renforcent le lien social, parce qu'il éprouve un sentiment de malaise quand il ne satisfait pas son instinct social. L'obligation morale sort ainsi de l'expérience.

c) *Dans les morales rationalistes.* — *L'obligation* dans les morales rationalistes dérive de l'idée du bien, d'un idéal qui prend sa source dans la raison (les stoïciens).

2° **La responsabilité morale.** — La responsabilité morale est un sentiment qui nous fait éprouver pour nous-mêmes de la satisfaction ou du remords suivant que nous avons fait le bien ou le mal ; de l'estime, de l'admiration, du respect, du mépris ou de l'indignation pour les autres suivant qu'ils ont bien ou mal agi.

a) Ces sentiments et les idées qui y sont jointes (responsabilité, mérite et démérite, sanction) sont considérés par les *morales intuitives et rationalistes* comme des *éléments primitifs*, fondamentaux *de notre nature.* Elles les renforcent généralement par les sanctions d'une vie future.

b) Au contraire les *morales naturalistes* dérivent ces idées et ces sentiments de l'*expérience.* Les uns et les autres sont un enrichissement de notre nature. Selon ces doctrines les vraies sanctions de nos actes ne sont pas celles surajoutées de la conscience. Ce sont : 1° *les sanctions naturelles*, conséquences de nos actions à l'égard de notre santé et de nos biens : les vices ruinent notre santé et notre fortune ; l'homme vertueux échappe à ces maux. Cependant il faut reconnaître que le vice n'est pas toujours puni. 2° *les sanctions légales* infligées par les tribunaux. Mais un grand nombre de mauvaises actions échappent à la répression (ingratitude, mensonge etc...) ; la justice est sujette à erreur. 3° *la sanction de l'opinion* : celui qui fait le bien est estimé, celui qui fait le mal est méprisé ; mais l'opinion est souvent injuste, aveugle, hésitante.

c) Certains philosophes (Nietzsche, Reclus, Guyau) ont proposé des morales ne comportant *ni obligations, ni sanctions.* L'élite morale peut s'en satisfaire ; l'homme de bien n'agit pas en vue d'une récompense ; mais la majorité des hommes ont besoin du stimulant ou du frein des sanctions.

d) *Concluons* sur la valeur des différentes sanctions. Elles ont toutes leur prix. Mais il faut reconnaître que c'est vis-à-vis de nous-mêmes que nous sommes d'abord moralement responsables ; *les sanctions fondamentales sont celles de la conscience* ; les autres viennent y ajouter leur poids mais nous n'acceptons le jugement d'autrui (opinion et tribunaux), celui des événements (sanctions naturelles) qu'autant qu'ils s'accordent avec le témoignage de notre conscience.

Les Mobiles de la conduite et les fins de la vie humaine

Les *mobiles de la conduite* sont les impulsions qui nous font agir.

Les *fins de la vie humaine* sont les termes, les buts auxquels tendent nos actions. La morale théorique a précisément pour but de chercher quelle est, au regard de la conscience, la fin de la vie humaine. Il y a plusieurs réponses à cette question, d'où les diverses morales.

MORALE DU PLAISIR

1° **Morale du plaisir pur.** — Cette doctrine dit que *le bien est le plaisir poursuivi sous toutes ses formes aveuglément et sans choix.* Elle fut enseignée au IVe siècle avant notre ère par *Aristippe de Cyrène.* Ses disciples, *les Cyrénaïques*, conduits au dégoût de la vie par cette morale de la volupté, en vinrent à prêcher le suicide au point que leurs écoles furent fermées par l'autorité publique.

Les phalanstères de Fourier. — Dans les temps modernes *Charles Fourier*, philosophe du début du XIXe siècle, essaya dans une doctrine plus modérée de reprendre le principe du plaisir, ou, comme il dit, de la *passion.* Selon lui il convient de permettre à chaque homme de suivre ses passions sans rencontrer d'obstacles de la part de ceux qui ont les mêmes passions que lui. Il

crut y réussir en groupant es hommes en petites communautés de 1.800 à 2.000 personnes, appelées *Phalanstères*, dans lesquelles aux douze passions principales correspondaient douze genres d'occupations différentes, chaque homme choisissant l'occupation qui convenait à sa nature.

2° **La doctrine d'Epicure.** — Prendre les plaisirs sans choix, sans discernement, c'est se condamner à la souffrance. L'homme raisonnable arrive vite à comprendre qu'il y a pour lui avantage à se priver de certains plaisirs et même à affronter certaines douleurs : *le Bien n'est donc pas le plaisir pur, c'est le plaisir poursuivi avec intelligence et discernement* ; tel est le principe de la doctrine d'Epicure.

Epicure distingue *les plaisirs en mouvement* qui s'altèrent, causent des douleurs et sont instables, et *les plaisirs en repos* qui sont en réalité les plaisirs du souvenir et de l'imagination, qui sont stables et toujours à notre disposition. Epicure, après avoir constaté que chercher le plaisir et fuir la douleur est la loi universelle des vivants, ajoute que l'homme, animal intelligent et raisonnable, doit appliquer son intelligence à la recherche du plaisir en prenant pour guide la raison.

De ce précepte général il tire les quatre règles suivantes de la conduite : 1° prenez le plaisir qui ne doit être suivi d'aucune peine ; 2° fuyez la peine qui n'amène aucun plaisir ; 3° fuyez la jouissance qui doit vous priver d'une jouissance plus grande, ou vous causer plus de peine que de plaisir ; 4° prenez la peine qui vous délivre d'une peine plus grande ou qui doit être suivie d'un grand plaisir. L'Epicurisme recommande toutes les vertus au nom du plaisir qu'elles procurent et des avantages qu'on en retire. Certes, l'épicurisme peut produire la sagesse pratique, mais qu'est-ce que cette frugalité qui n'est qu'un calcul en vue d'épargner l'estomac? Qu'est-ce que cette bienfaisance qui n'a pour but que de susciter en notre faveur la bienfaisance d'autrui? D'ailleurs le plaisir le plus sûr est toujours relatif et par cela même instable ; de plus il ne dépend pas de nous.

La morale du plaisir est d'une médiocre élévation sous toutes ses formes ; même sous la forme que lui donne Epicure elle n'est pas sûre d'atteindre son pauvre objet.

MORALE DU SENTIMENT

Cette doctrine se fonde sur divers sentiments : la pitié, l'honneur, la sympathie.

Son théoricien le plus qualifié fut ADAM SMITH, philosophe écossais du XVIIIe siècle qui érige la *sympathie* en règle de conduite. Pour lui *les actions bonnes sont celles qui attirent la sympathie, les actions mauvaises, celles qui excitent l'antipathie.* C'est par sympathie que nous nous efforçons d'être agréables et utiles aux autres. La sympathie explique toutes les vertus.

ROUSSEAU croit de même que *l'homme est naturellement bon*, qu'il prend plaisir à faire le bien. Notre devoir sera donc d'obéir aux inspirations du cœur ; le mal vient de la violence que nous faisons à nos sentiments naturels sous la contrainte de la civilisation.

La doctrine du sentiment nous propose comme fin les affections proprement dites, elle nous dit de nous laisser guider par le cœur. S'il est exact que le sentiment soit un ressort puisssant de l'activité, il n'en reste pas moins qu'il est parfois capricieux et aveugle. MUSSET disait : l'esprit n'y voit pas clair avec les yeux du cœur. C'est la raison seule qui peut nous dire si nos sentiments sont purs, elle seule peut fixer leur valeur morale.

MORALE DE LA RAISON OU DU DEVOIR

La morale utilitaire et celle du sentiment érigent en loi de la conduite un mode de notre sensibilité, l'égoïsme ou les sentiments altruistes. Après *Socrate*, une lignée de philosophes ont pris la raison pour guide de la conduite. Leur doctrine a trouvé sa systématisation la plus parfaite dans la morale de KANT.

Morale de Kant. (Philosophe allemand du XVIIIe siècle). — Jusqu'à Kant, on faisait reposer la morale de la raison sur la métaphysique. Kant, après avoir démontré dans la *Critique de la raison pure* que la raison est impuissante à sortir d'elle-même pour atteindre le fond même des choses, pour saisir la nature de l'âme et prouver l'existence de Dieu, montre, dans la *Critique de la raison pratique* que l'on peut faire reposer toute une métaphysique sur la notion d'obligation morale qui lui paraît avoir une certitude absolue. Selon lui la raison est régulatrice de la volonté et lui impose un *commandement d'une nature spéciale, le devoir* qui est un *impératif catégorique*, dont nous avons une *intuition* directe et universelle.

Pour avoir une conduite vraiment morale, nous devons agir uniquement par respect pour le devoir, sans aucun autre motif d'action. Kant considère même que le plaisir que nous pourrions avoir à faire le bien est nuisible à la moralité.

Il donne les deux formules qui doivent diriger toutes nos actions, en considérant l'homme comme une *personne raisonnable et libre*, inviolable en soi et en autrui :

1° *Agis toujours de telle sorte que le principe de ton action puisse être érigé en loi universelle.*

2° *Agis toujours en prenant la personne humaine, chez toi et chez les autres, comme fin et jamais comme moyen.*

Cette morale est admirable comme détermination de l'idéal de la volonté humaine, mais elle suspecte trop le cœur et ne tient pas compte de l'imperfection de la nature humaine.

La morale de la raison, comme la morale du sentiment, est une *morale intuitive* qui cherche dans la conscience, le mobile et la fin de la vie humaine.

Doctrines morales de l'Utilitarisme. — Ce sont celles des philosophes qui prétendent que notre conduite doit tendre à atteindre le plaisir, à éviter la souffrance, pour trouver *le bonheur*. Le bonheur est une moyenne des plaisirs et des peines où les premiers l'emportent sur les secondes. Dans le sens de ces doctrines ce qui est *utile* c'est ce qui contribue au bonheur.

1° MORALES DE L'INTÉRÊT PERSONNEL

Tous les philosophes de l'antiquité pensaient que l'observation d'une doctrine morale, même fondée sur la raison, doit conduire au bonheur. La doctrine d'Epicure, bien qu'établie sur le plaisir est une doctrine du bonheur, c'est-à-dire utilitaire. Epicure montre que nous avons intérêt à être tempérants, bienfaisants, justes, courageux.

Mais les anciens ne se sont pas aperçus que notre bonheur est lié à celui du plus grand nombre et que pour être heureux il faut rechercher dans une certaine mesure le bonheur d'autrui. C'est sur cette considération qu'ont été établies les morales anglaises de l'intérêt général, celles de Bentham, de Stuart Mill, de Spencer.

2° MORALES DE L'INTÉRÊT GÉNÉRAL

BENTHAM, juriconsulte, philosophe et publiciste anglais du XVIIIe siècle, enseigne qu'en législation et en morale, on ne doit admettre d'autre règle que l'utilité. Cela seul est bon qui nous est utile à nous-mêmes, qui est en même temps utile aux autres. Il faut, dit-il, rechercher : « *le plus grand bonheur pour le plus grand nombre.* »

Avant d'accomplir un acte, nous devons donc nous demander quel plaisir il en résultera pour nous et pour les autres hommes. Bentham pense qu'on peut par une sorte d'arithémétique morale résoudre la question au moyen du calcul ; il suffirait selon lui de donner un coefficient aux *qualités* reconnues dans les plaisirs et les peines qui suivent un acte. Exemple : le calcul appliqué à la tempérance et à l'ivrognerie donne les résultats suivants :

Ivrognerie

Intensité	Durée	Certitude	Proximité	Pureté
+ 30	+ 10	+ 10	+ 20	— 20

Etendue	Fécondité	
— 20	— 10	= 20

Tempérance

Intensité	Durée	Certitude	Proximité	Pureté
+ 20	+ 10	+ 10	+ 20	+ 30

Etendue	Fécondité	
+ 20	+ 30	= 140

Il y a donc avantage pour nous et pour les autres à ce que nous soyons tempérants.

STUART MILL, philosophe et économiste anglais (1806-1873), pense que nous devons toujours agir pour le bien d'autrui parce que nous éprouvons de la joie au bonheur que nous créons chez les autres et de la souffrance au spectacle des maux que nous leur infligeons. Il faut s'oublier soi-même pour être heureux.

SPENCER reconnaît qu'il y a des règles de conduite qui s'imposent à nous comme des *devoirs*, ainsi que le disent les philosophes rationalistes. Mais il est utilariste en ce sens que selon lui ces règles ne sont pas dictées par la raison. Elles viennent de l'égoïsme primitif de l'homme, *transformé* en altruisme, par le moyen de l'hérédité, sous la pression de la société qui, par essence, réclame des individus le sacrifice de leurs intérêts personnels à l'intérêt général. La morale de Spencer est fondée sur la doctrine de l'Evolution.

Critique de l'Utilitarisme. — 1° *Il n'est pas exact qu'il n'y ait chez nous que des tendances égoïstes.* 2° Ce que nous savons des sociétés primitives permet de dire que l'égoïsme n'y triomphe pas, que l'individu y est plus délibérément, plus cruellement parfois, sacrifié à l'intérêt général que dans nos sociétés civilisées ; *l'évolution ne s'est pas faite dans le sens qu'indique Spencer.* 3° *C'est une erreur psychologique* de dire que le but de notre activité est la recherche du plaisir : en réalité notre activité, quand nous ne lui imposons pas une règle, résulte des appétits, des tendances, des habitudes de notre nature ; *le plaisir et la peine ne sont que des conséquences de cette activité ; ils n'en sont pas le but.*

L'ASCÉTISME

C'est la doctrine diamétralement opposée à l'utilitarisme : *le plaisir est un mal* parce qu'il nous distrait des véritables biens moraux, de la mort, de la pensée de la vie éternelle ; *la douleur est un bien* parce qu'elle nous détache de l'existence.

Ce qu'il y a de vrai dans l'ascétisme : l'obéissance à des règles morales exige un effort, parfois même suscite la douleur. Son *erreur* : il pousse à la haine de la vie ; il n'est pas une doctrine humaine.

LE DEVOIR ET LE BONHEUR

La doctrine du Devoir (de la Raison) et celles du Bonheur que nous venons d'exposer *sont-elles opposées* au point qu'on ne puisse à la fois faire son devoir et être heureux ?

En réalité nous serons heureux si nous faisons notre devoir : le bonheur a pour condition une vie normale et bien réglée ; or la soumission à des devoirs a justement pour conséquence de régler la vie. *Le Sage est heureux.*

LA MORALE POSITIVISTE

Selon Auguste Comte (1798-1857), Durkheim (1858-1917) la conscience morale n'a pas sa source dans la raison ; elle n'est rien autre que le reflet d'un chaque individu des manières d'agir, de sentir, de penser qui ont cours dans la société où nous vivons. Ces manières d'être s'imposent à nous parce qu'elles sont collectives et elles nous apparaissent par suite comme des devoirs.

La faiblesse du positivisme est qu'il ne saurait rien répondre à celui qui se refuserait à se soumettre aux prescriptions collectives de la Société.

La loi morale n'a sa source ni dans les décrets de la Société, ni dans les tendances de notre sensibilité. Elle est fille de la Raison.

Les Devoirs

Questions de morale individuelle

1° **Le sentiment de la responsabilité.** — a) *Responsabilité sociale et responsabilité morale.* — Nous sommes responsables des actions que nous avons accomplies sciemment et volontairement. Nous en sommes responsables devant une autorité, soit devant une *autorité sociale* (opinion publique, tribunaux), soit devant une *autorité morale* : notre conscience.

b) *Le problème de la liberté.* — Les philosophes discutent de savoir si l'homme choisit véritablement ses décisions, c'est-à-dire s'il est libre. *Les fatalistes* croient qu'une force extérieure à l'homme (Destin ou Dieu) lui impose ses actions. *Les déterministes* pensent qu'une action est la résultante nécessaire des conditions physiques, physiologiques, sociales, morales qui s'imposent à un homme à un moment donné ; selon eux la liberté, *le libre arbitre*, n'est qu'une apparence trompeuse.

Sans entrer dans la discussion du problème de la liberté nous dirons :

Qu'il est exact que nous subissons des influences, que nous en avons subi qui orientent notre action par avance.

Toutefois que dans le cadre de ces influences, il nous reste une liberté appréciable et, surtout, que nous avons les moyens de réagir contre nos tendances fâcheuses grâce à un pouvoir particulier : celui qui nous est donné de porter notre *attention* où nous voulons et de renforcer par ce moyen les raisons que nous avons d'agir conformément au bien.

2° **La Vertu et le Vice.** — a) *Définition.* — Le mot *vertu* signifie étymologiquement force ; c'est la volonté luttant pour le devoir et pratiquant le bien ; le *vice*, c'est l'habitude du mal.

Pour qu'un acte soit bon, il faut :

Qu'on ait eu l'intention de bien faire ;

Que les conséquences en soient bonnes pour les autres. Il ne faut pas croire que l'intention suffise à tout. Pour être vertueux, il faut toujours agir suivant le bien. Aristote disait : un seul acte vertueux ne fait pas plus la vertu qu'une hirondelle ne fait le printemps.

La vertu ne saurait exister sans la mesure et sans la modération. *Aristote* disait *qu'elle est un juste milieu entre deux extrêmes.* L'économie, par exemple, est une vertu parce qu'elle se tient à égale distance de l'avarice et de la prodigalité.

b) *Les différentes sortes de devoirs personnels.* — Les *devoirs relatifs à la sensibilité* consistent à soumettre celle-ci au contrôle de la raison et de la volonté en pratiquant la *tempérance*, c'est-à-dire la modération dans les désirs et dans les plaisirs. Les *devoirs relatifs à l'intelligence* tendent, soit à nous préserver de tout ce qui peut affaiblir l'esprit, soit à nous commander ce qui permet d'en développer les puissances. La vertu propre de l'intelligence c'est la prudence, c'est-à-dire *la justesse et la mesure dans les pensées.* Elle comporte la sincérité. *Les devoirs relatifs à la volonté* consistent à conserver celle-ci libre d'entraves et à la fortifier, à la mettre en état de suivre la raison plutôt que les forces aveugles de la sensibilité et de l'habitude. La vertu propre de la volonté est le *courage.*

3° **La dignité personnelle et l'autonomie morale.** — a) *Deux doctrines au sujet de la valeur des individus.* Les moralistes qui considèrent la conscience individuelle comme un reflet de la conscience sociale disent : l'homme est ce que le fait la société ;

Les moralistes qui cherchent dans les données de la conscience l'origine du devoir proclament, au contraire, la valeur absolue de la personne humaine, sa dignité, ainsi que son autonomie.

Kant dit à ce sujet : « L'homme existe comme *fin en soi* et non pas simplement comme *moyen*, pour l'usage arbitraire de telle ou telle volonté, et dans toutes ses actions il doit toujours être considéré comme *fin*. Les êtres dont l'existence ne dépend pas de la volonté, n'ont qu'une valeur relative, celle des *moyens*, et c'est pourquoi on les appelle *des choses*, tandis qu'au contraire on donne le nom de *personnes* aux êtres raisonnables qui sont des fins en soi. Grâce à ces deux éléments, raison et liberté, la personne n'a rien au monde qui lui soit comparable : rien n'égale une personne en dignité, si ce n'est une autre personne.

La personne est à la fois législateur et sujet. Elle est *législateur*, en tant qu'elle donne des lois au nom de la raison ; *sujet*, en tant qu'elle agit d'après ces ordres de la raison. On dit par suite qu'elle jouit d'une *autonomie* trouvant en soi la loi qu'elle se donne à elle-même. La conscience affirme ainsi la dignité, l'inviolabilité de la personne humaine en soi et en autrui.

b) *Conciliation de la thèse de Kant et de la thèse des moralistes sociologues.* Les deux conceptions que nous venons d'exposer sur la valeur de l'individu ne sont pas inconciliables.

« Si la conscience n'est pas la seule force et le seul facteur dans l'ordre moral, elle est un facteur et une force, tout comme les influences extérieures à elle. Si dans une large mesure, l'individu est l'héritier du passé et le reflet du présent, il est aussi pour une part l'ouvrier de l'avenir. Et, par là, il acquiert une dignité véritable et des devoirs personnels impérieux. Le fondement des règles qui ne concernent que l'individu, c'est donc la conscience qu'il est un agent social perfectible ; que demain sera en partie fait de son effort propre. C'est bien le sentiment de sa dignité qui le guide, et cette dignité est bien la conséquence de son autonomie relative. Mais dignité et autonomie de la personne humaine ne sont plus fondées sur un principe métaphysique qui n'est peut-être qu'une chimère de la conscience, et sur la seule volonté de l'individu. Elles sont fondées sur ce fait d'observation et de bon sens que la société résulte des actions de tous les individus et que ceux-ci sont responsables, en dernière analyse, de ce qu'elle est. Les individus se perfectionnant, l'humanité en deviendra meilleure. Le progrès individuel est donc conditionné par des considérations sociales, il n'est pas abandonné à la liberté absolue de l'individu qui, d'ailleurs, au moment considéré, subit forcément l'influence d'un état social. Ainsi se concilient les deux thèses : « l'individu n'est rien, la société est tout », et, « l'individu est tout, la société n'est que ce que la font les individus, » par cette considération qu'individu et société agissent mutuellement l'un sur l'autre, comme toutes les forces naturelles ; ils sont fonction l'un de l'autre. La conscience morale de l'individu réfracte son milieu social avec un indice personnel » (Rey).

Questions de morale domestique

LA CONSTITUTION MORALE ET LE ROLE SOCIAL DE LA FAMILLE

La morale domestique (le mot latin domus signifie maison) traite des devoirs que nous avons à remplir envers tous ceux qui appartiennent à notre famille.

1° *Les formes diverses de la famille.* — La *famille* est une société de personnes unies par le sang, par une communauté d'intérêts et par l'affection. On dit souvent que la famille est la véritable cellule sociale ; toutefois chez un grand nombre de peuples barbares où la famille n'était pas constituée comme chez nous, ce n'est pas la famille mais la tribu qui est le véritable embryon social. Dans certaines de ces tribus la parenté n'avait lieu que par les femmes, c'était le régime du *matriarcat* où la mère donne son nom aux enfants. Parfois la femme avait plusieurs maris (régime de la *polyandrie*). Aujourd'hui encore chez certains peuples le mari a plusieurs femmes (régime de la *polygamie*).

Le degré de civilisation d'un peuple peut se mesurer au respect qu'on y professe pour les vertus domestiques. Rappelons, à titre documentaire, que *Platon* dans son livre de la *République* réclame la suppression de tous les liens de famille : il se défie des affections domestiques, comme entachées d'égoïsme et incompatibles avec l'unité de la patrie. Il pense que si les enfants ne connaissaient pas leurs parents, ni les frères leurs frères, tous les jeunes gens se regarderaient comme frères et sœurs, et regarderaient les adultes comme leurs pères et mères. Réciproquement les adultes auraient une tendresse paternelle pour tous les jeunes gens. Aristote réfutait déjà cette théorie en affirmant que quand on n'a pas appris à aimer son père et sa mère, on ne soupçonne même pas ce qu'est l'amour filial, et on ne l'éprouve pour personne.

2° *Constitution morale de la famille.* — *Dans la famille antique* qui était très étendue (la gens) l'autorité du chef était absolue. Les enfants étaient sa propriété, comme ses esclaves, et il avait sur eux comme sur sa femme droit de vie et de mort. *Sous le régime de la féodalité*, l'égalité des enfants est sacrifiée à l'intérêt de caste. A l'aîné de la famille passent le nom, les dignités et la fortune du père. *Actuellement* deux tendances se disputent l'organisation de la famille :

Une tendance autoritaire voudrait faire de la famille une société où le père aurait seul la direction des enfants et la haute main sur tout le groupe familial ;

Une tendance strictement individualiste qui veut réaliser l'égalité absolue des époux dans la société conjugale.

La tendance autoritaire maritale est en plein recul ; toutefois il ne semble pas que l'égalité absolue des époux soit possible ni désirable. Il restera que la famille est une société, qu'il y faut une unité de direction et que celle-ci doit être aux mains de celui qui a la charge de la vie extérieure. L'émancipation de la femme accroîtra incontestablement sa valeur morale mais lui enlèvera une partie de la sécurité dont elle jouit sous le régime de la protection maritale. L'augmentation des délits, des crimes, des suicides féminins dans les pays anglo-saxons montre que la liberté a pour rançon chez elles de multiples défaillances de la volonté.

En réalité, la direction de la société familiale devrait être assurée par une étroite entente, par une collaboration de tous les instants entre le mari et la femme.

3° *Rôle moral de la famille.* — La vie domestique est la source de toutes les vertus individuelles : c'est sous l'influence des leçons qu'il reçoit et des exemples qu'il a sous les yeux que l'enfant se fait à l'idée et à la pratique des vertus essentielles : la sincérité, le courage, la tempérance, la probité, la bonté.

4° *Rôle social de la famille.* — La famille est aussi l'école des deux grandes vertus sociales : la justice et la charité. C'est parce que la famille a un rôle social à remplir que l'Etat exerce sur elle un certain contrôle pour défendre à la fois les droits de ceux qui la composent et les droits de la société.

5° *L'autorité dans la famille.* — Puisque dans la famille la responsabilité du mari est plus grande que celle de la femme, c'est à lui qu'appartient surtout l'autorité. Cependant l'exercice de cette autorité ne doit jamais dégénérer en tyrannie. Le mari doit intéresser sa femme à ses occupations, à ses travaux, à ses projets, il doit faire tous ses efforts pour qu'il n'y ait dans la famille qu'une seule volonté. Les parents, s'ils doivent être énergiques, ne doivent pas paralyser

l'activité des enfants par un régime de compression. L'autorité dans la famille doit être une tutelle bienveillante et ferme, mais surtout équitable.

Morale sociale

DROIT, JUSTICE ET CHARITÉ

La *morale sociale* détermine les droits et les devoirs de l'homme à l'égard de ses concitoyens.

1° **Le droit.** — Les définitions du droit diffèrent suivant qu'elles ont leur source dans les morales intuitives et rationalistes ou dans les morales expérimentales et sociologiques.

a) Les morales intuitives et rationalistes fondent le droit sur l'*inviolabilité de la personne* humaine en morale individuelle comme en morale sociale : j'ai le droit de vivre, parce que je suis une personne morale, ce droit est le même pour les autres et pour moi. C'est parce que nous sommes sujets du devoir, dit Kant, que nous avons des droits. Le droit est donc un pouvoir idéal que l'homme s'attribue vis-à-vis des autres, parce que réciproquement il se reconnaît des obligations à leur égard. Le devoir et le droit ont donc le même fondement : la dignité de la personne humaine, ils sont corrélatifs.

b) Dans les morales expérimentales et sociologiques, le droit résulte de l'*observation des faits* : il s'appelle le *droit positif*; c'est l'ensemble des règles juridiques en vigueur dans un Etat. Il varie avec chaque groupement, avec chaque époque, avec chaque degré du développement humain.

Alors que les morales intuitives fondent le droit sur la conscience, disant avec Leibniz : Le droit est un pouvoir moral, les doctrines expérimentales fondent le droit tantôt sur la *force*, tantôt sur l'*utilité*.

Selon *Hobbes*, la force crée le droit, ce sont les lois imposées par la force qui engendrent le droit et le fixent. Selon *Hegel* ce qui est le meilleur au point de vue moral triomphe toujours dans l'histoire ; il en résulte que la force triomphante prime le droit, parce qu'elle est le droit nouveau et meilleur qui se substitue au droit ancien et périmé.

Pour Helvétius et Stuart Mill, le droit est la consécration de l'utilité commune. La société humaine ne subsiste que par la constitution progressive sous forme de lois des obligations nécessaires à son développement. Ces droits sont évidemment positifs et rien autre.

c) Conciliation. *En fait*, le droit est le produit, à la fois, de la conscience et de l'utilité. Comme le disent les moralistes de l'Ecole historique, le droit est le produit d'une évolution complexe : il a été à l'origine particulier à chaque classe et à chaque groupement, il s'est développé selon les circonstances du milieu, mais en même temps se développait aussi dans les sociétés humaines une conscience du droit, un idéal qu'elles tendaient à réaliser.

2° **Justice, charité.** — La *Justice* est le respect des droits. Elle impose des devoirs stricts, c'est-à-dire exigibles par les lois. Elle formule surtout des interdictions : ne tue pas, ne vole pas, etc...

La *Charité* prescrit des devoirs larges, c'est-à-dire non exigibles. Elle commande l'action : traite autrui comme un frère, aide-le à vivre, etc...

La justice correspond à des devoirs reconnus par la société, à des obligations légales. La charité ne correspond qu'à des droits idéaux que la loi ne garantit pas. La justice est la base sur laquelle s'édifie la charité. La charité achève la justice et la transforme en *équité*. Suivant le mot de Renouvier, la charité est la justice à venir.

La *Solidarité* est un devoir de justice. Elle résulte de l'observation de ce fait que les hommes dépendent à ce point les uns des autres que chacune de nos actions agit sur le bonheur ou la moralité de nos concitoyens et provoquent de la part de ceux-ci des réactions dont nous subissons nous-mêmes l'influence. Elle montre des répercussions insoupçonnées de nos actions. Elle nous impose par suite comme strict devoir de justice de toujours penser aux autres lorsque nous agissons, de lier étroitement notre sort et le leur.

LES DROITS

Les droits généraux sont le droit à la vie, le droit à la liberté, comprenant l'interdiction de toutes les formes de l'esclavage, le droit de propriété, comprenant le respect des biens d'autrui et de son honneur, de sa réputation.

1° **Le droit à la vie.** — La vie est sacrée, car l'existence est la condition de l'exercice et de la jouissance de tous les droits, de l'accomplissement de tous les devoirs. Causer la mort d'un individu est toujours fort grave, pourtant si attaqués violemment, nous n'avons d'autre moyen de nous sauver que de tuer, nous sommes dans le cas de *légitime défense*. C'est la légitime défense qui justifie le meurtre dans le cas de la guerre, ainsi que la peine de mort infligée aux assassins.

2° **Le respect de la liberté individuelle** est le principe du droit civique. La liberté est un droit naturel de l'homme. Le respect de la liberté comporte : *a*) l'interdiction de l'esclavage et du servage ; *b*) la liberté du travail ou le droit de faire tel usage que l'on croit bon de son intelligence et de son activité, le droit de décider quand, combien de temps et de quelle façon on veut travailler ; *c*) la liberté de penser ou de conscience.

3° **La liberté de penser**, conséquence de la liberté individuelle, est le fondement et la garantie de toutes les autres libertés ; c'est le droit de chercher la vérité et d'adopter l'opinion que l'on croit bonne. Nous devons laisser chacun libre de se faire une opinion sous sa propre responsabilité. Une conviction sincère a toujours droit à notre respect.

La tolérance n'est pas l'indifférence, elle est le fait d'un esprit libéral. L'intolérance et le fanatisme ont presque toujours pour causes l'étroitesse d'esprit, l'orgueil, la jalousie, l'esprit de domination et l'intérêt personnel. La liberté de penser entraîne comme conséquences la *liberté de la parole*, la *liberté de la presse* et la *liberté du culte*.

4° **La propriété et le travail.** — La propriété est un fait général, répondant à nos besoins et à nos instincts, c'est un droit naturel.

D'après la constitution de 1793 le droit de propriété est le droit qu'a tout citoyen de jouir et de disposer à son gré de ses biens, de ses revenus, des fruits de son travail et de son industrie.

a) *Son origine historique.* — L'*origine historique* du droit de propriété est assez obscure. La propriété a dû être d'abord collective, dans l'hypothèse du communisme primitif, puis le développement de l'individualisme et de l'égalité civile a conduit à la propriété individuelle. Actuellement le droit de propriété est fonction du système économique contemporain qui est le régime capitaliste.

b) *Son fondement.* — *Le fondement* de ce droit est encore plus discuté que son origine. On peut considérer que la propriété a son fondement :

Dans le droit du premier occupant ;

dans le travail qui a donné à l'objet fabriqué son prix, à la terre sa valeur ;

dans la liberté individuelle, la propriété étant considérée comme le prolongement dans les choses de la personnalité, ce qui justifie qu'on puisse en user et en disposer à son gré.

c) *Les doctrines économiques classiques.* — Pour les économistes classiques, la propriété est un effet des lois naturelles : la liberté du travail engendre la concurrence qui fait triompher les meilleurs, c'est l'origine de la propriété individuelle et de la répartition des richesses suivant les aptitudes, les mérites et les capacités de chacun. Thiers disait : « L'homme a des facultés variées, puissantes, dont l'emploi peut lui procurer ce qui lui manque. Il faut qu'il les emploie ; mais quand il les a employées, il est d'une équité évidente que le résultat de son travail lui profite à lui, non à un autre, qu'il devienne sa propriété, sa propriété exclusive. » De même un économiste classique contemporain, Leroy-Beaulieu, dit : « Approvisionnements et instruments, voilà les deux formes essentielles du capital. Elles nécessitent l'abstinence ou l'épargne et, d'autre part, le travail. Tout capital est enfant du travail et de l'épargne. »

d) *Les doctrines économiques socialistes.* — Les économistes socialistes réfutent les théories des économistes classiques en montrant certaines conséquences fâcheuses de la concurrence et de la propriété individuelle, celle-ci ne favorise pas toujours les meilleurs, et, par la création du capital, donne naissance à une minorité de possédants qui détient tous les instruments de la production. Voici comment le problème de la propriété est posé par les socialistes : « Il existe dans toute société trois sortes de richesses : deux sont naturelles :

1° La terre, sol, sous-sol, fleuves, chutes d'eau, etc... ;

2° le travail des hommes. Une est artificielle : c'est le capital, produit de la combinaison des deux premières (maisons, usines, outillages, mobiliers, etc.). A qui de l'individu ou de la société doit revenir la propriété de ces trois ordres de choses ? Tout dépend de leur origine. Qui les a faites ou contribué à faire ? Les économistes ont dépensé beaucoup d'encre et de persévérance à prouver que le droit de propriété individuelle est fondé sur le travail. Acceptons et appliquons cette théorie très simple et très solide. Les terres, n'étant l'œuvre de personne, ne peuvent appartenir individuellement à personne. La terre entière, puisque, de toutes les espèces animales qui l'habitent, l'humanité est la seule qui sache la travailler et l'exploiter, peut être considérée comme le domaine commun de la totalité des personnes humaines, et, tant que l'humanité est divisée en nations, tout pays occupé par une nation est propriété nationale ou collective. En revanche, tout individu a le droit de disposer de sa force de travail et par conséquent de ce qu'elle produit. Tout individu est donc propriétaire légitime des produits de son travail, ou, en cas d'échange, de leur équivalent. Quant à la richesse artificielle, elle revient à ceux qui l'ont réellement créée, c'est-à-dire, suivant les cas, soit à l'individu, soit à la collectivité entière, soit à des groupes de cette collectivité. L'individu ne peut donc posséder en propre que ce qu'il a fait lui-même ou ce qu'il s'est procuré en échange de son travail personnel (meubles, chevaux, tableaux, maison qu'il aura bâtie ou fait bâtir à ses frais, etc.), en somme assez peu de chose. Le reste est propriété collective. On peut dire : l'homme a le droit de se servir des choses que lui fournit la nature et ce droit est égal pour tous les individus. A quelles conditions l'un d'eux peut-il, à l'exclusion des autres, s'approprier une partie de ces choses ? A condition qu'il en ait besoin pour vivre et pour gagner sa vie en travaillant : il peut donc y avoir propriété privée des choses consommables et des instruments de travail personnels ; en un mot, *propriété individuelle d'usage.* Mais un individu est-il autorisé à s'approprier des choses qu'il ne peut ni consommer ni employer à lui seul ? Non, parce qu'il lèse ainsi le droit du voisin ; parce que, accaparant des moyens de production qui ne lui sont pas nécessaires, pouvant dès lors, à son gré, en permettre ou en refuser l'accès qui devrait rester libre, il attente à la liberté et au droit égal des autres hommes, devient leur maître, les tient à sa merci, peut exploiter à son profit la nécessité où ils sont de subir ses conditions et, par conséquent, vivre injustement du travail d'autrui. Donc, la propriété privée de ce qui permet à un homme d'en transformer un autre en outil travaillant pour lui est illégitime. Autrement dit, *la propriété d'exploitation* doit être collective. (G. Renard, Le régime socialiste).

En résumé, et à un point de vue plus général, les socialistes reprochent au régime capitaliste actuel de livrer à l'arbitraire la production, la distribution et la consommation des richesses. Pour eux, le moyen de remédier à ce défaut se trouve dans la socialisation de tous les instruments de production, chacun obtenant la propriété intégrale du produit de son travail, mais cette propriété seulement. Ainsi se trouvent condamnés la rente et l'héritage. Le socialiste prétend établir la propriété sur le travail personnel, d'après la formule: à chacun selon ses œuvres, à chacun selon ses efforts.

Morale civique et politique

I. La Nation. — La *Nation* est une agrégation d'hommes, un grand groupement d'individus organisés, vivant sur une partie bien définie du globe.

La Nation a un fondement historique et un fondement moral.

a) *Son fondement historique.* — La communauté d'origine, de territoire, de mœurs, d'intérêts, les souvenirs du passé, fait de victoires ou de défaites forment le fondement historique d'une nation qui, comme l'individu, est l'aboutissant d'un long passé d'efforts. « Un passé héroïque, des grands hommes, de la gloire, voilà le capital social sur lequel on assied une idée nationale. » (Renan).

b) *Son fondement moral.* — La communauté des sentiments et des volontés, des aspirations et des espérances, le désir de ne former qu'un seul groupe, voilà le fondement moral de la Nation. Celle - ci est véritablement une personne morale. « Avoir souffert, joui, espéré ensemble, voilà ce qui vaut mieux que des douanes communes et des frontières conformes aux idées stratégiques. » (Renan).

c) *Son fondement idéal : le contrat social.* — C'est donc, d'après les *théories traditionalistes*, sur la nature d'abord, sur la tradition nationale ensuite, que se fonde une nation. D'après les partisans de la *théorie rationaliste et individualiste*, la nation résulte des aspirations conscientes des individus qui constituent l'Etat par un libre contrat. C'est la théorie du contrat social de Jean-Jacques Rousseau. Cette théorie ne tient pas compte de ce fait que les hommes ne sont pas libres d'appartenir à une nation plutôt qu'à une autre; nous appartenons déjà à une nation avant de choisir et d'adhérer au pacte social. La vérité est ici encore dans une conciliation des deux thèses; comme l'a très bien vu Marion, la nation est à la fois l'œuvre de la nature et l'œuvre de la raison : « La théorie du contrat social est fausse historiquement, elle est moralement vraie. Un instinct naturel rapproche les hommes les uns des autres, les fait se grouper et s'unir pour leur commune défense. Ainsi se forma (peut-être avant la famille même) la tribu, groupe d'hommes unis pour l'offensive et pour la défensive contre les dangers de toutes sortes, contre les bêtes fauves et les voisins ennemis. Mais si la nature seule engendrait la cité, qu'arriverait-il ? La force y règnerait seule et le droit n'y aurait point de place. Loin de là, la cité est essentiellement « une association de droits », selon l'expression de Cicéron. La raison y intervient donc plus ou moins, pour régler les relations selon la justice et contenir la force ».

II. La Patrie. — La *Patrie* est avant tout une personne morale, *c'est l'âme commune de la nation.* La patrie c'est la communauté des sentiments et des volontés, c'est la solidarité du présent avec le passé et avec l'avenir, c'est une grande famille qui embrasse les ancêtres et les descendants. Comme le disait Michelet : « La patrie est une grande amitié, » comme le disait Renan « L'existence d'une nation est un plébiscite de tous les jours, comme l'existence de l'individu est une affirmation perpétuelle de la vie. »

III. L'Etat. — a) *Son origine.* L'*Etat* a pour fondement historique de son autorité presque toujours la *force* que l'on a ensuite essayé de légitimer par la théorie du droit divin. Mais la force ne constitue pas un droit et pourquoi Dieu aurait-il donné à un seul homme les biens de tous et les personnes ? C'est pour ces raisons que dans presque tous les Etats modernes la *souveraineté nationale* est le seul fondement légitime du pouvoir et de l'autorité de l'Etat. La raison d'être de l'Etat c'est de protéger les individus et de garantir leurs droits.

b) *L'Etat et les citoyens.* — Pour remplir cette mission, l'Etat édicte des lois, auxquelles les citoyens doivent obéissance. Il se substitue à l'action privée toutes les fois que celle-ci est impuissante et qu'il y a un intérêt social en jeu.

Pour ce qui regarde le droit d'intervention de l'Etat, deux doctrines sont en présence : l'une qui est celle de la tradition anglaise, veut que l'Etat borne son action aux intérêts généraux, sans gêner les initiatives individuelles ; l'autre qui est celle de la tradition française demande à l'Etat une intervention continue dans tous les domaines de l'activité sociale.

c) *Le Gouvernement.* — Une société ne saurait subsister sans un gouvernement. Le *gouvernement* est l'autorité qui régit l'Etat. Ce mot désigne à la fois la puissance publique et les individus à qui elle est confiée. Il y a trois espèces de gouvernement, disait Montesquieu, le républicain, le monarchique, le despotique. On distingue aujourd'hui deux sortes de gouvernements :

1° Les régimes oligarchiques (monarchies absolues et gouvernements autocratiques) où l'ensemble des citoyens intervient peu dans le gouvernement ;

2° Les régimes démocratiques qui peuvent être monarchiques ou républicains, dans lesquels le peuple intervient soit directement, soit par l'intermédiaire de ses représentants dans tous les actes importants de la vie politique et dans l'exercice du pouvoir.

Dans une démocratie, le principe de toute souveraineté, dit l'article 3 de la déclaration des droits de l'homme et du citoyen, réside essentiellement dans la nation : nul corps, nul individu ne peut exercer d'autorité qui n'en émane expressément.

Comment s'exercera cette souveraineté? Dans les petites Républiques de la Grèce, les citoyens peu nombreux pouvaient se réunir pour discuter les affaires de l'Etat. Aujourd'hui, cela ne serait plus possible dans nos démocraties qui comprennent des millions de citoyens. C'est pourquoi ceux-ci confient à des mandataires, désignés par le suffrage universel (députés), ou par le suffrage restreint (sénateurs) le pouvoir qu'ils ne peuvent exercer par eux-mêmes. C'est ce que l'on appelle le gouvernement représentatif.

d) *Les trois pouvoirs de l'Etat.* — L'Etat a trois pouvoirs :

1° Il fait les lois qui délimitent le droit de chacun et garantissent la liberté de tous, c'est un *pouvoir législatif* ;

2° Les lois faites, il veille à leur exécution, c'est un *pouvoir exécutif* ;

3° Si la loi est violée, il défère le coupable au *pouvoir judiciaire.*

Les trois pouvoirs sont séparés ; selon le principe de Montesquieu : il faut que le pouvoir arrête le pouvoir.

e) *La Démocratie.* — Le gouvernement démocratique a pour mission d'assurer le respect des droits de chaque citoyen et de gérer les intérêts communs. L'esprit de modération y est nécessaire pour empêcher l'oppression des minorités par les majorités.

La démocratie doit s'efforcer de dégager des élites. « Une démocratie mal entendue peut seule être hostile par instinct, par nature, à tout ce qui semble une élite ; elle croit que l'égalité, nécessaire et juste dans l'ordre des lois, est partout la seule loi ; elle ignore (on ne le lui apprend pas) que la nature entière progresse par le développement des supériorités, par la marche en avant des meilleurs, non pas seulement au point de vue de la force, comme dans le règne animal, mais encore au point de vue de l'intelligence, surtout au point de vue de la moralité. Les individus qui forment le corps national, égaux en droit, ne sont pas plus égaux en fonction et en importance que les cellules qui forment le corps humain. Il ne faut donc pas vouloir tout niveler sous prétexte d'égaliser. » (Fouillée).

IV. La devise de la démocratie. — 1° *La Liberté et l'Egalité. L'Egalité civile et politique* a été établie par la déclaration des droits de l'homme et du citoyen de 1789. Cette déclaration a un caractère philosophique : elle fait appel non au droit écrit, mais au droit naturel, elle s'appuie sur la raison, non sur la coutume, elle fonde la loi politique sur la loi morale. Elle a d'autre part un caractère d'universalité : elle proclame un droit humain, inaliénable et imprescriptible qui appartient à tous les hommes. Elle a proclamé :

a) *L'égalité civile* en énumérant *les droits ou libertés civils :* égalité civile — égalité devant la loi — liberté individuelle — droit de propriété — liberté de conscience — liberté de la parole et de la presse.

b) *L'égalité politique* en énumérant *les droits ou libertés politiques :* souveraineté nationale — séparation des pouvoirs — suffrage universel — responsabilité des fonctionnaires — autorité exclusive de la loi — participation de tous les citoyens à l'impôt et au vote de l'impôt.

2° *La Fraternité.* — Le troisième terme de la devise de la démocratie ne peut être séparé des deux autres. « Il est bien évident que ces trois mots : liberté, égalité, fraternité, s'impliquent, au fond, et qu'on peut logiquement déduire d'un seul les deux autres. Mais il n'en est pas moins certain qu'ils sont d'ordres divers, en ce sens qu'ils correspondent aux trois facultés ou faces différentes de notre nature. En effet, vous aurez beau répéter aux hommes qu'ils sont libres et tous libres, ce mot de liberté n'équivaudra pour eux qu'à un droit égoïste d'agir. Ils en concluront leur propre virtualité ; mais nul sentiment fraternel pour les autres hommes n'en résultera directement. C'est au nom de la liberté qu'en tout temps et en tous pays les esclaves ont brisé leurs chaînes et terrassé leurs tyrans ; mais ce mot bon pour la guerre, n'a jamais engendré ni clémence, ni paix. Nulle morale ne peut résulter d'un mot qui exprime le droit d'être, de se manifester, d'agir, mais qui n'exprime et ne rappelle pas le sentiment et la connaissance, ces deux autres faces de la vie. Et de même, prêchez aux hommes la fraternité, vous les touchez sentimentalement, mais vous ne les éclairez pas. Enfin l'homme qui aurait le plus réfléchi sur l'origine et le but de la société, et qui aurait de l'égalité l'idée la plus sublime, aurait encore besoin d'exprimer la dignité de sa propre nature par le mot de liberté, et le lien qui l'unit aux autres hommes par celui de fraternité. Isolés, donc, ces trois mots n'expriment chacun qu'une face de la vie ; et, bien que les autres faces se retrouvent dans celle-là, bien que chacun de ces mots implique, comme nous venons de le voir, les deux autres, néanmoins, chacun, par sa signification même, n'est qu'un lambeau de la vérité, mais unis, ils forment une admirable expression de la vérité et de la vie. » (Pierre Leroux).

GRAMMAIRE FRANÇAISE

GRAMMAIRE FRANÇAISE

INTRODUCTION

La doctrine de l'évolution sur laquelle aujourd'hui les philosophes et les savants du monde entier fondent un si grand nombre de leurs théories et explications est également à la base de la philologie moderne.

Les linguistes et les grammairiens savent que les langues naissent, se développent, se transforment et meurent, comme les sociétés dont elles sont l'instrument d'expression. Si un peuple est prospère sa langue s'enrichit, se précise, elle s'affine avec la civilisation des hommes qui la parlent ; elle se répand parmi les autres nations et influe sur leur idiome. S'il est faible et devient la proie d'une autre nation, il se peut qu'elle disparaisse devant la langue du vainqueur ; mais il se peut aussi qu'elle réagisse et que de la concurrence des deux langues naisse un idiome nouveau.

C'est de cette dernière façon qu'a réagi le *celtique*, qu'on parlait en Gaule avant la conquête romaine : la langue latine. qui se substitua à lui, et que les Gaulois instruits adoptèrent dès l'abord, ne se répandit point dans le peuple dans sa forme pure, mais sous la forme d'un bas-latin dit gallo-romain qui suffisait aux relations des vainqueurs et des vaincus.

Ce dialecte nouveau, utilisable en toute circonstance, devint le plus employé, puis le seul employé.

Mais bientôt il se trouva soumis, par suite de l'invasion des nations germaniques, à l'influence du *tudesque*. Celui-ci comprenait plusieurs dialectes dont les principaux étaient le francique des Francs, et l'alémanique des Allemanni. Ces nouveaux idiomes accentuèrent la décomposition du latin. Il en résulta un bas-latin dit mérovingien que les érudits désignent sous le nom de *langue rustique*.

De cette langue rustique sortit une véritable langue nouvelle, le *roman*, ou langue romaine française. Cette évolution a demandé environ huit cents ans, depuis la conquête de la Gaule par les armées de César jusqu'au règne de Charlemagne. Toutefois elle a été plus rapide dans le midi de la France que dans le nord. La langue d'*oc*, dialecte méridional d'où dérive le *provençal* actuel, était plus riche et plus souple, au début, que la langue d'*oïl*, dialecte du nord, qui a pourtant fini par prendre l'avantage. Cette prédominance de la langue d'oïl et plus particulièrement de celui de ses dialectes qui était parlé dans l'Ile-de-France, proprement le *français*, s'explique par des raisons politiques, elle s'établit parallèlement à celle des ducs, puis des rois de France.

Que nous est-il resté du celtique? Quatre cent cinquante mots environ, dont quelques-uns ne semblent pas être d'une origine absolument incontestable.

Mots tirés du celtique. — *Quelques termes de provenance certaine.* — Alou(ette). — bec — braie — bouge(sac) — charpent(ier) — char — charrue — cervoise — lierre — soie.

1) Langue d'*oc* et langue d'*oïl*, dénommées d'après la manière d'énoncer l'affirmation : *oc* et *oïl* signifiaient *oui*.

Quelques termes de provenance vraisemblable. — Lièvre — chêne — claie — cõmbe — glaise — grève — lande — soc — tan — tanche — tonne — vassal — virole.

Les idiomes celtiques qui ont subsisté en Irlande, en Ecosse, dans le pays de Galles et en basse Bretagne, ont apporté au français, par le bas-breton, un certain nombre de mots, mais qui ont peu pénétré dans l'usage général.

Eléments latins. — Le fonds véritable de la langue française, c'est le latin, allégé de ses cas, raccourci dans ses mots par les Gaulois et les Francs, qui l'entendaient parler et le prononçaient d'après ce que leurs oreilles pouvaient en percevoir.

Dans chaque mot latin, il y avait une syllabe plus sonore qui servait en quelque sorte de point d'appui à la voix, c'était la syllabe *tonique*. Cette syllabe s'est conservée dans le mot français. C'est la dernière syllabe du mot et l'avant dernière, si celle-ci est muette.

Quand l'accent tonique se déplace, le son de la syllabe qui en est privée s'affaiblit et souvent son orthographe se modifie ; au contraire, celle qui s'enrichit d'un accent se renforce en sonorité et pour cette raison aussi modifie son orthographe, le renforcement se fait de diverses manières : on redouble une consonne : chandelier, chand*elle* ; coquet, coque*tte* ; — on met un accent grave sur l'*e* qui précède la dernière syllabe : berg*ère* ; — on modifie la prononciation des mots : un présid*ent* ; ils président.

Nos pères, en constituant la langue romane dont le français est sorti, ont obéi à deux règles essentielles qui ne sont que des conséquences de la loi fondamentale de la *persistance de l'accent tonique*.

1° La voyelle brève latine — les Latins avaient des voyelles brèves et des voyelles longues — qui précède la tonique disparaît presque généralement :

Asper*i*tAtem donne âpreté.
Secur*i*tAtem donne sûreté.

2° La consonne médiane, c'est-à-dire celle qui est placée entre deux voyelles, est écrasée entre elles et s'élimine :

Fragilem donne frêle.
Mo*b*ilem donne meuble.

C'est ainsi que fut constitué le fonds primitif de notre langue.

Les doublets. — 1° Ceux qui sont d'origine latine. Au XIIIe siècle et surtout au XVIe, les lettrés français, les savants, estimant que notre vocabulaire était trop pauvre, retournèrent puiser à la source latine. Pour cela, ils transcrivirent en français les mots latins qu'ils empruntaient, se contentant de leur donner une finale française. Il arriva ainsi qu'un mot latin qui avait donné un mot français dans la formation *populaire* en donna un autre encore dans cette formation nouvelle, dite *savante*. Ces deux mots furent appelés des *doublets*. On reconnaît le mot populaire en ce qu'il exprime une idée plus commune et qu'il est plus court que le mot savant.

FORMATION POPULAIRE

Avoué — armure — blâmer — cailler — confiance — délié — dîme — droit — frêle — métier — moutier — mâcher — lier — pâtre — prêcheur — carême — rayer — ronde — sevrer — sûreté — veille.

FORMATION SAVANTE

Avocat — armature — blasphémer — coaguler — confidence — délicat — décime — direct — fragile — ministère — monastère — mastiquer — liguer — pasteur — prédicateur — quadragésime — radier — rotonde — séparer — sécurité — vigile.

2° *Autres catégories de doublets.* — Les dialectes ont parfois laissé subsister une *forme provinciale* à côté d'un mot de la langue française. Le picard a imposé son c dur : camp, champ ; campagne, champagne ; canal, chenal ; caisse, châsse ; carbone, charbon. Le normand a imposé les sons : *é, i* ; benêt, benoît ; créance, croyance ; dévier, dévoyer ; français, françois ; plier, ployer.

Les langues étrangères nous ont transmis des mots issus de la même origine latine que les nôtres, mais qui offraient une tournure et un sens différents. Ainsi, l'italien nous a donné les mots : *altesse, banque, catafalque, opéra,* qui ne sont qu'un autre aspect des mots français, hautesse, banc, échafaud, œuvre. L'espagnol a doublé le mot « aidant » du mot *adjudant* ; le mot « chez » du mot *case* ; le mot « épagneul » du mot *espagnol.* Où un Anglais disait *bill,* nous disions bull ; *cabine,* cabane ; *express,* exprès ; *humour,* humeur.

Enfin, l'*orthographe* elle-même a créé des doublets :

Bel — beau — *col* — cou — *pal* — pieu — *palme* — paume — *solder* — souder.

ÉLÉMENTS ÉTRANGERS AU LATIN

Le contact des Gallo-Romains avec les peuples germaniques avait pu favoriser l'introduction dans la langue d'un certain nombre de mots germains. L'invasion des Francs, l'établissement des dynasties mérovingienne et carolingienne les multiplia. Beaucoup n'ont pas subsisté. Ceux qui nous restent, sont des termes de guerre ou de la vie rurale.

Ex. : *alleu, balafre, bannière, beffroi, bouc, bourg, brèche, brouet, canif, chamois, coche* (bateau), *cresson, échoppe, éperon, étalon, étrier, fiel, fourreau, gaufre, gruau, guerre, guet, halle, hanap, horde, hareng, havre, huche, jardin, marais, maréchal, meurtre, mitraille, tanière, tonne. — Bannir, bramer, brouter, danser, dérober, flatter, fourbir, gagner, haïr, haler, happer, honnir, rôtir, souper.*

Le grec nous a enrichis d'un certain nombre de mots qui s'étaient incorporés au latin vulgaire et ont subi ses déformations.

Ex. : *aimant, armoise, baume, beurre, aumone, évêque, chaire, chambre, chameau, chanoine, chère, chou, maille* (monnaie), *moine, huître, parvis, pierre, cercueil, émeraude, épée, trèfle, chœur, heure.*

A ce fonds primitif de la langue, sont venus s'ajouter au cours des siècles, des mots provenant des pays étrangers avec lesquels nous nous sommes trouvés en rapports.

Les croisades nous ont révélé dans les Arabes un peuple de culture avancée. Nous leur avons emprunté des mots relatifs surtout aux sciences mathématiques et physiques : *alambic, alcali, alchimie, alcool, alfa, algèbre, ambre, arsenal, assassin, basane, borax, burnous, caïd, camphre, caramel, coton, élixir, gabelle, goudron, haras, harem, housse, limon* (citron), *minaret, nadir, razzia, safran, simoun, sorbet, talc, turban, zénith, zéro, zouave.*

Pendant toutes les guerres des temps modernes, les troupes de mercenaires allemands nous ont valu des mots d'allemand moderne, qui ont pris parfois chez nous un sens péjoratif : *halte, rosse, lande, bouquin, hère trinquer, chenapan.*

L'italien au XVIe siècle, l'espagnol au XVIe et au XVIIe nous ont donné des mots relatifs à la mode, aux jeux, aux arts, à la vie de société ; italien : *aquarelle, fresque, arlequin, courtisan, banqueroute,* etc. ; l'espagnol *alcôve, mantille, duègne, aubade, sérénade.*

Enfin, l'anglomanie, au XIXe siècle, nous a dotés de mots nombreux dont quelques-uns ont été, par la suite, reconnus comme des transfuges français : *bill, tunnel, budget, mess, lunch, toast, meeting.*

DÉVELOPPEMENT DE LA LANGUE

Les mots qui sont venus du latin ou des langues étrangères ont constitué un fonds d'environ 7.500 mots C'est de ce fonds primitif qu'ont été tirés les 32.000 mots du Dictionnaire de l'Académie, à l'aide de deux procédés : la *dérivation, la composition.*

A. — **Dérivation.** I. — Ce procédé se présente sous deux formes ; la *dérivation* est dite *impropre* lorsqu'un mot d'une espèce a formé un mot d'une autre espèce.

A) Formation de *noms communs.*

1° Certains ont une origine historique, ou géographique ou littéraire ; du *cachemire,* du *gruyère,* un *héron,* un *tartufe,* un *sosie* ; ils viennent de noms propres.

2° D'autres viennent d'adjectifs : le *laid, le vrai, le beau.*

3° D'autres ont été tirés de verbes : *l'appel* (appeler) *l'oubli* (oublier), — *le déjeuner, le devoir, le sourire,* — *le passé, la pensée, le couvert, le tranchant.*

4° Certains enfin proviennent de mots invariables : *le bien, le mal, le pour, le contre.*

B) Formation d'adjectifs.

1° A l'aide de noms : *vilain, drôle, rose.*

2° A l'aide de participes : *poli, charmant.*

C) Formation d'adverbes.

Ont été formés avec des noms : *pas, point, goutte* ; — avec des adjectifs : *bas* (parler bas), *lourd* (peser lourd) ; avec des verbes au participe : *maintenant.*

II. — La *dérivation proprement dite* se fait à l'aide de *suffixes* qui sont des particules s'ajoutant à certains mots.

Un même suffixe peut exprimer des idées différentes.

Des suffixes différents peuvent exprimer la même idée.

SUFFIXES DES NOMS

I. — Ils expriment *l'action.*

1° La personne qui fait l'action. — *Aire* : locataire — *er, ier* : boucher, armurier — *eur* : coureur — *ien* : chirurgien — *iste* : dentiste — *on* : forgeron — *ant* : débutant, figurant, mendiant.

2° L'instrument de l'action. — *Ail, aille* : gouvernail, tenaille — *ard* : buvard — *ment* : instrument — *oir, oire* : rasoir, écumoire.

3° L'action elle-même et son résultat. — *Ade* : bourrade — *age* : abordage — *aille* : semailles — *aison, ison* : salaison, trahison — *ation* : expiation — *ance, ence* : délivrance, effervescence — *erie* : fourberie — *eur* : chaleur — *ion* : prévision — *is* : semis, gâchis — *ment* : frottement — *on* : plongeon — *ure* : coupure.

II. — Ils expriment les *êtres* et les *choses.*

1° Les êtres (origine, nationalité). — *Ain* : Africain — *ais, ois* : Anglais, villageois — *an, and* : Persan, Normand — *ard* : montagnard — *in, ien* : Florentin, bohémien — *on* : breton.

2° Les choses (manière d'être, qualités, défauts). — *Age* : bavardage — *erie* : poltronnerie — *esse* : sécheresse — *eur* : lenteur — *ie* : modestie — *at* : consulat

— *ise* : sottise — *isme* : socialisme — *té* : vanité — *tude* : exactitude.

3° Les choses (pays, lieu, contenant). — *Ie* : Picardie — *oie, aie* : ormoie, futaie — *aire* : vestiaire — *at* : orphelinat — *er, ier* : clocher, cendrier — *erie* : bergerie — *oir, oire* : fumoir, réfectoire.

4° Les choses (collection, contenu). — *Ace* : rosace — *ade* : colonnade — *age* : feuillage — *ée* : brouettée — *erie* : porcherie — *ure* : chevelure.

III. — Ils expriment un sens *péjoratif* : *ace* : populace — *asse* : paperasse — *as* : plâtras — *aille* : marmaille — *ard* : bavard — *aud* : lourdaud.

IV. — Ils expriment des *diminutifs* : *eau, elle* : cordeau, ruelle — *et, ette* : garçonnet, fillette — *eron* : moucheron, puceron — *ille, illon* : brindille, oisillon — *in* : casaquin — *ole* : bestiole — *on* : ânon — *ot, otte* : gigot, menotte — *ule* : globule.

Suffixes des adjectifs

Able, ible, uble : POSSIBILITÉ : valable, admissible, soluble ; *able, ain, é, el, er, eux, ier, if, in* : QUALITÉ : détestable, hautain, étoilé, mortel, mensonger, heureux, princier, primitif, salin ; *ard, âtre, asse* : PÉJORATIFS : criard, bellâtre, bonasse.

D'autres ont la même forme et le même sens que les suffixes de noms.

Suffixes des verbes

Iser, fier : action de *rendre*, de *faire devenir* : civiliser, falsifier.

Les autres sont des fréquentatifs ou des diminutifs: *ailler*, ferrailler, *iller*, barbouiller, *oter*, toussoter, etc.

B. — **Composiotin.** — I. — La composition se fait à l'aide de particules le plus souvent monosyllabiques qui se placent devant un radical ou une racine pour en modifier le sens, et qu'on appelle *préfixes*. Le latin en est la source la plus féconde. Ils ont assez souvent deux formes, l'une savante, l'autre populaire. Alors que les suffixes n'ont pas de sens propre, les préfixes en ont un et sont de véritables mots.

Dans un grand nombre de cas, le préfixe n'a pas subsisté dans sa forme primitive. Sa consonne finale :

1° Ou bien est *tombée* : *co*aguler (*con*) ; — aplanir (*ad*)

2° Ou bien s'est *assimilée* à la consonne initiale du radical : le *d* de *ad* devant *f, g, l, n, p, r, s, t* ; — l'*n* de *in* devant *l* ; — l'*n* de *en* devant *m* ; — l'*n* de *con* devant *l, m, r*.

3° Ou bien s'est *accommodée*, adaptée à la consonne initiale du radical : l'*n* devient *m, b, p* devant *b, p* ; elle devient labiale.

Préfixes	Signification	Exemples
ab	éloignement, séparation	abject, abstention, aveugle.
ad	tendance vers, rapprochement	adjoindre, aborder, affront, aggraver, annihiler.
ante, anti	avant	antédiluvien, antichambre.
bene, bien	bien	bénévole, bienveillant.
bis, bi, bes, bé	deux fois	biscuit, biennal, besace, besicle, bévue
circum, circon	autour	circumnavigation, circonvolution.
com, con	ensemble, avec	combattre, commensal, cohabiter, concourir, collaborer.
contra, contra	opposition, contraire	contradiction, contrepoison.
cis	en deçà	cisalpin
dé, dés	idée contraire à celle du mot simple ; augmentation de l'idée	défaire, dégoût, détenir, désobéissance, déshonorer.
dis	séparation, opposition, cessation	disproportion, discrédité, diversion, difforme.
ex, é	extraction ; privation ; augmentation	excommunier, exhausser, éliminer, effeuiller.
extra	en dehors	extraordinaire.
fors, for, fau, four	hors de	forban, forcené, forfait, faubourg, fourvoyer.
in, en	dans, sur; négation	injecter, inscrire, inaction, imberbe, enclos, emmagasiner.
inter	entre	intercostal, interjection.
intro	dans l'intérieur de	introduire.
malé, mal, mau	mauvais; sens négatif	malédiction, maladie, maudire.
més, mé	diminution ; sens défavorable	mésalliance, mépriser.
mi	moitié	midi, minuit.
ob	devant, contre ; idée d'opposition	obstacle, occiput, offrande, opposer.
par, per	achèvement ; à travers	parachever, parcourir, perforer, persister.
post	après	postscolaire.
pré	avant, devant, au-dessus de	prévoir, préférer, préposer.
pro, pour	en avant, à la place de; action poussée jusqu'au bout	proférer, proconsul, pourchasser, pourfendre.
re	retour en arrière ; répétition	revenir, rabattre, réaction, ressortir.
retro	mouvement en arrière	rétrograder, rétrospectif.
sub, sou	au-dessous; après	subdivision, succéder, supplanter, souterrain, soucoupe.
super, sur, sus, sous	au-dessus, en haut	superlatif, surhumain, susdit, sourcil.
trans, tra, tré, tres	à travers ; au delà; passage d'un état à l'autre	transformer, traduire, trépas, tressaillir.
ultra, outre	exagération; au delà	ultra-royaliste, outrepasser, outrecuidant.
vice, vi	à la place de, au-dessous	vice-recteur, vice-président, vicomte.

II. — La composition se fait encore par la réunion de mots simples, qui ainsi unis éveillent une image ou une idée unique.

Il en est ainsi pour les noms ; quelquefois ils se sont soudés : *vinaigre, betterave, portefaix, contretemps.* D'autres fois ils se sont constitués par la réunion de

deux noms unis ou non par une préposition, d'un nom et d'un adjectif, d'un verbe et d'un nom et parfois d'un mot invariable, de deux verbes, de deux prépositions, etc... Ce sont les mots composés proprement dits.

De même pour les adjectifs : deux adjectifs s'unissent : *sourd-muet* ; — un verbe et un adjectif se juxtaposent : *nouveau-né.*

Un verbe se réunit à un nom : *colporter* ; — un verbe se réunit à un adjectif : *sauvegarder.*

Familles de mots. — Les mots, issus d'une même racine, ont entre eux une certaine parenté. Ils diffèrent par la forme, qui résulte de la dérivation ou de la composition, et par le sens. Parfois la racine s'est modifiée. Mais tous ces mots restent groupés sous un sens général commun.

Clore, idée générale: fermer.

Racines	Forme simple	Forme dérivée	Mot composé	Forme composée	Forme dérivée et composée
Clo	Clos	Clôture Cloison	Huis-clos	Enclore Déclore Éclore	Éclosion
Cloi Clau	Cloître Claustral Clause				
Clav	Clef, clé	Clavier Clavecin Clavicule Clavette Cheville	Autoclave	Conclave Enclave Enclaver	Conclaviste
Clou	Clou	Clouer Clouterie		Déclouer Enclouer Reclouer	
Clu	Cluse		Vaucluse Ci-inclus	Inclure Perclus Reclus Exclure Conclure Écluse	Inclusivement Réclusion Exclusivement Conclusion

Notions préliminaires

Variations de sens des mots. — Lorsqu'il a fallu exprimer une idée nouvelle, un mot nouveau n'a pas toujours été formé à l'aide d'un mot ancien, par dérivation ou par composition. Un même mot, gardant sa forme, a modifié son sens.

Un mot employé dans son acception naturelle a son *sens propre* : J'ai mal au *pied.*

Les sens nouveaux qu'il prend sont des *sens dérivés* ou *figurés.*

A trois *pieds* de distance (longueur d'un pied).

Le *pied* d'un arbre (la partie du tronc qui touche la terre).

Synonymes. — Certains mots, exprimant une idée générale commune, en marquent chacun une nuance particulière, ces nuances étant nécessaires pour que le mot ait de la *propriété.* On appelle ces mots des *synonymes.* Ils peuvent avoir la même racine ou des racines différentes.

1° Ex. : *Tombe,* fosse recouverte d'une table de pierre ou de marbre qui contient un mort.

Tombeau, monument funéraire élevé au-dessus de la fosse qui contient un mort.

2° Racines différentes.

Air, manière d'être extérieure, apparente.

Mine, apparence du visage.

Physionomie, expression du visage.

Antonymes. — On appelle ainsi les mots qui offrent un sens directement opposé : *beauté, laideur* ; *modeste, suffisant.*

Homonymes et Paronymes. — Ici, il ne s'agit plus du sens, mais du son.

Certains mots offrent à l'oreille les mêmes sons, qu'ils s'écrivent ou non de la même manière ; *cou, coup, coût.* On les appelle *homonymes.*

D'autres ont un son très voisin l'un de l'autre. On les appelle *paronymes* : *marri, mari* ; — *mort, Maure* ; *éminent, imminent.*

Caractéristiques du français. — Ainsi s'est formée une langue qui, les termes techniques et scientifiques éliminés, comprend environ trente-deux mille mots. Son origine est dans le latin, mais elle diffère profondément de celui-ci par des caractères essentiels.

Le latin est une langue *synthétique,* c'est-à-dire que la fonction des mots dans la phrase y est indiquée par la forme du mot lui-même. Ainsi un substantif latin avait une forme différente suivant qu'il était *sujet, complément d'un verbe* ou *complément d'un substantif* ; ces différentes formes, au nombre de six, sont appelées des *cas.*

Le français, comme le celtique, ne possède point de cas ; la fonction du mot y est indiquée par sa position dans la phrase. D'autre part il pousse plus loin que le latin, dans le langage la décomposition de la pensée en tous ses éléments : par exemple, il exprime toujours le sujet, ce que ne fait pas nécessairement le latin; suivant

que l'objet dont on parle est déterminé ou ne l'est pas, le français fait précéder le substantif de l'article ou de l'adjectif indéfini :

Le chien (celui dont nous parlons).

Un chien (quelconque).

Dans les deux cas, le latin exprime l'idée par un seul mot ; il ne dispose pas de l'article.

Le français est une langue analytique.

1. La *grammaire* a pour objet l'étude des règles du langage, soit écrit, soit parlé.

Le mot *orthographe*, formé du grec (*orthos*, juste, correct, et *graphein*, écrire), désigne l'art d'écrire les mots correctement.

Les mots s'écrivent au moyen de lettres.

LETTRES, VOYELLES ET CONSONNES

2. Les mots de la langue française s'écrivent au moyen d'un alphabet de vingt-cinq lettres :

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v x y z,

auxquelles il faut ajouter la lettre w, usitée dans certains mots d'origine étrangère.

On distingue dans cet alphabet les *voyelles* :

a e i o u y,

sans lesquelles l'émission de la voix serait impossible ; et les *consonnes* :

b c d f g h j k l m n p q r s t v x z,

qui ne font que modifier les sons fondamentaux fournis par les voyelles.

3. Une *syllabe* est un ensemble de lettres qui se prononce en une seule émission de voix. D'après ce que nous venons de dire, on voit qu'il doit toujours y avoir au moins une voyelle dans une syllabe ; il n'est pas nécessaire que celle-ci contienne des consonnes :

Ex. : A, ou, là, en, bras, fort, noir, mais.

VOYELLES

4. Les voyelles que nous avons énumérées plus haut et qui s'écrivent au moyen d'une seule lettre sont dites : *voyelles simples* ; mais il existe des sons de même nature que les voyelles simples et qu'on note au moyen de deux ou de plusieurs lettres, ce sont les *voyelles composées* :

Land*au* — g*ai* — v*ei*ne — œsophage — p*eu* — bœuf — f*eu*ille — œil — accueil — m*ou*.

5. Et les *voyelles nasales* :

B*an*c — *em*mener — *in*dividu — f*ai*m — p*ein*ture — p*on*t — h*um*ble — à j*eun*,

qui résultent de la combinaison d'une voyelle simple ou composée et d'un *n* ou d'un *m*. Devant un *b* ou un *p*, elles s'écrivent toujours avec un *m*.

6. *Diphtongues.* — On appelle diphtongues (du grec : *dis*, deux ; *phtoggos*, voix) des voyelles qui font entendre presque simultanément deux sons mais sans qu'ils soient absolument confondus comme dans les voyelles composées ; ce sont :

Ex. : p*ia*no — b*ia*is — p*ie*d — soul*ie*r — p*ieu* — m*ieu*x — p*io*che — ch*iou*rme — m*oe*lle — cr*oi*x — d*ou*ane — j*ou*et — l*ou*er — j*ou*ir — éc*ue*lle — l*ui* — pl*ui*e — éq*ua*teur.

Et les *diphtongues nasales* :

Ex. : v*ian*de — r*ien* — l*ion* — l*ouan*ge — Ec*ouen* — p*oin*t — barag*ouin* — j*uin*.

7. **Quantité des voyelles.** — Les voyelles sont *longues* ou *brèves* suivant la durée de leur prononciation. Une même voyelle peut être tantôt longue, tantôt brève :

Ex. : Longues : p*â*te — f*ê*te — ab*î*me — h*ô*te — b*û*che — je*û*ne. — Brèves : p*a*tte — est*a*fette — l*i*me — h*o*tte — b*u*tte — j*eu*ne.

Les voyelles suivies d'une consonne redoublée sont généralement *brèves*.

Exceptions : Les voyelles qui précèdent deux **r** : terre ; *a* et *o* devant deux s dans un certain nombre de mots : *passe, lasse, grosse, fosse*, etc.

Les voyelles composées : *au, eau* sont toujours longues, sauf dans : *aurore*.

CONSONNES

8. Il y a dix-neuf consonnes, qu'on classe, d'après l'articulation à laquelle elles correspondent, en :

1° Labiales : *b, p, f, v*.
2° Palatales : *ch* (doux) *j*, *g* (doux).
3° Dentales : *d, t*.
4° Gutturales : *c* (dur), *k, q, g* (dur).
5° Linguales : *l, r*.
6° Nasales : *m, n*.
7° Sifflantes : *c* (doux), *s, z*.

L'*x*, qui manque à ce tableau, est en réalité une véritable consonne double, équivalant dans la plupart des cas à la combinaison *ks*. La lettre *h* ne représente aucun son.

9. **Remarques.** — *c* et *g* sont durs devant *a, o, u*.

Ex. : *c*ale, *c*omme, *g*alle, *g*omme, *c*ou, *c*oi, *g*oût, *g*oitre.

Ils sont doux devant *e* et *i* :

Ex. : *c*e, *c*eci, *c*il, *g*elée, *g*îte.

Pour rendre le *g* doux devant *a, o, u*, on le fait suivre d'un *e*.

Ex. : *exigeant, geôle* (prononcez : *jôle*), *gageure* (prononcez : *gajure*).

La consonne *h* est *muette* ou *aspirée*. Quand elle est *muette*, on n'en tient pas compte dans la prononciation.

Ex. : l'h*o*mme, l'h*o*nneur.

Quand elle est *aspirée*, elle empêche la liaison et l'élision.

Ex. : le h*a*meau, la h*a*ine

L'*h* est aspirée dans *h*éros ; elle est muette dans les dérivés : *h*éroïque, *h*éroïne, *h*éroïsme.

Elle est aspirée dans l'expression : le *huis clos* ; elle est muette dans *huis* et *huissier*.

Ex. : *ouvrez* l'h*ui*s ; l'h*ui*ssier.

L peut avoir une articulation particulière qu'on désigne en disant que la consonne *l* est mouillée.

L n'est mouillée, soit simple, soit double, que si elle est précédée d'un *i*. Le son de l'*i* se fond avec celui de l'*l*.

Ex. : ba*il*, ma*il*, somme*il*, sole*il*, cue*il*lir, fa*mil*le.

L double précédée d'un *i* est généralement mouillée ; mais elle garde son articulation ordinaire dans un certain nombre de mots tels que : m*ill*e, tranqu*ill*e, v*ill*e, osc*ill*er, etc.

Qu se prononce généralement *k*.

Ex. : *qui, quand*.

Mais dans certains mots, il se prononce *kou*.

Ex. : *aquarelle, aquatique*.

Enfin l'*u* peut être entendu distinctement. Il ne se fond pas alors avec la voyelle qui le suit :

Ex. : *Equilatéral, questeur, quintuple, quinquagésime* (kuin, koua).

Ti se prononce quelquefois *ci*.

Ex. : *nation, patience*.

Gn a généralement le son *mouillé*, c'est-à-dire qu'il se prononce à peu près comme *ni* dans op*inion*.

Ex. : *gagner, agneau.*

Mais le *g* et l'*n* peuvent rester distincts, comme dans : *gnome, igné, stagnant.*

Le *g* ne se prononce pas dans *signet.*

10. Syllabes muettes. — On entend par *syllabe muette* une syllabe dont la prononciation se fond avec celle de la syllabe précédente. La voyelle d'une syllabe muette est toujours un *e*, qui prend le nom d'*e muet.*

Ex. : *fête, belle, j'achèverai.*

11. Accent tonique. — L'accent tonique consiste dans l'élévation de la voix sur une syllabe déterminée d'un mot. En français l'accent tonique porte toujours sur la dernière syllabe du mot. Toutefois si cette syllabe est muette, il porte sur l'avant-dernière.

SIGNES ORTHOGRAPHIQUES

Ils sont au nombre de cinq ; ce sont : les *accents*, le *tréma*, l'*apostrophe*, la *cédille*, le *trait d'union.*

12. Accents. — Il y a trois accents :

1° L'accent *aigu* (´), qui ne se met que sur *e* pour indiquer le son fermé.

Ex. : *glacé, pré.*

2° L'accent *grave* (`) qui se met sur *e, a,* ou *u.*

Sur *e*, il indique le son ouvert : *accès, près* ; on le met surtout sur *a* et sur *u* pour distinguer dans l'écriture deux mots qui s'écrivent de la même façon :

à (préposition), où (adverbe), là (adverbe), dès (préposition).

3° L'accent *circonflexe* (^) qui peut se mettre sur toutes les voyelles, à l'exception de l'*y*. Il indique généralement la suppression d'une lettre, d'une *s* par exemple, ou la contraction d'une syllabe.

Ex. : *fête*, autrefois *feste.*
tête, autrefois *teste.*
épître, autrefois *épistre.*
vous aimâtes, autrefois *aimastes.*
âne, autrefois *asne.*
âge, autrefois *aage* ou *eage.*
dû, autrefois *deu.*
assidûment, autrefois *assiduement.*

Les voyelles marquées d'un accent circonflexe sont longues à la condition que l'accent tonique tombe sur la syllabe qui les contient :

Ex. : *fête (ê, long), fêter (ê, bref).*

13. Tréma. — (¨) Il sert à indiquer qu'une voyelle se prononce séparément d'une autre qui la précède immédiatement, et garde sa valeur.

Ex. : *Naïf, haïr, aiguë (féminin de aigu).*

14. Apostrophe. — Signe (') servant à indiquer l'élision des voyelles *a, e, i.*

Ex. : *l'âme* (pour : *la âme*) ; *l'époux* (pour : *le époux*) ; *s'il vous plaît* (pour : *si il vous plaît*).

15. Cédille. — La cédille se place sous le *c* (ç) pour lui donner le son doux devant *a, o, u.*

Ex. : *façade, je reçois.*

La cédille était primitivement un *s* qu'on plaçait au-dessus ou au-dessous du *c* pour indiquer que celui-ci avait le son de l'*s*.

16. Trait d'union. — Le trait d'union (-) sert à réunir les deux ou plusieurs mots qui forment un seul mot composé. On s'en sert dans certaines inversions du sujet :

Ex. : dix-huit, arc-en-ciel, chou-fleur, viens-tu ?

Propositions — Phrase — Fonctions
Parties du discours

17. Proposition. — Phrase. — La proposition est le groupe de mots que forment le *verbe* et son *sujet* avec les mots qui les modifient ou les complètent (compléments, attribut du sujet). Sujet, attribut, compléments sont des *fonctions* des mots ; le verbe est le mot essentiel.

18. Sujet. — Le sujet est le terme de la proposition qui désigne la personne ou la chose qui fait ce qu'indique le verbe ou possède la qualité qu'exprime l'attribut.

Ex. : *Un* **agneau** *se désaltérait.*
Le **soleil** *est éclatant.*

Le sujet n'est généralement pas seul dans la proposition ; il est *complété* ou *qualifié.*

1° Le nom qui en complète le sens en le déterminant, et qui lui est rattaché par une préposition s'appelle *complément déterminatif.*

Ex. : *La chanson* **des Epées.**

2° Les mots en apposition à un nom ou les adjectifs qui marquent une qualité de la personne ou de la chose qu'un nom désigne le qualifient.

Exemple d'*apposition* : *La ville de* **Paris.** — *Guillot* **berger** *de ce troupeau.*

Exemple d'*adjectif épithète* : *Un* **brave** *homme ; une femme* **acariâtre.**

19. Attribut. — L'attribut est le mot, nom ou adjectif, qui qualifie un nom par l'intermédiaire d'un verbe ; la qualité du nom lui a été attribuée, grâce au verbe.

Ex. : *Vous êtes trop bon* **roi.**

20. Verbe. — Le verbe est le mot qui exprime un état ou une action du sujet.

Ex. : *Je* **suis** *jeune, il* **est** *vrai.*
Le flux les **apporta,** *le reflux les* **remporte.**

21. Compléments du verbe. — Le verbe est souvent complété par des mots appelés compléments.

1° On appelle *complément d'objet* le mot qui exprime la personne ou la chose sur laquelle s'exerce l'action du sujet, et qui est l'objet de cette action.

Il s'appelle *complément d'objet direct* s'il se rattache au verbe directement sans l'intermédiaire d'une préposition :

J'aime les **soirs** *riants et beaux.*

Il s'appelle *complément d'objet indirect* dans le cas contraire :

Rendez à **César** *ce qui appartient à* **César.**

2° On appelle complément circonstanciel le mot qui exprime des circonstances spéciales de l'action.

Ex. : **Un jour, sur ses longs pieds,** allait....

3° On appelle *complément d'attribution* le mot qui exprime la personne ou la chose à l'avantage ou au désavantage de laquelle se fait l'action exprimée par le verbe.

Ex. : *Vous y verrez* **pour moi** ; *je marcherai* **pour vous** (Florian).

22. Parties du discours. — Les mots qui constituent la proposition se classent en dix catégories, appelées : *parties du discours.*

Ce sont : le nom, l'article, l'adjectif, le pronom, le verbe, le participe, la préposition, l'adverbe, la conjonction et l'interjection.

23. Nom. — C'est le mot qui sert à désigner les personnes, les animaux ou les choses.

Ex. : *Paul, cheval, table.*

24. Article. — C'est un mot qui annonce que le nom est employé dans un sens déterminé et non dans un sens vague.

Ex. : **Le** *cheval de Pierre est tombé.*
Une *grande table.*

25. Adjectif. — L'adjectif est un mot qui sert à ajouter (latin *adjicere*) une précision de plus à l'objet désigné par le nom.

On distingue deux sortes d'adjectifs : *les adjectifs déterminatifs* et *l'adjectif qualificatif.*

1° *Adjectifs déterminatifs.* — Ce sont diverses catégories de mots qui *ajoutent* au nom une idée qui le *détermine* dans une certaine mesure :

Ex. : **Tous** *les hommes sont mortels. Nous avons vu* **quelques** *ennemis.* **Certains** *philosophes prétendent que la pitié et l'abnégation sont des vices sociaux.*

2° *Adjectif qualificatif.* — C'est celui qui est joint au nom pour indiquer une *qualité,* une *manière d'être.*

Ex. : *Un* **bon** *fils respecte ses parents. Un vent* **violent** *a soulevé les flots.*

L'adjectif qualificatif placé à côté du nom s'appelle *épithète* ; relié à lui par l'intermédiaire d'un verbe, il est *attribut.*

Un homme **étrange** (*épithète*). *Cet homme est* **étrange** (*attribut*).

Le *participe* est une sorte de qualificatif qui contient l'idée d'une action.

Ex. : *des arbres* **renversés**, *des animaux* **bêlants.**

26. Pronom. — Comme son nom l'indique (pronom — pour nom) le pronom est généralement destiné à remplacer le nom et à représenter l'objet désigné par ce nom.

Ex. : *La lune est très rapprochée de la terre,* **elle** *est quarante fois plus petite que celle-ci.*

Elle qui remplace *lune,* et *celle-ci* qui remplace *terre,* sont des *pronoms.*

Cependant le pronom représente aussi une idée exprimée par une proposition. On l'appelle alors pronom neutre :

Nous **le** *jurons.*

27. Préposition. — La préposition sert à joindre le complément au mot complété en marquant le rapport qui les unit.

Ex. : *Le livre* **de** *Pierre est tombé.*

Je vais **à** *Paris.*

28. Adverbe. — L'adverbe sert à modifier le sens d'un mot auquel il est joint, verbe, adjectif, ou adverbe.

Ex. : *La poule défend* **courageusement** *ses poussins. Cet homme est* **très** *bon. Le cerf court* **très** *vite.*

29. Conjonction. — Ce mot signifie *liaison* (*cum,* avec, et jonction). La conjonction sert à unir plusieurs termes semblables entre eux par coordination ou par subordination.

Ex. : *Les animaux* **et** *les plantes sont des êtres vivants. Le soleil est grand* **et** *la lune est petite. J'ai vu* **que** *vous étiez sorti.*

30. Interjection. — (Du latin *inter,* entre, et *jacere* : jeter.) L'interjection est un mot indépendant, un cri, une exclamation qui exprime la joie, la surprise, la colère ou divers autres sentiments.

31. Classification naturelle des parties du discours. — Les définitions qui précèdent permettent de reconnaître des parentés entre certaines des parties du discours. Le nom et le pronom servent l'un et l'autre à *nommer* les êtres. L'adjectif, le participe et l'adverbe servent à *modifier* le sens d'autres mots. La préposition et la conjonction servent à *établir des rapports* entre les mots. L'article n'est en réalité qu'une espèce d'adjectif. L'interjection, une sorte d'adverbe.

On peut donc admettre la classification suivante :

I. Mots servant à nommer : *nom, pronom.*
II. Mots servant à modifier : *adjectif, participe, article, adverbe, interjection.*
III. Mots de liaison : *préposition, conjonction.*
IV. Mot par excellence : *verbe.*

Etudes des parties du discours

NOM

32. Espèces des noms. — Il y a deux espèces de noms : les *noms propres* et les *noms communs.*

33. *Le nom propre* est celui qui sert à nommer un individu ou un groupe pris en particulier. Il s'écrit avec une majuscule.

Ex. : Franklin, Paul, Minerve, Paris, les Français.

34. *Le nom commun* est l'appellation commune de tous les êtres ou de tous les objets de la même espèce.

Ex. : *Homme, cheval, ville.*

Si *une* chose compose *à elle seule* toute son espèce, le nom qui la désigne est considéré toutefois comme un nom commun.

Ex. : *soleil, terre, lune.*

35. Les noms communs sont au *masculin* ou au *féminin* (genre) ; la plupart peuvent être employés soit au *singulier,* soit au *pluriel* (le nombre).

36. Noms concrets. Noms abstraits. — Les *noms concrets* sont ceux qui désignent les choses réelles, tombant sous les sens :

Ex. : *Homme, cheval, tour, campagne.*

Les *noms abstraits* sont ceux qui désignent des qualités considérées indépendamment des objets ou des actions auxquelles elles se rapportent. C'est l'esprit qui les conçoit :

Ex. : *Blancheur, souffrance, marche, nage.*

37. Noms collectifs. — Les *noms collectifs* sont ceux qui désignent une *collection* d'individus :

Ex. : *Foule, armée, troupeau, flotte.*

Les noms collectifs sont dits *généraux,* quand ils représentent une collection complète ou une collection déterminée, *partitifs,* quand ils n'en représentent qu'une partie ; le plus souvent, les collectifs partitifs sont précédés de l'article indéfini.

Ex. : *Généraux : la* **multitude** *des animaux ; la* **foule** *des peuples.*

Partitifs : une **multitude** *d'animaux ; une* **foule** *de gens.*

38. Noms composés. — Ce sont ceux qui sont formés de deux ou de plusieurs mots, reliés parfois par un trait d'union.

Ex. : *Pomme de terre, pot-au-feu, contrevent, basse-cour.*

39. Mots pris substantivement. — Enfin certains mots autres que des noms, ou certains groupes de mots, peuvent accidentellement être employés comme des substantifs :

Ex. : *Le riche, le pauvre. Le manger, le boire. Le mieux. Le qu'en-dira-t-on.*

DU GENRE DANS LES NOMS

40. Il y a en français deux genres : le *masculin* et le *féminin*.

En principe les noms désignant les êtres mâles sont du masculin et ceux qui désignent les êtres femelles, du féminin. Cette règle est loin d'être rigoureusement observée par suite de confusions faites par nos ancêtres sur la nature et le sexe des animaux (*la souris* par exemple étant prise pour la femelle du rat), par suite aussi de confusions grammaticales. Pour une même espèce le nom masculin et le nom féminin sont parfois différents (cheval, jument), souvent ils ne diffèrent que par la finale (chat, chatte). D'autre part, un même nom peut, sans changer de forme, être masculin ou féminin, selon le sexe de l'individu auquel il s'applique : *un bel enfant, une belle enfant*. Tels sont : *ancêtre, avare, aveugle, camarade, élève, émule, enfant, esclave, espiègle, harpiste, ladre, novice, philosophe, pianiste, prude, somnambule, violoniste* ; des noms de nationalité : *arabe, belge, corse, russe, serbe, suisse, etc.*

La distinction quant aux genres est bien plus incertaine encore quand il s'agit des noms de choses. Certaines langues ont pour ces noms un troisième genre : *le neutre* ; cette commodité n'existe pas pour le français. Il n'y a pas dans notre langue de règle générale permettant de déterminer à coup sûr à quel genre est un nom d'objet inanimé ou un nom abstrait.

41. Nous citons ci-dessous un certain nombre de noms sur le genre desquels on se trompe souvent :

Masculins. — Abîme — acide — âge — air — alambic — albâtre — alcool — alvéole — amadou — amalgame — anathème — anévrisme — anniversaire — antidote — antipode — antre — aphorisme — apologue — apostume — après-midi — argent — armistice — artifice — astérisque — atome — augure — auspices — autel — automate — camée — centime — chrysanthème — décombres — éclair — effluve — éloge — emblème — emplâtre — entr'acte — entrecôte — épilogue — épiderme — épisode — équilibre — équinoxe — esclandre — évangile — exorde — haltère — hémisphère — hémistiche — hiéroglyphe — hospice — hôtel — hyménée — incendie — indice — insigne — interligne — interstice — intervalle — isthme — ivoire — légume — mânes — obélisque — obstacle — obus — omnibus — ongle — opuscule — orage — orbe — orchestre — organe — orifice — ouvrage — parafe ou paraphe — pénates — pétale — pleur — platine — rail — tentacule — ulcère — ustensile — vestige — vivres — simples (plantes médicinales).

Féminins. — Alluvion — alcôve — amnistie — anagramme — antichambre — apothéose — apostrophe — argile — armoire — arrhes — artère — atmosphère — avant-scène — clepsydre — dinde — ébène — échappatoire — écritoire — enclume — énigme — épigramme — épigraphe — épitaphe — équivoque — estampe — horloge — idole — image —insulte — intrigue — nacre — oasis — obsèques — offre — omoplate — orbite — orge — oriflamme — orthographe — ouïe — outre — paroi — patère — pédale — quinine — réglisse — sentinelle — ténèbres — varice.

42. Remarques utiles. — Sont masculins :

1° Les noms de montagnes, excepté :

Les Alpes, les Andes, les Cévennes, les Cordillères, les Pyrénées, les Vosges.

2° Les noms de villes en général, sauf ceux qui sont précédés de l'article la ou qui se terminent par un e muet (La Rochelle, Venise). Ceux dont l'e muet final est suivi d'une consonne sont douteux : Londres.

3° Les noms de contrée qui ne se terminent pas par un e muet (ces derniers sont en général féminins) :

Ex. : *Le Piémont, le Japon, le Siam.*

4° Presque tous les noms en **aire**, en **age**, et en **iste** :

Ex. : *Notaire, carnage, sophiste.*

5° Les noms d'arbres ;

Ex. : *Le saule, le chêne, le houx.*

Sont féminins :

Les noms abstraits en **ion**, en **té** et en **eur** :

Ex. : *Nation, légèreté, erreur.*

FORMATION DU FÉMININ

43. Le féminin des noms de personnes ou d'animaux se forme en général du nom masculin correspondant *par modification de la finale.*

I. Règle générale : On ajoute un e muet au masculin :

Ex. : Allemand, Allemande ; ours, ourse ; marchand, marchande : marquis, marquise.

Remarques. — Les noms en *p* et *f* font leur féminin en *ve* : loup, lou*ve* ; veuf, veu*ve* ; favori fait favorite ; *er, ier*, se changent en ère, ière par application de la règle de l'accent tonique.

Ex. : *Berger, bergère* ; *crémier, crémière.*

Pour la même raison, les noms terminés en *n*, et en *t*, redoublent l'*n* ou le *t* avant l'*e* muet du féminin.

Ex. : *Chien, chienne* ; *lion, lionne* ; *païen, païenne* ; *poulet, poulette*

Toutefois les mots masculins en *an, in, ain, ouin* ne redoublent pas la consonne finale (paysan ne excepté).

Certains noms ayant le masculin en *t* suivent la règle générale :

Ex. : *Auvergnat(e), candidat, renégat, scélérat, bigot(e), cagot, dévot, huguenot, idiot, manchot, parpaillot.*

Certains noms en *et* font un féminin en *ète*, *préfète.*

II. Finales particulières :

1° Quelques noms changent *e* ou *é* en *esse* :

Ex. : *Ane, ânesse* ; *abbé, abbesse* ; *borgne, comte, diable, drôle, druide, hôte, ivrogne, maître, ladre, mulâtre, nègre, ogre, pauvre, poète, prêtre, prince, prophète, tigre, traître, vicomte*, mais employés comme adjectifs ils ne changent pas au féminin.

2° Mots en *eur*.

a) Un certain nombre de mots en *eur* ont un féminin savant en *eresse*.

Ex. : *Bailleur* (*qui donne à bail*), *bailleresse* — *demandeur, demanderesse* — *défendeur, défenderesse* — *vengeur, vengeresse* — *chasseur, chasseresse* (non pas *chasseuse*) — *pêcheur, pêcheresse.*

b) Les noms en *teur* forment le féminin en *trice* sauf : 1° une formation régulière en *euse* : 2° *enchanteresse, doctoresse*, 3° *gouvernante, servante.*

Le féminin le plus régulier des noms en *eur* est en *euse* ; il dérive de la prononciation populaire du XVe siècle où voleur se prononçait voleux, comme aujourd'hui à la campagne dans certaines provinces. *x* s'est changé en *s*, comme dans époux, épouse.

c) Certains noms en eur suivent la règle générale : un inférieur, une inférieure, mineur(e), majeur(e), inférieur(e), supérieur(e) ; ils servent d'adjectifs.

3° les noms en eau qui ont le féminin en elle :

Ex. : agneau, agnelle ; beau, belle ; damoiseau, damoiselle ; chameau, chamelle ; jouvenceau, jouvencelle ; jumeau, jumelle ; oiseau, oiselle ; pastoureau, pastourelle ; tourtereau, tourterelle ; tourangeau, tourangelle.

4° Le féminin tout en gardant le même radical que le masculin, en diffère sensiblement :

Chevreau, chevrette ; *fils, fille* ; *héros, héroïne* ; *perroquet, perruche* ; *roi, reine* ; *dindon, dinde* ; *compagnon, compagne* ; *canard, cane.*

44. Autres formations :

1° Le féminin est exprimé par un nom tout à fait différent du nom masculin. Tels sont :

Bélier, **brebis** — *taureau*, **vache** — *bouc*, **chèvre** — *canard*, **cane** — *cerf*, **biche** — *cheval*, **jument** — *compère*, **commère** — *coq*, **poule** — *dindon*, **dinde** — *frère*, **sœur** — *mâle*, **femelle** — *monsieur*, **madame** — *neveu*, **nièce** — *oncle*, **tante** — *papa*, **maman** — *parrain*, **marraine** — *père*, **mère** — *garçon*, **fille** — *gendre*, **bru** — *homme*, **femme** — *jars*, **oie** — *lièvre*, **hase** — *mari*, **femme** — *porc*, **truie** — *roi*, **reine** — *sanglier*, **laie** — *singe*, **guenon** — *taureau*, **vache** — *veau*, **génisse**.

2° Pour certains substantifs qui n'ont pas de féminin, on spécifie le masculin ou le féminin en ajoutant mâle ou femelle au nom. C'est le cas de la plupart des noms d'animaux.

Ex. : *Eléphant mâle, éléphant femelle.*

3° Un même nom peut, sans changer de genre s'appliquer aux individus des 2 sexes. C'est le cas généralement pour les petits animaux, pour les oiseaux : *un rat, un serpent, une grenouille, un moineau.*

C'est le cas aussi pour les noms de profession ou d'occupations généralement particulières aux hommes : *un architecte — un artisan — un géomètre — un guide — un interprète — un écrivain — un médecin — un peintre — un pharmacien — un témoin* et un grand nombre de mots terminés par *eur* :

accordeur, acquéreur, agresseur, agriculteur, amateur, armateur, assesseur, auteur, censeur, commandeur, compositeur, constructeur, contradicteur, éditeur, graveur, horticulteur, imprimeur, ingénieur, inquisiteur, instructeur, interrupteur, littérateur, malfaiteur, orateur, prédécesseur, prédicateur, professeur, prosateur, régisseur, rhéteur, sculpteur, souscripteur, successeur, traducteur, vainqueur;

Pour le féminin on dit : *une femme écrivain, une femme peintre ; une femme sculpteur.*

4° Mots qui sont masculin ou féminin, suivant qu'on désigne un individu de l'un ou l'autre sexe (un enfant, une enfant) : *ancêtre, artiste, avare, aveugle, camarade, élève, émule, enfant, esclave, espiègle, harpiste, ladre, novice, philosophe, pianiste, prude, somnambule, violoniste* ; des noms de nationalité : *belge, corse, russe, serbe, suisse, etc.*

DU NOMBRE

45. Il y a en français deux nombres : le *singulier* et le *pluriel*.

Le *singulier* s'emploie quand on parle d'une seule personne ou d'une seule chose : un *homme*, un *arbre*.

Le *pluriel* s'emploie quand on veut désigner plusieurs personnes ou plusieurs choses : des *hommes*, des *arbres*.

Règle générale. — On forme le pluriel des noms en ajoutant un s au singulier.

Ex. : *Un homme, des hommes.*

Remarque : f ne se prononce pas au pluriel dans des bœu(f)s, des œu(f)s ; de même on dit un os (osse), des o(s).

46. Exceptions. — 1° Les noms en **au, eau, eu** prennent un **x** au pluriel.

Ex. : *Un boyau, des* **boyaux** ; *un chameau, des* **chameaux** ; *un jeu, des* **jeux**.

Cependant *landau, sarrau, bleu* suivent la règle générale ; *alleu* est douteux.

2° Les noms en **al** font leur pluriel en **aux**.

Ex. : *un cheval, des* **chevaux** ; *un mal, des* **maux**.

Cependant sept noms font leur pluriel en *als* : *bal, cal, carnaval, chacal, festival, pal, régal.*

3° Cette forme du pluriel a été étendue aux sept noms en **ail** suivants qui font leur pluriel en **aux**:

Bail, corail, émail, soupirail, travail, vantail, vitrail ; pluriel : **baux, coraux**, etc.

Et aux sept noms suivants en **ou** : *bijou, caillou, chou, genou, hibou, joujou, pou.*

4° Attirail, aiguail (rosée), bercail, n'ont pas de pluriel ; bétail fait bestiaux.

Remarque historique. — Dans l'ancien français, le pluriel en s existait seul. Comme l s'est souvent vocalisée en u (Cf. **aube** et **albe**), **chevals** se prononçait **chevaus**. Les copistes des manuscrits, pour abréger cette finale **us**, ont employé un signe analogue à **x**, chevax. Puis pour conformer l'écriture à la prononciation, ils ont finit par rétablir l'**u**, et, au lieu d'écrire **chevax**, on écrivit **chevaux**.

Omission du signe du pluriel. — Le signe du pluriel ne se met pas.

1° par application de la règle de l'équivalence de **s, x, z**.

Quand les noms sont terminés par **s, x**, ou **z**.

Ex. : *Fils, prix, gaz.*

2° A la fin des mots invariables pris substantivement :

Ex. : *Des* **si** *et des* **car**. *Le nombre quarante-quatre s'écrit avec deux* **quatre**. *Les* **qu'en-dira-t-on**.

3° Après certains mots d'origine étrangère :

Ex. : *Credo, pater, post-scriptum, adagio.*

47. Noms tirés des langues étrangères. — Un certain nombre de noms étrangers conservent au singulier et au pluriel la forme qu'ils possèdent dans leur langue d'origine.

Ex. : *Un maximum, des maxima — un minimum, des minima — un carbonaro, des carbonari — des dilettante, des bravi* (aventuriers) — *un gentleman, des gentlemen*, de même des *sportsmen*, des *wattmen*.

D'autres sont invariables au pluriel : *des... affidavit, ave Maria, confiteor, credo, décorum, fiasco, pater noster, satisfecit.*

D'autres suivent la règle générale des noms français : *des.... accessits, albums, alinéas, alleluias, apartés, aquariums, bravos (applaudissements), contraltos, débets, kyries, mémentos, muséums, pensums, rectos, spécimens, ténors, versos.*

D'autres enfin ont deux formes au pluriel : *soprani, sopranos — impresarii, impresarios — mezzo-sopranos, mezzo-soprani — sanatoriums, sanatoria — sandwiches, sandwichs — speeches, speechs.*

48. Noms qui ne sont usités qu'au singulier quand ils sont employés *dans un sens général* :

1° les noms de métaux et de métalloïdes, de liqueurs, d'aromates (alcool, cuivre, plomb, encens, oxygène, la myrrhe, musc) ;

2° les noms d'art et de sciences : la sculpture, la musique, la botanique ;

3° les noms de vertus et de vices : la bonté, la méchanceté ;

4° les noms d'états moraux ou physiques : l'adolescence, l'odorat, le toucher ;

Noms qui ne peuvent être employés qu'au singulier :

a) les noms des corps de la chimie, considérés comme tels : *soufre, phosphore, oxygène, térébenthine*, etc ;

certains qui s'emploient au pluriel ont alors un tout autre sens : *des fers, des ors, des cuivres* ;

b) les noms de substances aromatiques : *l'encens, le musc, le benjoin*, etc ;

c) certains noms de qualités morales ou psychologiques : *la sagesse, la paresse, la discrétion, la pitié, la jeunesse, la vue, l'odorat*, etc ;

d) certains noms formés d'adjectifs : *le vrai, le beau, l'utile, le faux, l'honnête*, etc.

Noms qui ne sont employés qu'au pluriel :

aguets, alentours, annales, armoiries, arrérages, broussailles, catacombes, confins, décombres, dépens, doléances, entrailles, épousailles, fiançailles, frais (dépenses), *funérailles, hardes, mânes, mœurs, mouchettes, nouées, obsèques, pincettes, pleurs, prémices, ténèbres, vivres.*

Pluriel de certains mots d'une langue ancienne ou étrangère, utilisés pour la langue française :

1° des *accessits, agendas, albums, alibis, alinéas, alléluias, apartés, aquariums, autodafés, biftecks, bravos* (applaudissements), *confettis, contraltos, débets, kyries, macaronis, mémentos, muséums, numéros, pensums, spécimens, ténors, versos* ;

2° sont invariables :

les mots latins désignant une prière (excepté bénédicités) ; les locutions formées de deux mots étrangers :

des *affidavit, ave maria, confiteor, crédo, décorum, ex-voto, fiasco, in-folio, in-quarto, in-octavo, paternoster, satisfecit, requiem* ;

3° ont le pluriel de leur langue d'origine :

des *bravi* (*spadassins*), *carbonari, dilettanti, lazaroni — babies, ladies, misses, miladies, pifferari, tories, sportmen, wattmen, aldermen — maxima* (math.), *minima* (math.), *désidérata, cross-coutries, garden-parties, lunches, matches — capeadores, mortadores, sandwiches* ;

4° ont leur pluriel d'origine ou celui de notre langue :

cicerones (*ni*), *impresarios* (*rii*), *mezzo-soprano* (*ni*), *dilettantes* (*ti*), *sanatoriums* (*ria*), *sopranos* (*ni*), *speechs* (*ches*).

L'article

49. On distingue l'article *défini* (le, la, les) et l'article *indéfini* (un, une, des).

L'article défini

Son rôle. — *a*) Il se place devant les noms qui désignent une personne particulièrement *définie* ; il signale donc la détermination du nom : **La** *poupée de Jeanne* : il ne s'agit pas d'une poupée quelconque, mais d'une poupée déterminée.

b) Venu du pron. démonstratif latin il a conservé quelque peu dans certains cas de cette valeur démonstrative : *Nous avons vu* **l'***homme* (cet homme dont nous parlons) *s'enfuir à toutes jambes.* **L'***ennemi!* (pour voilà l'ennemi).

c) Parfois il a la valeur de l'adjectif possessif : *il a mal à* **la** *jambe droite* (à sa jambe). *Donnez-moi* **la** *main.* Mais la plupart du temps il ne signale aucune détermination précise, il indique seulement que le mot qui suit est un nom, ce qui ne manque pas d'utilité quand ce mot a également un autre rôle dans le discours : **le** *beau,* **le** *manger,* **le** *battant,* **le** *dessus,* **les** *riens,* etc.

Article élidé et article contracté

1° *Elision.* — Devant un mot commençant par une *voyelle* ou par une *h* muette, *le* et *la* deviennent **l'**.

Ex. : **L'***âme* (*pour la âme*) ; **l'***hiver* (*pour le hiver*) ; **l'***incendie* (*pour le incendie*).

2° *Contraction.* — La forme **le** se contracte avec les prépositions **de** et **a** quand le nom masculin commence par une consonne ou une **h** aspirée ; **h** se contracte en toute circonstance.

de le — *du* (Je viens du bois, du hameau).
de les — *des* (Il approche des ennemis, des maisons).
à le — *au* (Je vais au village, au hameau).
à les — *aux* (Aux hommes, aux armes !).

On rencontre encore dans quelques expressions la contraction ès, de **en les**, qui était fréquemment usitée dans le vieux français :

Ex. : *Bachelier* **ès** *sciences* ; *docteur* **ès** *lettres.*

Article partitif

La préposition **de** marque parfois **la partie** ; on a donné le nom d'**article partitif** au groupement **de l'**, **de la** et aux contractions **du, des**, quand la préposition a ce sens particuliers : *donnez-moi* **de** *l'eau,* **de la** *bière,* **du** *vin,* **des** *raisins.*

Dans : *les arbres* **de la** *forêt,* **de** est préposition et sans valeur partitive non plus que les contractions lorsqu'on dit : *les eaux* **du** *ruisseau, la crête* **des** *vagues.*

L'article indéfini

L'article *défini* indique que le nom désigne un objet précis, déterminé :

Ex. : **La** *dame de ces biens.*

L'article *indéfini* se place devant le nom quand on ne veut pas désigner un objet ou un individu déterminé.

Un est l'adjectif numéral ayant perdu la notion précise de l'unité.

Ex. : *J'ai lu dans* **un** *conteur de fables.*

Des indique simplement la pluralité.

Comme l'article défini, il s'emploie parfois, pour désigner non un individu mais un genre, un type. On dira indifféremment :

Un *bon soldat* ou *le bon soldat est discipliné.*

L'article indéfini produit parfois un effet dramatique :

Estimer **un** *Néron.*

50. Ne confondez pas **des** article partitif : *Ce son* **des** *hommes de ce village,*

avec *des*, article indéfini : *j'ai vu* **des** *hommes dans ce village.*

L'Adjectif

Il y a deux sortes d'adjectifs : l'adjectif qualificatif et les adjectifs non qualificatifs, appelés aussi déterminatifs.

1° L'ADJECTIF QUALIFICATIF

51. Accord. — L'adjectif qualificatif est le mot qui désigne une qualité ou une manière d'être de la personne ou de la chose auxquelles il se rapporte. Il est donc dans la phrase en liaison étroite avec le nom ou le pronom qui désignent cette personne ou cette chose. L'adjectif qualificatif s'accorde en genre et en nombre avec le mot auquel il se rapporte.

52. Formation du féminin.

Règle générale. — Le féminin singulier d'un adjectif se forme comme celui du nom en ajoutant un *e* muet au masculin.

Ex. : *Grand, grande* ; *fort, forte.*

Remarque historique. — Un grand nombre d'adjectifs dérivés du latin avaient, dans cette langue, la même forme au masculin et au féminin. Le français conserva d'abord cette similitude, dont on retrouve des traces dans les expressions :

Grand'mère, à *grand'peine,* la *grand'rue, grand'garde, grand'messe* (écrites à tort avec une apostrophe), *fonts baptismaux* (où fonts était féminin), *lettres royaux, Rochefort* (pour roche forte) ; on dit d'ailleurs aussi : la grande rue.

Les adjectifs terminés au masculin par un *e* muet ont par suite la même forme au féminin : *rude, pauvre, riche, faible.* Tels sont en particulier ceux qui sont terminés par des suffixes en *e* : **able** (*estimable*), **aire** (*légendaire*), **ible** (*possible*) etc.

Les particularités de la formation du féminin dans les adjectifs sont analogues à celles qui se rencontrent dans la formation du féminin dans les noms — un grand nombre de noms ayant été formés d'ailleurs par des adjectifs.

53. Remarques. — I. — Adjectifs terminés en **gu**, l'**e** du féminin prend un *tréma* :

Ex. : *Aigu, aiguë ; contigu, contiguë.*

II. — Les adjectifs, *fou, mou, beau, nouveau, vieux,* qui font au masculin devant une voyelle : *fol, mol, bel, nouvel, vieil,* font au féminin, *folle, molle, belle, nouvelle, vieille. Jumeau* fait *jumelle.*

III. — Un certain nombre d'adjectifs terminés par une consonne redoublent la consonne finale :

Ex. : *Cruel, cruelle — pareil, pareille — nul, nulle — gentil, gentille — ancien, ancienne — bon, bonne — las, lasse — exprès, expresse — gros, grosse — épais, épaisse — muet, muette — sot, sotte.* — Les adjectifs en *ot* ne redoublent pas le *t* (manchote) sauf : sot, palot, vieillot.

Les adjectifs en *et* redoublent la consonne finale. Excepté : *replet, complet, incomplet, concret, discret, indiscret, secret, inquiet.*

De même les finales *an, en, on,* excepté persane, ottomane. Les finales *in, un* ne la redoublent pas : salin(e), brun(e).

IV. — L'x final se change en se.

Ex. : *Soucieux, soucieuse.*

Sauf dans *roux, faux, doux* qui font *rousse, fausse, douce.*

V. — Les adjectifs en **er** et en **ier** prennent un accent grave sur l'e qui précède la consonne finale en passant au féminin :

Ex. : *Amer, amère — fier, fière.*

De même huit adjectifs en **et** qui ont pour féminin : *replète, complète, incomplète, concrète, discrète, indiscrète, secrète, inquiète.*

VI. — L'f *finale* se change en **v** devant l'**e muet** du féminin.

Ex. : *Veuf, veuve — neuf, neuve — captif, captive — chétif, chétive.*

VII. — Si un adjectif se termine par un **c** au masculin, le féminin se fait en **che** ou **que** :

Ex. : *Sec, sèche — caduc, caduque.* — Le *c* subsiste dans le féminin de *grec* qui fait *grecque.*

VIII. — Le **g** final se change en **gue.**

Ex. : *Long, longue.*

IX. — Certains adjectifs en **eur** ou **teur** font leur féminin en **euse, eresse** ou **trice.** Ce sont d'anciens noms :

Ex. : *Trompeur, trompeuse — grondeur, grondeuse — enchanteur, enchanteresse — corrupteur, corruptrice.*

Mais les anciens comparatifs en *eur, érieur* suivent la règle générale : majeur, maj*eure* ; meilleur, meill*eure*, supérieur, supér*ieure.*

X. — *Malin* fait *maligne* ; *bénin* fait *bénigne. Tiers* fait *tierce* ; *frais* fait *fraîche. Hébreu* fait *hébraïque.*

54. Formation du pluriel.

Règle générale. — On ajoute un **s** au singulier comme pour le nom :

Ex. : *Grand, grands — grande, grandes.*

De ce fait, les adjectifs terminés par **s, x, z,** restent invariables : heur*eux.*

Pour les adjectifs féminins pas d'autres exceptions que les composés spéciaux : *grand'mères — grand' tantes . . .*

55. Exceptions. — 1° Les adjectifs masculins en **eau** prennent un **x** : *Beau, nouveau, jumeau, hébreu.*

2° Les adjectifs en **al** font généralement au pluriel *aux.* Quelques-uns suivent la règle générale. ; ce sont des adjectifs peu utilisés au masculin : *fatals, filials, finals, initials, matinals, médials, sentimentals, théâtrals.* Evitez leur emploi au masculin.

56. *Place de l'adjectif.* — L'adjectif épithète se place à côté du nom ; l'adjectif attribut, après le verbe.

L'usage et l'euphonie déterminent en général la place de l'adjectif.

L'adjectif placé avant le nom semble faire corps avec lui et forme une sorte de nom composé. Aussi perd-il dans les expressions à sens figuré, sa valeur propre. Il prend alors quelquefois une valeur de sentiment et a un pouvoir évocateur plus fort.

Ex. : *un* **grand** *homme, un* **brave** *homme, un* **méchant** *auteur, une* **triste** *personne, un* **faux** *air, l'***antique** *capitale de l'Egypte.*

On augmente la force expressive de l'adjectif en le plaçant en vedette au début de la phrase : maudit de tous, il . . .

57. Degrés de signification. — Les adjectifs quelquefois peuvent marquer des degrés dans la qualité : un homme peut être, par exemple, plus ou moins riche, un pays peut être très peuplé ou peu peuplé, etc.

D'autre part, le degré d'une qualité dans un objet peut être exprimé par comparaison avec le degré de cette qualité dans un autre objet : cet homme est plus riche que celui-ci ; d'autres fois le degré est indiqué sans comparaison. Il y a donc pour les adjectifs des formes relatives et des formes absolues pour exprimer le degré dans la qualité. Quand l'adjectif est employé sans l'idée d'un degré de la qualité, on dit qu'il est au positif.

1° Le *comparatif* est le degré de signification d'un adjectif employé avec une idée de comparaison d'une qualité avec une autre qualité, ou de la qualité d'un objet avec celle d'un autre objet.

La comparaison peut établir que les deux termes possèdent la qualité exprimée par l'adjectif.

a) Au même degré (comparatif d'égalité).

b) A un degré différent (comparatif d'infériorité ou de supériorité) :

Ex. : Comparatif d'égalité : *Berlin est* **aussi grand** *que Paris.*

Comparatif d'infériorité : *Lyon est* **moins grand** *que Paris.*

Comparatif de supériorité : *Londres est* **plus grand** *que Paris.*

2° Le *superlatif* exprime la qualité d'un objet comparé avec tous les autres objets semblables ; (on l'appelle superlatif relatif de supériorité ou d'infériorité) ; ou cette qualité à un très haut degré, sans qu'il y ait comparaison ; (on l'appelle superlatif absolu.).

Ex. : Superlatif relatif : *le chien est* **le plus fidèle** *des animaux domestiques.* Superlatif absolu : *le chien est* **très fidèle.**

58. Les langues anciennes indiquaient généralement le comparatif et le superlatif au moyen d'une terminaison spéciale de l'adjectif, ou même d'une forme tout à fait particulière :

Ex. : *Crudelis (cruel), crudelior (plus cruel), crudelissimus (le plus cruel).*

Le français se contente de faire précéder l'adjectif d'un adverbe qui en modifie le sens. Cependant un certain nombre de comparatifs latins sont passés en français ; ce sont :

Ex. : **Meilleur** (*de melior*) *comparatif de bon* ; **pire** (*de pejor*) *comparatif de* **mauvais** ; **moindre** (*de minor*), *comparatif de petit.*

Ces comparatifs servent à former le superlatif ; on les fait simplement précéder de **le, la, les** :

Ex. : *Le meilleur, le pire, le moindre.*

Bon n'a pas d'autre forme de comparatif ni de superlatif relatif ; mais *mauvais* et *petit* ont aussi les comparatifs *plus mauvais, plus petit,* dont le premier s'applique aux choses, le second aux objets qui se mesurent, et les superlatifs relatifs ; *le plus mauvais, le plus petit.* Les superlatifs absolus suivent la règle générale : *très bon, très mauvais, très petit.*

Les adjectifs suivants sont également dérivés de comparatifs latins. Le sens du comparatif n'est plus très net chez eux, mais il subsiste suffisamment pour qu'on ne puisse les faire précéder du mot *plus* :

Majeur, mineur, antérieur, postérieur, citérieur, ultérieur, intérieur, extérieur, inférieur, supérieur, plusieurs.

Enfin le français applique quelquefois la terminaison **issime** (latin : issimus) pour former des superlatifs usités dans les formules de cérémonie ou dans le style plaisant :

Ex. : *Sérénissime, richissime, rarissime,* etc.

Donc, à part quelques rares exceptions, la langue française n'a ni comparatifs, ni superlatifs, à proprement parler.

59. Adjectifs qu'il ne faut pas employer les uns pour les autres.

1° *Capable, susceptible.* — *Capable* a toujours un sens actif, tandis que *susceptible* ne peut être employé que dans un sens passif :

Ex. : *Cet enfant est* **capable** *de faire mieux.*

Le jus de raisin est **susceptible** *de fermentation.*

Capable peut se dire des choses :

Ex. : *Un propos* **capable** *de nuire.*

Dans le sens : prompt à s'offenser, *susceptible* ne se dit que des personnes.

2° *Conséquent, considérable.* — *Conséquent* signifie : logique, conforme aux principes, à la raison :

Ex. : *Cette détermination est* **conséquente** *avec ses principes.*

Considérable signifie : qui doit être remarqué par son importance :

Ex. : *Paris est une ville* **considérable.** — *Cette maison emploie un personnel* **considérable.**

Ce serait une grosse faute que de dire : *une fortune* **conséquente.**

3° *Eminent, imminent.* — *Eminent* signifie : qui domine, très élevé, très grand :

Ex. : *C'est un docteur* **éminent.**

Imminent signifie : qui menace dans un avenir prochain ; proprement : se percher sur, menacer.

Ex. : *Une catastrophe est* **imminente.**

4° *Officiel, officieux.* — *Officiel,* qui émane des autorités, du gouvernement :

Ex. : *Cette nouvelle est officielle.* — *Le voyage* **officiel** *du président.*

Officieux se dit par opposition à *officiel,* de ce qui a le caractère d'une simple communication.

Ex. : *Ce renseignement n'est pas officiel, il n'est qu'officieux.*

Officieux, signifie en outre toujours prêt à rendre service :

Ex. : *Cependant je rends grâce au zèle* **officieux.** *Qui sur tous mes périls vous fait ouvrir les yeux.* (Racine).

5° *Ombrageux, ombreux.* — *Ombrageux* signifie littéralement ; qui a peur de son ombre. Au figuré : soupçonneux, défiant.

Ex. : *Ce cheval est* **ombrageux.** — *Cet homme a le caractère* **ombrageux.**

Ombreux signifie : couvert d'ombre ou qui donne de l'ombre :

Ex. : *Le château est entouré de vastes allées* **ombreuses.**

6° *Originaire, original, originel.* — *Originaire* qui tire son origine de tel ou tel lieu :

Ex. : *Cet homme est* **originaire** *de la Guadeloupe.*

Original, qui a un caractère propre à soi, qui n'imite pas, s'emploie aussi dans le sens de singulier, bizarre :

Ex. : *C'est le tableau* **original.** — *Cet homme a des allures bizarres, c'est un* **original.**

Originel, qui remonte jusqu'à l'origine :

Ex. : *Le péché* **originel.** — *Il y a là dedans un vice* **originel.**

7° *Romanesque, romantique.* — *Romanesque* se dit de tout ce qui peut figurer à bon droit dans un roman d'imagination.

Ex. : *Cette jeune fille a des idées très* **romanesques.**

Romantique a eu d'abord le sens que nous donnons aujourd'hui à romanesque ; se dit maintenant par opposition à classique, s'applique à ce qui éveille l'imagination, ou met en jeu la sensibilité.

Ex. : *Victor Hugo était le chef de l'école* **romantique.** *Un paysage* **romantique.**

9° *Temporaire, temporel.* — *Temporaire* qui n'existe que pour un temps :

Ex. : *On a décrété la fermeture* **temporaire** *de cet établissement.*

Temporel : relatif à des biens, à un pouvoir matériel ; s'oppose à spirituel.

Ex. : *Charlemagne, en leur constituant des Etats, avait établi pour les papes un pouvoir* **temporel.**

10° *Vénéneux, venimeux.* — Vénéneux se dit des plantes :

Ex. : *Les champignons* **vénéneux** *sont très dangereux.*

Venimeux se dit des animaux. Ex. : *Le scorpion est* **venimeux.**

Cette distinction est assez récente.

2° ADJECTIFS DÉTERMINATIFS

60. Il y a cinq espèces d'adjectifs déterminatifs. Ce sont :

1° Les adjectifs numéraux.
2° Les adjectifs possessifs.
3° Les adjectifs démonstratifs.
4° Les adjectifs interrogatifs et conjonctifs.
5° Les adjectifs indéfinis.

I. — Adjectifs numéraux.

61. Les *adjectifs numéraux* sont ceux qui déterminent la signification du nom en y ajoutant une idée de nombre.

62. Les *adjectifs numéraux cardinaux* ajoutent une idée de nombre absolu, indépendamment de toute comparaison. Ce sont :

Un, deux, trois, cent, mille, etc.

Accord. — Les adjectifs numéraux cardinaux sont invariables. Cependant :

un prend le signe du féminin : *une.*

Vingt et *cent* prennent le signe du pluriel s'ils sont précédés d'un nombre qui les multiplie et s'ils ne sont suivis d'aucun autre.

Ex. : *Quatre-vingts hommes ; trois cents francs.* — Mais : *Quatre-vingt-trois hommes ; six cent treize soldats.*

S'ils sont pris dans le sens de *vingtième, centième,* ils restent invariables :

Ex. : *L'an huit cent ; la page quatre-vingt.*

Toutefois on tolère dans les examens le pluriel de *vingt* et *cent* même lorsque ces mots sont suivis d'un autre adjectif numéral.

Ex. : *quatre-*vingt *ou quatre-*vingts*-dix hommes.*

Mille se remplace par *mil* pour désigner le millésime quand la date commence par ce mot :

Ex. : *L'an* mil *sept cent quatre-vingt-treize.*

Mais on écrit : *L'an mille.* Et on peut écrire *l'an* mille *sept cent quatre-vingt-treize.*

Mille varie quand il désigne une mesure de distances : *le navire fait* 20 milles *à l'heure.*

63. *Les adjectifs numéraux ordinaux* ajoutent au substantif une idée de nombre relatif, c'est-à-dire une idée de rang, *d'ordre.* Ce sont :

Premier, deuxième, troisième, centième, millième, etc.

Formation. — L'adjectif numéral ordinal se forme en ajoutant la terminaison *ième* à l'adjectif numéral cardinal correspondant :

Ex. : *Treize, treiz*ième ; *cent, cent*ième ; *trente et un, trente et un*ième.

Cependant : *un* fait *premier* (*unième* n'est usité que dans les nombres composés) ; et *deux,* outre *deuxième,* fait aussi *second* (dans le cas de *deux* seulement). *Second* appartient à une ancienne série dont il reste le seul représentant avec quelques autres qui subsistent dans certaines expressions : *le* tiers *état, une fièvre* tierce, *un* quart *voleur survint* (L. Font), *Charles-*Quint.

Cinq fait *cinquième ; neuf* ou les adjectifs terminés par *neuf* font *neuvième.*

Accord. — Les adjectifs numéraux ordinaux s'accordent en genre et en nombre avec le nom qu'ils déterminent :

Ex. : *La* seconde *fois ; les* premiers *hommes ; tous les* cinquièmes *jours.*

64. *Emploi des cardinaux à la place des ordinaux.* — Les cardinaux remplacent les ordinaux pour désigner :

1° L'heure, l'année, les jours du mois : *Il est* cinq *heures, l'an* un, *le* quatorze *juillet.*

2° Le numéro des souverains dans une dynastie : *Louis* onze.

3° Les pages ou les chapitres d'un livre : *page* six, *chapitre* deux.

65. **Remarque.** — Les adjectifs numéraux peuvent être pris substantivement ; ils constituent alors les *noms de nombre* cardinaux ou ordinaux.

Ex. : Trois *et* cinq *font* huit.

Il vaut mieux être *le premier* dans sa province que le dernier à Rome.

On peut leur rattacher les mots multiplicatifs : le double, le triple, etc. ; — les partitifs : demi, tiers, quart ; — les collectifs : une dizaine, une centaine.

II. — Adjectifs possessifs.

66. Les *adjectifs possessifs* déterminent le nom en indiquant la personne qui possède l'objet dont on parle. De là :

1° des formes différentes, comme dans les pronoms personnels suivant que le *possesseur* est la personne qui parle (mon), celle à qui l'on parle (ton) ou celle de qui l'on parle (son) ;

2° deux séries de formes qui correspondent aux personnes du singulier et aux personnes du pluriel, selon que *l'objet possédé* est un ou multiple.

	Singulier		Pluriel
	Masculin	Féminin	des deux genres
1re personne du singulier	mon	ma	mes
2e — —	ton	ta	tes
3e — —	son	sa	ses
1re personne du pluriel	notre		nos
2e — —	votre		vos
3e — —	leur		leurs

Remarque. — 1° Le féminin prend la forme du masculin devant un nom ou un adjectif féminins commençant par une voyelle ou une *h muette.*

Ex. : Mon *épée ;* mon *âme ;* mon *heureuse fortune.*

2° La forme *mien, tien, sien* est employée dans des tournures vieillies : un mien parent.

III. — Adjectifs démonstratifs.

67. Les *adjectifs démonstratifs* déterminent le nom en y ajoutant une idée d'*indication ; ils montrent* en quelque sorte l'objet dont on parle. Il n'y a en réalité qu'un adjectif démonstratif : *ce* qui affecte des formes simples ou composées.

Singulier		Pluriel
Masculin	Féminin	des deux genres
ce, cet	cette	ces

Ce précède les noms ou les adjectifs commençant par une consonne. *Cet* précède ceux qui commencent par une voyelle ou une *h muette :*

Ex. : Ce *cheval ;* ce *héros ;* cet *âne ;* cet *heureux jour.*

L'adjectif démonstratif se compose avec ci (pour ici) et là : ceci, cela.

N. B. — Ne pas confondre *ses,* adjectif possessif, avec *ces,* adjectif démonstratif :

Ex. : *Ce chien perd* ses *poils. Donnez-moi* ces *pommes qui sont tombées de l'arbre.*

IV. — Adjectifs relatifs et interrogatifs.

1° *L'adjectif relatif* : lequel, laquelle, lesquels, lesquelles ne s'emploie que dans la langue littéraire ou dans des formes spéciales.

Je lui ai donné mille francs, laquelle *somme je lui ai payée en présence de son père. Je pense que je le verrai,* auquel *cas....*

L'adjectif interrogatif est l'adjectif relatif privé de son article.

Quelle *heure est-il ?*

Il est parfois exclamatif ou emphatique.

Quelle *audace!* Quel *génie!*

V. — Adjectifs indéfinis

68. Les *adjectifs indéfinis* ajoutent au nom une idée vague de quantité (positive ou négative), de qualité de comparaison.

un, une, des.
aucun, aucune, aucuns, aucunes.
autre, autres.

certain, certaine. certains, certaines.
chaque.
maint, mainte, maints, maintes.
même, mêmes.
nul, nulle, nuls, nulles.
plusieurs.
quelque, quelques.
quelconque, quelconques.
tel, telle, tels, telles.
tout, toute, tous, toutes.

Ex. : *J'ai reçu* **une** *visite aujourd'hui. Je n'ai fait* **aucun** *projet.*

Certaines *personnes prétendent...* **Tous** *les hommes sont mortels.*

Remarque. — Il ne faut pas confondre *un*, adjectif indéfini ayant pour pluriel : *des*, avec *un* adjectif numéral cardinal :

Ex. : Adjectif indéfini : **un** *roi, si grand qu'il soit, n'est qu'*un *homme.*

Adjectif numéral : *il y avait là* **deux** *empereurs et* **un** *roi. Cet objet vaut* **un** *franc.*

Il ne faut pas confondre *des*, pluriel de *un*, avec *des* article contracté , mis pour *de les* :

Ex. : Pluriel de un : *J'ai vu* des *corbeaux.* Des *loups rôdent autour de la maison.*

Article contracté : *J'ai peur* des *loups. Les cris* des *corbeaux nous assourdissent.*

Le Pronom

69. On désigne sous le nom de pronom des mots de caractères très différents qu'on ne peut mettre sous une même définition.

Le pronom ne remplace pas seulement le nom, il peut aussi représenter une idée exprimée dans une autre proposition :

Ex. : Je *sais que de* **moi** tu *médis l'an passé. — Comment l'aurais-je fait...*

(La Fontaine.)

Même il peut désigner une personne, une chose dont il n'est pas fait mention précédemment :

Ex. : on *vient,* **qui** *a bu boira...*

On distingue généralement six espèces de pronoms. Il faut mettre à part les pronoms personnels qui indiquent une fonction. Les autres espèces sont mises parfois, comme leurs correspondants adjectifs sous la dénomination de pronoms déterminatifs.

70. 1° PRONOMS PERSONNELS

Fonction sujet

Les pronoms ont des formes différentes suivant leur fonction dans la phrase :

	Singulier	Pluriel
1re personne :	je, moi	nous
2e personne :	tu, toi	vous
3e personne :	il, lui, elle	ils, eux, elles

Les pronoms personnels indiquent celle des personnes qui intervient dans le discours :

celle qui parle — je, me, moi, nous (pron. de la 1re personne)

celle à qui l'on parle — tu, te, toi, vous (pron. de la 2e personne)

celle dont on parle : — il, le, elle, la, lui, elles, leur (pron. de la 3e personne)

Fonction attribut, ou complément :

	Singulier	Pluriel
1re personne :	moi, me	nous
2e personne :	toi, te	vous
3e personne :	le, la, lui soi, elle, se, en, y	eux, les, leur elles, les, se, en, y

Ex. : Fonction sujet : **Je** *suis chez mon père.* **Il** *est ici.* **Vous** *avez mal fait.*

Moi, je *suis fort,* **toi,** tu *es faible.*

Fonction attribut : *Cet homme, c'est* **moi.** *Nous* le *sommes.*

Fonction complément : *Venez chez* **moi.** *Amenez-le-***moi.** *Dites-***lui** *de venir. Je ne veux plus de viande, j'*en *ai trop mangé. J'* y *consens.*

la et *y* qui sont des adverbes détournés de leur sens, sont appelés *pronoms adverbiaux.*

71. Pronoms réfléchis. — *Se* et *soi* qui sont toujours attributs compléments et qui remplacent toujours le sujet de la proposition sont classés plus particulièrement sous le nom de *pronoms réfléchis.*

2° PRONOMS DÉTERMINATIFS

72. Il y a quatre espèces de pronoms déterminatifs :

I. — Les pronoms *possessifs.*
II. — Les pronoms *démonstratifs.*
III. — Les pronoms *interrogatifs* et *conjonctifs.*
IV. — Les pronoms *indéfinis.*

I. — Pronoms possessifs.

73. Les *pronoms possessifs* ajoutent une idée de possession à l'idée du nom qu'ils représentent. Comme les pronoms personnels ils indiquent en outre la *personne* du discours.

Ce sont :

Quand il n'y a qu'un possesseur :

	Singulier	
	Masculin	Féminin
1re personne :	le mien	la mienne
2e personne :	le tien	la tienne
3e personne :	le sien	la sienne

	Pluriel	
	Masculin	Féminin
1re personne :	les miens	les miennes
2e personne :	les tiens	les tiennes
3e personne :	les siens	les siennes

Quand il y a plusieurs possesseurs :

1re personne : le nôtre, la nôtre, les nôtres
2e personne : le vôtre, la vôtre, les vôtres
3e personne : le leur, la leur, les leurs

Remarque. — Tandis que les adjectifs *notre* et *votre* n'ont pas d'accent circonflexe et que l'*o* s'y prononce bref, parce qu'ils sont considérés comme des formes atones qui s'appuient sur le nom qui suit, le *nôtre,* le *vôtre* prennent l'accent circonflexe, parce qu'ils sont employés seuls et constituent des formes toniques.

II. — Pronoms démonstratifs

74. Les *pronoms démonstratifs* désignent comme en le *montrant,* l'objet indiqué, par le nom qu'ils représentent : Il y a deux pronoms démonstratifs simples:

1° Celui (celle, ceux, celles).

2° Le pronom neutre : ce.

En ajoutant à ces formes les particules *ci* ou *là*, on obtient d'autres pronoms démonstratifs à forme composée :

celui-ci,	celle-ci,	ceci,	ceux-ci,	celles-ci
celui-là,	celle-là,	cela,	ceux-là,	celles-là

Les formes composées avec *ci* marquent un objet proche ou les paroles qui vont suivre ; les formes composées avec *là*, un objet plus éloigné ou les paroles qui précédent.

Ex. : *Le chien et le chat sont des animaux domestiques,* **celui-ci** (*le chat*) *est moins fidèle que* **celui-là** (*le chien*).

Je te prie de bien écouter **ceci** : *je veux que...* ; **cela**, *je l'ai dit...*

Remarque — *Cela* s'écrit sans accent grave.

III. et IV. — Pronoms relatifs ou conjonctifs et pronoms interrogatifs.

75. Les *pronoms conjonctifs* ou *relatifs* sont ceux qui établissent une *liaison*, un *rapport* entre un mot dans une première proposition qu'ils représentent et une seconde proposition, qu'à la manière des conjonctions ils servent à introduire. On dit aussi qu'ils *joignent* deux propositions. Le mot dont ils tiennent la place est leur *antécédent*. Celui-ci peut être un nom, un pronom ou un adjectif. L'antécédent peut être une proposition entière.

1° *Qui, que, quoi,* et les *pronoms adverbiaux que, dont, où.*

2°	Singulier		Pluriel	
	Masculin	Féminin	Masculin	Féminin
	lequel	laquelle	lesquels	lesquelles
	duquel	de laquelle	desquels	desquelles
	auquel	à laquelle	auxquels	auxquelles

Ex. : *J'ai vu l'homme* **qui** *vous a abordé hier.* — *Le livre* **que** *vous lisez.* — *Ce à* **quoi** *j'ai pensé.* — *L'homme* **dont** *vous m'aviez parlé est venu me voir.* — *La ville* **où** *je suis né.* — *Du temps* **que** (pr. adv.). — *C'est à vous* **que** (pr. adv.) *parle ma sœur.* — *L'agent* **auquel** *je me suis adressé...*

Les pronoms *conjonctifs* s'emploient tous comme *interrogatifs*, sauf *dont*.

Ex. : **Qui** *êtes-vous* ? — **D'où** *venez-vous* ? — **Laquelle** *choisissez-vous* ?

L'adjectif interrogatif *quel* joue dans certains cas tout à fait le rôle d'un pronom interrogatif :

Ex. : **Quel** *est cet homme* ? (*exactement* : *quel homme est cet homme*?) **Quelle** *est cette femme* ?

L'interrogation est directe : **que** *voulez-vous*, ou indirecte : *dites-moi ce* **que** *vous voulez.*

V. — Pronoms indéfinis

76. Ces pronoms ne déterminent que d'une façon vague, *indéfinie*, les noms qu'ils remplacent ; les noms eux-mêmes, sont le plus souvent sous-entendus. Parfois ils ne déterminent aucun nom : **on** *vient*. Enfin certains n'ont pas toujours une valeur indéfinie : en parlant de deux personnes déterminées on dira : l'une... l'autre. Il en est de même pour *aucun, chacun, nul,* parfois pour *on*.

Les pronoms indéfinis sont :

On, tel, quiconque, quelqu'un, chacun, autrui, autre, l'un, les uns, l'autre, les autres, plusieurs, personne, rien, chose (dans *quelque chose, autre chose, grand'chose, peu de chose*) *certain, tout, aucun, nul, rien, qui que, quoi que.*

Remarque historique. — *On* vient de *homo* qui signifie *homme*. Il a donc le sens général de « homme », *un homme quelconque. Personne, chose, rien* sont en réalité des noms.

En outre : *un, aucun, autre, certain, nul, plusieurs, tout, tel,* sont tantôt adjectifs, tantôt pronoms indéfinis:

Ex. : **On** *ne doit pas nuire à* **autrui. Personne** *n'a le droit de voler.* **Certains** *prétendent que...* Les autres sont toujours pronoms.

Le Verbe

I. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

Les *verbes* sont les mots qui disent ou permettent de dire ce qu'on sait des personnes ou des choses (*la terre tourne, le laboureur sème le blé, le cahier est déchiré.*) Ils indiquent des actions ou des états.

Le mot représentant la personne ou la chose sur lesquelles il nous renseigne s'appelle le *sujet*.

77. Radical et terminaison. — On distingue dans un verbe le *radical* et la *terminaison*.

Le *radical* (de *radix*, racine), est la partie essentielle du verbe ; il en donne la signification. En général, il ne subit aucune modification. Toutefois certains verbes peuvent avoir plusieurs radicaux, par exemple un radical accentué, l'autre atone : *je vais, nous allons, nous irons, que j'aille.*

La *Personne* et le *Nombre* : Le verbe est à la même personne (1re 2e, 3e) et au même nombre (singulier ou pluriel) que le sujet ; la terminaison du verbe varie donc sauf exception : 1° selon que le sujet est la personne qui parle, celle à qui l'on parle ou celle dont on parle. 2° Selon que le sujet désigne une ou plusieurs personnes (ou choses). Les formes du pluriel diffèrent toujours, au moins par l'écriture, des formes du singulier, mais il arrive que les formes ne diffèrent pas toujours d'une personne à l'autre, même pas toujours par l'écriture, ni pour le son : *j'aime, tu aimes, il aime, ils aiment* sont semblables ; de même pour l'écriture : *j'aime, il aime, je marchais, tu marchais.*

La *terminaison* représente des idées particulières ; elle s'ajoute au radical pour indiquer le temps, la personne, le nombre, le mode. Elle est par suite essentiellement variable,

	R.	T.
Ex. :	*J'aim*	e
	Tu aim	ais
	Nous aim	erons.

L'ensemble des formes d'un verbe s'appelle sa *conjugaison*.

78. Modifications du verbe. — Le verbe a donc des formes différentes suivant : la personne, le nombre, le temps, le mode..

Les verbes sont à la 1re ou à la 2e personne quand le sujet est un pronom de la 1re ou de la 2e personne ; dans tous les autres cas, ils sont à la 3e personne.

79. Le Temps. — Le *temps* est la forme particulière prise par le verbe pour marquer l'époque à laquelle se rapporte l'état ou l'action.

Il y a trois temps principaux correspondant aux trois grandes divisions de la durée :

Le *présent*, le *passé*, le *futur*.

1° Le *présent* indique qu'une chose a lieu au moment où l'on parle, ou qu'elle est habituelle.

Ex. : *Nous parlons* ; *vous écrivez.*

2° Le *passé* indique qu'une chose est *passée* au moment où l'on parle :

Ex. : *J'ai parlé* ; *vous avez écrit.*

3° Le futur indique qu'une chose *aura lieu* après le moment où l'on parle :

Ex. : *Je parlerai* ; *vous écrirez.*

80. Différentes sortes de passés. — Le passé admet des nuances de simultanéité et d'antériorité, qui sont exprimées par *cinq temps* différents, *les cinq passés* :

L'*imparfait*, le *passé simple*, le *passé composé*, le *passé antérieur*, le *plus-que-parfait* (parfait signifie : achevé).

Imparfait. — Ce temps indique qu'une action ou un état passés actuellement étaient présents par rapport à une action ou à un état passés également :

Ex. : **J'arrivais** *au moment où vous êtes tombé.*

Ou bien il indique une action habituelle : *Je* **venais** *souvent à Paris autrefois*, ou une action continue : **il neigeait** ; une action qui va se faire, ou vient de se faire : *Il me dit qu'*il **allait** *partir, qu'*il **venait** *de sortir.*

Les quatre autres temps marquent l'antériorité :

soit par rapport au présent (passé simple et passé composé),

soit par rapport au passé (passé antérieur et plus-que-parfait).

Passé simple. — Ce temps indique une action ou un état déterminés qui ont eu lieu à une époque *définie*, ou supposée telle et qui par conséquent n'a plus de rapport avec le présent.

Ex. : *En arrivant à Paris,* **il trouva** *son frère à la gare.* — *Napoléon Ier* **vainquit** *toute l'Europe.*

C'est par excellence le temps du récit historique : *César* **conquit** *la Gaule.*

Passé composé. — Ce temps indique une action ou un état passés et qui ont eu lieu à une époque peu éloignée du présent et qui tiennent encore du présent de quelque manière.

Ex. : **J'ai perdu** *mon chapeau.* **Il est parti.**

Remarque. — On emploie souvent le *passé indéfini* pour le *passé défini*. On doit même dire que dans l'usage courant on remplace généralement le passé simple par le passé composé, tout au moins dans la région parisienne et dans le nord de la France.

Passé antérieur. — L'action antérieure est présentée là comme un fait :

Ex. : *Quand* **j'eus reçu** *votre lettre, je me décidai à partir.*

Plus-que-parfait. — L'action antérieure est présentée comme la conséquence, la suite d'un fait.

Ex. : **J'avais cessé** *d'écrire quand vous êtes arrivé.*

Le plus-que-parfait peut marquer la répétition : ce que ne peut pas faire le passé antérieur : *Quand ils* **avaient terminé** *leur travail ils se reposaient.*

81. Sortes de futurs. — Il existe deux sortes de futurs, c'est-à-dire deux sortes de formes marquant la postériorité.

Le *futur simple* ou *futur* proprement dit, et le *futur antérieur.*

Futur simple. — Ce temps indique simplement une action ou un état *à venir* :

Ex. — *Si tu désobéis, je te* **punirai.** *Le monde* **finira** *un jour. Je* **dormirai** *bien cette nuit.*

Futur antérieur. — Ce temps indique l'action ou l'état à venir, qui seront *antérieurs* à une autre action ou à un autre état également *futurs* :

Ex. : *Quand tu* **auras fini** (*futur antérieur*) *ce travail tu pourras* (*futur simple*) *sortir.*

On emploie parfois le futur antérieur, sans idée de futur, mais pour ne pas affirmer catégoriquement: **il aura pris** *un autre chemin.*

82. Temps simples et temps composés. — Si on les considère dans leur forme, les temps sont simples ou composés suivant qu'ils se conjuguent ou non avec les auxiliaires *être* ou *avoir*, ainsi appelés parce qu'ils les aident à se conjuguer.

Les *temps simples* sont : le *présent*, l'*imparfait*, le *passé simple*, le *futur*.

Les *temps composés* sont : le *passé composé*, le *passé antérieur*, le *plus-que-parfait*, le *futur antérieur*.

Il y a pour certains verbes des passés *surcomposés* :

Ex. : **j'ai eu terminé, si j'avais eu terminé, j'aurai eu terminé,** *avant que* **j'ai eu terminé, ayant eu terminé.**

83. Le Mode. — Le *mode* est la manière de présenter l'état ou l'action exprimés par le verbe.

Il y a en français *six* modes :

L'*indicatif*, l'*impératif*, le *subjonctif*, le *conditionnel*, l'*infinitif*, le *participe*.

84. Indicatif. — Ce mode *indique*, marque un état ou une action *réels*.

Ex. : *Je* **sors.** *Il n'*est *pas* **venu.** *Il* a *raison.*

85. Impératif. — Ce mode (impératif, qui ordonne) sert à *ordonner* ou à *prier* qu'une chose se fasse :

Ex. : **Sortez ! Entrez** *donc, je vous prie.*

86. Subjonctif. — Ce mode (*sub*, sous, *jonctif*, qui est joint) est employé en général dans des propositions *subordonnées*. Il présente l'action ou l'état comme dépendant d'un sentiment ou d'une idée qu'exprime le plus souvent une autre proposition. Le subjonctif est donc le mode de la *possibilité*.

Ex. : *Je veux que* **vous dansiez** (*mais il n'est pas certain que vous dansiez*). *Il faut qu'il* **sorte** *pour que je* **puisse** *entrer.*

87. Conditionnel. — Ce mode marque qu'un fait présent, passé ou futur se réalisera sous une condition qui est formulée ou sous-entendue. Cette condition s'exprime souvent dans une proposition commençant par *si* :

Ex. : *Si j'en avais le temps, je* **viendrais** *vous voir demain.*

Le conditionnel sert parfois à atténuer l'affirmation: **on croirait** *qu'il est coupable* ; **je désirerais** *vous parler.*

88. Infinitif. — L'infinitif nomme en quelque sorte l'état ou l'action indiqué par le verbe. C'est une espèce de substantif :

Ex. : **Rire** *vaut mieux que* **pleurer.** *Il faut* **aimer** *son prochain comme soi-même. Il faut* **avoir souffert** *pour* **être** *bon.*

89. Participe. — Ce mode est ainsi appelé parce qu'il *participe* de la nature du verbe et de celle de l'adjectif.

Il tient de la nature du *verbe* parce qu'il exprime non seulement l'action ou l'état, mais aussi le temps.

Il tient de la nature de l'*adjectif* parce qu'il peut comme ce dernier servir de qualificatif :

Ex. : *Un homme* **aimant** *la bonne chère. Un artiste* **admiré.**

90. Modes personnels et modes impersonnels. L'infinitif et le participe qui n'admettent pas la distinction des *personnes* sont dits : *modes impersonnels* ; tous les autres modes sont dits : *modes personnels.*

Les Verbes considérés dans leur forme

Dans l'analyse des verbes il faut distinguer soigneusement les caractères qui tiennent à la forme et ceux qui tiennent au sens.

CONJUGAISONS

91. Qu'est-ce qu'une conjugaison ? — La conjugaison est l'énonciation des diverses formes qui correspondent aux changements du temps. du mode, de la personne, du nombre.

92. Il y a trois conjugaisons. — La première conjugaison est celle des verbes dont l'infinitif est en **er**, et la 1re personne du singulier de l'indicatif présent en **e**. Ces verbes sont de beaucoup les plus nombreux, 4.500 environ. C'est la conjugaison véritablement vivante, puisque tous les verbes modernes s'y confondent.

La deuxième conjugaison, qui comprend 350 verbes environ, vivante aussi, est celle des verbes à l'infinitif en **ir**, qui, entre le radical et la terminaison, intercalent à certains temps la syllabe **iss**. Le type en est le verbe finir.

La troisième conjugaison, ou conjugaison morte, comprend tous les autres verbes, verbes anciens, déformés par l'usage, impossibles à classer : environ 30 verbes en **ir** sans iss (mourir) 17 en **oir** (voir) 50 en **re** (rendre).

Certains ont un double radical, l'un atone, l'autre tonique : je *meurs*, nous *mourons*; je *viens*, nous *venons*.

D'autres ont parfois les formes des deux conjugaisons : cueil*lir*, je cueil*le* ; parfois une forme originale : mour*ir*, je mour*us* ; recev*oir*, je re*çus*; absou*dre*, ab*sous*.

Enfin certains manquent d'un grand nombre de formes : *choir* ; ou bien ont des formes du radical diverses à l'excès : je *vais*, j'al*lais*, j'*irai* (verbes défectifs).

93. Les groupes de verbes. — Le terme de conjugaison n'est plus usité. On se sert du mot *groupe*. On dit : le groupe en **er**, le groupe en **ir**, le groupe irrégulier, ou troisième groupe.

REMARQUES SUR LES CONJUGAISONS

Premier groupe en ER

94. Les temps composés des verbes se conjuguent au moyen des auxiliaires dont les plus essentiels sont : *avoir* et *être*.

Orthographe. — Verbes en **cer**. — Ces verbes prennent une cédille sous le **c** devant **a** et **o** pour conserver au **c** la prononciation douce :

Ex. : *Il effaça, nous effaçons.*

Orthographe. — Verbes en **ger**. — Pour conserver le son doux au **g** devant **a** et **o**, on fait précéder **a** ou **o** d'un **e** *muet* :

Ex. : *Nous partageons, vous ravageâtes.*

Accent tonique. — Verbes qui ont un **é** fermé à l'avant-dernière syllabe. Ils remplacent l'**é** fermé par un **è** ouvert devant une *terminaison muette*.

Ex. : *Il abrège ; il opère.*

Mais le futur fait régulièrement :

J'abrégerai, nous opérerons.

puisque la terminaison n'est pas muette.

Accent tonique. — Verbes qui ont un **e** *muet* à l'avant-dernière syllabe. Ils remplacent l'**e** *muet* par un **è** *ouvert* devant *toute syllabe muette* :

Ex. : *J'achève, nous achèverons.*

Accent tonique. — La règle de l'accent tonique a réparti en deux classes les verbes en **eler, eter**. Certains prennent un accent grave sur l'**e** qui précède la syllabe muette finale.

Bourreler — celer — congeler — déceler — dégeler — démanteler — écarteler — geler — harceler — marteler — modeler — peler — acheter — becqueter — colleter — décolleter — étiqueter — haleter — racheter — déchiqueter.

On écrit :

Je décèle, je gèle.

Mais en général les verbes en **eler** et **eter** (mais non en **éler** ou **éter**) redoublent l'**l** ou le **t** devant une syllabe muette :

Ex. : *J'attelle ; j'appelle ; nous cachetterons.*

Remarque. — Verbes en **éer, ier.** — L'**é** et l'**i** font partie du radical et ne font *jamais* disparaître un *é*, un *e*, ni un *i* de la terminaison :

Ex. : *Créer : je crée ; il créera ; créé* et *créée* (fém.) — *Crier : nous criions (imparfait) ; que vous criiez.*

Prononciation. — Verbes en *oyer* et *uyer*. — Ils changent l'**y** en **i** devant une syllabe muette :

Ex. : *Ployer : je ploie ; il ploiera. Ennuyer ; Il ennuie ; nous ennuierons.*

Mais les verbes en **ayer** et en **eyer** conservent partout l'**y** ; toutefois les verbes en *ayer* peuvent prendre un *i* au lieu d'un *y* devant une syllabe muette.

Ex. : *Je paye ; il grasseye.*
Je paie.

Remarque : Il faut noter aussi que, si la terminaison commence par un **i**, l'**y** du radical et l'**i** de la terminaison subsistent tous deux :

Ex. : *Nous ployions, que vous ployiez.*

Prononciation. — Verbes en **ouer** et en **uer** (dans lesquels *u* se prononce). — On met un tréma sur l'*i* de la terminaison à l'imparfait de l'indicatif et au présent du subjonctif pour empêcher la liaison de l'*u* et de l'*i* ;

Ex. : *Que nous jouïons ; nous arguïons.*

Arguer fait en outre à l'indicatif présent, au futur, etc.

J'arguë, tu arguës, nous arguërons, qu'il arguë, etc.

Quand l'**u** des verbes en **uer** ne se prononce pas, on ne met pas de tréma sur la terminaison.

Deuxième groupe en IR.

I. — *Bénir* a deux participes passés, L'un *béni* est régulier ; l'autre *bénit, bénite* signifiant consacré par le prêtre, ne s'emploie que dans ce sens :

Ex. : *Du pain* **bénit** ; *de l'eau* **bénite.**

II. — *Fleurir*, régulier quand il signifie *être en fleur*, fait *florissant* au participe présent, et *florissais* à l'imparfait quand il est pris au figuré dans le sens de prospérer.

Ex. : *Venise* **florissait** *au moyen âge.*

VERBES IRRÉGULIERS ET VERBES DÉFECTIFS

On appelle *irrégulier* tout verbe qui n'est pas exactement conforme au modèle du groupe auquel il appartient. Tous les verbes du 3e groupe sont irréguliers.

On appelle *défectif* tout verbe auquel font défaut un certain nombre de modes, un ou plusieurs temps, une ou plusieurs personnes. Un verbe impersonnel est défectif parce qu'il ne s'emploie qu'avec le pronom de la 3e personne.

Pourquoi les verbes sont irréguliers.

1° Parce qu'au cours de leur conjugaison, ils prennent plusieurs radicaux, *Aller : all, va, ir.*

2° Parce que le radical s'est altéré.

95. — **Verbe auxiliaire AVOIR**

1° **Temps simples**

TEMPS	MODE INDICATIF	MODE IMPÉRATIF	MODE SUBJONCTIF	MODE CONDITIONNEL	MODE INFINITIF	MODE PARTICIPE
Présent	J'ai Tu as Il *ou* elle a Nous avons Vous avez Ils *ou* elles ont	Aie Ayons Ayez	Que j'aie Que tu aies Qu'il *ou* qu'elle ait Que nous ayons Que vous ayez Qu'ils *ou* qu'elles aient	J'aurais Tu aurais Il *ou* elle aurait Nous aurions Vous auriez Ils *ou* elles auraient	Avoir	Ayant Eu
Imparfait	J'avais Tu avais Il *ou* elle avait Nous avions Vous aviez Ils *ou* elles avaient		Que j'eusse Que tu eusses Qu'il *ou* qu'elle eût Que nous eussions Que vous eussiez Qu'ils *ou* qu'elles eussent			
Passé simple	J'eus Tu eus Il *ou* elle eut Nous eûmes Vous eûtes Ils *ou* elles eurent					
Futur	J'aurai Tu auras Il *ou* elle aura Nous aurons Vous aurez Ils *ou* elles auront					

2° Temps composés

TEMPS	MODE INDICATIF	MODE IMPÉRATIF	MODE SUBJONCTIF	MODE CONDITIONNEL	MODE INFINITIF	MODE PARTICIPE
Passé composé	J'ai eu Tu as eu Il *ou* elle a eu Nous avons eu Vous avez eu Ils *ou* elles ont eu	Aie eu Ayons eu Ayez eu (peu usité)	Que j'aie eu Que tu aies eu Qu'il *ou* qu'elle ait eu Que nous ayons eu Que vous ayez eu Qu'ils *ou* qu'elles aient eu	J'aurais eu *ou* j'eusse eu Tu aurais eu *ou* tu eusses eu Il *ou* elle aurait eu *ou* eût eu Nous aurions eu *ou* eussions eu Vous auriez eu *ou* eussiez eu Ils *ou* elles auraient eu *ou* eussent eu	Avoir	Avoir eu Ayant eu
Passé antérieur	J'eus eu Tu eus eu Il *ou* elle eut eu Nous eûmes eu Vous eûtes eu Ils *ou* elles eurent eu					
Plus-que-parfait	J'avais eu Tu avais eu Il *ou* elle avait eu Nous avions eu Vous aviez eu Ils *ou* elles avaient eu		Que j'eusse eu Que tu eusses eu Qu'il *ou* qu'elle eût eu Que nous eussions eu Que vous eussiez eu Qu'ils *ou* qu'elles eussent eu			
Futur antérieur	J'aurai eu Tu auras eu Il *ou* elle aura eu Nous aurons eu Vous aurez eu Ils *ou* elles auront eu					

96. — Verbe auxiliaire ETRE

1° Temps simples

TEMPS	MODE INDICATIF	MODE IMPÉRATIF	MODE SUBJONCTIF	MODE CONDITIONNEL	MODE INFINITIF	MODE PARTICIPE
Présent	Je suis Tu es Il *ou* elle est Nous sommes Vous êtes Ils *ou* elles sont	Sois Soyons Soyez	Que je sois Que tu sois Qu'il *ou* qu'elle soit Que nous soyons Que vous soyez Qu'ils *ou* qu'elles soient	Je serais Tu serais Il *ou* elle serait Nous serions Vous seriez Ils *ou* elles seraient	Etre	Etant Eté
Imparfait	J'étais Tu étais Il *ou* elle était Nous étions Vous étiez Ils *ou* elles étaient		Que je fusse Que tu fusses Qu'il *ou* qu'elle fût Que nous fussions Que vous fussiez Qu'ils *ou* qu'elles fussent			
Passé simple	Je fus Tu fus Il *ou* elle fut Nous fûmes Vous fûtes Ils *ou* elles furent					
Futur	Je serai Tu seras Il *ou* elle sera Nous serons Vous serez Ils *ou* elles seront					

2° — Temps composés

TEMPS	MODE INDICATIF	MODE IMPÉRATIF	MODE SUBJONCTIF	MODE CONDITIONNEL	MODE INFINITIF	MODE PARTICIPE
Passé composé	J'ai été Tu as été Il *ou* elle a été Nous avons été Vous avez été Ils *ou* elles ont été	Aie été Ayons été Ayez été (peu usité)	Que j'aie été Que tu aies été Qu'il *ou* qu'elle ait été Que nous ayons été Que vous ayez été Qu'ils *ou* qu'elles aient été	J'aurais été *ou* j'eusse été Tu aurais été *ou* tu eusses été Il *ou* elle aurait été *ou* eût été Nous aurions *ou* eussions été Vous auriez été *ou* eussiez été Ils *ou* elles auraient été *ou* eussent été	Avoir été	Ayant été
Passé antérieur	J'eus été Tu eus été Il *ou* elle eut été Nous eûmes été Vous eûtes été Ils *ou* elles eurent été					
Plus-que-parfait	J'avais été Tu avais été Il *ou* elle avait été Nous avions été Vous aviez été Ils *ou* elles avaient été		Que j'eusse été Que tu eusses été Qu'il *ou* qu'elle eût été Que nous eussions été Que vous eussiez été Qu'ils *ou* qu'elles eussent été			
Futur antérieur	J'aurai été Tu auras été Il *ou* elle aura été Nous aurons été Vous aurez été Ils *ou* elles auront été					

97. — Terminaisons des personnes, avoir et être exceptés

INDICATIF

	Présent			Imparfait			Passé simple			Futur		
Verbes en	e	is	s	e	is	s	e	is	s	e	is	s
	e	is	s	ais	issais	ais	ai	is	i . . . . u . . . . in . . . . *s*	erai	irai	rai
	es	is	s	ais	issais	ais	as	is	i . . . . u . . . . in . . . . *s*	eras	iras	ras
	e	it	t ou d	ait	issait	ait	a	it	i . . . . u . . . . in . . . . *t*	era	ira	ra
	ons	issons	ons	ions	issions	ions	âmes	îmes	î . . . . û . . . . în . . . . *mes*	erons	irons	rons
	ez	issez	ez	iez	issiez	iez	âtes	îtes	î . . . . û . . . . in . . . . *tes*	erez	irez	rez
	ent	issent	ent	aient	issaient	aient	èrent	irent	i . . . . u . . . . in . . . . *rent*	eront	iront	ront

	Conditionnel présent			Impératif présent et futur		
Verbes en :	e	is	s	e	is	s
	erais	irais	rais	«	«	«
	erais	irais	rais	e	is	s
	erait	irait	rait	«	«	«
	erions	irions	rions	ons	issons	ons
	eriez	iriez	riez	ez	issez	ez
	eraient	iraient	raient	«	«	«

SUBJONCTIF

Présent			Imparfait		
e	is	s	e	is	s
	e		a sse	i sse	i . . u . . . . in . . . . *sse*
	es		a sses	i sses	i . . . . . u . . . . in . . . . *sses*
	e		â t	î t	î . . . . . û . . . . în . . . . *t*
	ions		a ssions	i ssions	i . . . . . u . . . . in . . . . *ssions*
	iez		a ssiez	i ssiez	i . . . . u . . . . in . . . . *ssiez*
	ent		a ssent	i ssent	i . . . . . u . . . . in . . . . *ssent*

Remarque : On obtient les terminaisons de l'imparfait du subjonctif en remplaçant successivement l'*s* finale de la 2ème personne du passé simple de l'indicatif par les terminaisons : *sse, sses, ît, ssions, ssiez, ssent* :

tu aima-s, *que j'aima*-sse.. — *tu fini*-s, *que je fini*-sse.. — *je dormi*-s, *que je dormi*-sse.. — *je couru*-s, *que je couru*-sse.. — *je tin*-s, *que je tin*-sse.

La voyelle fait partie de la terminaison; elle est par suite la même à la 2ème personne du passé simple de l'indicatif et à toutes les formes de l'imparfait du subjonctif, c'est toujours l'une des voyelles suivantes : *a,. i, u, in*

a Règle de l'accent tonique : m*ou*rir, je m*eu*rs, p*ou*voir, je p*eu*x.

b) Transformation de lettres : fa*ll*oir, il fa*u*dra.

c) Addition de lettres : vou*l*oir, je vou*d*rai ; tenir, je tie*n*drai.

d) Chute de lettres : dor*mir*, je dors ; ser*vir*, je sers.

3° Parce que la terminaison du passé simple varie. Voir, je *vis* ; pourvoir, je pour*vus* ; venir, je *vins*.

4° Parce que le participe passé est très variable.

5° Parce que les verbes en *re* élident l'e final de l'infinitif devant la terminaison du futur : prend*re*, je prend*rai*.

98. **Participes passés irréguliers**, c'est-à-dire non terminés en *é, i, u*.

s	Acquérir et verbes de même famille Seoir et ses composés Mettre et ses composés Prendre et ses composés	is
	Clore et ses composés Inclus, reclus, perclus	us
	bsous, dissous (fém. oute)	ous
t	Faire et ses composés Traire	ait
	Confire, déconfire Dire et ses composés Ecrire et verbes de même famille Frire Bénir (béni, bénit) Conduire et verbes de même famille sauf luire et nuire	it
	Offrir et verbes en frir Ouvrir et verbes en vrir	ert
	Atteindre et verbes en aindre — — eindre — — oindre	int
	Mourir	ort
û	dû, redû, mû, crû	û

Remarque : les verbes : *fuir, asseoir, pourvoir, voir, croire, traire* prennent un **y** :

1° aux deux premières personnes du pluriel de l'indicatif présent.

2° Aux deux premières personnes du pluriel de l'impératif.

3° Aux deux premières personnes du pluriel imparfait de l'indicatif.

4° Aux deux premières personnes du pluriel subjonctif présent.

FORMATION DES TEMPS ET DES MODES

99. On peut distinguer dans les différentes formes d'une conjugaison un certain nombre d'entre elles desquelles on peut déduire les autres.

Ce sont celle du : *présent de l'infinitif, du participe présent,* du *participe passé,* du *singulier du présent de l'indicatif* et du *passé simple.* Ces temps sont appelés *temps primitifs.*

1° Au moyen du *présent de l'infinitif,* on peut former :

Le *futur* en changeant **r, oir** ou **re**, en **rai, ras, ra, rons, rez, ront** (je prendrai, j'ai à prendre).

Le *conditionnel présent* en changeant **r, oir,** ou **re,** en **rais, rais, rait, rions, riez, raient.**

Aimer	donne	j'aime*rai* et j'aime*rais*
Finir	—	je fini*rai* et je fini*rais*
Recevoir	—	je recev*rai* et je recev*rais*
Rompre	—	je romp*rai* et je romp*rais.*

2° Au moyen du *participe présent,* on forme :

Le *pluriel du présent de l'indicatif* en changeant **ant,** en **ons, ez, ent.**

L'*imparfait de l'indicatif* en changeant **ant** en **ais, ais, ait, ions, iez, aient.**

Le *pluriel de l'impératif* en changeant **ant** en **ons, ez.**

Le *présent du subjonctif* en changeant **ant** en **e, es, e, ions, iez, ent.**

Cependant les verbes réguliers en oir ne répondent à cette règle de formation, que pour l'imparfait et les deux premières personnes du pluriel, du présent de l'indicatif et du subjonctif et de l'impératif. Rece*vant* donne régulièrement nous recev*ons,* je recev*ais,* recevez, mais ils re*çoi*vent, et qu'ils re*çoi*vent (irrégulier). *Rompre* donne nous rompons, je romp*ais,* romps, qu'ils romp*ent.*

3° Au moyen du *participe passé* on forme tous *les temps composés* :

Aimé donne *j'ai aimé, j'avais aimé, j'aurais aimé,* etc.

4° Au moyen de la deuxième personne du *singulier du présent de l'indicatif,* on forme la *deuxième personne du singulier du présent de l'impératif,* mais en supprimant l's de la terminaison pour la première conjugaison.

Tu aimes donne *aime, Tu reçois* donne *reçois.* — *Tu finis* donne *finis, Tu romps* donne *romps.*

On rétablit l's par euphonie à l'impératif de la première conjugaison devant les pronoms **en** et **y** :

Ex. : *Trouves-***en** ; *vas-***y**.

5° Au moyen de la deuxième personne du *singulier du passé simple,* on forme l'*imparfait du subjonctif* en changeant l's final en **sse, sses, t, ssions, ssiez, ssent.** En outre la troisième personne de l'imparfait du subjonctif prend un accent circonflexe sur la terminaison :

Aimas donne Que j'aima*sse,* qu'il aim*ât.* — *Finis* donne Que je finis*se,* qu'il fin*ît.* — *Reçus* donne Que je reçu*sse,* qu'il reç*ût.* — *Rompis* donne Que je romp*isse,* qu'il romp*ît.*

100. **Les trois voix.** — Le verbe, *au point de vue de la forme,* est, ou bien :

A la voix *active* quand le sujet fait en réalité l'action : *je travaille.*

A la voix *passive,* quand le sujet subit en réalité l'action : *Je suis blessé.*

A la voix *pronominale,* quand le verbe se conjugue avec deux pronoms de la même personne dont l'un est sujet et l'autre complément : *je me cache.*

101. **Remarque.** — Il est inutile de donner un tableau d'un verbe à la voix passive. Il suffit de se reporter aux tableaux des verbes auxiliaires et d'ajouter le participe passé du verbe que l'on conjugue.

102. **Interrogation.** — L'interrogation se marque dans la conjugaison du verbe par l'*inversion*; c'est-à-dire qu'on place le pronom sujet après le verbe, s'il s'agit d'un temps simple et après l'auxiliaire s'il s'agit d'un temps composé.

Si le verbe est terminé par un *e* à la première personne du singulier on transforme cet *e* en *é.* S'il est terminé par une voyelle à la 3e personne du singulier, on intercale un *t,* dit euphonique mais qui, en réalité, est étymologique, entre le verbe ou l'auxiliaire et le pronom. Le verbe et le pronom sont réunis par un trait d'union :

Ex. : *Viens-tu? entendez-vous? aimé-je ? m'aime-***t-***il? où va-***t-***il ? êtes-vous sorti? où avez-vous été? qu'a-***t-***il fait?*

103. **Négation.** — La *négation* s'exprime par *ne pas*; on place *ne* avant le verbe ou l'auxiliaire et *pas* après le verbe ou l'auxiliaire ; à l'infinitif on place généralement les deux mots avant le verbe :

Ex.: *Je* **ne** *veux* **pas** ; *je* **n'***ai* **pas** *voulu.* **Ne pas** *vouloir* **n'***est* **pas** *la même chose que* **ne pas pouvoir.**

Quand il y a à la fois *négation* et *interrogation,* on combine les deux règles :

Ex. : *Aimé-je ou* **n'***aimé-je* **pas? Ne** *vous ai-je* **pas** *vu hier?*

Les Verbes considérés dans leur sens

DIFFÉRENTES SORTES DE VERBES

104. Les verbes se divisent, d'après le sens, en :

Verbes transitifs et intransitifs.

1° Les verbes *transitifs* (de transire — passer) expriment *une action qui passe* du sujet sur un objet, le complément direct (direct, c'est-à-dire non précédé d'une préposition).

2° Les verbes *intransitifs* expriment *une action qui demeure* dans le sujet ou qui ne passe sur le complément que par l'intermédiaire d'une préposition ; ce sont en réalité des transitifs indirects ; ou encore ils expriment *l'état du sujet.*

Ex. : Transitif : *Le charretier* **fouette** *son cheval.* — Intransitif : *Le lion* **rugit** ; *je* **cède** *à la contrainte.* — *Pierre* **dort.**

105. Verbes auxiliaires. — Ainsi nomme-t-on le verbe transitif *avoir* et le verbe intransitif *être* alors que ce nom eût dû leur être réservé quand ils aident les autres à se conjuguer.

Verbes semi-auxiliaires. — On appelle ainsi des verbes comme *devoir, pouvoir, aller, venir de* quand ils sont suivis d'un infinitif pour former des locutions composées : *aller chercher,* je *vais faire,* je *viens d'écrire.*

Les *auxiliaires* forment les temps composés des autres verbes à l'*actif.*

A l'actif : avec *avoir* se conjuguent tous les verbes transitifs. — de nombreux intransitifs marquant l'action.

Avec *être* : 1° tous les verbes pronominaux ; — 2° quelques verbes intransitifs (*aller, arriver, décéder, échoir, éclore, entrer, mourir, naître, rester, sortir, venir, partir* et leurs composés).

3° Les verbes *passifs,* dont tous les temps sont composés à l'aide des temps correspondants de l'auxiliaire *être.*

Tantôt avec *être,* tantôt avec *avoir,* certains verbes :

1° Selon qu'ils sont employés au sens transitif (avoir) ou au sens intransitif (être), **j'ai sorti** *ce meuble* ; **je suis sorti** *hier* (sortir, entrer, descendre, passer, etc...)

2° des intransitifs selon qu'on exprime une action passée ou un état présent consécutif à cette action passée : **il a vieilli,** *depuis sa maladie,* **il est vieilli,** (convenir, courir, accourir, croître, décamper, décider, dégénérer, demeurer, descendre, disparaître, déchoir, grandir, monter, passer, périr, rajeunir, rester, sonner, tomber, vieillir, etc....

3° Selon le sens du verbe : *le malfaiteur* **a échappé** *à toutes les recherches, ce vase* **m'est échappé** *des mains. Cette offre* **m'a convenu, nous sommes convenus** *du prix.* **Il a demeuré** *dans cette ville* ; **ils sont demeurés** *à la maison. Le marchand* **a expiré,** *le bail* **est expiré.**

Autres auxiliaires : Certains verbes jouent le rôle d'auxiliaires par rapport aux autres verbes, ils marquent certaines nuances de sens : *aller* (**allez-le** *chercher,* **allez** *voir*), *venir* (**il vient** *de partir*), *devoir* (**il doit** *venir*), *pouvoir* (**il peut** *avoir dix ans*), *laisser* (**laissez-faire**), *faire* (*elle fait* **faire** *une robe*).

106. Verbes pronominaux. — On entend par *verbes pronominaux* ceux qui se conjuguent avec deux pronoms de la même personne dont l'un est sujet et l'autre complément direct ou indirect : *Je me* promène. *Il se* fait tort.

On peut classer les verbes *pronominaux* en *deux catégories* :

1° Des *verbes réfléchis* qui expriment une action faite et reçue par deux ou plusieurs personnes agissant mutuellement les unes sur les autres :

Ex. : *Ces deux hommes* **se sont battus.**

2° Des verbes *simplement pronominaux* qui n'ont ni sens réfléchi ni sens réciproque : *Il s'*écrie.

Un verbe peut être *essentiellement pronominal,* c'est-à-dire n'exister que sous cette forme, ex. : *se souvenir* ; ou être *accidentellement pronominal,* c'est-à-dire exister sous une autre forme, ex. : *se tenir, s'appeler,* formés de *tenir* et d'*appeler.*

107. Verbes impersonnels. — Les *verbes impersonnels* ou mieux : *unipersonnels* sont ceux qui ne possèdent à tous les temps que la *troisième personne du singulier.* Leur sujet est neutre, indéterminé et ne représente rien de réellement existant.

Ex. : *Il pleut* ; il *neige* ; *il advint.*

VERBES DONT LA CONJUGAISON PRÉSENTE QUELQUE PARTICULARITÉ

108. — Première conjugaison ancienne.

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Aller	Je vais Tu vas Il va Nous allons Vous allez Ils vont	J'allais	J'allai	J'irai	Que j'aille Que nous allions Qu'ils aillent	Allant	Allé, ée
Envoyer	J'envoie Nous envoyons	J'envoyais Nous envoyions	J'envoyai	J'enverrai	Que j'envoie Que nous envoyions	Envoyant	Envoyé, ée

109. Conjugaison morte (Partie de la deuxième conjugaison ancienne)

Nota : Le verbe *haïr*, de la conjugaison vivante (type *finir*), offre une irrégularité en ce qu'il supprime le tréma au singulier de l'indicatif présent : je *hais*, tu *hais*, il *hait* ; et de l'impératif : *hais*.

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Acquérir	J'acquiers Tu acquiers Il acquiert Nous acquérons Vous acquérez Ils acquièrent	J'acquérais	J'acquis	J'acquerrai	Que j'acquière Que nous acquérions	Acquérant	Acquis Acquise
Assaillir	J'assaille Nous assaillons	J'assaillais	J'assaillis	J'assaillirai	Que j'assaille	Assaillant	Assailli Assaillie
Bouillir	Je bous Nous bouillons	Je bouillais	Je bouillis	Je bouillirai	Que je bouille Que nous bouillions	Bouillant	Bouilli Bouillie
Courir	Je cours Nous courons	Je courais	Je courus	Je courrai	Que je coure Que nous courions	Courant	Couru Courue
Cueillir	Je cueille Nous cueillons	Je cueillais Nous cueillions	Je cueillis	Je cueillerai	Que je cueille	Cueillant	Cueilli Cueillie
Dormir	Je dors Nous dormons	Je dormais	Je dormis	Je dormirai	Que je dorme	Dormant	Dormir
Faillir	(Je faux) (Nous faillons)	(Je faillais) (Nous faillions)	Je faillis	(Je faudrai) ou (Je faillirai)	(Que je faillisse)	(Faillant)	Failli Faillie
Fuir	Je fuis Nous fuyons Ils fuient	Je fuyais Tu fuyais	Je fuis	Je fuirai	Que je fuie Que nous fuyions Qu'ils fuient	Fuyant	Fui Fuie
Gésir	Tu gis Il gît Nous gisons Vous gisez Ils gisent	Je gisais				Gisant	
Mentir	Je mens Nous mentons	je mentais	Je mentis	Je mentirai	Que je mente	Mentant	Menti
Mourir	Je meurs Nous mourons Ils meurent	Je mourais	Je mourus	Je mourrai	Que je meure Que nous mourions Qu'ils meurent	Mourant	Mort Morte
Offrir	J'offre	J'offrais	J'offris	J'offrirai	Que j'offre	Offrant	Offert Offerte
Ouvrir	J'ouvre Nous ouvrons	J'ouvrais	J'ouvris	J'ouvrirai	Que j'ouvre	Ouvrant	Ouvert Ouverte
Partir	Je pars Nous partons	Je partais	Je partis	Je partirai	Que je parte	Partant	Parti Partie
Servir	Je sers Nous servons	Je servais	Je servis	Je servirai	Que je serve	Servant	Servi Servie
Sortir	Je sors Nous sortons	Je sortais	Je sortis	Je sortirai	Que je sorte	Sortant	Sorti Sortie

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Tenir	Je tiens Nous tenons Ils tiennent	Je tenais	Je tins	Je tiendrai	Que je tienne Que nous tenions	Tenant	Tenu Tenue
Vêtir	Je vêts Nous vêtons Ils vêtent	Je vêtais	Je vêtis	Je vêtirai	Que je vête	Vêtant	Vêtu Vêtue

A. — se conjuguent sur *acquérir* : les verbes *conquérir, requérir.*

B. — Se conjuguent sur *ouvrir* : les verbes *couvrir, découvrir, recouvrir* (ne pas confondre avec *recouvrer,* qui signifie *récupérer.*)

C. — Se conjuguent sur *mentir* : les verbes *se repentir, sentir.*

D. — *Souffrir* se conjugue sur *offrir* ; *tressaillir,* sur *assaillir* ; *venir,* sur *tenir.*

110. Conjugaison morte (Troisième conjugaison ancienne).

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Asseoir et s'asseoir	Je m'assois, assieds Tu t'assois, assieds Il s'assoit, assied Nous nous assoyons [asseyons Vous vous assoyez [asseyez Ils s'assoient [asseyent	Je m'asseyais	Je m'assis	Je m'assiérai ou je m'asseyerai	Que je m'asseye Que nous nous asseyions	Asseyant	Assis Assise
Choir (peu usité)							Chu Chue
Déchoir	Je déchois Tu déchois Il déchoit	(Je déchoyais)	Je déchus	(Je décherrai)	Que je déchoie Que nous déchoyions Qu'ils déchoient		Déchu Déchue
Echoir	Il échoit (il échet)		Il échut	Il écherra		Echéant	Echu Echue
Falloir	Il faut	Il fallait	Il fallut	Il faudra	Qu'il faille		Fallu
Mouvoir	Je meus Nous mouvons Ils meuvent	Je mouvais	Je mus	Je mouvrai	Que je meuve	Mouvant	Mû Mue
Pleuvoir	Il pleut	Il pleuvait	Il plut	Il pleuvra	Qu'il pleuve	Pleuvant	Plu
Pouvoir	Je peux ou Je puis Tu peux Nous pouvons Ils peuvent	Je pouvais	Je pus	Je pourrai	Que je puisse	Pouvant	Pu
Pourvoir	Se conjugue sur voir	*Sauf* :	Je pourvus	Je pourvoirai			
Prévaloir	Se conjugue sur valoir			*Sauf* :	Que je prévale Que nous prévalions		

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Savoir	Je sais Nous savons Ils savent	Je savais	Je sus	Je saurai	Que je sache	Sachant	Su, Sue *impératif présent* Sache Sachons Sachez
Seoir	Il sied Ils siéent	Il seyait Ils seyaient		Il siéra Ils siéront	Qu'il siée	Séant ou Seyant	Sis : (être assis)
Valoir	Je vaux Nous valons	Je valais	Je valus	Je vaudrai	Que je vaille Que nous valions Qu'ils vaillent	Valant	Valu Value
Voir	Je vois Nous voyons Ils voient	Je voyais	Je vis	Je verrai	Que je voie Que nous voyions Qu'ils voient	Voyant	Vu Vue
Vouloir	Je veux Nous voulons Ils veulent	Je voulais	Je voulus	Je voudrai	Que je veuille Que nous voulions Qu'ils veuillent	Voulant	Voulu Voulue

111 Conjugaison morte (Quatrième conjugaison ancienne).

Les verbes en *aître* et en *oître*, quand l'*i* du radical précède un *t*, le font surmonter d'un accent circonflexe : il connaît, il paraîtra.

Le verbe plaire, à la 3e personne du singulier du présent de l'indicatif, prend aussi cet accent circonflexe : il plaît.

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Absoudre	J'absous Il absout Nous absolvons	J'absolvais		J'absoudrai	Que j'absolve	Absolvant	Absous Absoute
Battre	Je bats Nous battons	Je battais	Je battis	Je battrai	Que je batte	battant	Battu Battue
Boire	Je bois Nous buvons Ils boivent	Je buvais	Je bus	Je boirai	Que je boive Que nous buvions Qu'ils boivent	Buvant	Bu Bue
Braire	Il brait Ils braient	Il brayait Ils brayaient		Il braira Ils brairont	(Qu'il braie)	Brayant	dans les temps composés : brait
Clore	Je clos Tu clos Il clôt, ils closent			Je clorai (en entier)	Que je close (en entier)	Closant	Clos Close
Conclure	Je conclus Il conclut Nous concluons Ils concluent	Je concluais	Je conclus	Je conclurai	Que je conclue Que nous concluions Qu'ils concluent	Concluant	Conclu Conclue
Confire	Je confis Nous confisons	Je confisais	Je confis	Je confirai	Que je confise	Confisant	Confit Confite
Contredire	Se conjugue sur dire (*)						
Coudre	Je couds Il coud Nous cousons	Je cousais	Je cousis	Je coudrai	Que je couse Que nous cousions	Cousant	Cousu Cousue

*) Se conjugue sur dire, sauf à la 2e personne du pluriel du présent de l'indicatif et de l'impératif, où il fait contredisez ; de même *interdire*, fait *interdisez*, *médire* fait *médisez*, seul des composés de *dire*, *redire* fait *vous redites*.

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Craindre	Je crains Nous craignons Ils craignent	Je craignais	Je craignis	Je craindrai	Que je craigne	Craignant	Craint Crainte
Croire	Je crois Nous croyons Ils croient	Je croyais	Je crus	Je croirai	Que je croie Que nous croyions Qu'ils croient	Croyant	Cru Crue
Déduire	Je déduis Nous déduisons	Je déduisais	Je déduisis	Je déduirai	Que je déduise	Déduisant	Déduit Déduite
Dire	Je dis Nous disons Vous dites	Je disais	Je dis	Je dirai	Que je dise	Disant	Dit Dite
Ecrire	J'écris Nous écrivons	J'écrivais	J'écrivis	J'écrirai	Que j'écrive	Ecrivant	Ecrit Ecrite
Faire	Je fais Nous faisons Vous faites Ils font	Je faisais	Je fis	Je ferai	Que je fasse	Faisant	Fait Faite
Frire	Je fris Tu fris Il frit			Je frirai Nous frirons			Frit Frite
Joindre	Je joins Nous joignons Ils joignent	Je joignais	Je joignis	Je joindrai	Que je joigne Que nous joignions	Joignant	Joint Jointe
Lire	Je lis Nous lisons	Je lisais	Je lus	Je lirai	Que je lise	Lisant	Lu Lue
Luire	Se conjugue sur déduire					*Sauf* :	lui
Maudire	Je maudis Tu maudis Il maudit Nous maudissons Vous maudissez Ils maudissent		Le reste se conjugue sur dire			Maudissant	
Mettre	Je mets Nous mettons	Je mettais	Je mis	Je mettrai	Que je mette	Mettant	Mis Mise
Moudre	Je mouds Il moud Nous moulons	Je moulais	Je moulus	Je moudrai	Que je moule Que nous moulions	Moulant	Moulu Moulue
Naître	Je nais Il naît Nous naissons	Je naissais	Je naquis	Je naîtrai	Que je naisse	Naissant	Né Née
Nuire	Je nuis Nous nuisons	Je nuisais	Je nuisis	Je nuirai	Que je nuise	Nuisant	Nui
Paître	Je pais Il paît Nous paissons	Je paissais		Je paîtrai	Que je paisse	Paissant	
Paraître	Je parais Il paraît Nous paraissons	Je paraissais	Je parus	Je paraîtrai	Que je paraisse	Paraissant	Paru Parue

VERBES	INDICATIF				SUBJONCTIF	PARTICIPE	
	PRÉSENT	IMPARFAIT	PASSÉ SIMPLE	FUTUR	PRÉSENT	PRÉSENT	PASSÉ
Peindre	Je peins Il peint Nous peignons	Je peignais	Je peignis	Je peindrai	Que je peigne	Peignant	Peint Peinte
Plaire	Je plais Tu plais Il plaît Nous plaisons Vous plaisez Ils plaisent	Je plaisais	Je plus	Je plairai	Que je plaise	Plaisant	Plu
Prendre	Je prends Nous prenons Ils prennent	Je prenais	Je pris	Je prendrai	Que je prenne	Prenant	Pris Prise
Rire	Je ris Nous rions	Je riais Nous riions Vous riiez	Je ris	Je rirai	Que je rie Que nous riions	Riant	Ri
Suffire	Se conjugue sur déduire					*Sauf* :	suffi
Suivre	Je suis Nous suivons	Je suivais	Je suivis	Je suivrai	Que je suive	Suivant	Suivi Suivie
Traire	Je trais Tu trais Il trait N. trayons, v. trayez Ils traient	Je trayais (en entier)		Je trairai (en entier)	Que je traie Que nous trayions (en entier)	Trayant	Trait Traite
Vaincre	Je vaincs Tu vaincs Il vainc Nous vainquons Vous vainquez Ils vainquent	Je vainquais	Je vainquis	Je vaincrai	Que je vainque Que nous vainquions Qu'ils vainquent	Vainquant	Vaincu Vaincue
Vivre	Je vis Nous vivons	Je vivais	Je vécus	Je vivrai	Que je vive	Vivant	Vécu Vécue

A. — Conjuguer sur *peindre : atteindre, ceindre, geindre, enfreindre, éteindre, étreindre, feindre, teindre, plaindre.*
B. — Conjuguer sur *déduire : conduire, construire, cuire, détruire, enduire. instruire,*
C. — Conjuguer sur *paraître : connaître, méconnaître.*
D. — Conjuguer sur *craindre: contraindre.*
E. — Conjuguer sur *absoudre : dissoudre, résoudre.*
F. — Conjuguer sur *clore : éclore*
G. — Conjuguer sur *lire : élire.*
H. — Conjuguer sur *joindre : oindre, poindre.*
I. — Conjuguer sur *plaire : taire.*

Les mots invariables

L'adverbe, la préposition, la conjonction et l'interjection sont des mots qui ne subissent aucune modification, quels que soient les mots avec lesquels ils sont en relation.

L'Adverbe

Les adverbes sont des mots qui servent généralement à modifier un verbe, un adjectif, un autre adverbe. Ils jouent le rôle de compléments circonstanciels, alors que les prépositions et les conjonctions sont des mots de rapport.

112. Sortes d'adverbes. — On distingue en général *cinq sortes* d'adverbes :

1° Les adverbes de temps.
2° Les adverbes de lieu.
3° Les adverbes de manière.
4° Les adverbes de quantité.
5° Les adverbes d'affirmation, de négation et de doute.

113. 1° Adverbes de temps : Les principaux sont : Alors — aujourd'hui — auparavant — aussitôt — autrefois — avant — bientôt — cependant (pendant ce temps) — déjà — demain — depuis — désormais — dorénavant — encore — enfin — ensuite — hier — jadis — jamais — longtemps — lors — maintenant —

naguère — parfois — plutôt — puis — quelquefois — soudain — souvent — sur le champ — tantôt (bientôt) — tard — tôt — toujours — tout à coup — tout de suite — et *quand* interrogatif.

114. 2° Adverbes de lieu : Les principaux sont :

Ailleurs — alentour — après — auprès — avant — çà — d'ailleurs — deçà — de là — dedans — dehors — delà — depuis — derrière — dessous — dessus — devant — d'ici — du dehors — du dedans — de partout — d'où — par ici — par là — par où — en — ici (pour les lieux proches) — là (pour les lieux éloignés) — loin — nulle part — où — partout — près — quelque part — y et *où* interrogatif. Céans est tombé en désuétude.

Certains adverbes de temps ou de lieu suivis de la préposition *de* peuvent avoir un complément et former des locutions prépositives.

115. 3° Adverbes de manière La plupart des adverbes de manière se forment au moyen des adjectifs correspondants, mis au féminin et suivis de la terminaison **ment.**

Ex. : follement — grandement.

Les plus importants des autres adverbes sont :

Ainsi — bien — comme — ensemble — exprès — gratis — mal — mieux — pis — plutôt — quasi, etc...

Pourquoi? *Comment*? interrogatifs ; *comment* employé seul, est exclamatif.

Comme est adverbe avec le sens de *comment* dans l'expression : Dieu sait comme !

Adverbe en ment. — Les adverbes en **ment** dérivés d'adjectifs donnent lieu à quelques observations :

1° Quand l'adjectif est terminé au masculin par **ai, é, i** ou **u, l'e muet** qui précède ordinairement la syllabe **ment** a disparu parce qu'on ne l'entendait pas dans la prononciation. Cette suppression est parfois signalée par un accent circonflexe :

Ex. : *Absolument, éperdument, résolument, hardiment, effrontément, assidûment, gaîment* (*ou gaiement*), *vraiment, obstinément.*

2° Quand l'adjectif est terminé par **ant** ou **ent** l'adverbe se forme en remplaçant **nt** par **m** et en ajoutant la terminaison **ment** :

Ex. : *Sava***mment**, *prude***mment**.

La forme primitive était *prudentement, savantement,* en conformité avec la règle générale. Mais la prononciation a déformé le mot en nasalisant d'abord le son : pruden-ment, savan-ment. Puis il y a eu accommodation.

Cette remarque permet de retrouver aisément l'orthographe d'un adverbe en **emment** ou **amment** quand on connaît celle de l'adjectif correspondant, quelle que soit la prononciation de l'adverbe.

Ainsi on ne sera pas tenté d'écrire : *prudamment,* sachant que cet adverbe vient de *prudent,* on l'écrira *prudemment.*

Les adverbes *lentement, présentement, véhémentement,* rentrent dans la règle générale.

3° L'e muet de l'adjectif se change très souvent en é fermé :

Ex. : *Aveuglément, confusément.*

4° Certains adverbes tels que : *nuitamment, sciemment, notamment* sont dérivés d'adjectifs aujourd'hui disparus.

5° *Gentil* fait *gentiment* ; *bref* fait *brièvement* (de l'ancienne forme *brief*). *Grièvement* vient de l'ancien adjectif *grief.*

Remarque. — Enfin certains adjectifs peuvent être employés comme adverbes sans modification. Tels sont par exemple : *bas, clair, fort, juste,* etc. :

Ex. : *Parler* **bas**, *voir* **clair**, *frapper* **fort**, *chanter* **juste**, etc.

116. Degrés de signification des adverbes de manière. — Les adverbes servent à former les degrés de signification des adjectifs qualificatifs mais les adverbes de manière comme ceux-ci comportent des degrés de *signification* c'est-à-dire un comparatif et un superlatif.

Le *comparatif* se forme au moyen des adverbes *aussi, plus, moins.*

Le *superlatif* se forme au moyen des adverbes *le plus, très, le moins.*

Ex. : *Bas,* **plus** *bas,* **moins** *bas,* **très** *bas,* **le plus** *bas.*

Remarque. — *Bien a pour comparatif* et pour *superlatif de supériorité* les formes : *mieux, le mieux.* Mais le *superlatif absolu* est *très bien.*

Mal, à côté des formes régulières : *plus mal* et *le plus mal* a pour *comparatif* et *superlatif de supériorité* les formes : *pis* et *le pis.* Le superlatif absolu est *très mal.*

Les adverbes de manière s'emploient surtout pour modifier les verbes.

117. 4° Adverbes de quantité. — Les principaux sont :

Assez — aussi — autant — beaucoup — de beaucoup — bien — combien — davantage — encore — force — guère — moins — peu — plus — presque — si — tant — tellement — très — trop — que — etc.

Combien, interrogatif, est aussi exclamatif : *Combien* vous me surprenez !

Plus et *moins,* considérés comme comparatifs, fournissent les superlatifs *le plus, le moins.*

Davantage s'emploie sans complément de comparaison. On doit dire : il a plus de mémoire que son frère et non davantage de mémoire.

118. 5° Adverbes d'affirmation, de négation et de doute. — *Affirmatifs* : Assurément — certes — même — oui — surtout — voire (forme ancienne : *vraiment*) — volontiers — vraiment ; *Négatifs* : aucunement — guère — non — *ne* — ne pas, ne point — point — nullement — etc. La négation *ne* qui est le mot négatif par excellence se renforce avec les mots : pas, point, mie, goutte, maille (petite pièce de monnaie)

Doute :

Apparemment, environ, sans doute, peut-être, probablement. Plusieurs de ces adverbes se construisent parfois avec la conjonction : peut-être que, sans doute que...

119. Locutions adverbiales. — On appelle locution adverbiale un ensemble de mots jouant le rôle d'un adverbe. Il y en a beaucoup en français. Telles sont les expressions :

D'ici, de là, en avant, au loin, etc. — A dessein, en effet, à l'envi, etc. — Tour à tour, vis-à-vis, etc. — Tout à coup, tout à fait, au fur et à mesure, d'ores et déjà, etc.

120. Remarques historiques. — *Aujourd'hui* est formé de quatre mots : *Au jour d'hui* ; *hui* vient du latin *hodie* qui signifie *aujourd'hui,* l'adverbe actuel renferme donc un pléonasme.

Naguère est une contraction qui équivaut à *il n'y a guère de temps.*

La terminaison **ment** est un nom féminin venu du latin et signifiant : esprit, manière.

Sans doute qui signifiait : sans aucun doute s'est affaibli de sens au point de marquer le doute.

Beaucoup est relativement récent (XIVe siècle), il s'est substitué à l'adverbe *moult* tiré du latin *multum.* Le vieux français possédait aussi le mot *prou* (beaucoup), qu'on rencontre encore dans l'expression *peu ni prou.*

Oui, dans le vieux français *oil,* est formé de *hoc illum* (*o il*). La négation qui lui correspond étymologiquement est *nenni,* du latin *non illum* (*nen il*). Nenni a fourni lui-même le négatif *ne.*

La Préposition

Les prépositions sont des mots invariables qui marquent un rapport entre un nom, un adjectif, un pronom, un verbe, un adverbe et leur complément.

121. Les rapports exprimés par les prépositions sont innombrables. Les principaux sont les suivants : le *lieu*, l'*ordre*, le *temps*, l'*union*, le *but*, la *cause*, la *séparation*, la *possession*, l'*opposition*, l'*attribution*, la *manière* l'*instrument*, le *prix*, etc.

On distingue deux sortes de prépositions :

1° Les prépositions simples.

2° Les prépositions composées ou locutions prépositives.

122. Les *prépositions simples* sont :

à — après — avant — avec — chez — contre — dans — de — depuis — derrière — des — devant — durant — en — entre — envers — excepté — hormis — jusque — malgré — moyennant — outre — par — parmi — pendant — pour — sans — sauf — selon — sous — suivant — sur — vers — voici — voilà.

123. Les principales *prépositions composées* sont :

A cause de — à côté de — à l'aide de — à l'égard de — à force de — afin de — au-dessus de — au-dessous de — au milieu de — jusqu'à — le long de — loin de — auprès de — au prix de — autour de — au travers de — de chez — de devant — par chez — par-dessus — par-dessous — par devant — d'entre — de façon à — en dépit de — en dehors de — en face de — faute de — grâce à — par rapport à — près de* — quant à** — vis à vis de.

124. **Remarques historiques.** — La plupart des prépositions simples viennent de prépositions latines. D'autres sont en réalité des mots composés :

Selon signifiait à l'origine *le long de*.

Chez vient du latin *casa* — maison (dans la maison de).

Le mot *lez* ou *lès* qu'on trouve encore dans certains noms de villes ou de lieux : *Saint-Médard-lès-Soissons*, est une ancienne préposition qui signifiait *à côté de*.

Parmi, préposition *par le milieu*, est composé de deux mots : la préposition *par* et l'adjectif *mi*, dérivé du latin *medium* (qui est au milieu de). Le vieux français possédait la préposition *emmi* formée de *en* et de *mi* et qui avait à peu près le sens de *parmi* :

Ex. : *Se coucher* **emmi** *les draps*.

Hors est une autre forme du vieux français *fors* (excepté, hors) qu'on retrouve dans la phrase historique : « Tout est perdu fors l'honneur. « *Hormis* est un composé de *hors* et de *mis* (du verbe mettre), il signifie exactement *mis dehors*.

Voici, *voilà* ne sont que des formes contractées des expressions impératives : *vois ci* (ou vois ici), *vois là* *Voici* annonce ce qui suit; *voilà* rappelle ce qui précède.

La Conjonction

Les conjonctions sont, comme les prépositions, des mots de rapport. Les unes, les *conjonctions de coordination* servent à unir deux mots, deux groupes de mots ou deux propositions jouant dans la phrase un rôle identique. Les autres, les *conjonctions de subordination* ne peuvent unir que deux propositions et en outre avec cette particularité que ces deux propositions ne sont pas de même nature et que l'une sert de complément à l'autre.

*) Ne pas confondre avec *prêt à* adjectif variable, qui signifie *disposé à*.

**) Ne pas confondre avec *quand*, conjonction, qui précède toujours un verbe à un mode personnel.

125. 1° **Conjonctions de coordination.** — Les unes sont simples : *Et, ou, ni, mais, car, or, donc.*

Ex. : *Mon père* **et** *moi, nous sommes sortis.* — *Il est là* **mais** *il ne veut pas vous voir.*

Les autres sont formées de plusieurs éléments *cependant, toutefois, pourtant, néanmoins, ainsi.*

126. 2° **Conjonctions de subordination.** — Il y en a un grand nombre, d'autant plus que la conjonction *que* jointe à d'autres mots sert à former une foule de locutions *conjonctives* :

Si, comme, quand, que, lorsque, puisque, quoique, sinon, afin que, ainsi que, à mesure que, avant que, après que, de même que, de peur que, dès que, jusqu'à ce que, parce que, pendant que, pourvu que, tandis que etc.

Toutes les conjonctions, au lieu d'être répétées. peuvent être remplacées par *que* devant une seconde subordonnée.

Ex. : **Si** *l'on vient, et* **qu'***on me demande.*

On peut assimiler aux conjonctions le pronom relatif **que**, qui, outre sa valeur de pronom, joue le rôle de conjonction.

Les mots exclamatifs

127. Les mots exclamatifs servent à rendre sensibles les mouvements de l'âme, ils expriment la *joie*, la *douleur*, la *surprise*, la *crainte*, l'*horreur*, l'*admiration*, l'*enthousiasme* ; ils servent à *encourager*, à *exciter*, à *calmer*, à *appeler*, à *interpeller*, à *saluer*.

Ex. : *Ah* ! *hélas* ! *hé* ! *eh bien* ! *eh quoi* ! *allons* ! *courage* ! *halte-là* ! *soit* ! *holà* ! *hein* ! *tiens* ! *comment* ! *adieu* ! *vivat* ! *bravo* ! *ma foi* !

Certains des mots exclamatifs sont de véritables mots employés isolément avec une valeur exclamative : patience ! courage ! bravo ! paix ! malheur ! bonsoir ! diantre, parbleu ! etc. Les autres ne sont pas des mots, mais des sortes de cris (ah ! oh ! bah ! fi ! ouf ! etc... On les appelle plus particulièrement des interjections.

Apostrophe. — Un mot mis en apostrophe est un mot jeté isolé au cours de la phrase et désignant la personne ou la chose à qui l'on s'adresse : Viens Pierre, ô douleur.

Devant un nom on emploie ô, que ce nom soit mis en exclamation ou en apostrophe.

Ex. : *Oui, je te loue,* **ô** *ciel de ta persévérance* !

(RACINE).

O *mort* ! *tu peux attendre ; éloigne, éloigne-toi.*

(ANDRÉ CHÉNIER.)

Il ne faut pas le confondre avec *oh* !

Ex. : **Oh** ! *combien de marins, combien de capitaines....*

(V. HUGO.)

Etude des Phrases — Analyse

128. Nous avons défini, au début de la première partie, la phrase, le sujet, le verbe et les compléments d'une proposition. Nous allons revenir plus en détail sur la composition de la proposition et des phrases.

Nous examinerons deux cas : 1° La phrase se compose d'une seule proposition ; 2° elle se compose de deux ou de plusieurs propositions.

129. 1° **Phrase composée d'une seule proposition.** — La proposition considérée en elle-même contient *toujours un verbe*, et au moins un *sujet* et un *attribut*.

Les exceptions ne sont qu'apparentes ; ainsi l'*impératif* est en réalité une forme abrégée dans laquelle le sujet est sous-entendu. Quand l'*attribut* n'est pas explicitement exprimé il est implicitement contenu dans le verbe.

En général le verbe de la proposition est à un *mode personnel*, cependant nous verrons plus loin qu'il peut être à l'infinitif ou au participe.

130. — Analyser une phrase c'est déterminer les rapports de ses différentes parties.

La partie de l'analyse qui consiste à déterminer la nature du mot (partie du discours), sa forme grammaticale (nombre, genre, personne, etc.) et sa fonction doit être considérée plus particulièrement sous le nom d'*analyse grammaticale* ; la partie de l'analyse qui étudie dans la phrase les propositions au point de vue de leur espèce, de leur sens, de leur fonction grammaticale, prend le nom d'*analyse logique*.

ANALYSE GRAMMATICALE

131. L'analyse grammaticale, qui étudie les *mots* au point de vue de leur *espèce*, de leurs modifications, de leur *fonction* peut se faire de deux façons :

1° On peut étudier chacun des mots en particulier.

2° On peut étudier les *termes de la proposition*.

1er PROCÉDÉ

MOTS A ANALYSER	LEUR ESPÈCE	LEURS MODIFICATIONS	LEUR FONCTION
Des	article contracté	féminin pluriel	détermine *fenêtres*
fenêtres	nom commun	féminin pluriel	compl. circonstanciel de *vois*
de	préposition		met en rapport *fenêtres et maison*
ma	adjectif possessif	féminin singulier	détermine *maison*
maison	nom commun	féminin singulier	complément déterminatif de *fenêtres*
je	pronom personnel	1re pers. du singulier	sujet de *vois*
vois	verbe voir (groupe irrégulier), transitif actif	indicatif présent 1re pers. du singulier	(pas de fonction ; ce sont les autres mots qui ont des fonctions par rapport au verbe)
la	article défini	féminin singulier	détermine *Seine*
Seine	nom propre	féminin singulier	complément d'objet direct de *vois*
qui	pronom relatif	féminin singulier	a pour antécédent *Seine*, sujet de *coule*.
coule	verbe couler (1er gr.) intransitif actif	indicatif présent 3e pers. du singulier	

2e PROCÉDÉ.

Des fenêtres de ma maison, complément circonstanciel de *je vois*.
Je vois... verbe et sujet.
La Seine... complément d'objet direct de *vois*.
Qui coule... verbe et sujet.

132. Analyse logique. — L'analyse logique étudie les *propositions* au point de vue de leur *espèce*, de leur *sens*, de leur *fonction grammaticale*.

133. S'il n'y a qu'une seule proposition, elle est dite *indépendante*.

Ex. : *J'arrive.*

134. Phrases composées de plusieurs propositions. — A. Distinguons d'abord les phrases dont les diverses propositions sont indépendantes les unes des autres ou sont réunies par des conjonctions de coordination :

Ex. : *Je suis venu, j'ai vu, j'ai vaincu.*
il y a ici trois propositions dont chacune se suffit à elle-même. On dit que la phrase se compose de propositions indépendantes, juxtaposées.

Ex. : *Je suis venu* et *j'ai vu.*

Cette phrase se compose de deux propositions indépendantes réunies par la conjonction de coordination et on les appelle indépendantes coordonnées.

B. Si la phrase se compose de propositions dépendant les unes des autres il y a une proposition qui ne dépend d'aucune autre et de laquelle toutes les autres dépendent soit directement, soit par l'intermédiaire de l'une d'elles. Cette proposition privilégiée s'appelle la *principale*, celles qui en dépendent sont les *subordonnées*.

Les subordonnées peuvent avoir dans la phrase des fonctions très diverses :

1° *La fourmi amasse pendant l'été les provisions* (proposition principale) *dont elle se nourrit pendant l'hiver* (proposition subordonnée complément déterminatif de nom (provisions).

Dans cet exemple, la proposition subordonnée est reliée à la proposition principale par un pronom conjonctif *dont*. *Dont* remplace provisions. Quand la proposition subordonnée commence ainsi par un pronom conjonctif, elle est *toujours complément déterminatif du nom* ou du pronom *que remplace le pronom conjonctif*, c'est-à-dire l'*antécédent* de ce dernier. On l'appelle proposition **complément de nom** (ou de pronom).

2° Mais la proposition subordonnée peut jouer le rôle de **complément du verbe** de la proposition principale. On l'appelle alors *subordonnée complément de verbe* :

Je voudrais que vous fussiez parti.

Je	sujet	Proposition principale
voudrais	verbe	
que	conjonction	mot de liaison
vous	sujet	Proposition subordonnée Complément direct de *voudrais*.
fussiez parti	verbe	

Cette proposition subordonnée s'appelle *subordonnée complément direct*.

Il est venu pendant que vous étiez sorti.

Il	sujet	Proposition principale
est venu	verbe	
pendant que	conjonction	mot de liaison
vous	sujet	Proposition subordonnée Complément circonstanciel de temps, de *est venu*
étiez sorti	verbe	

Cette proposition subordonnée s'appelle *subordonnée complément circonstanciel*.

Une proposition principale peut avoir plusieurs propositions subordonnées et celles-ci elles-mêmes peuvent avoir des subordonnées.

3° Si le verbe de la proposition principale est un verbe impersonnel, il a deux sujets, l'un apparent (*il*), l'autre réel. La proposition qui constitue le sujet réel est dite *proposition subordonnée sujet*.

Ex.: *Il faut que je vous conte une petite historiette* (Mme de Sévigné).

Il faut	Proposition principale
que je vous conte	Proposition subordonnée sujet

4° Si le verbe de la proposition principale est le verbe *être*, la proposition qui constitue l'attribut est dite *proposition subordonnée attribut.*

Ex. : *Mon sentiment est que vous vous trompez.*

Mon sentiment est	Proposition principale
que vous vous trompez	Proposition subordonnée attribut

5° Enfin, il se peut que le mot de la phrase qui est complété ne soit ni un nom, ni un pronom, ni un verbe, mais un adjectif. La proposition complément prend le nom de *proposition subordonnée complément d'adjectif.*

Ex. : *Je suis satisfait que vous vous en soyez aperçu.*

Je suis satisfait	Proposition principale
que vous vous en soyez aperçu	Proposition subordonnée complément d'adjectif

Proposition intercalée. — Une proposition vient parfois couper la phrase, avec laquelle elle n'a pas de lien grammatical.

Ex.: *Rendez-moi,* **lui dit-il,** *mes chansons et mon somme.* (La Fontaine).

Elle est dite *proposition intercalée.*

Proposition elliptique. — Le verbe peut parfois être sous-entendu.

Ex. : *Elle a passé* **comme les fleurs** (Bossuet).

Il faut ajouter : *passent.* Il y a ici une principale et une *subordonnée circonstancielle elliptique.*

Proposition infinitive et proposition participe. — La proposition subordonnée peut présenter une forme particulière ; son verbe au lieu d'être à un mode personnel peut être à l'infinitif ou au participe. En réalité il ne s'agit que d'une forme abrégée, une véritable ellipse, qu'il est facile de ramener à la forme normale de la proposition en y substituant un verbe à un mode personnel. Dans une phrase telle que :

La reconnaissance que je croyais pouvoir attendre de vous, ne s'est jamais manifestée :

Il y a une proposition infinitive qu'il s'agit de traduire.

La reconnaissance ne s'est jamais manifestée	Principale
Que je croyais...	Subordonnée complément de nom
Que je pouvais attendre de vous	Subordonnée complément direct de verbe (croyais)

La proposition participe se présente dans des conditions analogues ; c'est aussi une forme abrégée.

Ex. : *Etant arrivé à Paris la semaine dernière, j'ai pu aller le voir avant son départ.*

Cette phrase équivaut à :

Comme je suis arrivé à Paris, etc.

J'ai pu aller le voir	Principale
Comme j'étais arrivé à Paris	Subordonnée complément circonstanciel

135. Proposition infinitive et proposition participe principales. — Dans certains cas, la proposition infinitive ou la proposition participe jouent le rôle de proposition principale.

Ex. : *Le bruit cesse, on se retire.*

Rats en campagne aussitôt.
Et le citadin de dire :
Achevons tout notre rôt. (La Fontaine).

Huit ans déjà passés, *une impie étrangère.*
Du sceptre de David usurpe tous les droits.
(Racine).

Et le citadin de dire est une proposition principale qu'on peut traduire par : *le citadin se mit à dire.*

Huit ans déjà passés forme ce qu'on appelle une *proposition absolue.* On peut traduire ce membre de phrase par : *huit ans sont déjà passés depuis que,* et la proposition suivante devient subordonnée à celle-ci.

Il ne faut pas confondre, avec ces formes nettement *principales* des propositions dites indépendantes et qui ne sont en réalité que des formes elliptiques :

Ex. : *Que faire ! Que dire ! Quel parti prendre !*

Traduisez : *Que pourrais-je faire ! Que pourrais-je dire ! Quel parti pourrais-je prendre !*

Ex. : **Moi vivant** *vous n'entrerez pas ici !*

Traduisez: *Tant que je serai vivant...* Cette dernière proposition est subordonnée.

136. Méthode à suivre pour l'analyse logique. — Souligner les verbes à un mode personnel ; — numéroter les mots de subordination (conjonctions, pronoms relatifs, et, dans l'interrogation indirecte, pronoms, adjectifs, ou adverbes interrogatifs), et les conjonctions de coordination, qui coordonnent des propositions — rechercher les ellipses ; — détacher les propositions infinitive ou participe principales.

Emplois, Sens ou Syntaxe d'accord

Arrêté ministériel du 26 février 1901 (1) relative à la simplification de la syntaxe.

Dans les examens ou concours dépendant du Ministère de l'Instruction publique, qui comportent des épreuves spéciales d'orthographe, il ne sera pas compté de fautes aux candidats pour avoir usé des tolérances indiquées dans la liste annexée au présent arrêté.

La même disposition est applicable au jugement des diverses compositions rédigées en langue française, dans les examens ou concours dépendant du Ministère de l'Instruction publique qui ne comportent pas une épreuve spéciale d'orthographe.

LISTE DES TOLÉRANCES ADMISES

Substantifs

Pluriel ou singulier. — Dans toutes les constructions où le sens permet de comprendre le substantif complément aussi bien au singulier qu'au pluriel, on tolèrera l'emploi de l'un ou l'autre nombre. Ex. : *des habits de femme* ou *de femmes* ; — *des confitures de groseille* ou *de groseilles* ; — *des prêtres en bonnet carré* ou *en bonnets carrés* ; — *ils ont ôté leur chapeau* ou *leurs chapeaux.*

1° **Aigle.** — L'usage actuel donne à ce substantif le genre masculin, sauf dans le cas où il désigne des enseignes. Ex. : *les aigles romaines.*

2° **Amour, orgue.** — L'usage actuel donne à ces deux mots le genre masculin au singulier. Au pluriel, on tolérera indifféremment le genre masculin ou le genre féminin : Ex. : *les grandes orgues* ; — *un des plus beaux orgues* ; — *de folles amours, des amours tardifs.*

3° **Délice et délices** sont, en réalité, deux mots différents. Le premier est d'un usage rare et un peu recherché. Il est inutile de s'en occuper dans l'enseignement élémentaire et dans les exercices.

4° **Automne, enfant.** — Ces deux mots étant des deux genres, il est inutile de s'en occuper particulièrement. Il en est de même de tous les substantifs qui sont indifféremment des deux genres.

(1) Note - Les mêmes dispositions ont été prises par le Ministère de la Guerre, pour les examens et concours relevant de son autorité.

5° **Gens, orge.** — On tolérera, dans toutes les constructions, l'accord de l'adjectif au féminin avec le mot *gens*. Ex. : *instruits* ou *instruites par l'expérience, les vieilles gens sont soupçonneux* ou *soupçonneuses*.

On tolérera l'emploi du mot *orge* au féminin sans exception : *orge carrée, orge mondée, orge perlée*.

6° **Hymne.** — Il n'y a pas de raison suffisante pour donner à ce mot deux sens différents suivant qu'il est employé au masculin ou au féminin. On tolérera les deux genres aussi bien pour les chants nationaux que pour les chants religieux. Ex. : *un bel hymne* ou *une belle hymne*.

7° **Pâques.** — On tolérera l'emploi de ce mot au féminin aussi bien pour désigner une date que la fête religieuse. Ex. : *A Pâques prochain* ou *à Pâques prochaines*.

PLURIEL DES SUBSTANTIFS

Pluriel des noms propres. — La plus grande obscurité régnant dans les règles et les exceptions enseignées dans les grammaires, on tolérera dans tous les cas que les noms propres précédés de l'article pluriel prennent la marque du pluriel : *les Corneilles* comme *les Gracques* ; — *des Virgiles* (exemplaires) comme *des Virgiles* (éditions).

Il en sera de même pour les noms propres de personnes désignant les œuvres de ces personnes. Ex. : *des Meissoniers*.

Pluriel des noms empruntés à d'autres langues. — Lorsque ces mots sont tout à fait entrés dans la langue française, on tolérera que le pluriel soit formé suivant la règle générale. Ex. : *des exéats* comme *des déficits*.

NOMS COMPOSÉS

Noms composés. — Les mêmes noms composés se rencontrent aujourd'hui tantôt avec le trait d'union, tantôt sans trait d'union. Il est inutile de fatiguer les enfants à apprendre des contradictions que rien ne justifie. L'absence de trait d'union dans l'expression *pomme de terre* n'empêche pas cette expression de former un véritable mot composé aussi bien que *chef-d'œuvre* par exemple. Ces mots pourront toujours s'écrire sans trait d'union.

ARTICLE

Article devant les noms propres de personnes. — L'usage existe d'employer l'article devant certains noms de famille italiens : *le Tasse, le Corrège*, et quelquefois à tort devant des prénoms (*le*) *Dante*, (*le*) *Guide*. — On ne comptera pas comme une faute l'ignorance de cet usage.

Il règne aussi une grande incertitude dans la manière d'écrire l'article qui fait partie de certains noms français : *la Fontaine, la Fayette* ou *Lafayette*. Il convient d'indiquer dans les textes dictés, si, dans les noms propres qui contiennent un article, l'article doit être séparé du nom.

Article supprimé. — Lorsque deux adjectifs unis par *et* se rapportent au même substantif de manière à désigner en réalité deux choses différentes, on tolérera la suppression de l'article devant le second adjectif. Ex. : *L'histoire ancienne et moderne* comme *l'histoire ancienne et la moderne*.

Article partitif. — On tolérera *du, de la, des* au lieu de *de* partitif devant un substantif précédé d'un adjectif. Ex. : *de* ou *du bon pain, de bonne viande* ou *de la bonne viande, de* ou *des bons fruits*.

Article devant plus, moins, etc. — La règle qui veut qu'on emploie *le plus, le moins, le mieux* comme un neutre invariable devant un adjectif indiquant le degré le plus élevé de la qualité possédée par le substantif qualifié sans comparaison avec d'autres objets, est très subtile et de peu d'utilité. Il est superflu de s'en occuper dans l'enseignement élémentaire et dans les exercices. On tolérera *le plus, la plus, les plus, les moins, les mieux*, etc., dans des constructions telles que : *on a abattu les arbres le plus* ou *les plus exposés à la tempête*.

ADJECTIF

Accord de l'adjectif. — Dans la locution *se faire fort de*, on tolérera l'accord de l'adjectif. Ex. : *se faire fort, forte, forts, fortes de*.

Adjectif construit avec plusieurs substantifs. — Lorsqu'un adjectif qualificatif suit plusieurs substantifs de genres différents, on tolérera toujours que l'adjectif soit construit au masculin pluriel, quel que soit le genre du substantif le plus voisin. Ex. : *appartements et chambres meublés*.

Nu, demi, feu. — On tolérera l'accord de ces adjectifs avec le substantif qu'ils précèdent. Ex. : *nu* ou *nus pieds, une demi* ou *demie heure* (sans trait d'union entre les mots), *feu* ou *feue la reine*.

Adjectifs composés. — On tolérera la réunion des deux mots constitutifs en un seul mot qui formera son féminin et son pluriel d'après la règle générale. Ex. : *nouveauné, nouveaunée, nouveaunés, nouveaunées* ; — *courvêtu, courvêtue, courvêtus, courvêtues*, etc.

Mais les adjectifs composés qui désignent des nuances étant devenus, par suite d'une ellipse, de véritables substantifs invariables, on les traitera comme des mots invariables. Ex. : *des robes bleu clair, vert d'eau*, etc., de même qu'on dit *des habits marron*.

Participes passés invariables. — Actuellement les participes *approuvé, attendu, ci-inclus, ci-joint, excepté, non compris, y compris, ôté, passé, supposé, vu*, placés avant le substantif auquel ils sont joints, restent invariables. *Excepté* est même déjà classé parmi les prépositions.

On tolérera l'accord facultatif pour ces participes, sans exiger l'application de règles différentes suivant que ces mots sont placés au commencement ou dans le corps de la proposition, suivant que le substantif est ou n'est pas déterminé. Ex. : *ci joint* ou *ci jointes les pièces demandées* (sans trait d'union entre *ci* et le participe) ; — *je vous envoie ci joint* ou *ci jointe copie de la pièce*.

On tolérera la même liberté pour l'adjectif *franc*. Ex. : *envoyer franc de port* ou *franche de port une lettre*.

Avoir l'air. — On permettra d'écrire indifféremment : *elle a l'air doux* ou *douce, spirituel* ou *spirituelle*. On n'exigera pas la connaissance d'une différence de sens subtile suivant l'accord de l'adjectif avec le mot *air* ou avec le mot désignant la personne dont on indique l'air.

Adjectifs numéraux. — *Vingt, cent*. La prononciation justifie dans certains cas la règle actuelle qui donne un pluriel à ces deux mots quand ils sont multipliés par un autre nombre. On tolérera le pluriel de *vingt* et *cent* même lorsque ces mots sont suivis d'un autre adjectif numéral. Ex. : *quatre vingt* ou *quatre vingts dix hommes*, — *quatre cent* ou *quatre cents trente hommes*.

Le trait d'union ne sera pas exigé entre le mot désignant les unités et le mot désignant les dizaines. Ex. : *dix sept*.

Dans la désignation du millésime, on tolérera *mille* au lieu de *mil*, comme dans l'expression d'un nombre. Ex. : *l'an mil huit cent quatre-vingt-dix* ou *l'an mille huit cents quatre-vingts-dix*.

ADJECTIFS DÉMONSTRATIFS, INDÉFINIS ET PRONOMS

Ce. — On tolérera la réunion des particules *ci* et *là* avec le pronom qui les précède, sans exiger qu'on distingue *qu'est ceci, qu'est cela* de *qu'est ce ci, qu'est ce là.* — On tolérera la suppression du trait d'union dans ces constructions.

Même. — Après un substantif ou un pronom au pluriel, on tolérera l'accord de *même* au pluriel et on n'exigera pas le trait d'union entre *même* et le pronom. Ex. : *nous mêmes, les dieux mêmes.*

Tout. — Devant un nom de ville, on tolérera l'accord du mot *tout* avec le nom propre sans rechercher à établir une différence un peu subtile entre des constructions comme *toute Rome* et *tout Rome.*

On ne comptera pas de faute non-plus à ceux qui écriront indifféremment, en faisant parler une femme, *je suis tout à vous* ou *je suis toute à vous.*

Lorsque *tout* est employé avec le sens indéfini de *chaque,* on tolérera indifféremment la construction au singulier ou au pluriel du mot *tout* et du substantif qu'il accompagne. Ex. : *des marchandises de toutes sortes* ou *de toute sorte ; — la sottise est de tout (tous) temps et de tout (tous) pays.*

Aucun. — Avec une négation, on tolérera l'emploi de ce mot aussi bien au pluriel qu'au singulier. Ex. : *ne faire aucun projet* ou *aucuns projets.*

Chacun. — Lorsque ce pronom est construit après le verbe et se rapporte à un mot pluriel sujet ou complément, on tolérera indifféremment, après *chacun,* le possessif *son, sa, ses,* ou le possessif *leur, leurs.* Ex. : *ils sont sortis chacun de son côté* ou *de leur côté ; — remettre des livres chacun à sa place* ou *à leur place.*

VERBE

Verbes composés. — On tolérera la suppression de l'apostrophe et du trait d'union dans les verbes composés. Ex. : *entrouvrir, entrecroiser.*

Trait d'union. — On tolérera l'absence du trait d'union entre le verbe et le pronom sujet placé après le verbe. Ex. : *est il.*

Différence du sujet apparent et du sujet réel. — Ex. : *sa maladie sont des vapeurs.* Il n'y a pas lieu d'enseigner de règles pour des constructions semblables dont l'emploi ne peut être étudié utilement que dans la lecture et l'explication des textes. C'est une question de style et non de grammaire qui ne saurait figurer ni dans les exercices élémentaires ni dans les examens.

Accord du verbe précédé de plusieurs sujets non unis par la conjonction *et.* — Si les sujets ne sont pas résumés par un mot indéfini tel que *tout, rien, chacun,* on tolérera toujours la construction du verbe au pluriel. Ex. : *sa bonté, sa douceur le font admirer.*

Accord du verbe précédé de plusieurs sujets au singulier unis par *ni, comme, ainsi que* et autres locutions équivalentes. — On tolérera toujours le verbe au pluriel. Ex. : *ni la douceur ni la force n'y peuvent rien* ou *n'y peut rien ; — la santé comme la fortune demandent à être ménagées* ou *demande à être ménagée ; — le général avec quelques officiers sont sortis* ou *est sorti du camp ; — le chat ainsi que le tigre sont des carnivores* ou *est un carnivore.*

Accord du verbe quand le sujet est un mot collectif. — Toutes les fois que le collectif est accompagné d'un complément au pluriel, on tolérera l'accord du verbe avec le complément. Ex. : *un peu de connaissances suffit* ou *suffisent.*

Accord du verbe quand le sujet est *plus d'un.* — L'usage actuel étant de construire le verbe au singulier avec le sujet *plus d'un,* on tolérera la construction du verbe singulier même lorsque *plus d'un* est suivi d'un complément au pluriel. Ex. : *plus d'un de ces hommes était* ou *étaient à plaindre.*

Accord du verbe précédé de *un de ceux (une de celles) qui.* — Dans quel cas le verbe de la proposition relative doit-il être construit au pluriel, et dans quels cas au singulier ? C'est une délicatesse de langage qu'on n'essaiera pas d'introduire dans les exercices élémentaires ni dans les examens.

C'est, ce sont. — Comme il règne une grande diversité d'usage relativement à l'emploi régulier de *c'est* et de *ce sont,* et que les meilleurs auteurs ont employé *c'est* pour annoncer un substantif au pluriel ou un pronom de la troisième personne au pluriel, on tolérera dans tous les cas l'emploi de *c'est* au lieu de *ce sont.* Ex. : *c'est* ou *ce sont des montagnes et des précipices.*

Concordance ou correspondance des temps. — On tolérera le présent du subjonctif au lieu de l'imparfait dans les propositions subordonnées dépendant de propositions dont le verbe est au conditionnel présent. Ex. : *il faudrait qu'il vienne* ou *qu'il vînt.*

PARTICIPE

Participe présent et adjectif verbal. — Il convient de s'en tenir à la règle générale d'après laquelle on distingue le participe de l'adjectif en ce que le premier indique l'action et le second l'état. Il suffit que les élèves et les candidats fassent preuve de bon sens dans les cas douteux. On devra éviter avec soin les subtilités dans les exercices. Ex. : *des sauvages vivent errant* ou *errants dans les bois.*

Participe passé. — Il n'y a rien à changer à la règle d'après laquelle le participe passé construit comme épithète doit s'accorder avec le mot qualifié, et construit comme attribut avec le verbe *être* ou un verbe intransitif doit s'accorder avec le sujet. Ex. : *des fruits gâtés, — ils sont tombés ; — elles sont tombées.*

Pour le participe passé construit avec l'auxiliaire *avoir,* lorsque le participe passé est suivi soit d'un infinitif, soit d'un participe présent ou passé, on tolérera qu'il reste invariable, quels que soient le genre et le nombre des compléments qui précèdent. Ex. : *les fruits que je me suis laissé* ou *laissés prendre, — les sauvages que l'on a trouvé ou trouvés errant dans les bois.* Dans le cas où le participe passé est précédé d'une expression collective, on pourra à volonté le faire accorder avec le collectif ou avec son complément. Ex. : *la foule d'hommes que j'ai vue* ou *vus.*

ADVERBE

***Ne* dans les propositions subordonnées.** — L'emploi de cette négation dans un très grand nombre de propositions subordonnées donne lieu à des règles compliquées, difficiles, abusives, souvent en contradiction avec l'usage des écrivains les plus classiques.

Sans faire de règles différentes suivant que les propositions dont elles dépendent sont affirmatives ou négatives ou interrogatives, on tolérera la suppression de la négation *ne* dans les propositions subordonnées dépendant de verbes ou de locutions signifiant :

Empêcher, défendre, éviter que, etc. Ex. : *défendre qu'on vienne* ou *qu'on ne vienne ;*

Craindre, désespérer, avoir peur, de peur que, etc. Ex. : *de peur qu'il aille* ou *qu'il n'aille ;*

Douter, contester, nier que, etc. Ex. : *je ne doute pas que la chose soit vraie* ou *ne soit vraie ;*

Il tient à peu, il ne tient pas à, il s'en faut que, etc.

Ex. : *il ne tient pas à moi que cela se fasse* ou *ne se fasse.*

On tolérera de même la suppression de cette négation après les comparatifs et les mots indiquant une comparaison : *autre, autrement que,* etc. Ex. : *l'année a été meilleure qu'on l'espérait* ou *qu'on ne l'espérait ; — les résultats sont autres qu'on le croyait* ou *qu'on ne le croyait.*

De même après les locutions *à moins que, avant que.* Ex. : *à moins qu'on accorde le pardon* ou *qu'on n'accorde le pardon.*

OBSERVATION

Il conviendra, dans les examens, de ne pas compter comme fautes graves celles qui ne prouvent rien contre l'intelligence et le véritable savoir des candidats, mais qui prouvent seulement l'ignorance de quelques finesses ou de quelque subtilité grammaticale.

Arrêté ministériel du 25 juillet 1910 relatif à la nouvelle nomenclature grammaticale

Le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts,

Vu l'avis du Conseil supérieur de l'Instruction publique,

ARRÊTE :

ARTICLE 1er. — Dans les examens et concours relevant du Ministère de l'Instruction publique et correspondant à l'enseignement primaire jusqu'au brevet supérieur inclusivement, à l'enseignement secondaire des garçons et des jeunes filles jusqu'au baccalauréat ou au diplôme de fin d'études inclusivement, la nomenclature grammaticale dont la connaissance est exigible ne pourra dépasser les indications contenues dans le tableau ci-joint.

ART. 2. — Le présent arrêté sera applicable dès les examens et concours de l'année 1911.

GASTON DOUMERGUE.

NOMENCLATURE GRAMMATICALE

PREMIÈRE PARTIE. — LES FORMES

LE NOM

Division des noms .... { Noms propres. / Noms communs (simples et composés).

Nombres des noms .... Singulier — pluriel.

Genres des noms ..... Masculin — féminin.

L'ARTICLE

Division des articles ... { 1° Article défini. / 2° Article indéfini. / 3° Article partitif.

LE PRONOM

Division des pronoms .. { 1° Personnels et réfléchis. / 2° Possessifs. / 3° Démonstratifs. / 4° Relatifs. / 5° Interrogatifs. / 6° Indéfinis.

Personnes et nombre des pronoms ..... Singulier — pluriel.

Genres des pronoms .... Masculin — féminin — neutre.

Cas des pronoms .... Cas sujet — cas complément.

N. B. — On entend par *cas* les formes que prennent certains pronoms selon qu'ils sont sujets ou compléments.

L'ADJECTIF

Nombres ..... Singulier — pluriel.

Genres ..... Masculin — féminin.

Division des adjectifs :
- 1° Adjectifs qualificatifs. (simples et composés). { comparatif d'égalité. / comparatif de supériorité. / comparatif d'infériorité / superlatif relatif. / superlatif absolu.
- 2° Adjectifs numéraux. { ordinaux. / cardinaux.
- 3° Adjectifs possessifs.
- 4° Adjectifs démonstratifs.
- 5° Adjectifs interrogatifs
- 6° Adjectifs indéfinis.

LE VERBE

Verbes et locutions verbales.

Nombres et personnes.

Eléments du verbe ..... { 1° Radical. / 2° Terminaison.

Verbes auxiliaires. ..... *Avoir — être,* etc.

Formes du verbe ..... { 1° Active. / 2° Passive. / 3° Pronominale.

Modes du verbe :
- Modes personnels.... { 1° Indicatif. / 2° Conditionnel. / 3° Impératif. / 4° Subjonctif.
- Modes impersonnels { Infinitif. / Participe.

Temps du verbe :
- *Le Présent.*
- *Le Passé* { L'imparfait. / Le passé simple — le passé composé. / Le passé antérieur. / Le plus-que-parfait.
- *Le Futur* { Futur simple. / Futur antérieur.

Verbes impersonnels.

LA CONJUGAISON

Les verbes de forme active sont rangés en trois groupes :

1° Verbes du type *aimer* : Présent en *e.*

2° Verbes du type *finir* .... { Présent en *is.* / Participe en *issant.*

3° Tous les autres verbes.

MOTS INVARIABLES

1° Adverbes et locutions adverbiales ;

2° Prépositions et locutions prépositives ;

3° Conjonctions et locutions conjonctives .. { conjonctions de coordination ; / conjonctions de subordination.

4° Interjections.

DEUXIÈME PARTIE — LA SYNTAXE

LA PROPOSITION

Termes de la proposition .	sujet. verbe. attribut. complément.
Emplois du nom	sujet. apposition. attribut. complément.
Emplois de l'adjectif ...	épithète. attribut.

LES COMPLÉMENTS

Presque tous les mots peuvent avoir des compléments.

Il y a :

1° Des compléments du nom ;
2° Des compléments de l'adjectif ;
3° Des compléments du verbe : compléments direct et indirect.

DIVISION DES PROPOSITIONS

1° Propositions indépendantes ;
2° Propositions principales ;
3° Propositions subordonnées.

N. B. — Les propositions principales et subordonnées peuvent être coordonnées.

Les propositions peuvent avoir des fonctions analogues aux fonctions des noms. Elles peuvent être :	Proposition sujet ; Proposition apposition ; Proposition attribut ; Proposition complément.

LE NOM

1° Noms à double genre

137. Ce sont : *Aigle, amour, couple, délice, foudre, gens, œuvre, pâque, période.*

138. Aigle. — *Aigle* est masculin :

Quand il désigne l'oiseau de proie mâle, ou un pupitre d'église, le papier du plus grand format, la décoration d'un ordre de la chevalerie ou quand il est pris dans un sens figuré :

Ex. : *L'aigle est* **grand** *et* **fort.**

Cet homme est *un aigle* auprès de ceux qui l'entourent.

Aigle est féminin :

Quand il désigne l'oiseau femelle ou quand il a le sens d'enseignes militaires :

Ex. *Les aigles* **romaines**, dans ce dernier sens on tolère le masculin.

139. Amour, délice, orgue. — Ces mots sont masculins au singulier ; ils peuvent être féminins au pluriel, mais on peut, au pluriel adopter le masculin. Ils sont masculins après les expressions : *un de, un des.* Amour au singulier peut être féminin en poésie.

Automne, hymne, œuvre sont des deux genres.

Hymne : chant d'église en latin est au féminin : la **belle** *hymne veni Creator.* Il est masculin dans tous les autres cas. Mais on tolère toujours les deux genres.

Œuvre est toujours féminin au pluriel, il l'est au singulier dans son sens commun. Il est masculin quand il désigne la partie principale d'un bâtiment (fondations et murailles), le recueil des estampes d'un graveur, ou des compositions d'un musicien, la recherche de la pierre philosophale.

Chose : quelque chose, pronom indéfini, est masculin; quelque chose signifiant quelle que soit la chose est féminin : quelle que soit la chose que j'ai dite.

Autre chose : employé sans déterminatif est masculin : il est féminin avec une détermination : j'ai autre chose d'intéressant à conter ; une tout autre chose.

140. Couple. — Est masculin quand il sert à désigner des personnes unies par le mariage ; ou, en parlant des animaux, le mâle et la femelle :

Ex. : *Ces jeunes gens font* **un beau couple. Un couple** *de pigeons.*

Il est féminin quand il désigne simplement un groupe de deux objets :

Ex. : *Je ne mangerai qu'*une couple *d'œufs.*

141. Foudre. — Féminin quand il désigne le feu du ciel :

Ex. : **La foudre** *a tué deux personnes.*

Foudre est masculin quand il est appliqué au sens figuré, à une personne ; quand il désigne un gros tonneau ou l'image de la foudre, attribut de Jupiter.

Ex. : *Je suis donc* **un foudre** *de guerre* ?
(La Fontaine.)

Un foudre de bière.
Un foudre sculpté avec l'image de Jupiter.

142. Gens. — *Gens,* substantif, était autrefois féminin, il est devenu pluriel masculin. Donc tous les adjectifs qui s'y rapportent, qu'ils soient placés avant ou après le substantif gens, se mettent au masculin. Il n'y a d'exception à faire que si un adjectif précède *immédiatement* le nom ; celui-ci garde alors le féminin ancien et l'adjectif se met au féminin ainsi que ceux qui le précèdent. Mais si l'un des adjectifs qui précèdent est là par inversion, cet adjectif est au masculin (devenus *vieux,* les *bonnes* gens ont besoin d'être secourus.)

Ex. : Que*lles* bon*nes* gens. Toutes les bonnes gens. Mais si l'adjectif suit, il est au masculin : des gens discrets ; et aussi s'il ne précède pas immédiatement le mot gens : Tous les gens sensés.

Certaines gens, *faisant les* **empressés,**
S'introduisent dans les affaires ;
Ils *font partout les nécessaires,*
Et, partout **importuns,** *devraient être chassés.*
(La Fontaine.)

Devant ces contradictions l'usage hésite : on dit : Les vieilles gens sont regardants ou regardantes. Dans les cas semblables on peut toujours mettre l'adjectif qui suit au féminin comme celui qui précède.

— gens est toujours masculin dans les expressions : gens d'affaires, gens de bien, gens de lettres, gens d'épée, gens de robes, certains gens d'épée....

143. Gent. — Le singulier *gent,* qui a le sens de *race, nation,* est toujours féminin. Ex. : La gent moutonnière.

144. Œuvre. — Est en général féminin. Il est masculin dans l'expression : le gros œuvre qui désigne la partie principale d'une construction, les fondations et les murailles.

145. Pâque. — La *Pâque,* fête religieuse des Juifs est au féminin ; et *Pâques,* fête religieuse des chrétiens est du masculin, mais on tolère l'emploi du féminin.

Ex. : *La Pâque juive.* — *Pâques est prochain.*

Pâques, époque de l'année est masculin :

Ex. : *Pâques* était *passé.* A *Pâques prochain.*

Mais ce mot peut toujours être employé au féminin.

Le mot est féminin pluriel dans les locutions :

Pâques fleuries, Pâques closes, faire de *bonnes Pâques.*

Orge peut être toujours employé au féminin.

146. Période. — Féminin en général.

Ex. : **La période** *tertiaire a précédé l'apparition de l'homme.* — **Une période** *de repos.*

Masculin quand il signifie le plus haut point où une personne ou une chose puisse parvenir.

Ex. : *Il était* **au plus haut période** *de sa gloire.* — *La maladie atteindra aujourd'hui* **son plus haut période.**

147. Mots à double genre parce qu'ils sont à double sens. — Le genre distingue les homonymes : un vase, la vase.

Il distingue le sens propre et le sens figuré d'un même nom : la mémoire, un mémoire. Il distingue les personnes des choses : un aide, une aide.

Mots dont la signification diffère selon qu'ils sont au masculin ou au féminin :

Aide, masc. : celui qui aide — fém. : assistance.

Aune, masc. : arbre — fém. : mesure de longueur.

Cartouche, masc. : ornement artistique — fém. : balle et charge de poudre pour une arme à feu.

Couple, masc. : homme et femme — fém. : une paire d'objets.

Crêpe, masc. : étoffe — fém. : mets.

Critique, masc. : le juge d'une œuvre d'art — fém. : l'art de juger des œuvres d'art ; un jugement d'appréciation.

Echo, masc. : phénomène sonore — fém. : la nymphe Echo.

Enseigne, masc. : grade dans la marine, porte-drapeau. — fém. : inscription ou signe qui distingue la boutique d'un commerçant.

Foret, masc. : outil pour percer — fém. : forêt.

Garde, masc. : celui qui garde — fém. : action de garder ; troupe en armes chargée de la police, corps d'élite.

Greffe, masc. : secrétariat d'un bureau de justice — fém. : partie d'un être vivant insérée dans un autre individu ; la partie insérée.

Guide, masc. : celui qui guide — fém. : les lanières pour conduire les chevaux.

Livre, masc. : ouvrage, subdivision d'un ouvrage — fém. : mesure de poids ; monnaie ancienne, étrangère.

Manche, masc. : partie d'un outil qu'on saisit ; —fém. : partie du vêtement.

Manœuvre, masc. : celui qui fait les gros travaux — fém. : mouvement calculé d'une troupe, d'un navire.

Mémoire, masc. : liste de prix de travaux — fém. : faculté de se souvenir.

Mode, masc. : méthode ; la manière de présenter l'action dans les verbes — fém. : habitude du jour.

Moule, masc. : appareil pour mouler — fém. : coquillage.

Mousse, masc. : apprenti matelot — fém. : espèce végétale, écume.

Office, masc. : fonction, devoir, assistance, cérémonie religieuse — fém. : chambre où on dépose les aliments.

Page, masc. : jeune garçon, attaché à une maison noble — fém. : côté d'une feuille.

Parallèle, masc. : comparaison qu'on établit ; cercles imaginaires de la sphère terrestre — fém. : lignes équidistantes ; terme de fortification.

Pendule, masc. : masse oscillante au bout d'un fil — fém. : espèce d'horloge.

Poêle, masc. : appareil de chauffage ; drap mortuaire — fém. : ustensile de cuisine.

Poste, masc. : lieu assigné pour une fonction, une garde — fém. : lieu de relai.

Pourpre, masc. : couleur rouge — fém. : matière tinctoriale, la couleur rouge ; étoffe teinte en rouge ; dignité des rois, des cardinaux.

Relâche, masc. : interruption — fém. : stationnement d'un navire ; lieu où il stationne.

Solde, masc. : différence entre le débit et le crédit d'un compte ; la somme qui achève le règlement d'un compte — fém. : le salaire d'un militaire.

Somme, masc. : un temps de sommeil — fém. : total ; une certaine quantité d'argent ; fardeau ; un ouvrage encyclopédique.

Souris, masc. : sourire — fém. : petit rongeur.

Tour, masc. : mouvement qui entoure ; ruse ; habileté ; machine à travailler le bois ou le fer — fém. : construction spéciale.

Trompette, masc. : Celui qui sonne de la trompette — fém. : l'instrument dont on sonne.

Vague, masc. : caractère d'indétermination — fém. : mouvement de l'eau.

Vase, masc. : ustensile fait pour contenir quelque chose — fém. : boue au fond des eaux.

Voile, masc. : étoffe pour couvrir le visage — fém. : pièces de toiles qui entraînent un navire.

2° Noms à double pluriel.

148. 1° **Aïeul,** fait au pluriel *aïeux* quand il désigne les ancêtres en général.

Ex. : *Il a un empereur parmi ses* **aïeux.**

Il fait *aïeuls* dans le sens de grands pères.

Ex. : *Ses deux* **aïeuls sont encore vivants.**

149. 2° **Ciel** fait *cieux* quand on veut désigner l'ensemble de la voûte céleste :

Ex. : *Il n'y a pas d'homme meilleur sous les* **cieux.**

Il fait *ciels* quand on veut désigner le ciel d'un climat ou d'une peinture :

Ex. : *Les* **ciels** *de ces tableaux sont magnifiques. Les* **ciels** *des pays du nord sont brumeux.*

On dit aussi des *ciels* de lit, des *ciels* de carrière.

150. Œil, fait *yeux* au pluriel, sauf dans les noms composés : des œils-de-bœuf, des œils-de-chat, des œils-de-perdrix.

151. *Travail* fait *travails* dans le sens de machine à ferrer les chevaux.

Ail fait *aulx* pour désigner la plante potagère ; il fait *ails* pour désigner une espèce botanique.

3° Pluriel des noms propres.

152. Les noms propres restent au singulier quand ils désignent la personne elle-même.

Ex. : *Les deux* **Corneille.** *Les* **Molière** *et les* **La Fontaine** *sont la gloire du* XVIe *siècle.*

Ils prennent le signe du pluriel quand ils ont la *fonction des noms communs,* c'est-à-dire : 1° quand ils sont employés par comparaison ; 2° quand ils désignent les œuvres des grands hommes ; 3° quand ils désignent les familles historiques. Toutefois la forme des mots La Fontaine, La Bruyère exclut le pluriel, (*les* **Corneilles** *sont rares*) ; (*des* **Raphaëls**) ; (les **Guises**).

Quand ils désignent des éditions : *j'ai* 3 **Virgiles;** *chacun a ses mérites.*

Mais on laissera le mot au singulier pour désigner plusieurs exemplaires : *j'ai* 3 **Hugo** *pour* 5 *élèves.* (Voir Tolérances).

4° Quand il s'agit de pays, de cours d'eau, etc., portant le même nom. Ce sont en réalité des adjectifs épithètes.

Les deux **Amériques.** *Les deux* **Sèvres.**

4° Pluriel des noms composés.

153. Les noms composés qui s'écrivent aujourd'hui en un seul mot, sont devenus de véritables noms simples, ils prennent la marque du pluriel.

Ex. : *Des gendarmes, des colporteurs, des contre-vents.*

Toutefois. — *Gentilhomme* et *bonhomme* font : *bonshommes* et *gentilshommes.*

Les noms commençant par l'adjectif possessif *mon, ma,* commençent au pluriel par l'adjectif pluriel *mes* : *Messieurs, Mesdames.*

En principe les éléments qui sont des noms ou des adjectifs varient au pluriel, ceux qui sont des verbes ou des mots invariables restent invariables.

D'autre part il faut regarder au sens : celui-ci peut imposer l'invariabilité à des mots variables. Ex. : *des serre-tête, des perce-neige.* On écrit indifféremment des chauffe-lits ou lit — des gâte-sauces ou sauce. Le sens change suivant que l'élément variable est au singulier ou au pluriel dans : un porte-aiguille (pièce qui porte l'aiguille à suture) ; un porte-aiguilles ; un porte-bouteille est placé sur une nappe ; un porte-bouteilles ; un porte-cigare et un fume-cigare ; un porte-cigares est un étui à cigares.

Toutefois on dit un couvre-pied, un casse-noisette, un cent-suisse, un cent-garde, un coupe-jarret, un essuie-main.

154. Les deux termes sont variables.

A). — *Deux noms.* 1° S'ils sont seuls, il y a lieu de les mettre tous les deux au pluriel :

Ex. : *Des lauriers-roses.*

Exceptions. — Des appuis-main (des appuis pour la main), les électro-aimants, des Gallo-Romains (et tous les analogues), des bec-figues, des brèche-dents, des colin-maillard.

Les noms propres sont invariables : des bains-Marie, des reines-Claude, des Hôtels-Dieu.

2° Une préposition unit les 2 noms, exprimée ou sous-entendue.

Le premier nom seul est au pluriel : des chefs-d'œuvre, des vers à soie, des poignées de main.

Sous-entendue. Le premier nom seul est au pluriel : des Hôtels-Dieu, des mandats-poste, des bains-Marie. *Exceptions* déterminées par le sens : des pot-au-feu, des pied-à-terre, des coq-à-l'âne, des tête-à-tête.

B). — Les termes sont un nom et un adjectif. Il y a accord des 2 éléments.

Ex. : *Des plates-bandes,* des *rouges-gorges.*

Sauf dans : chevau-légers, grand'messes, grand'mères, grand'tantes, sauf-conduits, terre-pleins, terre-neuve.

155. Un seul terme est variable.

A). — Un verbe considéré comme invariable, et un nom. — Le nom se met au pluriel.

Ex. : des couvre-lits, des prête-noms, des contre-coups, des vice-présidents, des arrière-boutiques, des avant-postes, des en-têtes.

Les exceptions proviennent du sens : des brise-bise, des cache-pot, des casse-cou, des coupe-circuit, des presse-purée, des porte-aigle, des presse-papier, des passe-droit, des abat-jour, des coupe-gorge, des casse-tête, des réveille-matin (on dit par abrévation : des réveils). On écrit des essuie-mains (*Cf.* appuis-main).

Remarque. — 1° Le verbe, au participe présent est variable dans : les ayants-droit, les ayants-cause.

2° le mot *garde* est invariable quand il est verbe.

Des garde-corps, côtes, feux, manger, meubles, places, des garde-manger, des garde-meubles, des garde-fous. Il est variable quand il est nom : des gardes-barrières, chasse, françaises, freins, magasins, malades, pêche, des gardes-chasse, des gardes-malades.

B). — Une préposition et un nom. — Seul le nom est au pluriel, des arrière-neveux, encore faut-il que le sens le permette : des arrière-garde, des avant-scène.

156. Les deux termes sont invariables (verbes et mots invariables). — Pas d'accord.

1° Un pronom indéfini et un verbe : des on-dit, des qu'en-dira-t-on.

2° Deux verbes : des ouï-dire, des va-et-vient, des chassé-croisé.

Remarque. — Le verbe variant comme verbe : on écrit des laissez-passer.

3° Un verbe et un adverbe : des gagne-petit, des passe-partout.

Remarque sur le signe du pluriel dans les mots composés *au singulier* :

le sens impose *s* au singulier dans : un chasse-mouches, un compte-gouttes un porte-affiches, un porte-allumettes, un chauffe-pieds, un porte-clefs, un pare-étincelles, un brise-lames, un brûle-parfums, un va-nu-pieds.

Cependant on écrit malgré le sens : un couvre-pied, un cure-dent.

Quelques mots composés au pluriel :

Des : Abat-jour, abat-vent, acquits-à-caution, aigres-douces, aigues-marines, appuis-main, arcs-en-ciel, arcs-boutants, arrière-boutiques, arrière-cours, arrière-neveux, avant-coureurs, avant-garde, avant-goût, avant-scène, avant-trains, ayants-cause, ayants-droit, Bains-Marie, bas-fonds, basses-tailles, bas-reliefs, basses-cours, beaux-frères, becs-de-cane, becs-de-corbin, blancs-becs, blancs-seings, bonshommes, bornes-fontaines, bouche-trous, boute-en-train, boute-selles, bouts-rimés, branle-bas, bric-à-brac, brise-glace, brise-lames, brûle-tout, cache-nez, casse-tête, cerfs-volants, chassés-croisés, chasse-mouches (un), chasse-neige, chasse-pierres, chats-huants, chausse-trapes, chauves-souris, chefs-d'œuvre, chefs-lieux, chevau-légers, choux-fleurs, coffres-forts, contre-allées, contre-amiraux, contre-coups, contre-ordres, contre-parties, coq-à-l'âne, cous-de-pied, coupe-gorge, couvre-feu, couvre-pieds (un) (1), crève-cœur, crocs-en-jambe, cure-dents, dames-jeannes, demi-heures, derniers-nés, douces-amères, eaux-de-vie, eaux-fortes, entre-colonnes, entre-lignes, essuie-mains (un), Fac-similés, faux-fuyants, fêtes-Dieu, fourmis-lions, fraîches-cueillies, fraîches-écloses, francs-archers, francs-maçons, francs-tireurs, gagne-pain, gagne-petit, gallo-romains, garde-feu, garde-fous, garde-manger, garde-meubles, garde-robes, gardes-barrière, gardes-côte, gardes-chasse, gardes-malades, gardes-pêche, gâte-métier, gâte-sauce, gentilshommes, gobe-mouches, gommes-résines, grand'mères, grand'messes, grand'rues, grand'tantes, grands-pères, grands-oncles, grippe-sous, guets-apens, guide-ânes, hausse-cols, hauts-de-chausses, hors-d'œuvre, hôtels-Dieu, lauriers-roses, loups-cerviers, loups-garous, malles-postes, martins-pêcheurs, mezzo-soprano, mille-feuilles, mort-nés, non-valeurs, nouveau-nés, nouveaux-venus, œils-de-bœuf, on-dit, passe-partout, passe-passe, passe-temps, pèse-lait, pied-à-terre, pieds-d'alouette, pieds-de-chèvre, pieds-droits, pieds-plats, pies-grièches, pince-sans-rire, pique-assiette, des oiseaux-mouches, pique-niques, plains-chants, plates-bandes, plates-formes, porcs-épics, porte-allumettes, porte-bougie, porte-clefs, porte-drapeau, porte-montre, portes-cochères, post-scriptum, premiers-nés, prête-noms, prie-Dieu, procès-verbaux, pot-au-feu, qu'en-dira-t-on, quotes-parts, reines-Claude, reines-marguerites, réveille-matin, rez-de-chaussée, rouges-gorges, sapeurs-pompiers, sauf-conduits, sauve-qui-

(1) Cependant l'Académie écrit un couvre-pied.

peu, sergents-majors, serre-freins, songe-creux, sous-lieutenants, sous-préfets, sous-sols, steeple-chases, taille-douces, taille-plumes, terre-neuve, terre-pleins, tête-à-tête, timbres-poste, tire-bottes, tire-bouchons, touche-à-tout, toutes-bonnes, tragi-comédies, tranche-montagnes, trompe-l'œil, trouble-fête, trous-madame, vade-mécum, va-et-vient, va-nu-pieds (un), verts-de-gris, vice-amiraux, vice-présidents, vice-rois, vol-au-vent.

L'Article

157. — L'article, soit défini, soit indéfini s'omet devant les noms communs pris dans un sens très général :

1° Dans les proverbes et sentences :

Ex. : **Patience** *et* **longueur** *de temps, font plus que* **force** *ni que* **rage. Bonne renommée** *vaut mieux que* **ceinture dorée.**

2° Devant les noms mis en apposition ou en apostrophe :

Ex. : *Le lièvre,* **animal,** *peureux, fuit au moindre bruit. Venez,* **singe,** *parlez le premier, et pour cause.*

3° Dans l'énumération rapide pour produire un effet d'accumulation.

Ex.: **Femmes, moines, vieillards,** *tout était descendu:*

4° Devant l'attribut : cet homme est étranger.

5° Devant les noms propres désignant un individu particulier, qui n'a plus besoin d'être déterminé. Les habitants des campagnes méconnaissent cette règle et disent : *la* une telle.

6° Dans les inscriptions, les titres d'ouvrages, les adresses :

Terrain à vendre. Dictionnaire français, Place, rue Victor Hugo.

7° Devant les noms marquant une division du temps, *midi, janvier,* etc...

8° Dans les expressions où se trouve une préposition. Il part en voyage, sans bagages — en voiture.

9° Dans des expressions verbales : avoir peur, avoir raison, se rendre compte, faire grâce.

L'Adjectif

L'adjectif qualificatif est soit : *épithète* : Un beau ciel, soit *attribut* : le ciel est beau.

ADJECTIFS QUALIFICATIFS (SYNTAXE D'ACCORD)

158. Accord. — Dans l'une et l'autre fonction il s'accorde en genre et en nombre avec le nom qu'il qualifie. S'il se rapporte à la fois à deux ou plusieurs substantifs, il prend le signe du pluriel, et il se met au masculin si l'un au moins des noms est masculin. Si tous les noms auxquels il se rapporte sont féminins, l'adjectif se met au féminin :

Ex. : *Un homme* **fort,** *une femme* **belle.** *Le lion et le tigre sont* **féroces.** *Une femme et un homme* **grands.** *Cette jeune fille et sa mère sont très* **distinguées.**

Pour ne pas choquer l'oreille, mettez lorsque cela est possible, le nom masculin auprès du verbe ; ne dites pas : *un homme et une femme* **grands.**

159. — *Les adjectifs composés* (deux adjectifs, ou un adjectif et un participe) s'accordent dans chacune de leurs parties.

Ex. : fleurs **fraîches écloses,** des **sourds-muets,** *ils sont* **ivres-morts, raides-morts.**

On dit d'ailleurs une femme **sourde et muette** et non sourde-muette.

Il n'en est pas de même, si l'un des adjectifs est pris adverbialement :

Ex.: *Des enfants* **nouveau-nés,** *des enfants* **mort-nés.** *Une petite fille* **court-vêtue,** *elle est* **demi-morte de** *frayeur.*

160. Substantifs employés adjectivement. — Quand un nom est employé adjectivement, il s'accorde en genre et en nombre avec le nom qu'il qualifie :

Ex. : *Des peuples* **agriculteurs.** *Des bateaux* **pirates.**

Toutefois les noms qui n'ont pas de féminin peuvent servir à qualifier les noms féminins :

Ex. : *Une femme* **écrivain.**

Les substantifs employés adjectivement pour désigner la couleur, demeurent invariables : Cette invariabilité s'explique par une ellipse.

Ex. : *Des rubans* **cerise, marron.** *Des tentures* **jaune vif.** *Des étoffes* **bleu-clair** signifient: des rubans couleur de la cerise, etc,... des tentures d'un jaune vif. (**jaune, bleu** sont des noms et non des adjectifs).

161. Adjectifs employés avec l'acception de mots invariables. — Les adjectifs ou les participes passés peuvent s'employer comme prépositions ou comme adverbes :

Ex. : **Excepté** *mes livres.* **Non compris** *la somme de.* **Approuvé** *la décision,* **Ci-joint** *les pièces.* **Ci-inclus.**

Ils sont alors invariables. Mais s'ils reprennent le sens d'adjectifs, ils s'accordent :

Ex. : *La* **somme** *de cent francs* **non comprise. Les pièces ci-jointes.**

Aujourd'hui, l'accord peut être fait dans les deux cas.

Plein, haut, sont adverbes, *sauf* est préposition quand ils sont placés devant un nom et souvent devant son déterminatif. Sinon, ils sont adjectifs :

Ex. : **Haut** *les cœurs.* — *Les mains* **hautes.** — **Plein** *la bouche.* — *La bouche* **pleine.** — **Sauf** *erreur.* — *La vie* **sauve.**

162. Nu, demi, mi, feu, sont également invariables dans les expressions adverbiales où ils précèdent directement le nom ou le déterminatif qui leur est joint.

Ex. : *Nu-tête, nu-pieds, nu-jambes, à mi-côte, à mi-jambes.*

Ex. : *Une* **demi-***heure* ; *des* **demi-***fous.*

Demi placé après le nom est un adjectif ordinaire et s'accorde : une heure et demie.

163. Possible. — *Possible* reste invariable dans les locutions *le plus, le moins, le mieux possible,* même s'il se trouve séparé de la locution adverbiale : *le plus, le moins, le mieux* :

Ex. : *Je veux apprendre* **le plus** *de choses* **possible.**

I. ADJECTIFS POSSESSIFS

164. Emploi. — L'adjectif possessif s'emploie ; 1° quand les mots qui désignent le possesseur et l'objet possédé appartiennent à la même proposition ; 2° quand, le mot désignant le possesseur n'étant pas dans la même proposition que celui qui désigne l'objet possédé, ce dernier est régi par une préposition. — 3° toutes les fois que le possesseur est un nom de personne.

Dans tous les autres cas, on emploie le pronom relatif *en* (de cela, de lui, d'elle, d'eux) :

Ex. : *Quand on parle du loup, on* **en** *voit la queue.*

Pourtant cette règle n'est pas toujours observée par les auteurs :

Ex. : *Nous anticipons l'avenir comme pour hâter* **son** *cours.* (Pascal.)

165. L'article à la place du possessif. — On remplace le possessif par l'article, quand l'idée de possession est évidente.

Ex. : *J'ai mal à* **la** *tête* (*et non à* **ma** *tête*). *Je suis tombé sur* **le** *dos.*

166. Nombre de l'objet possédé. — Le nom de l'objet possédé, quand il y a *plusieurs possesseurs,* se met au singulier ou au pluriel, suivant le sens :

Ex. : *Mettez tous* **votre** *chapeau. Ils sont venus avec* **leur** *enfant* (s'ils n'avaient qu'un enfant). *Les parents sont toujours inquiets de l'avenir de* **leurs** *enfants* (parce qu'on parle des parents en général et que chaque couple peut avoir plusieurs enfants). *Les soldats ont mis* **leurs fusils** *en faisceaux* (parce qu'on ne forme pas de faisceau avec un seul fusil). *Tous les soldats ont mis* **leur** *fusil au râtelier* (parce que chacun a mis **son** fusil).

On dira indifféremment : *ils iront se promener chacun son jour ou chacun leur jour*, mais on devra dire avec la 1re ou la 2e personne du pluriel : *vous irez chacun votre jour, nous irons chacun notre jour.*

167. Le Possessif atténué. — Le possessif peut ne pas exprimer une possession réelle, mais marquer un vague rapport de dépendance :

Ex. : *Cette réflexion embarrassant* **notre** *homme* (*La Fontaine*) (*l'homme dont je viens de parler*).

J'ai passé **mon** *examen* (*celui auquel je m'étais consacré*). *Fermez* **votre** *porte*; **mon** *pays natal*; **mon** *général.*

II. — ADJECTIFS INDÉFINIS

168. Un, des, de. — L'adjectif indéfini *un* a pour pluriel *des*. Mais : *des* se remplace par *de* :

1° avant un adjectif qualificatif, à moins que celui-ci ne forme avec le substantif un véritable nom composé.

Ex. : *J'ai mangé* **de** *bonnes pommes. Mais* : *J'ai rencontré* **des** *jeunes gens,* **des** *jeunes filles.*

2° avec les locutions *pas de, point de* etc.

Ex. : *Je n'ai pas* **de** *manchettes ; il y a beaucoup* **de** *loups cette année ; ils ont l'air* **d'**hommes *sérieux.*

169. Aucun. — *Aucun* n'a pas par lui-même le sens négatif. Il faut pour lui donner ce sens lui associer une négation, *ne* ou *sans* ; à l'origine, il signifiait *un, quelqu'un.*

Je **n'ai aucune** nouvelle de lui. — *Ils sont* **sans aucun** *renseignement à ce sujet.*

170. Certain. — *Certain,* adjectif *indéfini, précède* toujours le substantif. *Certain,* adjectif *qualificatif,* suit toujours le substantif :

Ex. : **Certaines** *gens faisant les empressés,*
S'introduisent dans les affaires. (La Fontaine).

C'est une chose **certaine.** (adjectif qualificatif.)

171. Même. — Il ne faut pas confondre *même, adjectif indéfini,* qui *est variable* et *même, adverbe,* qui est *invariable.*

Même est adjectif et varie quand il est placé après un nom, un pronom qu'il modifie. Il sert alors à préciser, à insister : *les sots* **eux-mêmes** ; *leurs succès* **mêmes** *les épuisèrent.*

Même est *adverbe* et par conséquent invariable quand il modifie un *adjectif,* un *verbe* et aussi quand il *précède* et modifie un nom, un pronom, un adverbe ou une proposition entière et qu'il marque la gradation : les hommes, les femmes même...

Mais comme *même* peut se placer souvent avant ou après le nom on peut suivant le sens qu'on a dans l'esprit le considérer comme adjectif ou adverbe : *Pardonnez à vos ennemis* **mêmes** ou **même** (**même** *à vos ennemis* — *à vos ennemis* **eux-mêmes**).

172. Nul. — *Nul,* adjectif *indéfini, précède* toujours le substantif (voir : certain) ; il est, dans ce cas, accompagné de la négation *ne. Nul,* adjectif *qualificatif,* suit *toujours le nom* :

Ex. : **Nul** *souverain* **ne** *fut plus grand que lui* (*adjectif indéfini*). *C'est un acte* **nul** (*adjectif qualificatif*).

173. Quelque. — *Quelque* est *adjectif ou adverbe.* (Comparez : *même*) :

Ex. : *J'ai tué* **quelques** *perdreaux* (*adjectif*). **Quelque** *magnifiques que soient ces appartements* (*adverbe*).

Quelque, suivi de *que* et se rapportant à un nom peut se tourner par *quoique, certain,* il est adjectif.

Ex. : **Quelques** *compensations* **que** *vous m'offriez* (**Quoique** *vous m'offriez* **certaines** *compensations.*)

Tandis que *quelque* suivi de *que* et se rapportant à un adjectif ou un adverbe a le sens de *à quelque point que, si,* il est adverbe.

Ex. : **Quelque** *magnifiques* **que** *soient ces appartements.* (**Si** *magnifiques* **que** *soient...*)

Quand *quelque* encadre un nom et son adjectif, il se rapporte au nom car on ne pourrait supprimer le nom sans que tout sens disparaisse : **quelques** *beaux voyages* **que** *vous ayez faits...* ; par suite il varie.

Quelque, employé seul, devant un nom de nombre, est *adverbe* dans le sens de *environ.*

Ex. : *Il y a* **quelque** *vingt ans de cela.*

Quelque a une seconde forme *quel que,* devant le verbe *être* ou devant un verbe marquant l'état, *quel* est alors attribut et varie : **quels que** *soient vos projets.*

174. Tout. — Il ne faut pas confondre *tout, adjectif indéfini,* et *tout, adverbe.*

Tout, adjectif, indique la totalité des personnes ou des choses, ou prend le sens de *chaque,* de *n'importe lequel* :

Ex. : **Tous** *les hommes sont présents.* **Toute** *personne qui fera du bruit sera expulsée.*

Tout, adverbe, signifie *tout à fait, entièrement,* Il est alors invariable :

Ex. : *Ces chevaux sont* **tout** *noirs. Elle est* **tout** *en pleurs.*

Toutefois, *tout, adverbe,* varie devant un adjectif féminin commençant par une consonne ou une h aspirée. C'est la délicatesse de l'oreille qui a maintenu cette habitude de l'ancienne langue.

Ex. : *Elles parurent* **toutes surprises, toutes honteuses.** Toutefois l'oreille ne pouvant distinguer on écrit indifféremment : *tout entière, toute entière.* De même avec tout... que *tout instruite* que... ou *toute instruite que.*

Remarque. — Remarquons enfin que le mot *tout* s'emploie par syllepse dans des expressions telles que *Tout* Rome, *tout* Sparte, qui signifient *tout le peuple* de Rome, de Sparte.

Le Pronom

175. — En règle générale un pronom ne peut remplacer qu'un nom déterminé.

On ne doit pas dire :
Ce prisonnier a demandé **grâce** *et on* **la** *lui a refusée,* mais *il a demandé* **sa** *grâce et on* **la** *lui a refusée.* Cependant il y a des expressions consacrées qui ne suivent pas cette règle : *il a agi en* **homme que** *l'expérience a instruit. Il n'y a dans ce lieu* **âme qui** *vive...*

176. — Il faut qu'on reconnaisse toujours clairement quel est le nom que remplace le pronom ; afin de prévenir toute équivoque (amphibologie)

Ex. : *On peut dire que La Fontaine a égalé Molière dans ce qu'*il *a fait de meilleur.*

On ne sait si *il* se rapporte à La Fontaine ou à Molière ; on évite la difficulté en remplaçant *il* par le pronom démonstratif *celui-ci* (qui se rapportera à Molière), ou en tournant la phrase d'une autre manière.

I. — PRONOMS PERSONNELS

177. Nous, vous, employés à la place de **je, moi, tu, toi,** doivent être considérés comme des *singuliers. Vous êtes prié,* — *Nous, soussigné, père du jeune...*

178. Place des pronoms personnels compléments. — Il faut observer que par application des règles concernant les *toniques* et les *atones*, si l'un des pronoms personnels *le, la , les* est complément d'un verbe en même temps que l'un des pronoms *me, te, vous, nous*, il se met après ce pronom :

Ex. : *Tu* **me le** *donnes. Nous* **vous les** *avons donnés.*

Par contre il se place avant *lui* ou *leur* :

Ex. : *Tu* **le lui** *donnes.*

Et avant *moi, toi*, qui suivent l'impératif. *Donne* **le moi.** Mais on dit à volonté : *Donne* **nous le** ou *donne* **le nous.**

Y précède *moi* et *toi*, et suit *nous* et *vous*.

Ex. : *Menez*-**y-moi.** *Menez* **nous-y.**

179. Pronoms explétifs. — Les pronoms personnels peuvent être employés d'une manière explétive. 1° Pour marquer l'interrogation, quand le sujet est un nom :

Ex. : *Votre frère est*-**il** *sorti* ?

2° Dans les exclamations :

Ex. : *Cet homme fût*-**il** *le plus intelligent du monde, il ne ferait pas mieux que nous !*

3° Avec les verbes impersonnels ou pris comme tels :

Ex. : **Il** *pleut des balles.* **Il** *vient d'arriver une chose extraordinaire.*

Les véritables sujets de ces deux propositions sont *des balles* et *une chose extraordinaire. Il* est un sujet apparent, qu'on appelle pronom *impersonnel* ou *neutre.*

180. En, y. — Ce sont des adverbes devenus pronoms (Pron. adverbiaux). Ils ne s'emploient guère qu'en parlant des choses ou des idées, pour remplacer les pronoms *compléments : lui, elle, eux, elles*, qui ne s'emploient pas dans ce cas. **En** signifie de lui, d'elle, d'eux, de cela ; **y** signifie : à lui, à elle, à eux et à cela (en parlant des choses seulement).

En, joue aussi le rôle de pronom partitif:

Ex. : *Cette confiture est bonne mais vous* **en** *avez trop mangé. Y a-t-il des soldats de ce côté?* Oui, *j'***en** *ai beaucoup vu.*

Ils sont *neutres* quand ils désignent non une personne, mais une manière d'être ou rappellent une proposition : *Il est puni : est-ce qu'il n'***y** *penserait plus? Vous êtes premier, je vous* **en** *félicite.*

181. Se, soi. — Ce sont des pronoms *personnels réfléchis* parce qu'ils renvoient au sujet. Ils sont attribut, complément d'objet ou complément de circonstance.

Ex. : *Il faut être* **soi.** *Il* **se** *regarde dans la glace. Il ne faut pas travailler pour* **soi.**

Soi peut jouer le rôle de sujet d'une proposition sous-entendue :

Ex. : *On a souvent besoin d'un plus petit que* **soi.**

Soi est mis ici pour : on est soi-même.

Soi ne s'emploie que rarement pour représenter un nom de chose. Il ne peut pas représenter un sujet pluriel alors que *se* est des deux genres et des deux nombres.

182. Le, La, Les, *attributs.* — Si le pronom de la troisième personne, pris comme attribut, remplace un nom pris dans un *sens déterminé*, il s'accorde avec ce dernier en genre et en nombre :

Ex. : *Etes-vous* **les auteurs de cet ouvrage?** *Oui, nous* **les** *sommes. Etes-vous* **l'actrice** *qu'on nous a annoncée? Je* **la** *suis.*

Mais s'il remplace un *nom* d'espèce, ou un membre de phrase pris dans un *sens indéterminé*, il demeure invariable sous la forme neutre *le* :

Ex. : *Serez-vous bien sage, ma petite-fille?* Oui, *je* **le** *serai. Etes-vous fatigués, mes enfants?* Oui *nous* **le** *sommes.*

On pourrait lui substituer le pronom démonstratif **cela.**

Il ne faut pas omettre **le** neutre devant lui et leur. On ne doit pas dire : je leur promets mais : je **le** leur promets.

II. — PRONOMS DÉTERMINATIFS

1° — Pronoms possessifs

183. — On emploie, sans qu'ils représentent aucun nom exprimé :

1° Les pronoms neutres le *mien*, le *tien*, le *sien*, le *nôtre*, le *vôtre*, le *leur* quand ils désignent ce qui appartient à chacun :

Ex. : *Mêlons* **le tien et le mien** (*ce que chacun de nous possède*). *Mettez-y du* **vôtre** (*de votre activité volontaire*).

2° Les pronoms masculins pluriels les *miens*, les *tiens*, les *nôtres*, les *vôtres*, les *leurs* pour désigner les parents ou les amis.

Ex. : *Il est douloureux d'être séparés des* **siens.**

2° Pronoms démonstratifs

184. — Il ne faut pas faire suivre immédiatement d'un adjectif ou d'un participe les pronoms *celui, celle, ceux, celles.*

Ne dites pas :

Ils sont meilleurs que **ceux vus.**

Mais :

Ils sont meilleurs que **ceux que** *nous avons vus jusqu'ici.*

185. Ce. — *Ce*, véritable pronom neutre, est très usité. On l'emploie :

1° Avec le verbe *être* pour marquer l'interrogation:

Ex. : **Est-ce** *vous* ?

Ou l'affirmation :

Ex. : **C'est** *moi* ; **c'est** *lui* ; **ce sont** *eux.*

2° Pour représenter une idée indéterminée :

Ex. : **Ce** *qui me peine...* (*entendez* : **la chose** *qui me peine...*) *Ce me semble* (**ce**, *sujet*).

3° Comme sujet apparent du verbe être, soit après une proposition débutant par *ce qui, ce que, celui qui, celle qui*, soit après le sujet réel, qu'il redouble, quand le sujet réel est après le verbe être.

Ex. : *Ce qui m'attend maintenant* **c'est** *la mort* (*sujet réel*). *Celui qui m'a trahi,* **c'est** *vous* (*sujet réel*). *La vertu,* **c'est** *ce qu'il y a encore de plus sage.*

4° Dans la locution *c'est... que, c'est... qui*, pour donner plus de force à l'idée.

Ex. : **C'est** *mon cœur* **que** *vous brisez.* **C'est** vous *qui en souffrirez le premier.*

5° Dans les locutions *c'est que, est-ce que, serait-ce que, ce n'est pas que.*

186. Ceci, cela. — On écrit *ceci, cela*, en un seul mot, sauf dans les formules interrogatives telles que : Qu'est-*ce ci*? Qu'est-*ce là*?

Cela donne, par contraction, *ça* fréquent dans le langage familier.

Ceci sert souvent à marquer ce qui suit, ou un objet voisin, *cela* ce qui précède ou un objet plus éloigné.

3° Pronoms relatifs ou conjonctifs

187. Antécédent. — Le pronom conjonctif doit toujours avoir un *antécédent* exprimé ou sous-entendu. Le *pronom conjonctif* et son *antécédent* sont toujours dans des propositions différentes.

188. Que, peut être : 1° Attribut : Malheureux que je suis ; tu n'es pas ce **que** tu *parais.*

2° Complément direct d'objet : Les *fleurs* **que** vous m'avez *données*.

3° Complément de circonstance : c'est *de lui* **que** *je parle*, c'est *pour toi* **que** je me suis *dérangé*.

C'est parfois un *pronom adverbial* : *C'est* **ici que** (*où*) *je veux rester. C'est là* **que** (*où*) *je vais. Du temps* **que** (*où*) *j'étais jeune.*

On peut considérer comme un gallicisme l'expression : *C'est que...*

189. — Il y a lieu de signaler les locutions *qui... qui* signifiant : *les uns... les autres.*

Ex. : *Ils s'enfuyaient tous à la fois,* **qui** *par la porte,* **qui** *par la fenêtre,* **qui** *par la cheminée.*

Signalons aussi la locution : *c'est à qui* :

Ex. : *Ils y mettent tous de la mauvaise volonté,* **c'est à qui** *ne payera pas.*

Et *qui que, quoi que* :

Ex. : **Qui que** *vous soyez...* **quoi que** *vous fassiez...*

190. Lequel. — Quand on parle des animaux ou des choses, on emploie *lequel, laquelle, les quels* au lieu de *qui* :

Ex. : *Le* **chien auquel** *vous avez fait couper les oreilles* (*et non* : **à qui**).

Toutefois les poètes emploient *à qui* de préférence.

191. Dont et d'où (*pronoms adverbiaux*). — On hésite dans certains cas entre *dont* et *d'où*. Quand doit-on employer l'un, et quand doit-on employer l'autre ?

Dont indique l'origine, la descendance ; *d'où* indique une idée de lieu, de séparation matérielle, de sortie, de résultat, de conséquence :

Ex. : *Les dieux* **dont** *il descend... Le pays* **dont** *il est.. La ville* **d'où** *vous venez... Le trou* **d'où** *est sortie cette souris.*

4° Pronoms indéfinis

192. On. — *On* (et, par euphonie, *l'on*, après *que, si, et, où*, etc.) est, nous l'avons dit, une autre forme du substantif *homme*. Il est toujours sujet.

L'adjectif qui suit *on*, et qui logiquement se rapporte à ce pronom indéfini s'accorde en général avec l'idée représentée par ce dernier :

Ex. : *On est heureuse quand on est* **belle.**

De même pour le substantif se rapportant à *on*

Ex. : *On n'est point* **des esclaves** *pour essuyer de si mauvais traitements* (Académie).

On sert à former des noms composés : Les *on-dit*, les qu'en-dira-t-*on*.

193. Chacun. — Si *chacun* est en rapport avec un mot pluriel et qu'il doive être suivi de l'adjectif possessif, on hésite parfois, pour ce dernier, entre *son, sa, ses* et *leur, leurs*.

Mettez *son, sa, ses*, si la partie de la phrase qui précède *chacun* forme un sens complet, le complément qui suit n'étant pas indispensable au sens :

Ex. : *Il a interrogé ces hommes* **chacun** *à* **son** *tour.*

Mettez *leur, leurs*, si la partie de la phrase qui précède *chacun* n'offre pas un sens complet, c'est-à-dire quand *chacun* lui-même précède le complément direct :

Ex. : *Il a interrogé* **chacun** *à* **leur** *tour ces trois criminels. Il a engagé,* **chacun** *pour* **leurs** *qualités spéciales, ces cinq domestiques. Les hommes ont* **chacun** *leurs défauts.*

Chacun a un féminin, *chacune*, mais n'a pas de pluriel.

Ne dites pas : Ils coûtent 5 francs *chaque*, mais : *chacun*.

194. L'un l'autre. — Quand les pronoms *l'un l'autre* entrent dans une phrase, le premier remplit la fonction de sujet, le second celle de complément.

Ex. : *Ils se découragent* **l'un l'autre.**

Entendez :

Ils se découragent ; **l'un** *décourage* **l'autre.**

Dans ce cas, on ne doit jamais placer la conjonction *et* entre les deux pronoms.

On dit de même :

Ils se découragent **les uns les autres.**

195. Quiconque. — *Quiconque* est du masculin, à moins que le genre féminin ne soit nettement indiqué par le sens général de la phrase.

Ce *pronom* est sujet à la fois de deux propositions différentes, ou sujet de l'une et complément de l'autre. Il joue donc le rôle de *pronom double* :

Ex. : **Quiconque** *refuse de nous obéir, porte la conséquence de son entêtement* (*sujet double*)... *Je donnerai un démenti formel à* **quiconque** *osera le prétendre* (*complément et sujet*).

On construirait ces phrases de la même façon avec le pronom *qui*.

Le Verbe

I. RAPPORT DU VERBE AVEC SON SUJET

196. — Tout verbe qui est à un mode personnel, autre que l'impératif, a un sujet exprimé ou sous-entendu.

Réciproquement la présence d'un sujet dans la phrase suppose celle d'un verbe exprimé ou sous-entendu.

Quand le sujet est sous-entendu, il faut qu'il ait été exprimé dans une proposition précédente comme sujet d'un autre verbe :

Ex. : *L'homme naît, souffre et meurt. — L'attelage suait, soufflait, était rendu.* (La Fontaine.)

Dans ce cas, on dit qu'un même nom sert de sujet à plusieurs verbes.

On doit répéter le pronom sujet quand le temps des verbes change : *Il arrive, et à peine arrivé, il se mit au travail* ; et non pas : Il arrive et, à peine arrivé, se mit au travail.

Le verbe peut être sous-entendu, mais il faut qu'il ait été exprimé dans une autre proposition :

Ex. : *Je vous connais aussi bien que* **lui** (*lui = il, sous-entendez : qu'il* **vous connaît**).

Un verbe peut avoir plusieurs sujets réunis ou non par la conjonction *et* :

Ex. : **Le père** *et* **le fils** *sont de même taille.*

197. Accord. — Le verbe à un mode personnel s'accorde en nombre et en personne avec son sujet :

Ex. : *Je* **viendrai.** *Nous* **viendrons.** *Le chat* **miaule.** *Les chats* **miaulent.**

198. Accord du verbe avec plusieurs sujets. — Lorsque le verbe a plusieurs sujets réels, il se met généralement au pluriel :

Ex. : **L'eau et le feu sont** *ennemis.* **Le télégraphe, le téléphone, l'éclairage électrique sont** *des inventions du* XIXe *siècle.*

199. Exceptions. — Tous les sujets étant de la troisième personne, le verbe ne s'accorde qu'avec le dernier sujet :

1° Si l'un des sujets exclut l'autre :

Ex. : *Il faut que* **l'un** *ou* **l'autre meure.**

Cependant sans qu'il y ait exclusion on dira de préférence : **l'un ou l'autre** *viendra.*

2° Si les deux sujets désignent le même objet ou la même personne :

Ex. : *Quand le* **prince** *des pasteurs et le* **pontife** *éternel* **apparaîtra.** (Bossuet.)

3° Si les sujets sont à peu près synonymes et ne sont destinés, en quelque sorte, qu'à s'expliquer les uns les autres :

Ex. : **Sa grâce, sa douceur, son charme** *lui* **attira** *toutes les sympathies.*

4° S'ils sont disposés par gradation et que le dernier exprimant l'idée avec plus de force résume ou fait oublier les autres.

Ex. : **Un oiseau** *qui s'envole,* **une feuille** *qui tombe,* **un souffle, un rien suffit** *à l'effrayer.*

Ex. : *Femmes, moines, vieillards,* **tout était** *descendu*

(La Fontaine.)

5° On dira de préférence : **ni l'un, ni l'autre ne viendra,** bien qu'on dise : **ni la richesse, ni la gloire ne font** *le bonheur.*

200. Accord avec un sujet collectif. — Si le sujet est un nom collectif suivi d'un complément déterminatif, tel que : *une foule de gens, un troupeau de bœufs,* etc., le verbe s'accorde soit avec le collectif lui-même, soit avec son complément déterminatif, selon l'idée qu'on attache à l'expression.

Ex. : **Une multitude d'oiseaux forme** *comme un nuage au ciel.* **Une multitude de curieux ont** *envahi le champ de manœuvres.*

Après les collectifs : *la plupart, le plus grand nombre,* etc., après les adverbes, — véritables adjectifs indéfinis, — *beaucoup, peu, moins, assez, trop,* etc., le verbe se met toujours au pluriel.

Peu de gens... ont *le don d'agréer infus avec la vie.*

(La Fontaine.)

Plus d'un veut le verbe au singulier.

201. — Quand deux mots peuvent être l'antécédent du pronom relatif sujet, l'accord se fait selon les intentions : *C'est* **l'un des hommes qui a eu — ou qui ont eu —** *le plus de mérite.*

202. Accord avec plusieurs sujets de personnes différentes. — Si les sujets ne sont pas tous de la troisième personne, le verbe se met toujours au pluriel. Il se met à la personne des sujets si ceux-ci sont de la *même* personne.

S'ils sont de personnes différentes, la première a la priorité sur les deux autres et la deuxième sur la troisième.

Ex. : **Vous, lui** *et* **moi sortirons** *demain.* **Son frère** *et* **vous êtes sortis** *ensemble.*

On résume en général les sujets par un pronom personnel de la première ou de la deuxième personne du pluriel quand l'un d'eux est de la première ou de la deuxième personne.

Ex. : **Vous, lui,** *et* **moi, nous** *sortirons demain.* — **Son frère** *et* **vous, vous** *êtes sortis ensemble.*

203. Etre précédé de ce. — Si le verbe *être* est précédé du pronom *ce* et suivi comme sujet réel d'un *nom pluriel* ou d'un *pronom* à la troisième personne du *pluriel,* il se met lui-même à la troisième personne du pluriel :

Ex. : **Ce sont** *les* **cadets** *de Gascogne.*

(E. Rostand.)

On dira cependant : *ce* **n'est** *que* **festins** *et* **bals.**

Dans tout autre cas, le verbe demeure au singulier

Ex. : **C'est nous. C'est vous.** — *Ce qui lui manque* **c'est** *le* **courage** *et la* **patience.** Mais on dira *ce sont eux,* plutôt que *c'est eux.*

On dit toujours :

C'est deux heures *qui sonnent.* **C'est cent francs** *que je vous dois.*

Généralement aussi *être* reste au singulier dans la forme interrogative :

Ex. : *Est-ce vos amis ?*

II. — COMPLÉMENTS DU VERBE

204. *Considérés dans leur sens* les compléments du verbe sont *compléments d'objet* ou *compléments circonstanciels.* Le *complément d'objet* est celui qui désigne la personne ou la chose sur laquelle se fait sentir l'action du verbe : *je mange* **des fraises,** *je désire* **que vous partiez,** *je désire* **le voir,** *je doute* **de lui,** *il nuit à* **sa santé.**

Le complément de circonstance désigne une circonstance particulière de l'action : *je marche* **vite — vers la ville — auprès de lui — depuis longtemps,** etc., *nous partirons* **lorsqu'il sera arrivé.**

205. *Considérés dans leur forme* les compléments du verbe, qu'ils soient d'objet ou de circonstance, sont *directs* ou *indirects* selon que le sens seul les réunit au verbe ou qu'ils empruntent l'intermédiaire d'une préposition :

Complément d'objet direct ;
Complément d'objet indirect ;
Complément circonstanciel direct ;
Complément circonstanciel indirect.

206. Complément indirect et circonstanciel. — Les verbes intransitifs et les verbes passifs n'ont que des compléments circonstanciels.

Ces compléments sont généralement indirects et régis par une préposition ; il peut se faire que la préposition soit simplement sous-entendue :

Ex. : *Ils s'arrêtèrent* **un certain temps** (*entendez :* **pendant** *un certain temps*).

207. Compléments communs à plusieurs verbes. — Plusieurs verbes peuvent avoir un même complément ; mais il faut que ce complément se trouve dans le même rapport avec chacun des différents verbes :

Ex. : *Le boulanger* **prépare, cuit** *et* **vend le pain.**

Mais on ne peut pas dire : *J'ai écouté* et *j'ai répondu à cette personne* ; car *à cette personne* est un complément indirect qui ne convient pas à *écouter.* Il faut donc tourner de la manière suivante :

J'ai écouté *cette personne* et je *lui* ai répondu, en donnant à chaque verbe le complément qui lui convient.

208. Verbe ayant plusieurs compléments. — Quand un verbe a plusieurs compléments, unis par l'une des conjonctions *et, ou, ni,* l'usage veut que ces compléments aient la même forme grammaticale :

Ex. : *J'ai voulu* **prendre** *ce livre et* **l'ouvrir.** — *J'ai essayé* **de me lever** *et* **d'atteindre** *cet objet.* — *J'aime* **à plaisanter** *et* **à rire.**

Un verbe ne doit pas avoir des compléments de natures différentes. On ne doit pas dire *j'aime la plaisanterie et à rire.*

209. Pronoms compléments de verbes pronominaux. — Dans les verbes pronominaux à valeur réfléchie, le pronom régime est un complément d'objet soit direct, soit indirect : *Elle* **se** *vante* — *Elle* **se** *nuit,* (se correspond à un complément indirect).

Dans les verbes sans valeur réfléchie le pronom *se* n'est pas complément d'objet : *Il* **s'***aperçoit de son erreur* — *Il* **s'***en va, il* **se** *rit de mes menaces.*

Dans l'analyse, analyser tout ensemble le pronom se et le verbe.

III. — EMPLOI DES TEMPS DE L'INDICATIF ET DU CONDITIONNEL

210. Le présent pour le passé. — On emploie le présent pour le passé quand on veut faire comme revivre dans le présent un événement passé ou encore quand ce passé est tout proche :

Ex. : *A la porte de la salle,*
Ils entendirent du bruit.
Le rat de ville détale ;
Son camarade le suit,
Le bruit cesse, *on se retire.*

(La Fontaine.)

211. Le présent pour le futur. — Quand on veut exprimer une action future, mais qui doit avoir lieu immédiatement (futur prochain), on emploie aussi le présent de l'indicatif.

Ex. : *Je* **pars** *demain pour l'Amérique. — Attendez-moi* ; **je reviens** *dans un instant.*

212. Présent conditionnel. — Le présent s'emploie aussi pour le futur, quand on veut exprimer une condition de laquelle dépend une action ou un état exprimé par un verbe à l'indicatif futur :

Ex. : *Si tu ne* **restes** *pas, je m'en* **vais**, pour **je m'en irai.**

213. Imparfait de l'indicatif à la place du conditionnel présent. — L'imparfait s'emploie pour le conditionnel, après la conjonction *si* marquant la condition, lorsque le verbe de la proposition principale est au conditionnel :

Ex. : *Si vous* **saviez** *combien je souffre, vous ne* **seriez** *pas impitoyable.*

214. Le passé composé pour le futur antérieur. — Même remarque qu'au sujet du présent :

Ex. : *Attendez-moi* ; **j'ai fini** *dans un instant.*

215. Le futur antérieur pour le passé indéfini. — Quand on veut exprimer le doute au sujet d'un événement passé, on emploie quelquefois le futur antérieur au lieu du passé indéfini :

Ex. : *Je ne trouve pas la cause de ce déficit* : **vous vous serez** *peut-être* **trompé** *dans vos comptes.*

216. Le plus-que-parfait de l'indicatif à la place du conditionnel passé. — Même remarque qu'au sujet de l'imparfait :

Ex. : *Si vous* **aviez été** *plus prudent, cela ne vous* **serait** *pas* **arrivé.**

217. Le futur pour l'impératif. — Le futur s'emploie quelquefois avec le sens de l'impératif :

Ex. : *Tes père et mère* **honoreras.**

IV. — EMPLOI DE L'INDICATIF ET DU SUBJONCTIF

218. Indicatif ou subjonctif. — Sauf dans le sens *exclamatif* (Qu'il *soit* béni ! que le ciel vous *confonde* !), le subjonctif ne s'emploie que dans les propositions subordonnées. Mais l'indicatif lui-même peut prendre place dans une proposition subordonnée.

La distinction à faire entre les deux modes, au point de vue du sens, est la suivante :

L'indicatif s'emploie dans les propositions subordonnées toutes les fois qu'on présente un fait comme *positif, certain*:

Ex. : *Je sais que vous* **êtes** *riche. Je prétends que vous* **passez** *tous les jours devant ma porte ; je vous* **ai vu.**

Le subjonctif s'emploie toutes les fois qu'on présente un fait comme *douteux, indéterminé, soumis à une restriction quelconque* :

Ex. : *Je ne pense pas que vous* **soyez** *riche. — Je prétends que vous* **sachiez** *qui je suis.*

Ainsi une même phrase change de sens suivant qu'on la tourne par l'indicatif ou par le subjonctif :

Ex. : *Je ne crois pas que vous* **êtes** *riche (je suis sûr que vous ne l'êtes pas). Je ne pense pas que vous* **soyez** *riche. (Vous êtes peut-être riche ; mais, pour moi, j'en doute.)*

219. Subjonctif. — On emploie toujours le subjonctif :

1° Après les verbes *douter, désirer, craindre, il faut, il importe, il est nécessaire, il est juste, il est utile, il est possible, il est convenable,* et tous les verbes qui expriment le doute, l'incertitude :

Ex. : *Je* **doute** *que vous* **réussissiez.** — *Il* **faut** *que vous* **partiez.** — *Il est* **juste** *qu'il soit* **récompensé.**

2° Après les locutions conjonctives :

afin que — à moins que — avant que — bien que — de crainte que — de peur que — en cas que — encore que — jusqu'à ce que — loin que — pour peu que — pour que — pourvu que — quoique — sans que — si peu que — soit que — supposé que.

Ex. : *Approchez* **afin qu'***on vous* **voie.** — *Il* **restera jusqu'à ce que** *nous* **soyons partis.**

220. Correspondance des temps. — Pour déterminer le temps du subjonctif qui convient à la proposition subordonnée, il faut chercher à quel temps de l'indicatif ou du conditionnel serait le verbe si l'on employait l'un de ces derniers modes au lieu du subjonctif. On met alors le verbe au temps du subjonctif correspondant.

La correspondance des temps est la suivante :

Le présent du subjonctif correspond au présent et au futur de l'indicatif ; — l'imparfait du subjonctif à l'imparfait et au passé simple de l'indicatif, au présent et au futur du conditionnel ; — le passé du subjonctif au passé composé et au futur antérieur de l'indicatif ; — le plus-que-parfait du subjonctif au plus-que-parfait de l'indicatif et au passé du subjonctif...

Ex. : *Il m'importe peu que vous* **partiez** *(présent). (Si vous* **partez** *(présent), cela m'importe peu.) — Je doute que vous* **partiez demain.** *(Je ne crois pas que vous partirez demain.) — Je voudrais que vous* **guérissiez.** *(Si les choses se réalisaient comme je veux, vous guéririez demain.)*

V. — CONDITIONNEL

221. Conditionnel exclamatif. — Le conditionnel s'emploie quelquefois dans des phrases exclamatives exprimant l'étonnement, l'indignation :

Ex. : *Quoi !* **j'irais** *me livrer à mes ennemis ! Et* **quand cela serait,** *qu'y* **aurait-il** *de changé ?*

222. Conditionnel futur. — Le conditionnel présent prend quelquefois le sens d'un futur dubitatif :

Ex. : *Il consent aujourd'hui ; je ne sais s'il* **consentirait** *demain.*

Il joue aussi le rôle de futur passé ; c'est-à-dire qu'il peut exprimer un état ou une action passée actuellement mais qui était future par rapport à un fait passé :

Ex. : *Je croyais qu'il* **sortirait.** *Je savais qu'il* **viendrait.**

Le conditionnel sert pour atténuer une affirmation : par doute ou par politesse : on *croirait* l'entendre — je *désirerais* vous voir.

VI. — PARTICIPE.

223. On appelle *gérondif* le participe présent précédé de *en* ; il est toujours verbe et invariable.

Ex. : *Ils se quittèrent en* **riant.**

224. Participe présent et adjectif verbal. — L'adjectif verbal est un adjectif qualificatif dérivé du verbe, mais qui n'a *rien* de la nature du verbe L'ad-

jectif verbal s'accorde en genre et en nombre avec le nom qu'il qualifie, tandis que le participe présent est invariable ; le premier prend les formes *ant, gant,* calquées sur le latin, le second les formes *ant, quant, guant* formées de l'infinitif.

Ex. : *Ce travail* **fatiguant** (*participe*) *mes yeux, je ne puis m'y livrer. — Je ne puis me livrer à un travail* **fatigant** (*adjectif verbal*).

Pour distinguer l'adjectif verbal du participe présent, il faut se dire : Y a-t-il indication d'une action ou d'un état passager ? On est en face d'un participe présent. Y a-t-il qualification, manière d'être permanente ? On est en face d'un adjectif verbal. De plus, l'adjectif verbal ne peut avoir de complément direct.

RÈGLES D'ACCORD DU PARTICIPE PASSÉ.

225. Participe passé employé seul ou avec l'auxiliaire être. — Le participe passé, employé seul ou avec l'auxiliaire être, est un véritable adjectif et comme tel, il s'accorde en genre et en nombre avec le nom auquel il se rapporte.

Ex. : *Ils regardaient leurs temples* **effondrés.** — *Cette femme a été très* **éprouvée.**

226. Participe passé conjugué avec l'auxiliaire avoir. — Le participe passé conjugué avec avoir s'accorde avec son complément d'objet direct s'il en est précédé ; il reste invariable dans tous les autres cas :

Ex. : *Montrez-moi la lettre* **que** *vous avez* **écrite** (*accord avec* **que** = *lettre*). — *Vous avez* **écrit** (*invariable*) *une lettre. — La mer est agitée, mais je l'ai* **vue** (*accord avec* **l'** = *mer*) *encore plus forte.*

227. — La règle est donc très simple : avec l'auxiliaire *être*, chercher le sujet ; avec l'auxiliaire *avoir*, chercher le complément d'objet direct ; mais cela, sans se poser de question *qui, quoi*, qui pourraient entraîner spontanément une réponse inexacte ; il faut réfléchir.

CAS PARTICULIERS.

228. — Les exceptions à ces deux règles ne sont qu'apparentes.

Les verbes intransitifs conjugués avec *avoir* n'ont jamais de complément direct et, par conséquent, leur participe passé est toujours invariable. Il ne faut d'ailleurs pas confondre un complément circonstanciel à forme elliptique, dans lequel la préposition est sous-entendue, avec un complément direct :

Ex. : *On doit considérer comme perdus* **les jours qu'***on a* **vécu** *dans l'oisiveté.*

Vécu ne s'accorde pas avec *qu'* mis pour *les jours*, car ce pronom représente en réalité le complément circonstanciel *pendant lesquels.*

229. Verbes tantôt transitifs, tantôt intransitifs. — Certains verbes habituellement intransitifs prennent quelquefois le sens des verbes transitifs. Ils s'accordent dans ce dernier cas suivant la règle :

Ex. : *La femme* **que** *j'ai pleurée...* (*sens transitif*). — *Combien d'années j'ai pleuré* (*sens intransitif*). — *Que de tortures j'ai souffertes* (*sens transitif*). — *Les jours que j'ai souffert m'ont paru des siècles* (*sens intransitif* : *entendez* : *pendant lesquels j'ai souffert*).

Valoir et *peser* sont transitifs ; on met selon le sens :

Ex. : *Cette maison ne vaut plus les trente mille francs qu'elle a valu. — Cet homme ne pèse plus les cent kilos qu'il a pesé.*

Mais, par contre, ces verbes sont transitifs s'ils signifient, le premier, *procurer, faire obtenir, produire,* et le second, *faire une pesée* :

Ex. : *La richesse que votre persévérance et votre courage vous ont* **value.** — *Je sais exactement le poids de cette* **masse** *de fer, je* **l'***ai* **pesée** *ce matin.*

Courir est transitif quand il signifie *encourir* : *les dangers que j'ai* **courus** : autrement il est intransitif.

Coûter, jadis transitif et intransitif, est considéré aujourd'hui par l'Académie comme intransitif :

Les peines que votre éducation m'a **coûté.**

230. Participe passé suivi d'un infinitif. — Quand le participe passé est suivi d'un infinitif, il faut se garder de confondre le complément direct de l'infinitif avec un complément du participe passé :

Ex. : *La romance* **que** *j'ai entendu* **chanter.** — *La femme* **que** *j'ai* **entendue** *chanter.*

Dans le premier cas le sujet est passif ; dans le second actif :

La femme chantait ; je *l'*ai entendue.

Quand la différence de sens est douteuse, le participe peut toujours rester invariable.

Par contre, quand il n'y a pas danger d'équivoque on peut faire ou ne pas faire l'accord. *Je les ai vu venir* ou *vus venir sur la route.*

Fait, participe passé, suivi d'un infinitif est toujours invariable, car le complément direct ne se rapporte jamais à lui :

Ex. : *Les œufs que j'ai* **fait** *acheter... La femme qu'il a* **fait** *entrer.*

L'infinitif peut être sous-entendu :

Ex. : *il n'a pas eu la patience qu'il aurait* **dû** (*sous-entendu* : **avoir**).

231. En, partitif, complément direct. — Lorsque le complément direct est représenté par le pronom *en* pris dans le sens partitif, le participe passé reste invariable. C'est du moins l'usage général (cependant quelques auteurs admettent l'accord) :

Ex. : *J'ai cueilli plus de cerises que vous n'***en** *avez mangé.*

232. Verbes à forme impersonnelle. — Le participe reste invariable.

Ex. : *Les incidents* **qu'il y a eu** *à cette réunion, les orages qu'***il a fait** *dans la région.*

233. Complément direct collectif. — Les remarques que nous avons faites à propos de l'accord du verbe avec un sujet collectif, s'appliquent au complément direct :

Ex. : **La multitude** *de soldats* **que** *j'ai* **vue.** — *La foule* **des hommes que** *j'ai* **vus.**

234. Participe passé des verbes pronominaux. — L'auxiliaire *être* qui sert à la conjugaison du verbe pronominal y est mis pour l'auxiliaire *avoir*. Le participe passé des verbes pronominaux suit donc la règle du participe passé conjugué avec avoir. Ceci étant posé, l'accord du participe, dans ce cas particulier, ne présente aucune difficulté.

Nous avons vu que le pronom régime qui accompagne le verbe pronominal pouvait être tantôt complément direct, tantôt complément indirect ; dans le premier cas, le participe s'accorde avec lui ; dans le second cas, il ne s'accorde pas avec lui, ce qui ne l'empêche pas parfois de s'accorder avec un autre complément direct :

Ex. : *Ils* **se** *sont* **assemblés** (*entendez* : *ils ont assemblé* **eux**). — *Ils* **se** *sont* **querellés.**

Ils se sont **rappelé** *cet événement* (*entendez* : *ils ont rappelé* **à eux** *cet événement*).

*Les événements qu'*ils se sont **rappelés** (*rappelés* s'accorde avec son complément direct *que*, qui remplace *événements*).

Ils se sont **assuré** *mutuellement de leur amitié* (entendez : ils ont assuré mutuellement l'un *à* l'autre de

leur amitié). *Ils se sont* **assurés** *que vous étiez sorti* (entendez : ils ont assuré eux, etc.).

Dans les verbes *se douter, se convaincre, se prévaloir, s'en aller,* le pronom régime est en général complètement direct :

Ex. : *Elle s'est* **doutée** *que vous alliez sortir.* (*Entendez : elle a mis* **elle** *en doute sur cela que...*). — *Elle s'en est* **allée**. (*Elle a mis* **elle** *en marche pour partir*).

En fait : le participe passé du verbe pronominal se met au même genre et au même nombre que le sujet du verbe sauf si le second pronom n'est pas complètement d'objet direct ; dans ce dernier cas le participe passé reste invariable à moins qu'il n'y ait avant lui un autre mot qui soit un complément direct.

Cependant *se rire, se plaire* sont toujours invariables.

L'Adverbe

DE LA NÉGATION.

235. — La négation proprement dite est *ne* :

Ex. : *Je* **ne** *veux voir personne.* — *Je* **ne** *suis pas chez moi.*

236. **Pas, Point** etc. — Ces deux mots et d'autres comme : goutte, maille, mie servent à compléter la négation *ne*. Ce sont les substantifs *pas* (un pas) et *point* (un point). *Je n'irai pas* signifie donc *je ne ferai pas un pas pour y aller ; je n'irai point, je n'avancerai pas d'un point.*

Ex. : *Il* **ne** *lit* **pas**. (Il *ne lit pas en ce moment.*) *Il ne lit* **point**. (*Il ne lit jamais*).

Point est plus énergique que *pas*.

237. **Ne** *employé seul.* — *Ne* s'emploie assez souvent seul :

Ex. : *Je* **ne** *cesse de pleurer.* — *Y a-t-il dans cette lettre un mot que je* **n'**aie *lu vingt fois ?* — *Vous écrivez mieux que vous* **ne** *parlez.*

Ne... que est une locution adverbiale employée dans le sens de seulement :

Ex. : *Je* **ne** *veux* **qu'**une *pomme.*

238. **Ne** *après certains verbes et certaines locutions.* — On met *ne* après les verbes exprimant un empêchement à moins qu'ils ne soient employés dans un sens négatif.

Ex. : **J'éviterai** *qu'il* **ne** *sorte.* — *Je* **n'**empêcherai *pas* **qu'**il *sorte.*

Il faut omettre *ne* après *sans que;* il peut s'omettre après *à moins que, avant que;* mais il faut l'employer après *que* quand celui-ci tient la place de l'une de ces deux dernières expressions :

Ex. : Avant que vous le disiez. — Avant qu'il vienne et que vous *ne* le disiez.

Prendre garde veut *ne* dans la proposition suivante :

Ex. : **Prenez garde** *qu'il* **ne** *tombe.* (Entendez : *empêchez qu'il ne tombe*).

Dans les mêmes conditions, on emploie *ne* après les verbes ou les substantifs exprimant la crainte dans le sens *affirmatif* :

Ex. : *J'ai peur qu'il* **ne** *vienne.* — *Je crains que vous* **ne** *tombiez.* — *Je ne crains pas qu'il vienne.*

On met *ne* après les verbes et les substantifs exprimant le doute, la négation, et les verbes impersonnels *il tient à, il s'en faut,* quand ces mots font partie d'une proposition *négative* ou *interrogative* :

Ex. : *Je ne doute pas qu'il* **ne** *vienne. Doutez-vous qu'il* **ne** *vienne ? Il ne tient pas à vous que je* **ne** *sois ruiné.*

Mais quand on veut présenter une chose comme certaine, on peut supprimer *ne* :

Ex. : *Doutez-vous que je vienne ? Ne doutez pas qu'il réussisse.*

Du reste, l'usage admet la suppression de *ne* dans les cas visés ci-dessus et aussi après : craindre, désespérer, avoir peur, ne pas douter, de peur que, défendre, empêcher, éviter, ne pas nier, ne pas disconvenir, peu s'en faut que, etc....

La Préposition

239. **Répétition.** — Les prépositions *à, en, de,* doivent se répéter avant chaque complément :

Ex. : *Il a nettoyé les murs* **de** *la chambre et* **de** *la salle à manger.* — *Il a été* **à** *Paris et* **à** *Lyon.* — *C'est un coffre* **en** *bois et* **en** *fer.*

Pour les autres prépositions, la répétition n'est pas obligatoire, cependant on la fait pour donner plus d'énergie à la phrase ou pour éviter l'obscurité :

Ex. : *Vous devez avoir du respect* **pour** *vos parents qui vous ont élevé et* **pour** *vos grands-parents* (*la suppression du second* **pour** *rendrait la phrase obscure.*

Exception. — La préposition ne se répète jamais devant des noms formant une expression indivisible, comme par exemple devant un titre de roman :

Ex. : *J'ai une édition de* **Paul et Virginie.**

Sans se répète généralement, à moins qu'il ne soit remplacé par le mot *ni* :

Ex. : *Il est* **sans** *abri,* **sans** *pain,* **sans** *argent.* — **Sans** *feu,* **ni** *lieu.*

La Conjonction

240. **Et.** — La conjonction *et* sert à réunir des mots ou des membres de phrase qui remplissent la même fonction dans la phrase :

Ex. : *Le* **roi** *et le* **serf** *sont également soumis aux lois fatales du destin.* (Deux sujets réunis par et). — *J'ai vu* **votre sœur et votre mère.** (Deux compléments directs). — *Il m'a dit que vous étiez fâché* **et** *que vous ne vouliez plus me voir* (et réunit deux propositions subordonnées jouant le rôle de compléments directs de la principale).

Dans les énumérations, on n'emploie généralement *et* qu'avant le dernier terme de l'énumération :

Ex. : *Il harangua tout le troupeau.*

Les chefs, la multitude **et** *jusqu'au moindre agneau.*

(LA FONTAINE.)

Quelquefois on le supprime entièrement : soit que la relation des idées apparaisse clairement soit qu'on veuille donner de la vivacité et de l'énergie au discours.

Ex. :

Rien ne la contentait, rien n'était comme il faut ;
On se levait trop tard, on se couchait trop tôt ;
Puis du blanc, puis du noir, puis encore autre chose.
Les valets enrageaient ; l'époux était à bout ;
Monsieur ne songe à rien, monsieur dépense tout,
Monsieur court, monsieur se repose.

(LA FONTAINE.)

Et ne doit pas se mettre avant les mots *puis, ensuite, après,* avec lesquels cette conjonction formerait superfétation.

241. **Ni.** — *Ni* sert à joindre deux propositions principales négatives. Dans ce cas la dernière proposition est elliptique.

Ex. : *Il n'entend* **ni** *ne parle.*

Si plusieurs propositions principales s'enchaînent, la dernière seule est précédée de *ni* ; toutes, sauf la première, sont elliptiques :

Ex. : *Il ne boit, ne mange* **ni** *ne dort.*

Cette conjonction remplace aussi *et ne pas*, dans tous les cas où il faudrait employer *et* si le sens était affirmatif :

Ex. : *Il ne veut pas de récompenses* **ni** *d'honneurs. — Je ne suis pas laid* **ni** *sot...*

242. Parce que. — Il ne faut pas confondre *parce que*, conjonction, qui s'écrit en deux mots et *par ce que*, en trois mots, expression dans laquelle *par* est une préposition, *ce* est pronom démonstratif et *que*, pronom relatif.

Ex. : *Je vous ai dit cela,* **parce** *que je croyais devoir le faire (conjonction). — J'ai compris* **par ce que** *vous m'avez dit que j'avais eu tort d'agir ainsi.* (Entendez : **par la chose** que vous m'avez dite).

243. Quoique. — Il ne faut pas confondre, *quoique*, conjonction, qui s'écrit en un seul mot, et *quoi que*, formé de deux pronoms relatifs, signifiant *quelle que soit la chose que* :

Ex. : **Quoiqu'***il ait commence tard à s'instruire, c'est un véritable savant (conjonction).* — **Quoi que** *vous disiez,* **quoi que** *vous fassiez, je ne reviendrai pas sur ma décision (pronom indéfini).*

244. Quand. — Ne pas confondre *quand* et *quant. Quand* est toujours *conjonction ; quant* est toujours suivi de *à* et forme avec ce mot une *locution prépositive*, signifiant pour, à l'égard de, en ce qui concerne, etc. :

Ex. : **Quand** *vous rentrerez, je sortirai (conjonction).* — **Quant à** *moi, je suis prêt (préposition).*

245. Que. — Cette conjonction a un grand nombre d'usages, en dehors de son emploi grammatical régulier, qui est de réunir, à la principale, une proposition subordonnée complément direct.

On l'emploie à la place des conjonctions : *comme, lorsque, quand, si* et des conjonctions composées terminées par le mot *que*, pour éviter la répétition, ou pour abréger le discours :

Ex. : *Quand vous êtes rentré de la campagne et* **que** *(quand) vous m'avez écrit... — Si vous étiez complaisant et* **que** *(si) vous eussiez à cœur de faire plaisir aux gens, vous feriez ce qu'on vous demande. — Il y a dix ans* **qu'** *(depuis que) il est parti.*

On l'emploie quelquefois, sous une forme explétive, pour donner plus de force au discours, dans une argumentation :

Ex. : **Que** *si M. K. M. m'objecte... je lui répondrai...*

Que entre dans un certain nombre de gallicismes :

Ex. : **Si** *j'étais* **que** *de vous.* — **C'est** *une belle chose* **que** *de...* — **C'est** *se moquer* **que de.....**

Que n'est du reste pas nécessaire dans ces locutions.

Cette conjonction sert encore à unir les termes d'une comparaison :

Ex. : *Cette femme est plus petite* **que** *moi. (C'est une faute grossière d'employer dans ce sens la conjonction* **comme.**)

Ponctuation

246. Signes de ponctuation. — Les membres de phrase et les phrases sont séparés par des signes de ponctuation, destinés : 1° soit à faciliter la lecture et la compréhension ; 2° soit à marquer un mouvement du sentiment.

Les signes de clarté sont : *la virgule, le point et virgule, les deux points, le point, le tiret, les guillemets, la parenthèse* ; les signes de sentiment sont : *le point d'interrogation, le point d'exclamation, les points de suspension.*

247. La virgule (,) marque une légère suspension.

Elle sépare les mots de même nature, remplissant la même fonction dans la phrase et qui ne sont pas réunis par une conjonction :

Ex. : *J'ai vu mon père, ma mère et mon frère. — Va, cours, vole et nous venge.*

On l'emploie s'il y a plus de 2 conjonctions de coordination :

Elle sépare les mots mis en apostrophe, les compléments circonstanciels un peu étendus :

Ex. : *Sire, répond l'agneau, que Votre Majesté ne se mette pas en colère.* (LA FONTAINE.)

J'ai vu, n'en doutez point, ses larmes se répandre.
(RACINE.)

Tu veux m'assassiner demain, au Capitole,
Pendant le sacrifice, et ta main, pour signal,
Me doit, au lieu d'encens, donner le coup fatal.
(CORNEILLE.)

Elle sépare les unes des autres les prépositions juxtaposées, les intercalées des principales, les principales et les subordonnées entre elles ou les unes des autres.

248. Le point et virgule (;) marque une pause plus longue ou plus accentuée que la virgule. Ce signe sépare les diverses parties d'une même idée, des phrases qui font partie d'une énumération ou des propositions subordonnées se suivant sous forme d'énumération :

Ex. :

Il faut, autant qu'on peut, obliger tout le monde :
On a souvent besoin d'un plus petit que soi.
De cette vérité deux fables feront foi ;
Tant la chose en preuve abonde.
(LA FONTAINE.)

Il faut qu'en cent façons, pour plaire, il se replie ;
Que tantôt il s'élève et tantôt s'humilie ;
Qu'en nobles sentiments il soit partout fécond ;
Qu'il soit aisé, solide, agréable et profond.
(BOILEAU.)

249. Les deux points (:) annoncent les paroles prononcées par quelqu'un, ou une proposition qui explique, développe ou résume ce qui précède :

Ex. : *Le chêne un jour dit au roseau :*
Vous avez bien sujet d'accuser la nature.
(LA FONTAINE.)

Il y a quatre points cardinaux : le nord, le sud, l'est, l'ouest.

. . . . . : c'est ce que je lui ai dit.

. . Vous avez jusqu'ici
Contre leurs coups épouvantables
Résisté sans courber le dos :
Mais attendons la fin.
(LA FONTAINE.)

On ne met de majuscule après les deux points que si on commence une citation.

Ex. : *Jupiter dit un jour :* **Que** *tout ce qui respire. . .*

250. Le point marque la fin d'une phrase.

Ex. : *Il y a plus d'une manière de connaître un homme. Je prends, par exemple, deux ou trois êtres que je vois à peu près tous les jours.*
(MAURICE MAETERLINCK.)

251. Le tiret (—), sert dans un dialogue, à indiquer un changement d'interlocuteur :

Ex. :

Chemin faisant, il vit le cou du chien pelé :
Qu'est-ce-là ? lui dit-il. — Rien. —

Quoi ? rien ! — Peu de chose.
Mais encore ? — Le collier dont je suis attaché
De ce que vous voyez est peut-être la cause.
(La Fontaine.)

Il sert à mettre en valeur, au cours de la phrase, des mots ou des idées accessoires :

« *Il faut, par quelque plan terrible et merveilleux,*
— Tu n'es pas, que je pense, un homme scrupuleux, —
Me venger ! » (V. Hugo.)

252. Les guillemets (« ») s'emploient au commencement et à la fin d'une citation :

Ex. : « *Les hommes marchent par des chemins divers ; qui les suit et les compare verra naître d'étranges figures* », *dit un moraliste.*

253. La parenthèse ( ) sert à renfermer des mots qui ne font pas partie du reste de la phrase, pour éviter qu'ils n'obscurcissent le discours :

Ex. :
Un songe (me devrais-je inquiéter d'un songe ?)
Entretient dans mon cœur un chagrin qui le ronge.
(Racine.)

254. Le point d'interrogation (?) **et le point d'exclamation** (!) remplacent le *point* à la fin des phrases interrogatives ou exclamatives :

Ex. : *Qu'allait-il faire ? — Que le diable l'emporte !*

Le point d'exclamation suit aussi les locutions exclamatives ou les interjections dans le cours même de la phrase :

Ex. : *Eh bien ! êtes-vous prêt ?*

On ne met de majuscule après ce signe de ponctuation que s'il a réellement la valeur d'un point.

255. Les points de suspension (...) remplacent des mots supprimés, indiquant que la phrase est inachevée ou suspendue.

Ex. :
J'ai vu... sans mourir de douleur,
J'ai vu... (siècles futurs, vous ne pourrez le croire),
Ah ! j'en frémis encore de dépit et d'horreur,
J'ai vu... mon verre plein et je n'ai pu le boire
(Scarron.)

EXPRESSIONS VICIEUSES

Erreurs ou abus de la langue ou de la plume

CONFUSION DES GENRES

(Voir *Grammaire*, liste de mots masculins et de mots féminins

On dit, on écrit souvent au féminin :

Une chrysanthème, une éclair, une emplâtre, une belle entrecôte, une grande hôtel, une incendie, des bonnes légumes, une obélisque.

Ces mots sont du masculin.

On dit, on écrit souvent au masculin :

Un alcôve, un grand antichambre, un atmosphère malsain, un dinde, un énigme, un horloge, un oasis, un office (annexe de la cuisine), un orbite.

Ces mots sont du féminin.

DÉFORMATION DES MOTS

On dit :	Il faut dire :
Aboutonner.	Boutonner.
Aéromètre.	Aréomètre.
*Aréo*plane, aréonaute, aréostat.	Aéroplane, aéronaute, aérostat.
Apparution.	Apparition.
Babouines.	Babines.
Cac*a*phonie.	Cacophonie.
Il est mort de la cangrène gazeuse.	Gangrène.
De la carbon*ade*.	*Du* carbon*ate* de soude.
Il est d'une forte *corporence*.	Corpulence.
Un dil*emne*.	Un dil*emme*.
S'éch*ig*ner.	S'échiner.
Ek cœtera.	*Et* cœtera.
Un *lévier*.	Un évier.
Ec*h*anger du linge.	Essanger.
C'est un *faign*ant.	Un *fainéant*.
A la bonne *fl*anquette.	*Fr*anquette.
*Hyno*ptiser.	*Hypno*tiser.
Ca vous fait *maron*ner.	Mar*mon*ner.
Pantom*ine*.	Pantom*ime*.
Rénum*é*rer.	*Rémun*érer.
Rass*é*nérer.	Rass*é*rener.
Se *revenger*.	Se *revancher*.
Un *trois pieds*.	Un trépied.

LES ERREURS ORTHOGRAPHIQUES

On écrit :	Il faut écrire :
Attrapper.	Attraper.
Interressant.	Intéressant.
Qu'il aie, que nous ayions, que vous ayiez.	Qu'il ait, que nous ayons, que vous ayez.
Qu'il soye, que nous soyions, que vous soyiez.	Qu'il soit, que nous soyons, que vous soyez.
Ceuillir, orgeuil, cerceuil, viellard.	Cueillir, orgueil, cercueil, vieillard.
Aux dépends de.	Aux dépens (à la dépense de).
Fatiguant, infatiguable, naviguable.	Fatigant, infatigable, navigable.
Je le dis par ce que je le sais.	Parce que (à cause que).
Parmis.	Parmi.
La plus part.	La plupart.
Elle est perclue de rhumatismes.	Percluse.
Quoiqu'on eût raconté de lui.	Quoi qu'on eût.
Vas (impératif).	Va.
Les classes vacqueront.	Vaqueront.

LES ERREURS SUR LA FORME ET SUR LE SENS

On dit ou l'on écrit :	Il faut dire ou écrire :
Je n'ai pas à faire à vous.	Affaire.
Agoniser d'injures.	Agonir.
C'est un objet casuel (qui peut se casser facilement).	Fragile.
Le docteur consulte de 3 à 4.	Reçoit.
C'est une affaire conséquente.	Importante.
Ce problème est difficultueux.	Difficile.
J'espère avoir réussi.	Je pense (espère se rapporte à l'avenir).
Il essaye tous les métiers.	Il s'essaye à.
Il faut mieux tenir que courir.	Il vaut.
Ce sont des gens fortunés.	Riches.
C'est une faute d'inattention.	D'attention.
Il arrive comme mars en carême.	Marée.
Il ne sait rien de neuf.	Nouveau.
Je vous promets que j'y suis allé.	Je vous assure.
Son obstination me fait rager.	Enrager.
Faites-moi le plaisir de rentrer.	D'entrer.
Il s'ensuit que.	Il résulte que.
Cela s'est produit d'un coup.	Tout d'un coup.
Je le ferai de suite.	Tout de suite.
Une tête d'oreiller.	Une taie.
Il m'a bousculé, voir même jeté à terre.	Voire (vraiment).

CONFUSION ENTRE TERMES VOISINS DE FORME

Il ne faut pas confondre :	avec :
Accident (événement inattendu et fâcheux).	**Incident** (petit événement accessoire).
Affiler (donner le fil à un tranchant).	**Effiler** (amincir comme un fil).
Affluence (grand concours de personnes vers un lieu).	**Influence** (action qu'une personne exerce sur une autre).
Anoblir (rendre noble en conférant des titres de noblesse).	**Ennoblir** (faire croître en dignité morale).
Armistice (suspension provisoire de l'état de guerre).	**Amnistie** (acte du pouvoir souverain qui efface toute une catégorie de crimes, de délits).
Coasser (pousser un cri en parlant des grenouilles).	**Croasser** (pousser un cri en parlant des corbeaux et des corneilles).
Conjecture (supposition que l'on propose pour expliquer un fait).	**Conjoncture** (situation résultant d'un concours fortuit d'événements).
Colorier (revêtir de couleurs en teinte plate).	**Colorer** (revêtir d'une certaine teinte).
Consumer (détruire peu à peu dans sa substance).	**Consommer** (amener quelque chose à la destruction en prenant la substance pour son usage).
Echarde (petit brin de bois qui pénètre dans la peau par accident).	**Echarpe** (large bande d'étoffe passée autour du corps).
Echoir (arriver par une circonstance déterminée).	**Echouer** (être arrêté par un obstacle dans une entreprise).
Eclaircir (rendre plus clair).	**Eclairer** (rendre clairement visible).
Ecorcer (dépouiller de l'enveloppe de la tige et des branches de certaines plantes).	**Ecosser** (dépouiller de l'enveloppe à deux valves qui renferme les graines des légumineuses).
Effraction (bris de clôture dans une intention criminelle).	**Infraction** (violation d'une loi).
Emigrer (quitter une région pour s'établir ailleurs).	**Immigrer** (venir s'établir dans un pays autre que son lieu d'origine).
Eminent (qui s'élève au-dessus ; à un haut degré).	**Imminent** (va survenir sans tarder).
Enduire (revêtir une surface d'une matière dont elle s'imprègne).	**Induire** (amener quelqu'un à quelque chose).
Epancher (verser largement).	**Etancher** (arrêter dans son épanchement).
Epurer (éliminer les éléments étrangers pour rendre pur).	**Apurer** (reconnaître, après vérification, l'exactitude d'un compte).
Eruption (sortie brusque de choses qui se dégagent de ce qui les contient).	**Irruption** (invasion subite et violente dans un lieu).
Evoquer (rappeler une chose oubliée).	**Invoquer** (appeler à l'aide, ou en témoignage).
Exalter (louer à un haut degré, enthousiasmer).	**Exhaler** (dégager une odeur, une vapeur ; donner libre cours à un sentiment).
Exaucer (satisfaire quelqu'un en lui accordant ce qu'il désire).	**Exhausser** (augmenter en hauteur (sens matériel).
Gradation (progrès vers un terme en passant par tous les intermédiaires).	**Graduation** (détermination sur une longueur d'une série de divisions égales).
Inculper (déclarer coupable d'un crime, d'un délit).	**Inculquer** (faire pénétrer dans l'esprit).
Infester (ravager par des courses hostiles).	**Infecter** (imprégner de germes malfaisants).
Influer (exercer une action efficace).	**Influencer** (soumettre une personne à son action).

Officiel (qui est sanctionné par une autorité constituée).	**Officieux** (avis qui est sûr sans être officiel).
Portion (part qui revient à quelqu'un dans une distribution).	**Potion** (médicament qu'on prend en boisson).
Prémices (premiers fruits, début).	**Prémisses** (premières propositions du syllogisme).
Recouvrir (couvrir de nouveau).	**Recouvrer** (rentrer en possession).
Repartir (répondre immédiatement, de vive voix).	**Répartir** (partager entre plusieurs en attribuant à chacun la part qui lui revient).
Risque (chance douteuse).	**Rixe** (querelle violente qui va jusqu'aux coups).
Suggestion (action de faire venir dans la pensée).	**Sujétion** (situation où l'on est soumis à une autorité).

ERREURS DU LANGAGE COMMUN

On dit à tort :	Il faut dire :
Au jour d'aujourd'hui.	Aujourd'hui.
Amène-toi.	Avance.
Je m'en suis accaparé.	Je l'ai accaparé.
A revoir.	Au revoir.
J'ai agi dans ce but.	Dans cette intention.
J'ai rempli mon but.	J'ai atteint mon but.
Vous faites vos *n* et vos *u* la même chose.	De la même façon.
Il a fini de causer.	De parler.
Ce que nous avons ri !	Que nous avons ri !
Le combien es-tu en classement ?	Quel est ton classement ?
Le combien est-on ?	Quel est le quantième du mois ?
Je vais me changer.	Je vais changer de vêtements.
Mon époux.	Mon mari.
En définitif.	En définitive.
Dépêchez-vous vite.	Dépêchez-vous.
Je vous demande excuse.	Je vous demande pardon.
Faites excuse.	Pardonnez-moi.
Voulez-vous me désagrafer ?	Me dégrafer.
Donne-moi-z'en.	Donne-m'en.
C'était la nuit du jour de votre arrivée.	La nuit qui suivit votre arrivée.
Il est bien éduqué.	Bien élevé.
Il faudra un long espace de temps.	Longtemps.
Avez-vous fini de me fixer ?	De me regarder fixement.
Gagner une maladie.	Contracter.
J'en deviens.	J'en viens.
La voiture a versé grâce à des pierres.	A cause de pierres.
Il jouit d'une mauvaise réputation.	Il a une mauvaise réputation.
Il vous faut une heure de temps.	Il vous faut une heure.
Tant pire pour lui.	Tant pis.
Les prévoyants de l'avenir.	Les prévoyants.
Je l'avais prévu d'avance.	Je l'avais prévu.
Oui, qu'il m'a dit.	M'a-t-il dit.
Combien que vous avez de congé ?	Combien avez-vous ?
Où que vous allez ?	Où allez-vous ?
Qu'est-ce qui a parlé ?	Qui est-ce qui, Qui a parlé ?
C'est ça que j'ai besoin.	C'est ce dont j'ai besoin.
On m'a parlé que vous aviez dit du mal de moi.	On m'a raconté.
Voilà le couteau qu'il m'a fait cadeau	Le couteau dont il m'a fait cadeau.
Quoique ça.	Malgré cela.
J'ai été ennuyé rapport à vous.	A cause de vous.
Voyons voir.	Voyons.
Regardez voir un peu.	Regardez un peu.
La viande a raugmenté.	Augmenté.
La semaine qui vient.	La semaine prochaine.
Sucrez-vous.	Prenez du sucre.
J'ai lu sur le journal.	Dans le journal.
Tant qu'à moi.	Quant à moi.
J'ai très faim.	J'ai grand faim.

LES ABUS GRAMMATICAUX

On dit ou l'on écrit :	Il faut dire ou écrire :
C'est la fête à mon père.	De mon père.
Nous étions cinq à six.	Cinq ou six.
Vous n'arriverez peut-être pas à nos âges.	A notre âge.
Il est ami avec son frère.	Ami de son frère.
Se disputer avec.	Se quereller.
Il m'a couru après.	Il a couru après moi.

On dit ou l'on écrit :	Il faut dire ou écrire :
Il a une tache après son veston.	A son veston.
La clef est après la porte.	A la porte.
Je suis furieux après vous.	Contre vous.
Demander après quelqu'un.	Demander quelqu'un.
Partir à la campagne.	Partir pour la campagne.
Se lever à bonne heure.	Se lever de bonne heure.
A force que.	A force de.
Aimer de lire.	Aimer à lire.
Alentour de.	Autour de.
Allumer de la lumière.	Faire de la lumière.
Que faisait-il avant ?	Auparavant.
Mon patron est sévère avec moi.	Envers moi.
Monter en bicyclette.	A bicyclette.
Car en effet.	En effet.
Ces fruits coûtent un franc chaque.	Chacun.
Davantage de.	Plus de.
En face la gare.	En face de la gare.
En outre de cela.	Outre cela.
De manière à ce que.	De manière que.
La démarche qu'il m'a faite faire.	Fait faire.
Je me fais forte de.	Je me fais fort de.
Malgré qu'il n'est pas.	Bien qu'il ne soit pas.
Je l'ai acheté bon marché.	A bon marché.
Moi aussi, je ne veux pas.	Moi non plus, je ne veux pas.
Non seulement cela, mais...	Cela n'est pas tout, mais...
Ni lui ni moi ne croient à cette histoire.	Ne croyons à cette histoire.
C'est là où je vais.	Que je vais.
C'est là d'où je viens.	C'est de là que je viens.
Il habite près la gare.	Près de la gare.
Puis ensuite.	Ensuite.
C'est nous deux qui seront attrapés.	Qui serons.
Prenez garde de tomber.	De ne pas tomber.
Préférer mieux.	Préférer.
C'est bien pire.	C'est bien pis.
Il est trois heures et quart.	Trois heures un quart.
Je vais promener.	Je vais me promener.
Le peu qu'il me reste.	Qui me reste.
Je m'en rappelle.	Je me le rappelle.
Il est irréprochable sous le rapport de la conduite.	Quant à la conduite.
Il faut se mettre au goût du client et non lui imposer le nôtre.	Nous mettre.
Si j'eus su, j'aurais parlé autrement.	Si j'eusse su.
Je n'avais que ce seul vêtement.	Que ce vêtement.
On me l'a remis tel que.	Tel quel.
Ce livre m'a très intéressé.	M'a vivement intéressé.
Il se montre obligeant vis-à-vis de moi.	Envers moi, pour moi.
Dans cette chambre, on y voit de moins en moins.	On voit de moins en moins.
Quand les prix sont augmentés, ils y restent.	Ils le restent.
J'apprends la bicyclette et à nager.	La bicyclette et la natation.
Je n'aime pas à ce qu'on m'ennuie.	Je n'aime pas qu'on m'ennuie.
J'ai plusieurs endroits à aller.	Je dois aller en plusieurs endroits.
Votre lettre est moins aimable que celle reçue hier.	Que j'ai reçue.
Comme de juste, comme de vrai.	Comme il est juste comme il est vrai.
Je me suis en allé.	Je m'en suis allé.
Pour ne pas que vous vous blessiez.	Pour que vous ne vous blessiez pas.
C'est un renseignement impossible à obtenir.	Qu'il est impossible de se procurer.
Occasion à profiter.	Dont il faut profiter.

DICTIONNAIRE DES SYNONYMES

(Pour faciliter la recherche des synonymes, consulter préalablement le répertoire placé à la fin du chapitre).

La Bruyère écrit : « Parmi toutes les expressions qui peuvent rendre une seule de nos pensées, il n'y en a qu'une qui soit la bonne... Elle existe, et tout ce qui ne l'est point est faible et ne satisfait pas un homme d'esprit qui veut se faire entendre. »

Le mot qui rend seul toute la pensée est **le mot propre** ; ceux qui ne la rendent qu'imparfaitement sont des **synonymes**; on appelle synonymes des mots qui se rassemblent sous une idée générale commune, mais qui en expriment des nuances diverses; ces nuances sont nécessaires pour que le mot soit propre.

A. — Certains synonymes ont une racine identique, et expriment l'idée commune que représente cette racine; mais ils diffèrent :

1° à cause du préfixe : *luire* (briller d'une lumière propre); *reluire* (briller d'une lumière d'emprunt);

2° à cause du suffixe : *arme* (instrument dont on se sert pour attaquer ou pour se défendre), *armure* (ensemble des armes de protection d'un guerrier);

3° à cause de la différence de genre : *point du jour* (instant où le jour pousse sa pointe), *point du jour* (premiers moments où les rayons du soleil éclairent le ciel);

4° à cause de la différence de nombre : *la dignité* (le respect que mérite quelqu'un), *les dignités* (les fonctions qui donnent à quelqu'un un rang éminent);

5° à cause du changement de complément après les verbes : *prétendre quelque chose* (le soutenir, l'affirmer), *prétendre à quelque chose* (y aspirer).

B. — Mais le plus souvent les synonymes ont des radicaux différents, et la ressemblance entre eux est beaucoup moins accusée. Pour saisir les nuances qui les séparent, il faut :

a) les rapprocher des mots de même famille,

b) se reporter à leur étymologie,

c) chercher à se remémorer des phrases d'écrivains consacrés dans lesquelles ils sont employés,

d) lire les textes des maîtres de la pensée et du style.

---

1. **Abaisser**, faire descendre à un rang, ou à un état moral, intellectuel, inférieurs.

Avilir, rendre vil, indigne d'estime.
Dégrader, faire descendre de la dignité ou du grade occupés, — faire descendre très bas moralement.
Humilier, rabaisser d'une manière blessante.
Rabaisser, amener ou estimer à une valeur moindre.
Ravaler, faire descendre moralement au-dessous de sa valeur.

2. **Abandonner**, laisser quelqu'un à lui-même.

Délaisser, laisser quelqu'un dans l'isolement.
Quitter, laisser là définitivement.

3. **Abattement**, état de celui qui est abattu moralement.

Accablement, état de celui qui succombe sous le poids.
Affaissement, état de ce qui fléchit sous le faix.
Langueur, abattement physique ou moral prolongé.
Prostration, état d'abattement dont on ne peut se relever.

4. **Abattre**, faire tomber quelqu'un ou quelque chose qui est debout, en donnant un ou plusieurs coups.

Détruire, défaire entièrement ce qui est établi, organisé.
Renverser, mettre à bas.
Ruiner, faire effondrer.

5. **Abnégation**, oubli volontaire de soi-même.

Altruisme, qualité de celui qui agit par affection pour autrui.
Désintéressement, qualité de celui qui n'agit pas en vue de son intérêt.
Dévouement, fait de celui qui se voue aux intérêts d'un autre.
Sacrifice, perte volontaire de ce à quoi l'on tient, en vue de quelqu'un ou de quelque chose.

6. **Abolir,** détruire une chose de manière qu'elle ne puisse renaître.

Abroger, déclarer nul ce qui avait été établi, institué.
Annuler, réduire à rien.
Casser, annuler un acte, en vertu de son autorité.
Infirmer, affaiblir dans son autorité, ou bien annuler ou réformer (droit).
Révoquer, retirer ce qu'on avait institué.

7. **Abondance,** quantité plus que suffisante de ressources.

Aisance, situation de fortune qui assure le bien-être
Opulence, déploiement d'une grande richesse.
Richesse, possession de grands biens.

8. **Abrégé,** réduction d'un écrit à un bref exposé.

Compendium, résumé de l'ensemble d'une science ou d'une doctrine.
Manuel, abrégé d'un format commode à la main.
Précis, exposé dont on a retranché ce qui n'est pas essentiel.
Résumé, exposé condensé de ce qu'on a dit ou écrit.
Sommaire, réduction brève d'idées essentielles.

9. **Accélérer,** rendre plus rapide.

Dépêcher, en finir promptement avec quelqu'un.
Expédier, terminer promptement une chose.
Hâter, faire arriver vivement.
Presser, hâter du plus qu'on peut.

10. **Accepter,** consentir à prendre ce que quelqu'un offre, présente.

Agréer, trouver à son gré, à sa convenance.
Recevoir, être l'objet d'un don, d'un envoi que l'on admet.

11. **Accompagner,** se joindre à quelqu'un pour aller ou il va.

Escorter, se joindre à une troupe qui accompagne une personne pour sa sûreté ou pour l'honorer.
Suivre, venir après quelqu'un en l'accompagnant.

12. **Accord,** union résultant d'une manière commune de penser et d'agir.

Contrat, convention revêtue d'un caractère authentique.
Convention, ce qui est établi par engagement réciproque entre plusieurs personnes.
Marché, vente, achat à prix débattu.
Pacte, convention solennelle.
Traité, écrit déterminant par articles ce qui a été stipulé entre parties.

13. **Accorder,** mettre plusieurs personnes en communauté de manière de voir, de sentir.

Raccommoder, remettre d'accord des personnes, après une brouille.
Réconcilier, amener de nouveau à s'entendre sur un point de litige.
Réunir, unir dans les mêmes vues des personnes qui s'étaient séparées.

14. **Accusateur,** personne qui signale quelqu'un comme coupable.

Délateur, dénonciateur qui agit par des motifs méprisables.
Dénonciateur, personne qui signale quelqu'un comme coupable, particulièrement à la justice.

15. **Activité,** déploiement de la puissance d'agir.

Célérité, vitesse dans l'exécution d'un acte.
Diligence, activité empressée et soutenue.
Promptitude, fait d'exécuter immédiatement et en peu de temps.
Rapidité, qualité de celui qui exécute avec une extrême vitesse.

16. **Adoucir,** rendre moins rude à la sensibilité.

Atténuer, rendre plus léger.
Mitiger, rendre moins strict.
Modérer, éloigner de l'excès.
Tempérer, modérer par quelque adoucissement.

17. **Affirmer,** déclarer fermement qu'une chose est.

Assurer, donner quelque chose pour certain.
Attester, rendre témoignage de quelque chose.
Certifier, garantir comme vrai.
Garantir, assurer sous sa responsabilité.
Soutenir, persister à affirmer contre ceux qui nient.

18. **Agriculteur,** celui qui cultive la terre.

Cultivateur, celui qui fait valoir un fonds de terre.
Colon, celui qui cultive une terre aux colonies.
Fermier, celui qui afferme une terre dont il paie généralement le loyer en nature.

19. **Aigre,** qui renferme des éléments piquants et blessants.

Acerbe, piquant et agressif.
Acre, qui a un caractère d'amertume blessante.
Amer, qui exprime l'amertume du coeur.
Apre, qui a une rudesse désagréable.

20. Aimable, qui est de nature à plaire.

Affable, qui accueille les gens avec bonté.
Civil, qui observe les convenances et les égards en usage.
Courtois, qui a une politesse recherchée.
Poli, qui a appris à observer les usages qu'on se doit en société.

21. Air, manière d'être extérieure, apparente.

Contenance, manière de se tenir vis-à-vis de quelqu'un.
Maintien, manière de se tenir qui manifeste le caractère, les habitudes.
Mine, apparence du visage.

22. Aisé, que l'on fait à l'aise, sans gêne.

Commode, qui se prête aisément à l'usage qu'on en fait.
Facile, qui se fait sans peine.

23. Aliment, substance qui sert à la nutrition.

Nourriture, ce qui fournit l'aliment à la substance de l'être vivant.
Subsistance, ce qui soutient l'existence, moyen de vivre, de se nourrir.

24. Allure, manière d'aller.

Démarche, manière de marcher.
Marche, action de poser en avant un pied, puis l'autre, pour aller dans une direction.

25. Amas, ce qui est réuni en masse.

Monceau, élévation que forme une grande quantité d'objets entassés.
Tas, réunion de choses de même espèce qu'on a mises, en les pressant, les unes sur les autres.

26. Ambigu, qui offre deux ou plusieurs sens entre lesquels l'esprit est indécis.

Douteux, qui laisse dans le doute.
Equivoque, qui peut être expliqué de diverses manières.
Incertain, sur quoi l'on ne peut se prononcer avec certitude.
Louche, qui est suspect.

27. Amour, attachement pour quelqu'un, souvent passionné.

Affection, attachement pour une créature.
Amitié, affection entre deux personnes en dehors des liens du sang ou de l'attrait des sexes.
Attachement, sentiment durable qui nous unit de coeur à quelqu'un, à quelque chose.
Inclination, mouvement qui porte à aimer.
Tendresse, affection pleine de sensibilité et de douceur.

28. Amusement, ce qui distrait agréablement.

Divertissement, distraction qui récrée.
Jeu, amusement soumis à des règles et où l'un perd tandis que l'autre gagne.
Plaisir, sentiment de bien-être né de la satisfaction d'un désir, d'une inclination.
Récréation, jeu qui délasse du travail et qui ranime.
Réjouissance, manifestation de joie.

29. Analogie, rapport entre deux ou plusieurs choses qui offrent quelque trait commun.

Conformité, manière d'être conforme à celle d'une chose prise pour type.
Ressemblance, rapport de conformité.
Similitude, rapport entre une chose qu'on veut faire connaître et une chose connue avec laquelle on la compare.

30. Ancien, qui existe depuis une époque antérieure.

Antique, très ancien.
Vieux, qui a existé il y a longtemps.

31. Anciennement, dans les temps anciens.

Autrefois, dans un autre temps (en parlant du passé).
Jadis, au temps passé.

32. Angoisse, mouvement d'anxiété morale.

Anxiété, vive inquiétude qui serre le coeur.
Transe, inquiétude mortelle.

33. Apathie, indolence physique.

Indolence, disposition à éviter de se donner de la peine.
Indifférence, état de celui qui ne tend pas vers une personne ou vers une chose plus que vers une autre.
Insensibilité, état de celui qui n'est pas affecté agréablement ou péniblement.
Mollesse, manière de vivre de celui qui se laisse aller.
Nonchalance, caractère de l'individu qui manque d'activité par insouciance.

34. Apologie, écrit, discours justificatif.

Défense, action de défendre quelqu'un contre une accusation.
Justification, action de démontrer que quelqu'un est innocent lorsqu'on le croyait digne de punition ou de blâme.

35. **Apprendre**, donner la connaissance de quelque chose.

Enseigner, instruire quelqu'un dans quelque connaissance dont il a besoin, le plus souvent par des leçons régulières.
Informer, mettre au courant de quelque chose.
Instruire, former l'esprit de quelqu'un par des leçons, des préceptes.

36. **Approbation**, action de juger bon, louable.

Agrément, action de trouver à son gré, à sa convenance.
Autorisation, action de permettre légitimement qu'on fasse quelque chose.
Consentement, acquiescement que quelqu'un donne pour sa part à un projet.
Permission, liberté donnée à quelqu'un de faire quelque chose.
Suffrage, appréciation par laquelle on se montre favorable à quelque chose, à quelqu'un.

37. **Appui**, action de fortifier de son autorité, de son influence.

Aide, action de prêter son concours à qui ne peut faire seul quelque chose.
Assistance, action de mettre à la disposition de quelqu'un qui est dans le besoin ce qui lui est nécessaire.
Secours, aide ou assistance donnée à quelqu'un dans un danger pressant.

38. **Aptitude**, qualité de celui qui est naturellement propre à quelque chose.

Capacité, qualité de celui qui est en état de faire quelque chose.
Goût, préférence donnée à certaines choses.
Inclination, mouvement qui porte à aimer quelque chose.
Vocation, mouvement par lequel on se sent appelé vers tel genre de vie.

39. **Arbitraire**, qui ne dépend que du caprice.

Abusif, qui constitue un usage mauvais, excessif.
Despotique, qui est le fait d'un pouvoir absolu.

40. **Arrêt**, ce qui est décidé, fixé définitivement.

Jugement, opinion par laquelle on approuve ou l'on blâme.
Sentence, décision formulée solennellement par des juges.

41. **Assidu**, qui est constamment présent pour s'acquitter d'un office.

Appliqué, qui fait porter sur une chose une action, un effort.
Exact, qui vient à l'heure convenue ou qui n'omet rien de ce qui est convenu.
Ponctuel, qui fait chaque chose à point nommé, ou de point en point.

42. **Attribuer**, assigner à quelqu'un pour sa part.

Accorder, consentir à donner.
Concéder, abandonner, sans y être forcé, à la libre disposition de quelqu'un.

43. **Augmenter**, rendre plus grand par addition de parties.

Accroître, faire augmenter par degrés jusqu'à limite du développement naturel.
Agrandir, faire dépasser les dimensions ordinaires.
Etendre, appliquer à plusieurs choses de manière à les embrasser.
Grossir, rendre plus considérable.

44. **Avéré**, reconnu pour vrai.

Véritable, conforme à la vérité.
Vrai, conforme à ce qui est réellement.

45. **Avertissement**, action d'attirer l'attention de quelqu'un vers quelque chose.

Avis, manière de voir que l'on fait connaître à quelqu'un pour qu'il la suive.
Conseil, indication donnée à quelqu'un sur ce qu'il doit faire.

46. **Balancer**, être incertain sur la direction à suivre.

Hésiter, ne pas se décider à prendre un parti.
Tergiverser, user de détours pour agir.

47. **Balbutier**, articuler les mots d'une manière peu distincte.

Bégayer, parler en hésitant, en se reprenant.
Bredouiller, s'exprimer d'une manière inintelligible en parlant avec précipitation.

48. **Besogne**, ce qu'on a à faire dans son métier, dans sa profession.

Ouvrage, travail par lequel on met quelque chose en oeuvre.
Tâche, travail qu'on a l'obligation de faire.
Travail, ouvrage qu'on exécute de façon soutenue.

49. Besoin, manque de quelque chose que réclame la nature.

Dénuement, état de celui qui est dénué du nécessaire.
Détresse, situation poignante.
Disette, rareté des choses nécessaires, en particulier des vivres.
Indigence, état de celui qui manque des choses les plus nécessaires à la vie.
Misère, pauvreté digne de pitié.
Nécessité, besoin impérieux d'argent, de ressources.
Pauvreté, état de celui qui n'a pas de quoi se suffire.

50. Bizarre, qui est d'une étrangeté singulière.

Etrange, qui est en dehors de l'ordinaire.
Extraordinaire, qui est en dehors de la règle habituelle, ou de ce qui se voit habituellement.
Rare, très peu fréquent.
Singulier, qui se distingue par quelque chose d'inusité.

51. Blafard, d'un blanc terne.

Blême, qui a une pâleur maladive.
Hâve, pâle et décharné.
Livide, qui est d'un noir plombé, bleuâtre.
Pâle, décoloré.

52. Blâmer, témoigner son mécontentement à quelqu'un qui a mal agi.

Critiquer, faire ressortir les défauts des choses, des personnes.
Désapprouver, trouver que quelqu'un a tort dans ce qu'il a fait ou dit.
Désavouer, refuser d'être solidaire de quelqu'un pour ce qu'il a dit ou fait.
Réprimander, adresser un blâme à une personne pour une faute, un manquement, afin qu'elle ne récidive pas.

53. Bonté, qualité de celui qui veut le bonheur d'autrui et y contribue par des actes désintéressés.

Bienfaisance, action de faire du bien aux autres.
Bienveillance, bonne volonté à l'égard des autres.
Complaisance, fait de s'accommoder au goût et aux sentiments d'autrui.
Douceur, ménagement envers les personnes.
Indulgence, facilité à excuser, à pardonner.

54. Bourg, gros village où se tient d'ordinaire le marché des villages environnants.

Bourgade, petit bourg.
Hameau, petit groupe de maisons rustiques écarté du village.
Village, groupement de maisons de paysans qui n'est pas disposé régulièrement par rues et limité par une enceinte.

55. Bout, partie extrême qui commence ou qui termine un corps, une étendue, dans le sens de la longueur.

Extrémité, la partie qui est tout à fait au bout d'une chose.
Fin, terme auquel une chose s'arrête dans le temps ou dans l'espace.

56. But, terme qu'on se propose d'atteindre.

Dessein, idée suivant laquelle on se propose d'exécuter quelque chose.
Objet, ce sur quoi se porte la volonté, où elle tend.
Vues, manière d'envisager les choses.

57. Capable, qui est en état de bien faire ce dont on le charge.

Débrouillard, qui sait se tirer d'affaire malgré les difficultés, les complications.
Habile, propre à réussir dans ce qu'il fait.
Intelligent, qui comprend facilement.

58. Caresser, accueillir avec des démonstrations d'amitié.

Amadouer, gagner par des façons insinuantes.
Cajoler, chercher à gagner par des paroles, des manières caressantes.
Flatter, chercher à séduire par des louanges fausses ou exagérées.
Flagorner, flatter bassement.

59. Catalogue, liste indicative des pièces qui composent une collection.

Etat, ce qui constate l'état des choses à un moment donné.
Inventaire, dénombrement par articles et évaluation de biens ou d'objets.
Liste, détail, série des choses inscrites les unes à la suite des autres.
Mémoire, exposé manuscrit ou imprimé de faits, destiné à les rappeler, à les mentionner.
Répertoire, sorte de table où les matières sont classées dans un ordre qui permet de les retrouver aisément.

60. Caustique, piquant et agressif dans la plaisanterie.

Incisif, dont les propos sont tranchants.
Mordant, qui blesse dans l'attaque.

61. Chagrin, peine ressentie avec amertume.

Douleur, impression pénible causée par un mal moral ou physique.
Peine, douleur morale.
Souffrance, état de celui qui ressent une douleur plus ou moins prolongée.

62. Changement, action pour laquelle on rend différent.

Modification, changement dans une chose sans en altérer la nature essentielle.
Transformation, opération qui change la forme.

63. Chemin, espace à parcourir pour aller d'un lieu à un autre.

Route, direction d'un lieu à un autre.
Voie, direction suivie pour atteindre un but.

64. Chicanier, qui suscite des querelles mal fondées pour embrouiller les choses.

Pointilleux, qui discute sur des minuties.
Processif, qui aime les débats jusqu'à les soumettre à la justice.

65. Clairvoyance, faculté de discerner clairement.

Pénétration, faculté de l'esprit qui lui permet d'aller jusqu'au fond des choses.
Perspicacité, action de saisir la vérité à travers ce qui l'obscurcit.
Sagacité, instinct subtil pour découvrir les choses.

66. Coeur, siège de la force d'âme.

Bravoure, qualité de celui qui est prêt à affronter le danger.
Courage, énergie en présence d'un obstacle à vaincre.
Hardiesse, qualité de celui qui ne se laisse pas intimider.
Intrépidité, caractère de celui qui va sans trembler au devant du danger.
Vaillance, vertu guerrière dont quelqu'un est doué.
Valeur, vertu guerrière dont on fait preuve.

67. Collègue, chacun de ceux qui exercent une même fonction publique.

Confrère, chacun des membres d'une même corporation professionnelle, compagnie savante, etc.

68. Comique, qui provoque le rire.

Amusant, qui distrait de choses sérieuses, importantes.
Drôle, qui a quelque chose de singulier et de plaisant.
Risible, qui peut exciter le rire.

69. Commandement, action de décider, en vertu d'une autorité supérieure, ce que quelqu'un doit faire.

Injonction, action d'imposer péremptoirement une chose.
Ordre, disposition qu'on prescrit à quelqu'un de prendre.
Prescription, ordre formulé.

70. Concis, dont tout ce qui n'est pas nécessaire au sens a été retranché.

Bref, qui ne comporte que peu de mots.
Court, qui a une durée peu étendue.
Laconique, qui exprime la pensée en mots peu nombreux et en relief.

71. Concours, rencontre de beaucoup de personnes qui se portent simultanément sur un même point.

Affluence, action de se porter en grande quantité vers un lieu.
Foule, presse qui résulte de la présence d'une multitude de personnes.
Multitude, nombre considérable de personnes, de choses.
Presse, foule où l'on se presse les uns les autres.

72. Continuer, poursuivre ce qu'on est en train de faire.

Persévérer, demeurer ferme et constant dans une manière d'agir.
Persister, demeurer ferme dans une résolution malgré les résistances.

73. Conversation, échange de paroles entre personnes qui se trouvent ensemble.

Colloque, débat entre interlocuteurs sur un point de doctrine qui divise.
Conférence, réunion où l'on traite un sujet en commun.
Entretien, conversation suivie avec quelqu'un.

74. Corriger, ramener à la règle ce qui s'en écarte.

Retoucher, remettre la main à quelque chose pour le rectifier.
Revoir, examiner de nouveau.

75. Côte, partie du rivage que la mer vient battre et qui en forme le bord.

Bord, partie extrême qui termine le contour d'un objet.
Rive, terrain qui borde un cours d'eau.

76. Coutume, manière d'agir établie par un long usage.

Habitude, disposition, manière d'être usuelle contractée par quelqu'un.
Usage, action de pratiquer habituellement quelque chose.

77. Craintif, porté à considérer comme prochaines des choses fâcheuses.

Peureux, faible de coeur en présence du danger.
Pusillanime, qui a l'âme faible.
Timide, qui manque d'assurance parce qu'il se défie de lui-même.
Timoré, que le moindre scrupule effraye.

78. **Crime**, acte par lequel la loi morale ou les lois sociales sont violées de la manière la plus grave.	*Délit*, acte par lequel une loi est violée. *Faute*, fait de manquer à ce qu'on doit. *Forfait*, crime détestable. *Péché*, faute contre la loi religieuse.
79. **Curiosité**, désir déplacé de connaître.	*Indiscrétion*, manque de réserve.
80. **Danger**, ce qui menace les intérêts, la sûreté de quelqu'un.	*Péril*, état, situation où l'on est menacé. *Risque*, chance douteuse à laquelle on est exposé.
81. **Déceler**, faire connaître ce que quelqu'un cache.	*Déclarer*, dénoncer ouvertement. *Dévoiler*, découvrir ce qui était tenu secret. *Divulguer*, porter à la connaissance d'un grand nombre de personnes. *Révéler*, faire connaître ce qui était tenu caché,
82. **Décret**, décision du gouvernement.	*Arrêté*, décision d'une autorité administrative pour l'exécution d'une loi.
83. **Décrier**, signaler comme sans valeur.	*Dénigrer*, dire du mal, noircir. *Déprécier*, rabaisser en estimant au-dessous de sa valeur. *Diffamer*, porter atteinte à la réputation. *Discréditer*, priver de crédit.
84. **Dédaigner**, considérer quelqu'un comme indigne qu'on s'en occupe.	*Mépriser*, considérer comme indigne d'estime.
85. **Défaut**, ce qui dans une personne ou dans une chose n'est pas comme il doit être.	*Défectuosité*, manière d'être qui présente quelque imperfection. *Vice*, élément mauvais qui altère quelque chose dans son essence.
86. **Désaccord**, fait de ne pas sentir, penser et agir de la même façon.	*Dissentiment*, différence dans la manière de juger. *Mésintelligence*, mauvais accord des sentiments.
87. **Désirer**, tendre vers une chose qu'on voudrait posséder.	*Souhaiter*, exprimer le désir qu'une chose s'accomplisse. *Vouloir*, avoir l'intention déterminée d'obtenir quelque chose.
88. **Détestable**, ce pour quoi, celui pour qui on doit avoir une aversion déclarée.	*Abominable*, qui doit inspirer du dégoût, de l'horreur. *Exécrable*, qu'on doit avoir en horreur comme digne de malédiction.
89. **Différer**, éloigner l'accomplissement d'une chose.	*Reculer*, retarder l'exécution de quelque chose. *Remettre*, mettre à plus tard. *Retarder*, faire arriver plus tard qu'il ne faut.
90. **Difficulté**, ce qui rend une chose difficile.	*Anicroche*, petit obstacle qui arrête l'exécution de quelque chose. *Embarras*, action de ce qui gêne pour agir. *Empêchement*, ce qui fait obstacle à l'action. *Obstacle*, ce qui s'oppose à l'accomplissement d'un dessein en empêchant de passer. *Traverse*, difficulté contre laquelle on se heurte dans la vie.
91. **Diffus**, qui étend trop et inégalement le développement de sa pensée.	*Prolixe*, qui délaye ce qu'il a à dire. *Verbeux*, qui dit les choses en trop de paroles.
92. **Diligent**, qui montre un soin empressé.	*Actif*, qui agit vivement. *Expéditif*, qui en finit promptement avec ce qu'il a à faire.
93. **Discussion**, échange d'arguments sur un sujet.	*Différend*, désaccord résultant d'une différence d'avis ou d'intérêts. *Dispute*, lutte d'opinion sur un point de doctrine. *Débat*, action de discuter d'une manière suivie avec plusieurs interlocuteurs. *Démêlé*, discussion entre personnes qui ont des intérêts opposés.
94. **Distinguer**, percevoir d'une manière distincte et sans confondre l'objet avec ce qui l'entoure.	*Démêler*, dégager ce qui est confondu avec d'autres choses. *Discerner*, distinguer par les sens ou par la pensée.
95. **Docile**, qui a de la disposition à se laisser conduire.	*Obéissant*, qui se conforme à ce qui lui est ordonné ou défendu. *Soumis*, disposé à se mettre sous l'autorité.
96. **Domicile**, demeure légale officielle.	*Résidence*, lieu où l'on est actuellement établi.
97. **Don**, abandon que l'on fait de quelque chose sans rien recevoir en retour.	*Cadeau*, présent destiné à fêter quelqu'un. *Présent*, ce qu'on offre en don à quelqu'un.

98. Durable, fait pour subsister longtemps.

Permanent, qui dure, se maintient, sans interruption.
Stable, qui tend à persévérer dans le même état.

99. Ecarter, éloigner de la direction qu'on doit suivre.

Détourner, écarter une personne ou une chose de soi.
Eloigner, mettre, faire aller loin, à distance.

100. Effacer, faire disparaître ce qui est tracé.

Biffer, faire brusquement sur quelque chose d'écrit un ou plusieurs traits qui annulent.
Raturer, annuler ce qui est écrit en le surchatgeant à l'encre ou au crayon.
Rayer, annuler par une raie sur l'écriture.

101. Emploi, ce à quoi quelqu'un est employé dans un travail à faire.

Charge, fonction dont quelqu'un a toute la peine, tout le soin.
Fonction, action propre qui incombe à chaque personne dans un ensemble.
Poste, position assignée à un fonctionnaire.

102. Entêté, attaché obstinément à son opinion.

Obstiné, attaché avec ténacité à une résolution.
Opiniâtre, exagérément tenace dans son opinion.
Têtu, que rien ne fait démordre de ce qu'il s'est mi en tête.

103. Enthousiasme, exaltation de l'âme.

Exaltation, élévation d'un sentiment de l'âme à un haut degré d'intensité.
Ravissement, état de l'âme transportée d'enthousiasme, d'admiration ou de joie.
Transport, mouvement qui nous met hors de nous.

104. Erreur, action de s'éloigner de la vérité.

Bévue, méprise grossière.
Malentendu, méprise qui empêche de s'entendre, d'être d'accord.
Mécompte, fait d'être trompé dans ses prévisions.
Méprise, erreur de celui qui prend le change sur une personne ou sur une chose.

105. Esprit, vivacité piquante de l'intelligence.

Intelligence, qualité de celui qui comprend.

106. Etourdi, qui agit sans réflexion.

Ecervelé, qui est sans cervelle, sans jugement.
Imprudent, qui manque de cette sagesse qui règle la conduite et fait éviter les fautes.
Malavisé, qui n'a pas de discernement.

107. Evident, qui a la clarté que seule la vérité présente à l'esprit.

Clair, que l'esprit saisit bien, parce que non obscur.
Indiscutable, sur lequel on ne peut examiner le pour et le contre.
Manifeste, rendu comme palpable.
Notoire, qui est à la connaissance du plus grand nombre.

108. Exactitude, caractère de ce qui est rigoureusement conforme à la vérité.

Justesse, qualité par laquelle une chose est exactement adaptée ou appropriée à ce à quoi elle est destinée.
Précision, détermination stricte.

109. Exciter, rendre quelqu'un plus vif, plus ardent, à sentir, à vouloir.

Aiguillonner, piquer comme avec un aiguillon pour pousser à agir.
Stimuler, augmenter l'ardeur, l'activité de quelqu'un.

110. Faux, qui n'a d'une chose que l'apparence.

Captieux, qui contient des raisons spécieuses propres à surprendre et à tromper l'esprit.
Fallacieux, qui cherche à troper.
Insidieux, qui tend à faire tomber dans un piège.
Mensonger, fondé sur une assertion sciemment contraire à la vérité.
Trompeur, qui induit en erreur par artifice.

111. Fondement, dans un ensemble, l'élément essentiel sur quoi s'appuie tout le reste.

Appui, ce sur quoi l'on se soutient.
Base, ce par quoi quelque chose se soutient.
Soutien, ce qui, placé au-dessous de quelque chose, porte une partie du poids.
Support, ce sur quoi porte le poids de quelque chose.

112. Fracas, bruit violent comme celui d'une chose qui se brise en éclats.

Bruit, son ou réunion de sons à vibrations irrégulières qui frappe et attire l'attention.
Tumulte, agitation bruyante, désordonnée, qui se produit dans une réunion de personnes.
Vacarme, bruit assourdissant.

113. Franchise, qualité de celui qui dit librement, ouvertement, ce qu'il pense.

Sincérité, qualité de celui qui fait connaître ce qu'il sent, ce qu'il pense.
Véracité, qualité de celui qui dit la vérité.

114. Funérailles, ensemble des cérémonies d'un enterrement.

Convoi, action d'accompagner le corps d'un défunt ; la suite des voitures et des personnes.
Enterrement, action d'enterrer, cérémonie finale des funérailles.
Obsèques, ensemble des cérémonies de l'accompagnement d'un mort.

115. Gages, prix convenu dont on paie un serviteur par mois ou par an.

Appointements, rétribution annuelle, mensuelle, d'un fonctionnaire, d'un employé.
Emoluments, rétribution d'un officier ministériel.
Honoraires, rétribution de services de celui qui a une position libérale (honorable).
Rémunération, prix dont on paie le travail, les services de quelqu'un.
Rétribution, prix dont on paie le travail, les services de quelqu'un.
Rétribution, salaire déterminé d'un service, d'un travail.
Salaire, rétribution d'un travail matériel fait par quelqu'un.
Traitement, appointements d'un fonctionnaire de l'Etat.

116. Gâter, détériorer l'esprit et le coeur.

Corrompre, altérer ce qui est sain. honnête, dans l'âme.
Dépraver, inspirer le goût du mal.
Pervertir, tourner au mal.

117. Gémissement, plainte inarticulée.

Doléance, plainte répétée de celui qui veut qu'on s'apitoie sur son sort.
Jérémiade, plainte sans fin, qui importune.
Lamentation, plainte bruyante et prolongée.
Plainte, paroles, gémissements par lesquels on exprime l'excès de sa peine.

118. Gentil, qui a un agrément délicat.

Agréable, qui fait plaisir à voir.
Gracieux, qui a le don de plaire.
Joli, qui a l'agrément extérieur.

119. Gérer, administrer pour le compte d'un autre.

Administrer, surveiller la gestion des affaires d'une Société, d'un Etat, d'un particulier.
Diriger, faire fonctionner suivant une certaine ligne de conduite.
Gouverner, avoir la direction d'une affaire au nom d'une autorité.
Régir, tenir fermement sous sa direction.

120. Grave, qui donne de l'importance aux choses.

Pondéré, bien équilibré.
Sérieux, qui prend les choses par leur côté important.

121. Habileté, qualité de celui qui est propre à réussir dans ce qu'il fait.

Adresse, qualité de celui qui s'y prend bien, de manière à aller droit au but.
Dextérité, tact, délicatesse d'esprit pour amener à bien une affaire.
Entregent, adresse à manier les gens.
Industrie, adresse à exécuter quelque chose.
Savoir-faire, art de faire réussir les choses qu'on entreprend.

122. Hâbleur, celui qui aime à se vanter avec emphase.

Blagueur, diseur de petits mensonges pour s'amuser des gens.
Fanfaron, celui qui vante bruyamment ses exploits réels ou supposés.
Vantard, qui a l'habitude de se louer exagérément devant les autres.

123. Haine, malveillance ou répugnance profonde.

Antipathie, éloignement instinctif à l'égard de quelqu'un.
Aversion, répulsion violente conçue pour quelqu'un ou quelque chose.
Inimitié, sentiment hostile.

124. Harassant, qui accable de fatigue.

Ecrasant, qui fait succomber sous une charge trop lourde.
Fatigant, qui abat par suite de la dépense de force.
Pénible, qui se fait avec peine.

125. Hardiesse, manière d'être de celui qui pense intimider les autres.

Audace, hardiesse extraordinaire.
Effronterie, caractère de celui qui n'a point de honte
Témérité, hardiesse inconsidérée.

126. Honte, déshonneur humiliant.

Déshonneur, privation de la dignité morale qui naît de l'estime de soi et de l'estime des autres.
Ignominie, avilissement public.

126. Honte (suite)	*Infamie,* caractère de ce qui est flétri par l'opinion. *Opprobre,* déshonneur public. *Turpitude,* laideur morale honteuse.
127. Il faut, il y a obligation matérielle ou morale.	*Il est nécessaire,* on ne peut s'en passer. *Il est indispensable,* on ne peut être autorisé à ne pas faire quelque chose.
128. Illustre, dont le renom est éclatant.	*Célèbre,* dont le nom est partout vanté. *Fameux,* qui a une grande réputation. *Renommé,* célèbre en tous lieux.
129. Imiter, prendre pour modèle.	*Contrefaire,* imiter par artifice et illicitement. *Copier,* reproduire par imitation.
130. Imprévu, qui arrive lorsqu'on y pense le moins.	*Inattendu,* sur l'arrivée duquel on ne comptait pas. *Inespéré,* que l'on désirait, mais sur la réalisation de quoi l'on ne comptait pas. *Inopiné,* qui arrive sans qu'on y ait songé.
131. Impropre, terme qui n'est pas propre à exprimer l'idée.	*Inexact,* terme qui n'est pas rigoureusement conforme à la réalité.
132. Inattention, manque d'attention à ce qu'on fait, faute d'y porter toute sa pensée.	*Inadvertance,* faute de celui qui ne prend pas garde à ce qu'il fait, par oubli ou étourderie. *Mégarde,* action de ne pas prendre garde (par mégarde).
133. Incommode, qui cause de la gêne.	*Fâcheux,* qui fait de la peine. *Importun,* qui fatigue en étant mal venu, mal à propos.
134. Inénarrable, qui ne peut être raconté.	*Indicible,* qu'on ne peut arriver à exprimer (plaisir). *Ineffable,* que la parole ne peut rendre (joie). *Inexprimable,* qu'on ne peut exprimer par des paroles (charme).
135. Influence, autorité que donne l'action modificatrice qu'on exerce sur quelqu'un.	*Ascendant,* influence dominante. *Autorité,* faculté de s'imposer par son mérite. *Crédit,* autorité dont on jouit par la confiance qu'on inspire.
136. Justice, caractère de ce qui est selon le droit.	*Equité,* justice naturelle conforme au droit moral.
137. Langage, manière dont quelqu'un exprime la pensée par la parole.	*Dialecte,* variété régionale d'une langue. *Jargon,* langage corrompu adopté par certaines gens. *Langue,* langage parlé ou écrit propre à une nation. *Patois,* parler dialectal réservé à la conversation familière.
138. Légal, conforme à la loi.	*Légitime,* fondé en droit. *Licite,* qu'aucune loi ne défend. *Permis,* qu'on a liberté de faire.
139. Libre, dont l'action ne trouve point d'obstacle.	*Indépendant,* qui ne dépend de personne.
140. Luxe, richesse, éclat que l'on déploie dans les choses de la vie.	*Faste,* étalage de magnificence par ostentation. *Magnificence,* qualité de ce qui a une somptuosité pleine de grandeur. *Pompe,* appareil magnifique. *Somptuosité,* magnificence très riche. *Splendeur,* éclat magnifique.
141. Maisonnette, petite maison.	*Baraque,* maison mal construite, mal organisée. *Bicoque,* maison chétive. *Cabane,* petite habitation faite de terre, de bois. *Cahute,* petit réduit. *Hutte,* petite cabane grossièrement faite de bois, de branchages, de paille, de terre.
142. Malheur, événement funeste.	*Adversité,* sort contraire. *Calamité,* grand malheur qui frappe à la fois un certain nombre de personnes. *Catastrophe,* brusque renversement de fortune. *Désastre,* malheur qui cause la ruine. *Disgrâce,* perte de la faveur, de la fortune. *Revers,* changement de fortune.
143. Mariage, cérémonie où se célèbre l'union d'un homme et d'une femme.	*Noce,* réjouissances qui accompagnent un mariage.
144. Mauvais, qui se montre opposé au bien d'autrui.	*Malicieux,* qui trouve du plaisir à faire le mal. *Malin,* qui a une disposition à se complaire dans le mal d'autrui. *Méchant,* porté à faire du mal.

145. **Mêler**, unir des choses diverses de façon à ce que la diversité cesse d'être apparente.	*Mélanger*, unir des choses diverses de manière à produire un ensemble où les caractères, les propriétés se confondent.
146. **Métier**, genre d'occupation manuelle.	*Etat*, condition résultant de la profession. *Profession*, genre d'occupation que quelqu'un exerce notoirement.
147. **Motif**, raison d'agir.	*Cause*, ce pourquoi on fait quelque chose. *Mobile*, ce qui pousse à agir. *Prétexte*, motif spécieux à l'aide duquel on cache son motif réel d'agir. *Raison*, explication d'un fait.
148. **Mutuel**, fondé sur un échange d'actes, de sentiments qui se répondent.	*Réciproque*, qui répond à une action exercée par une action équivalente.
149. **Naïf**, qui a la crédulité d'une âme inexpérimentée.	*Crédule*, qui croit trop facilement. *Ingénu*, qui a une franchise innocente. *Simple*, qui n'entend point les complications, les détours.
150. **Neuf**, qui n'a pas encore servi ou qui a très peu servi.	*Nouveau*, qui apparaît pour la première fois ou depuis très peu de temps. *Récent*, qui s'est produit depuis peu.
151. **Nuage**, amas de vapeurs qui trouble la transparence de l'air.	*Nue*, ams de vapeurs dans les hautes régions de l'air. *Nuée*, nuage épais, menaçant.
152. **Occasion**, circonstance qui vient à propos pour faire prendre une détermination.	*Cas*, événement qui se produit parmi tous ceux que pouvait faire naître une situation. *Circonstance*, chacun des faits particuliers d'un événement. *Conjoncture*, situation qui résulte d'un concours fortuit d'événements, de circonstances. *Occurrence*, circonstance qui se présente soudain.
153. **Orage**, trouble de l'atmosphère consistant en vent, pluie ou grêle, éclairs et tonnerre.	*Bourrasque*, coup de vent violent. *Ouragan*, tempête de vents formant tourbillon. *Tempête*, tourmente furieuse. *Tourmente*, tempête passagère.
154. **Ordinaire**, terme qu'on emploie habituellement.	*Commun*, terme mis en usage par le commun des hommes. *Trivial*, bas, qui manque de distinction. *Vulgaire*, rabattu à satiété, connu de tous.
155. **Orgueil**, excès d'estime de soi qui fait qu'on se met au-dessus des autres.	*Arrogance*, hauteur blessante. *Fierté*, caractère d'une personne qui laisse voir qu'elle se croit supérieure aux autres. *Hauteur*, caractère de celui qui regarde les autres de haut. *Présomption*, caractère de celui qui croit trop en sa capacité. *Suffisance*, excès de satisfaction de soi qui perce dans le ton, les manières. *Vanité*, désir de paraître.
156. **Paisible**, qui vit en paix.	*Pacifique*, qui aime la paix. *Tranquille*, qui est sans agitation.
157. **Partage**, division en parts.	*Distribution*, action de diviser entre plusieurs personnes en donnant une part à chacun. *Répartition*, action de partager entre plusieurs en attribuant à chacun de ce qui lui revient.
158. **Pauvre**, qui n'a pas de quoi se suffire.	*Besogneux*, qui est toujours dans la gêne et doit recourir aux autres. *Indigent*, qui manque des choses les plus nécessaires à la vie. *Nécessiteux*, qui est dans le besoin impérieux de ressources.
159. **Plausible**, qui semble devoir être approuvé.	*Probable*, dont la vérité a plus de raisons pour que contre. *Vraisemblable*, qui a toutes les apparences de la vérité.
160. **Prodige**, chose extraordinaire.	*Merveille*, chose qui frappe d'étonnement par sa beauté, par sa grandeur. *Miracle*, fait surnaturel, inexplicable.
161. **Probité**, attention scrupuleuse à ne léser personne et à réparer tout dommage.	*Honnêteté*, conformité au devoir qui respecte les biens et les droits d'autrui. *Intégrité*, caractère de celui dont la probité ne peut recevoir aucune atteinte.

162. Quittance, écrit par lequel on reconnaît quelqu'un quitte d'une somme qu'il devait payer.
Acquit, formule qu'on signe pour constater un paiement.
Décharge, déclaration qu'une personne a fourni ou payé ce qu'elle devait et cesse d'en être tenue.
Reçu, écrit par lequel on reconnaît avoir reçu de quelqu'un une somme ou un objet.

163. Reconnaissance, action de témoigner qu'on est redevable à quelqu'un d'un service rendu.
Gratitude, sentiment affectueux pour celui dont on est l'obligé.

164. Redemander, demander qu'on restitue.
Réclamer, exiger avec instance ce qu'on nous doit.
Revendiquer, réclamer ce qu'un autre détient, comme nous appartenant.

165. Regret, chagrin d'avoir fait ou de n'avoir pas fait.
Remords, reproche de la conscience.
Repentir, regret d'une action, d'une résolution, d'une faute.

166. Réponse, ce qu'on dit ou écrit en retour à quelqu'un de qui on a reçu une demande, une question.
Repartie, prompte réponse de vive voix.
Réplique, action de répondre à ce que quelqu'un a répondu.

167. Rétif, très indocile.
Récalcitrant, qui résiste opiniâtrément.
Revêche, difficile à manier.

168. Sain, qui conserve l'organisme en bon état.
Salubre, qui a une action favorable sur l'organisme.
Salutaire, propre à conserver ou à rétablir l'organisme.

169. Savoureux, qui a une saveur agréable.
Succulent, qui contient beaucoup de suc nutritif.

170. Séduire, entraîner quelqu'un en le charmant.
Corrompre, altérer chez quelqu'un par des dons, des promesses, l'intégrité de la conscience.
Suborner, induire au mal par quelque appât.

171. Sentiment, manière d'apprécier.
Opinion, manière de juger sur une question.
Pensée, conception de l'esprit sur la manière de juger une question.

172. Silencieux, qui ne parle pas.
Muet, qui a perdu ou semble avoir perdu l'usage de la parole.
Taciturne, habituellement silencieux, par humeur, par caractère.

173. Sobre, tempérant pour le manger et le boire.
Frugal, qui se contente d'aliments simples.
Tempérant, modéré dans les plaisirs sensuels.

174. Solliciter, prier d'une manière pressante pour obtenir quelque chose.
Demander, faire connaître à quelqu'un qu'on désire obtenir de lui quelque chose.
Quémander, solliciter avec importunité.

175. Sommet, la partie la plus élevée de ce qui est debout sur sa base.
Cime, sommet en pointe d'un objet élevé.
Faîte, partie la plus élevée d'un édifice.

176. Souffrir, savoir supporter.
Admettre recevoir dans son esprit comme vrai, valable.
Endurer, supporter avec une patience constante.
Tolérer, supporter chez les autres ce qu'on désapprouve.

177. Spécimen, partie d'un ensemble destinée à donner une idée du reste.
Echantillon, petite quantité d'une marchandise servant à faire juger de la marchandise entière.
Modèle, ce qui doit servir d'objet d'imitation.

178. Stérile, qui ne produit pas de fruits, qui ne donne pas de résultats.
Infécond, qui ne peut fournir de produits abondants.
Infertile, incapable de produire beaucoup.

179. Stupide, dont l'esprit est comme engourdi.
Benêt, niaisement bonasse.
Hébété, dont l'intelligence est émoussée.
Idiot, qui a l'esprit très borné.
Imbécile, faible d'esprit.
Niais, inepte, qui n'a d'aptitude pour rien, bête par excès de simplicité.
Nigaud, qui se conduit niaisement.

180. Surpris, frappé par quelque chose d'inattendu.
Abasourdi, hébété momentanément.
Confondu, troublé entièrement par quelque chose d'inattendu.
Consterné, frappé de l'accablement où jette une catastrophe.
Déconcerté, troublé parce que les mesures, les desseins sont dérangés.
Ebahi, frappé d'un profond étonnement.
Ebaubi, interdit de surprise.
Etonné, frappé d'une commotion morale.

180. Surpris (suite)	*Interdit,* troublé de manière à perdre l'usage de la raison, de la parole. *Stupéfait,* frappé d'un étonnement voisin de la stupeur. *Stupéfié,* dont toutes les facultés sont anéanties.
181. Supposition, action d'admettre comme réalisé au moment où l'on parle ce qu'on imagine comme tel.	*Conjecture,* ce que l'on propose pour expliquer comment un fait s'est passé ou se passera. *Hypothèse,* supposition dont on tire des conséquences à vérifier.
182. Symptôme, signe caractéristique.	*Indication,* action de montrer où se trouve quelque chose. *Indice,* signe qui met sur la trace. *Présage,* signe où l'on voit l'annonce d'un événement futur.
183. Tombe, fosse recouverte qui contient un mort.	*Sépulcre,* tombeau antique. *Sépulture,* lieu où le mort est enterré. *Tombeau,* monument funéraire élevé au-dessus de la fosse qui contient un mort.
184. Tort, dommage causé indûment à quelqu'un.	*Détriment,* dommage résultant de ce qu'on perd. *Dommage,* ce qui lèse quelqu'un dans ses intérêts. *Préjudice,* tort causé à quelqu'un par une personne, une chose.
185. User, appliquer à tel ou tel besoin.	*Employer,* mettre en œuvre pour une destination. *Se servir,* tirer un certain usage.
186. Utile, qui sert à quelque chose.	*Avantageux,* qui apporte quelque supériorité ou quelque profit. *Profitable,* qui donne ou apporte un accroissement.
187. Voir, percevoir les images des objets.	*Apercevoir,* voir soudainement. *Regarder,* diriger les yeux sur quelqu'un ou quelque chose et les y attacher.
188. Voleur, celui qui s'approprie par vol ou violence ce qu'il sait appartenir à autrui.	*Escroc,* celui qui vole les gens en les dupant. *Filou,* celui qui dérobe subtilement. *Fripon,* qui vole adroitement de petites choses. *Larron,* qui vole en cachette.
189. Volonté, intention déterminée de faire ou de faire faire quelque chose.	*Intention,* acte de la volonté qui tend vers un but. *Résolution,* action de se déterminer entre plusieurs partis à prendre. *Velléité,* résolution faible, sans effet.
190. Zèle, empressement à agir pour le service de quelqu'un.	*Dévouement,* fait de se vouer au service, aux intérêts de quelqu'un. *Empressement,* action de se hâter en témoignant du zèle.

RÉPERTOIRE DES SYNONYMES

A

Abaisser, 1.
Abandonner, 2.
Abasourdi, 180.
Abattement, 3.
Abattre, 4.
Abnégation, 5.
Abolir, 6.
Abominable, 88.
Abondance, 7.
Abrégé, 8.
Abroger, 6.
Abusif, 39.
Accablement, 3.
Accélérer, 9.
Accepter, 10.
Accompagner, 11.
Accord, 12.
Accorder, 13.
Accorder, 42.
Accroître, 43.
Accusateur, 14.
Acerbe, 19.
Acquit, 162.
Acre, 19.
Actif, 93.
Activité, 15.
Admettre, 176.
Administrer, 119.
Adoucir, 16.
Adresse, 121.
Adversité, 142.
Affable, 20.
Affaissement, 3.
Affection, 27.
Affirmer, 17.
Affluence, 71.
Agrandir, 43.
Agréable, 118.
Agréer, 10.
Agrément, 36.
Agriculteur, 18.
Aide, 37.
Aigre, 19.
Aiguillonner, 109.
Aimable, 20.
Air, 21.
Aisance, 7.
Aisé, 22.
Aliment, 23.
Allure, 24.
Altruisme, 5.
Amadouer, 58.
Amas, 25.
Ambigu, 26.
Amer, 19.
Amitié, 27.
Amour, 27.
Amusant, 68.
Amusement, 28.
Analogie, 29.
Ancien, 30.
Anciennement, 31.
Angoisse, 32.
Anicroche, 90.
Annuler, 6.
Antipathie, 123.
Antique, 30.
Anxiété, 32.
Apathie, 33.
Apercevoir, 187.
Apologie, 34.
Appliqué, 41.
Appointements, 115.
Apprendre, 35.
Approbation, 36.
Appui, 37.
Apre, 19.
Aptitude, 38.
Arbitraire, 39.
Arrêt, 40.
Arrêté, 82.
Arrogance, 155.
Ascendant, 135.
Assidu, 41.
Assistance, 37.
Assurer, 17.
Attachement, 27.
Atténuer, 16.
Attester, 17.
Attribuer, 42.
Audace, 125.
Augmenter, 43.
Autorisation, 36.
Autorité, 135.
Autrefois, 31.
Avantageux, 186.
Avéré, 44.
Aversion, 123.
Avertissement, 45.
Avilir, 1.
Avis, 45.

B

Balancer, 46.
Balbutier, 47.
Baraque, 141.
Base, 111.
Bégayer, 47.
Benêt, 179.
Besogne, 48.
Besoin, 49.
Besogneux, 158.
Bévue, 104.
Bicoque, 141.
Bienfaisance, 53.
Bienveillance, 53.
Biffer, 100.
Bizarre, 50.
Blafard, 51.
Blagueur, 122.
Blâmer, 52.
Blême, 51.
Bonté, 53.
Bord, 75.
Bourg, 54.
Bourgade, 54.
Bourrasque, 153.
Bout, 55.
Bravoure, 66.
Bredouiller, 47.
Bref, 70.
Bruit, 112.
But, 56.

C

Cabane, 141.
Cadence, 97.
Cahute, 141.
Cajoler, 58.
Calamité, 142.
Capable, 57.
Captieux, 110.
Caresser, 58.
Cas, 152.
Casser, 6.
Catalogue, 59.
Catastrophe, 142.
Cause, 147.
Caustique, 60.
Célèbre, 128.
Célébrité, 15.
Certifier, 17.
Chagrin, 61.
Changement, 62.
Charge, 101.
Chemin, 63.
Chicanier, 64.
Cime, 175.
Circonstance, 152.
Civil, 20.
Clair, 107.
Clairvoyance, 65.
Cœur, 66.
Collègue, 67.
Colloque, 73.
Colon, 18.
Comique, 68.
Commandement, 69.
Commode, 22.
Compendium, 8.
Complaisance, 53.
Concéder, 42.
Concis, 70.
Concours, 71.
Conférence, 73.
Conformité, 29.
Confrère, 67.
Conjecture, 181.
Conjoncture, 152.
Contenance, 21.
Contrat, 12.
Contrefaire, 129.
Conseil, 45.
Consentement, 36.
Consterné, 180.
Convention, 12.
Conversation, 73.
Convoi, 114.
Côte, 75.
Corriger, 74.
Corrompre, 116.
Corrompre, 170.
Courage, 66.
Court, 70.
Courtois, 20.
Coutume, 76.
Copier, 129.
Craintif, 77.
Crédit, 135.
Crédule, 149.
Crime, 78.
Critiquer, 52.
Cultivateur, 18.
Curiosité, 79.

D

Danger, 80.
Débat (discussion), 92.
Débrouillard, 57.
Déceler, 81.
Décharge, 162.
Déclarer, 81.
Déconcerté, 180.
Décret, 82.
Décrier, 83.
Dédaigner, 84.
Défaut, 85.
Défectuosité, 85.
Défense, 34.
Dégrader, 1.
Délaisser, 2.
Délateur, 14.
Délit, 78.
Demander, 174.
Démarche, 24.
Démêlé, 92.
Démêler, 94.
Dénigrer, 83.
Dénonciateur, 14.
Dénouement, 49.
Dépêcher, 9.
Dépraver, 116.
Déprécier, 83.
Désaccord, 86.
Désapprouver, 52.
Désastre, 142.
Désavouer, 52.
Désintéressement, 5.
Déshonorer, 126.
Désirer, 87.
Despotique, 39.
Dessin, 56.
Détestable, 88.
Détourner, 99.
Détresse, 49.
Détriment, 184.
Détruire, 4.
Dévoiler, 81.
Dévouement, 5.
Dévouement, 190.
Dextérité, 121.
Dialecte, 137.
Diffamer, 83.
Différend, 92.
Différer, 89.
Difficulté, 90.
Diffus, 91.
Diligence, 15.
Diligent, 93.
Diriger, 119.
Discerner, 94.
Discréditer, 83.
Discussion, 92.
Disette, 49.
Disgrâce, 142.
Dispute, 92.
Dissentiment, 86.
Distinguer, 94.
Distribution, 157.
Divertissement, 28.
Divulguer, 81.
Docile, 95.
Doléance, 117.
Domicile, 96.
Dommage, 184.
Don, 97.
Douceur, 53.
Douleur, 61.
Douteux, 26.

Drôle, 68.
Durable, 98.

E

Ebahi, 180.
Ebaubi, 180.
Ecarter, 99.
Ecervelé, 106.
Echantillon, 177.
Ecrasant, 124.
Effacer, 100.
Effronterie, 125.
Eloigner, 99.
Embarras, 90.
Emoluments, 115.
Empêchement, 90.
Emploi, 101.
Employer, 185.
Empressement, 190.
Endurer, 176.
Enseigner, 36.
Enterrement, 114.
Entêté, 102.
Enthousiasme, 102.
Entregent, 121.
Entretien, 73.
Equité, 136.
Equivoque, 26.
Erreur, 104.
Escorter, 11.
Escroc, 188.
Esprit, 105.
Etat, 59.
Etat, 146.
Etendre, 93.
Etonné, 180.
Etourdi, 106.
Etrange, 50.
Evident, 107.
Exact, 41.
Exactitude, 108.
Exaltation, 103.
Exciter, 109.
Exécrable, 88.
Expédier, 9.
Expéditif, 93.
Extraordinaire, 50.
Extrémité, 55.

F

Fâneux, 133.
Facile, 22.
Faîte, 175.
Fallacieux, 110.
Fameux, 128.
Fanfaron, 122.
Faste, 140.
Fatigant, 124.
Faute, 78.
Faux, 110.
Fermier, 18.
Fierté, 155.
Filou, 188.
Fin, 55.
Flagorner, 58.
Flatter, 58.
Fondement, 111.
Fonction, 101.
Forfait, 78.
Foule, 71.
Fracas, 112.
Franchise, 113.
Fripon, 188.
Frugal, 173.
Funérailles, 114.

G

Gages, 115.
Garantir, 17.
Gâter, 116.
Gémissement, 117.
Gentil, 118.
Gérer, 119.
Goût, 38.
Gouverner, 119.
Gracieux, 118.
Gratitude, 163.
Grave, 120.
Grossir, 43.

H

Habile, 57.
Habileté, 121.
Habitude, 76.
Hâbleur, 122.
Haine, 123.
Hameau, 54.
Harassant, 124.
Hardiesse, 66.
Hardiesse, 125.
Hâter, 9.
Hauteur, 155.
Hâve, 51.
Hébété, 179.
Hésiter, 46.
Honnêteté, 161.
Honoraires, 115.
Honte, 126.
Humilier, 1.
Hutte, 141.
Hypothèse, 181.

I

Idiot, 179.
Ignominie, 126.
Il est indispensable, 127
Il est nécessaire, 127.
Il faut, 127.
Illustre, 128.
Imbécile, 179.
Imiter, 129.
Importun, 133.
Imprévu, 130.
Impropre, 131.
Imprudent, 106.
Inadvertance, 132.
Inattendu, 130.
Inattention, 132.
Incertain, 26.
Incisif, 60.
Inclination, 27.
Inclination, 38.
Incommode, 133.
Indépendant, 139.
Indication, 182.
Indice, 182.
Indicible, 134.
Indifférence, 33.
Indigence, 49.
Indigent, 158.
Indiscrétion, 79.
Indiscutable, 107.
Indolence, 33.
Indulgence, 53.
Industrie, 121.
Ineffable, 134.
Inepte, 179.
Inespéré, 130.
Inexact, 131.
Inexprimable, 131.
Infamie, 126.
Infécond, 178.
Infertile, 178.
Infirmer, 6.
Influence, 135.
Informer, 35.
Ingénu, 159.
Inimitié, 123.
Injonction, 69.
Inopiné, 130.
Inénarrable, 134.
Insensibilité, 33.
Insidieux, 110.
Instruire, 35.
Intégrité, 161.
Intelligence, 105.
Intelligent, 57.
Intention, 189.
Interdit, 180.
Intrépidité, 66.
Inventaire, 59.

J

Jadis, 31.
Jargon, 137.
Jérémiade, 117.
Jeu, 28.
Joli, 118.
Jugement, 40.
Justesse, 108.
Justice, 136.
Justification, 34.

L

Laconique, 70.
Lamentation, 117.
Langage, 137.
Langue, 137.
Langueur, 3.
Larron, 188.
Légal, 138.
Légitime, 138.
Libre, 139.
Licite, 138.
Liste, 59.
Livide, 51.
Louche, 26.
Luxe, 140.

M

Magnificence, 140.
Maintien, 21.
Maisonnette, 141.
Malavisé, 106.
Malentendu, 104.
Malheur, 142.
Malin, 144.
Malicieux, 144.
Manuel, 8.
Manifeste, 107.
Marche, 24.
Marché, 12.
Mariage, 143.
Mauvais, 144.
Méchant, 144.
Mécompte, 104.
Mégarde, 132.
Mélanger, 145.
Mêler, 145.
Mémoire, 59.
Mensonger, 110.
Méprise, 104.
Mépriser, 84.
Merveille, 160.
Mésintelligence, 86.
Métier, 146.
Mine, 21.
Miracle, 160.
Misère, 49.
Mitiger, 16.
Mobile, 147.
Modèle, 177.
Modérer, 16.
Modification, 62.
Mollesse, 33.
Monceau, 25.
Mordant, 60.
Motif, 147.
Muet, 172.
Multitude, 71.
Mutuel, 148.

N

Naïf, 149.
Nécessité, 49.
Nécessiteux, 158.
Neuf, 150.
Niais, 179.
Nigaud, 179.
Noce, 143.
Nonchalance, 33.
Notoire, 107.
Nourriture, 23.
Nouveau, 150.
Nuage, 151.
Nue, 151.
Nuée, 151.

O

Obéissant, 95.
Objet, 56.
Obsèques, 114.
Obstacle, 90.
Obstiné, 102.
Occasion, 152.
Occurrence, 152.
Opiniâtre, 102.
Opinion, 171.
Opulence, 7.
Opprobre, 126.
Orage, 153.
Ordinaire, 154.
Ordre, 69.
Orgueil, 155.
Ouvrage, 48.
Ouragan, 153.

P

Pacifique, 156.
Pacte, 12.
Paisible, 156.
Pâle, 51.
Partage, 157.
Patois, 137.
Pauvre, 158.
Pauvreté, 49.
Péché, 78.
Peine, 61.
Pénétration, 65.
Pénible, 124.
Pensée, 171.
Péril, 80.
Permanent, 98.
Permis, 138.
Permission, 36.
Persévérer, 72.
Persister, 72.
Perspicacité, 65.
Pervertir, 116.
Peureux, 77.
Plainte, 117.

Plaisir, 28.
Plausible, 159.
Pointilleux, 64.
Poli, 20.
Pompe, 140.
Ponctuel, 41.
Pondéré, 120.
Poste, 101.
Précis, 8.
Précision, 108.
Préjudice, 184.
Présage, 182.
Prescription, 69.
Présent, 97.
Présomption, 155.
Presse, 71.
Presser, 9.
Prétexte, 147.
Probable, 159.
Probité, 161.
Processif, 64.
Prodige, 160.
Profession, 146.
Profitable, 186.
Prolixe, 91.
Promptitude, 15.
Prostration, 3.
Pusillanime, 77.

Q

Quémander, 174.
Quittance, 162.
Quitter, 2.

R

Rabaisser, 1.
Raccommoder, 13.
Raison, 147.
Rapidité, 15.
Rare, 50.
Raturer, 100.
Ravaler, 1.
Ravissement, 103.
Rayer, 100.
Récalcitrant, 167.
Récent, 150.
Recevoir, 10.
Réciproque, 148.
Réclamer, 164.
Réconcilier, 13.
Reconnaissance, 163.
Récréation, 28.
Reçu, 162.
Reculer, 89.
Redemander, 164.
Regarder, 187.
Régir, 119.
Regret, 167.
Réjouissance, 28.
Remettre, 89.
Remords, 167.
Rémunération, 115.
Renommé, 128.
Renverser, 4.
Repartie, 166.
Répartition, 157.
Repentir, 167.
Répertoire, 59.
Réplique, 166.
Réponse, 166.
Réprimander, 52.
Résidence, 96.
Résolution, 189.
Ressemblance, 29.
Résumé, 8.
Retarder, 89.
Rétif, 167.
Retoucher, 74.
Réunir, 13.
Revêche, 167.
Révéler, 81.
Revendiquer, 164.
Revers, 142.
Revoir, 74.
Révoquer, 6.
Richesse, 7.
Risible, 68.
Risque, 80.
Rive, 75.
Route, 63.
Ruiner, 4.

S

Sacrifice, 5.
Sagacité, 65.
Sain, 168.
Salaire, 115.
Salutaire, 168.
Salubre, 168.
Savoir-faire, 121.
Savoureux, 169.
Secours, 37.
Séduire, 170.
Sentence, 40.
Sentiment, 171.
Sépulcre, 183.
Sépulture, 183.
Se servir, 185.
Sérieux, 120.
Silencieux, 172.
Similitude, 29.
Simple, 149.
Sincérité, 113.
Singulier, 50.
Sobre, 173.
Solliciter, 174.
Soumis, 95.
Sommaire, 8.
Sommet, 175.
Somptuosité, 140.
Souffrance, 61.
Souffrir, 176.
Souhaiter, 87.
Soutenir, 17.
Soutien, 111.
Spécimen, 177.
Splendeur, 140.
Stable, 98.
Stérile, 178.
Stimuler, 109.
Stupéfait, 180.
Stupéfié, 180.
Stupide, 179.
Suborner, 170.
Subsistance, 23.
Succulent, 169.
Suffisance, 155.
Suffrage, 36.
Suivre, 11.
Support, 111.
Supposition, 181.
Surpris, 180.
Symptôme, 182.

T

Tâche, 48.
Taciturne, 172.
Tas, 25.
Témérité, 125.
Tempérant, 173.
Tempérer, 16 .
Tempête, 153.
Tendresse, 27.
Têtu, 102.
Tergiverser, 46.
Timide, 77.
Timoré, 77.
Tolérer, 176.
Tombe, 183.
Tombeau, 183.
Tort, 184.
Tourmente, 153 .
Traité, 12.
Traitement, 115.
Tranquille, 156.
Transe, 32.
Transformation, 62.
Transport, 103.
Travail, 48.
Traverse, 90.
Trivial, 154.
Trompeur 110.
Tumulte, 112.
Turpitude, 126.

U

Usage, 76.
User, 185.
User, 185.
Utile, 186.

V

Vacarme, 1112.
Vaillance, 66.
Valeur, 66.
Vanité, 155.
Vantard, 122.
Volonté, 189.
Véracité, 113.
Verbeux, 91.
Véritable, 44.
Vieux, 30.
Vice, 85.
Village, 54.
Vocation, 58.
Voie, 63.
Voir, 187.
Voleur, 188.
Veiléité, 189.
Vouloir, 87.
Vrai, 44.
Vraisemblable, 159.
Vues, 56.
Vulgaire, 154.

Z

Zèle, 190.

ARITHMÉTIQUE

LES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Les chapitres réservés aux sciences mathématiques comprennent l'étude successive et élémentaire de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie et de la trigonométrie.

En dehors d'une partie théorique, chacun des chapitres suivants comprend un très grand nombre d'exercices, de problèmes numériques ou non dont le corrigé est donné avec toutes les explications nécessaires. Ces exercices ne peuvent être résolus que par la connaissance parfaite du cours proprement dit, mais ils constituent le but de cet enseignement mathématique que nous avons voulu essentiellement pratique.

Sans méconnaître, bien au contraire, le rôle profondément éducateur des mathématiques, les qualités de rectitude dans le jugement que donne la recherche de la vérité scientifique, c'est-à-dire de la vérité absolue, il est certain que les mathématiques sont, dans la grande majorité des cas, non un but purement spéculatif, mais un moyen : connaissance si nécessaire de l'arithmétique (en dehors des quatre règles qui ne sont ignorées de personne) pour la résolution de problèmes qui se posent chaque jour (fractions, intérêt, escompte etc.), utilité pratique du calcul algébrique pour la solution rapide et la discussion de certaines questions, étude de la géométrie et de la trigonométrie si nécessaires dans les questions d'arpentage et pour la compréhension de la mécanique et de la physique.

AVERTISSEMENT

L'arithmétique est la science des nombres. Le lecteur devra connaître parfaitement les notions préliminaires, la définition des nombres, des grandeurs, des égalités et inégalités, des unités de différents ordres puis il étudiera l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Ces questions élémentaires lui sont déjà familières, mais il trouvera à cette étude raisonnée et plus théorique que celle qu'il a peut-être faite déjà de quoi satisfaire son esprit avide d'explications scientifiques.

Le lecteur ne manquera pas de faire, dès le début, pour s'habituer au raisonnement mathématique, tous les exercices pratiques dont il vérifiera la solution dans le corrigé qui figure à la fin du chapitre.

Les caractères de divisibilité, le plus grand commun diviseur, le plus petit commun multiple, les nombres premiers conduisent à l'étude si importante des fractions auxquelles le lecteur devra réserver toute son attention, en particulier aux questions de simplification qui permettent de faire plus aisément les opérations usuelles et qui conduisent tout naturellement aux rapports, proportions et nombre décimaux.

L'extraction de la racine carrée a une grande importance pratique et nous aurons à l'utiliser en particulier pour la résolution de nombreux problèmes de physique. Il en est de même de la mesure des grandeurs proprement dites qui constitue le système métrique (longueurs, surfaces, volumes, monnaies etc.). Ce chapitre se termine enfin par une théorie des règles d'intérêts, d'escompte, de partages proportionnels, de mélanges, d'alliages, aux applications immédiates.

ARITHMÉTIQUE

Notions préliminaires

1. Nombre et grandeur. — Les notions de *nombre* et de *grandeur* sont les notions fondamentales de l'arithmétique. Comme toutes les idées premières elles sont difficiles à définir.

2. Idée de nombre entier. — L'idée de *nombre entier* nous vient de la considération d'objets distincts. Chacun de nous a une idée parfaitement nette de ce que c'est qu'*un* objet, considéré isolément, et de ce que c'est qu'une *collection* d'objets.

Chaque objet appartenant à la collection est ce qu'on appelle une *unité*, que ces objets soient pareils ou non, pourvu qu'ils soient distincts.

Ainsi je conçois sans peine qu'un troupeau est une collection d'unités, qui sont les animaux dont il est formé, que ces animaux soient de même espèce ou non.

L'unité peut, d'ailleurs, être elle-même une collection.

Ainsi un régiment est une collection de bataillons ; chaque bataillon se compose de plusieurs compagnies ; chaque compagnie est un groupe de soldats. Suivant les cas, l'unité est le bataillon, la compagnie ou le soldat.

Une collection d'unités est un nombre entier.

Chercher le *nombre* des objets, ou *unités*, d'une collection, c'est *compter* ces objets.

3. Idée de grandeur. — On désigne sous le nom de *grandeur* tout objet, toute quantité, toute collection d'objets susceptible d'exister sous divers états ; en un mot, tout ce qui peut être augmenté ou diminué.

Ainsi la population d'une ville, la longueur d'un champ, le poids d'un corps, la vitesse d'un cycliste, sont des grandeurs. D'une façon plus spéciale, on appelle *grandeurs mathématiques* celles pour lesquelles on peut définir *l'égalité* et la *somme*. Parmi les grandeurs mathématiques les plus usuelles, citons : les collections d'objets distincts, les longueurs, les surfaces, les volumes, les angles, les arcs, les forces, les quantités de chaleur, etc.

4. Nombres égaux et nombres inégaux. — *Les nombres des objets de deux collections sont* EGAUX *quand on peut faire correspondre un à un les objets de ces collections.*

Ainsi un maître, ayant à distribuer un paquet de livres à ses élèves, doit comparer le nombre de livres et le nombre d'élèves : il les fait correspondre un à un, en cherchant à donner un livre à chaque élève. Diverses circonstances sont alors possibles.

Ou bien tous les livres sont distribués et chaque élève a reçu un livre ; on dit alors qu'il y a *autant* de livres que d'élèves, ou que les deux nombres entiers, nombre de livres, nombre d'élèves, sont égaux et on écrit :

Nombre de livres = nombre d'élèves.

Le signe = se prononce égal : c'est le signe de *l'égalité*.

Ou bien les livres ne sont pas tous distribués quand chaque élève a reçu le sien : on dit alors qu'il y a *plus* de livres que d'élèves ; ou qu'il y a *moins* d'élèves que de livres ; ou encore que le nombre de livres est *plus grand* que le nombre d'élèves, que le nombre d'élèves est *plus petit* que le nombre de livres, et on écrit :

nombre de livres > nombre d'élèves

ou

nombre d'élèves < nombre de livres ;

le signe > s'énonce *plus grand que* ou *supérieur à* ; le signe < s'énonce *plus petit que* ou *inférieur à* ; les signes > et < sont les signes de l'*inégalité*.

De même, enfin, il peut arriver qu'il n'y ait pas assez de livres, le paquet de livres, étant épuisé avant que chaque élève ait reçu le sien : alors le nombre de livres est *plus petit* que le nombre d'élèves, le nombre d'élèves est *plus grand* que le nombre de livres.

La comparaison de deux nombres entiers permet de reconnaître si ces deux nombres sont *égaux* ou *inégaux* et s'ils sont inégaux, lequel est le *plus grand*, lequel est le *plus petit*.

5. Plus généralement, soit *a* un certain nombre et *b* un deuxième nombre. On peut avoir :

1° *égalité* : $a = b$

2° *inégalité* : $a \neq b$ (a différent de b) $\begin{cases} a > b \\ a < b \end{cases}$

6. Principes. — 1° Deux nombres égaux à un même troisième sont égaux entre eux.

Si $a = b$ et $a = c$, on a $b = c$;

2° Si un nombre *a* est plus petit qu'un nombre *b*, lequel est lui-même plus petit qu'un troisième nombre *c*, *a* est à fortiori plus petit que *c*.

On a alors la *double relation* :

$a < b < c$ d'où $a < c$

ou bien $c > b > a$ d'où $c > a$

On dit que ces trois nombres sont rangés, dans le premier cas *par ordre de grandeur croissante*, et dans le deuxième cas, *par ordre de grandeur décroissante*.

7. Formation des nombres entiers. — Je prends un sac et des billes. Le sac étant d'abord vide ; nous dirons que le *nombre* des billes contenues dans le sac est *zéro*.

Je mets une bille dans le sac ; le *nombre* des billes qu'il contient est *un*.

J'ajoute une nouvelle bille dans le sac ; le *nombre* des billes qu'il contient est alors *un et un* ; disons tout de suite qu'il s'appelle *deux*.

J'ajoute alors une bille ; le *nombre* est alors *deux et un* et s'appelle *trois*.

Avec une bille de plus, le *nombre* est *trois et un* et s'appelle *quatre*. Et ainsi de suite.

8. La suite des nombres entiers. — *Zéro* (1), *un, deux, trois, quatre*, etc., *telle que chaque nombre se déduit du précédent en lui ajoutant une unité, est ce qu'on appelle* LA SUITE NATURELLE *des nombres entiers.*

La suite naturelle des nombres entiers est illimitée ; car chaque fois que l'on a formé un nombre entier, on peut en former un nouveau en ajoutant un.

9. — Deux nombres entiers inégaux diffèrent d'au moins une unité.

Par exemple si $a < b$ on peut écrire $a + 1 \leqq b$ qu'on lit $(a + 1)$ inférieur ou au plus égal à b.

L'idée de nombre s'étend et se généralise dans la mesure des grandeurs.

10. Mesure d'une grandeur. — *Mesurer* une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur de même espèce qu'on nomme *unité*.

Il y a évidemment autant d'unités que d'espèces de grandeurs. Une collection d'objets est une grandeur.

Chaque objet de la collection étant considéré comme une unité, mesurer la collection c'est compter le nombre des objets (ou des unités) qui la composent.

La longueur d'une table, la capacité d'une barrique, etc., sont aussi des grandeurs (2).

Mesurer ces grandeurs c'est comparer chacune à une unité que l'on choisira convenablement, par exemple : au mètre, au litre.

Dire par exemple qu'une longueur mesure *trois* mètres, c'est dire qu'on l'obtient en plaçant bout à bout *une*, puis *une*, longueurs égales à une longueur qu'on appelle le *mètre* et qu'on prend comme unité.

Dire que la mesure d'une grandeur est le nombre *quatre*, c'est dire que cette grandeur s'obtient en réunissant *une* et *une* et *une* et *une* grandeurs égales à l'unité.

11. — D'une façon générale :

Un nombre est ce qui indique comment on forme une grandeur avec celle de même espèce, qui est prise pour unité.

12. Nombres abstraits et nombres concrets. — Les nombres sont donc essentiellement *abstraits*, c'est-à-dire qu'on les considère *abstraction faite de la grandeur dont ils fournissent la mesure.*

Le nombre *trois* mesure une grandeur quelconque qui contient trois fois son unité ; il mesure une longueur s'il s'agit de trois mètres, un poids s'il s'agit de trois kilogrammes.

Cependant lorsque le nombre est suivi de l'unité qui l'a fourni, on l'appelle quelquefois, mais à tort, nombre *concret*, car trois mètres ne désignent pas un nombre, mais une grandeur.

13. Nombres entiers et nombres fractionnaires. — Lorsqu'on mesure une grandeur continue, une longueur par exemple, il peut se présenter trois cas :

1° L'unité est exactement contenue une ou plusieurs fois dans la longueur. Le résultat de la comparaison s'exprime par un *nombre entier*.

2° L'unité n'est pas exactement contenue dans la longueur. On partage alors l'unité en un certain nombre de parties égales, ou parties aliquotes, et une de ces parties portée sur la grandeur à mesurer y est contenue un nombre exact de fois.

La largeur d'une table contient trois fois le cinquième du mètre, sa largeur est trois cinquièmes de mètre. Le résultat de la comparaison s'exprime par un *nombre fractionnaire*.

Quand une grandeur est mesurée par un nombre entier ou un nombre fractionnaire, elle est dite *commensurable* avec son unité.

3° Il peut se faire que, *théoriquement*, il n'existe pas de parties aliquotes qui soient contenues un nombre exact de fois dans la grandeur à mesurer. La grandeur est dite *incommensurable* avec l'unité. Telles sont, dans un carré, les longueurs de la diagonale et du côté.

14. But de l'arithmétique. — L'arithmétique est la science des nombres. Elle a pour objet l'étude des *opérations* sur les nombres et de *leurs propriétés*.

Numération décimale

Tout système de numération comprend :

1° La dénomination des nombres : *numération orale* ou *parlée* ;

2° La représentation écrite des nombres : *numération écrite*.

15. Numération parlée. — Son but est d'établir des règles avec lesquelles on peut, au moyen d'un nombre restreint de mots, nommer tous les nombres usuels.

16. — L'idée fondamentale de la numération consiste à réunir les unités qui composent un nombre par *groupes comprenant un même nombre d'unités*, puis à réunir à leur tour plusieurs de ces groupes et ainsi de suite.

Les papetiers procèdent de cette manière pour compter leurs feuilles de papier : ils réunissent ces feuilles par groupes de *cinq* appelés cahiers ; un groupe de cinq cahiers forme une *main* ; le groupe de *vingt* mains forme une *rame* ; de sorte que, pour compter les feuilles, il suffit au papetier de compter combien il a de rames, combien de mains non réunies en rames, combien de cahiers non réunis en mains ; combien de feuilles non réunies en cahiers.

17. — Dans la numération on procède par *groupements de dix unités* ; et pour cette raison la numération est appelée *numération décimale*.

18. Première règle : Les dix premiers nombres. — On donne des noms particuliers au nombre *zéro* et aux dix premiers nombres ensuite qui sont :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.

19. Secondes règles : Les Unités des divers ordres. — On fait ensuite la convention que voici :

Dix unités (simples) forment une nouvelle unité, appelée unitée du second ordre ou **dizaine.**

Dix unités du second ordre, ou dizaines, forment une nouvelle unité, dite unité du troisième ordre, ou CENT, *ou* CENTAINE.

Dix unités du troisième ordre, ou centaine, forment une unité du quatrième ordre, ou MILLE.

PLUS GÉNÉRALEMENT :

Dix unités d'un ordre quelconque forment une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

20. Nombres de dix à mille. — On convient de compter en prenant pour unité un groupe de dix unités ou dizaine. On devrait donc dire en ajoutant cette

---

(1) Le zéro n'est pas un véritable nombre, il indique l'absence de toute unité. On dit que c'est un *nombre nul*.

(2) On distingue parfois sous le nom de GRANDEURS DISCONTINUES les grandeurs composées d'objets distincts et analogues (tas de pommes, sac de billes) et sous le nom de GRANDEURS CONTINUES celles où l'on n'aperçoit pas d'objets distincts (longueur d'un ruban, surface d'un champ).

On remarquera que les grandeurs continues peuvent être augmentées ou diminuées insensiblement tandis que les grandeurs discontinues ne peuvent croître que brusquement de quantités formées d'unités.

nouvelle unité à elle-même et aux nombres qui en résultent :

Deux-dix, trois-dix..., neuf-dix, dix-dix ou cent, mais l'usage ayant prévalu, on a dit :

Vingt, trente..., nonante ou quatre-vingt-dix.

Entre deux dizaines consécutives, il y a neuf nombres intermédiaires que l'on nommera en faisant suivre chaque dizaine du nom des neuf premiers nombres : *dix-un, dix-deux, dix-trois..., quatre-vingt-un, quatre-vingt-deux...*

Par une dérogation fâcheuse on a dit *onze* pour dix-un, *douze* pour dix-deux, etc.

On sait ainsi nommer tous les nombres de un à cent.

On comptera ensuite par centaines comme on a compté par unités et par dizaines :

Cent, deux cents, trois cents..., dix cents ou *mille.*

En faisant suivre chaque nom de centaines du nom des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres on nommera tous les nombres de un à mille.

21. Nombres plus grands que mille. — Classes. — Les nombres de *un* à *mille* forment ce qu'on appelle les nombres de la *première classe.*

A partir de *mille, pour éviter* d'employer un trop grand nombre de mots nouveaux, on convient de compter par mille comme on a compté par unités simples, c'est-à-dire par unité de mille, dizaine de mille et centaine de mille. On dit donc *deux mille, trois mille* jusqu'à *dix mille* qui est l'unité du cinquième ordre ; puis *vingt mille, trente mille,* jusqu'à *cent mille* qui est l'unité du sixième ordre. On a ensuite *deux cent mille, trois cent mille,* jusqu'à *dix cent mille* que l'on nomme *million* et qui est l'unité du septième ordre.

22. — Tous les nombres depuis *mille un* jusqu'à *un million* forment la *seconde classe* ou *classe des mille.*

On compte ensuite par millions comme on a compté par unités simples et par mille. Mille millions forment un *billion* ou *milliard.*

23. — Les nombres de *un million un* à un *billion* forment la *troisième classe des millions.*

On pourrait continuer de la sorte et nommer mille billions un *trillion,* mille trillions un *quatrillion* et cela sans limite. A chaque nouvelle classe on créerait un mot nouveau.

24. Résumé. — Le tableau suivant résume ce qui précède :

1re classe ou classe des unités simples :

Unités ..... premier ordre
Dizaines ..... deuxième ordre
Centaines ..... troisième ordre

2e classe ou classe des milles :

Unités de mille ..... quatrième ordre
Dizaines de mille ..... cinquième ordre
Centaines de mille ..... sixième ordre

3e classe ou classe des millions :

Unités de millions ..... septième ordre
Dizaines de millions ..... huitième ordre
Centaines de millions ..... neuvième ordre
.....

25. Numération écrite. — Son but est d'établir des règles à l'aide desquelles on peut, au moyen d'un nombre restreint de symboles, écrire tous les nombres entiers.

26. Chiffres. — Les symboles employés sont appelés *chiffres.* Ils représentent les dix premiers nombres à partir de zéro. Ce sont avec leurs valeurs

0	1	2	3	4	5	6
zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,
7	8	9				
sept,	huit,	neuf.				

Les chiffres autres que le zéro sont appelés *chiffres significatifs.*

27. Décomposition d'un nombre en unités des divers ordres. — D'après la règle des ordres, *tout nombre entier peut être considéré comme la réunion de plusieurs unités des divers ordres.* D'ailleurs, le nombre des unités de chaque ordre ne dépasse jamais *neuf.*

Ainsi le nombre sept cent quarante-deux se compose de *deux* unités simples, de *quatre* dizaines et de *sept* centaines. Un nombre sera donc représenté sans ambiguité si l'on indique les *chiffres* des unités des divers ordres qu'il contient. Ce résultat s'obtient en adoptant la convention suivante :

28. Convention fondamentale. — *Tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur à l'ordre des unités que représente cet autre chiffre.*

On emploiera le zéro pour marquer la place des unités qui manquent.

29. — Soit à écrire le nombre :

Trente millions huit cent trois mille deux cent quarante-neuf. On peut former le tableau suivant :

Ordres	8e	7e	6e	5e	4e	3e	2e	1er
Énoncé du nombre	Trente millions		Huit cent		Trois mille	Deux cent	Quarante	Neuf
Nombre d'unités de chaque ordre	3	0	8	0	3	2	4	9

Le nombre s'écrira purement et simplement en mettant les uns à la suite des autres les chiffres de la deuxième ligne du tableau :

30803249

Pour faciliter la lecture du nombre, on le sépare généralement en tranches de trois chiffres à partir de la droite, comme ceci :

30 803 249

Pour le lire, il suffit alors d'énoncer le nombre exprimé par les chiffres de chaque tranche en le faisant suivre du nom de l'unité principale de la classe correspondante.

30. Valeur absolue, valeur relative d'un chiffre. — Tout chiffre a deux valeurs :

1° Sa *valeur absolue,* qu'il a par lui-même, celle qu'il possède quand il est seul ;

2° Sa *valeur relative,* qu'il acquiert par la place qu'il occupe dans le nombre.

Ainsi dans 48 541 le chiffre 5 a pour valeur relative 5 centaines ou 500 unités.

31. Numération à base quelconque. — *La base d'un système de numération est le nombre qui exprime combien il faut d'unités d'un ordre quelconque pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur.*

On peut prendre pour base un nombre quelconque : 2, 3, 7, 12, etc. Dans le système à base 12 les conventions de la numération parlée et écrite s'expriment :

1° *Douze* unités d'un ordre quelconque constituent *une* unité de l'ordre immédiatement supérieur.

2° Tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur.

Ainsi douze sera représenté par 10. (D'ailleurs dans tous les systèmes la base s'écrit 10.)

32. Remarques. — Dans le système à base 8 il faut 8 chiffres y compris le zéro.

Dans le système à base 12 il faut 12 chiffres, A et B, par exemple, représenteraient dix et onze.

Ainsi dans le système décimal,

$$7832 = 7000 + 800 + 30 + 2$$

ce qui peut s'écrire :

$$7832 = 2 + 10 \times 3 + 10^2 \times 8 + 10^3 \times 7$$

Dans le système à base 12 (système duodécimal) le nombre 7832 peut s'exprimer en unités duodécimales.

$$7832 = 2 + 12 \times 3 + 12^2 \times 8 + 12^3 \times 7$$

33. — Les remarques qui précèdent permettent de résoudre les trois problèmes suivants :

PREMIER PROBLÈME. — *Un nombre étant écrit dans le système décimal, l'écrire dans un autre système.*

Soit à écrire 4539 du système décimal dans le système à base 8. On cherchera combien 4539 contient de huitaines (unités de 2e ordre), puis d'unités du 3e ordre, etc.

Disposition pratique :

4 539	8		
53	567	8	
59	07	70	8
3		6	8

Le nombre cherché est 8673.

DEUXIÈME PROBLÈME. — *Un nombre étant écrit dans le système à base* n, *l'écrire dans le système décimal.*

Soit à écrire le nombre 8673 du système à base 8 dans le système décimal. On écrit :

$$8673 = 3 + 8 \times 7 + 8^2 \times 6 + 8^3 \times 8$$

Dispositions pratiques :

3	.....	3
70	8×7	56
600	$8^2 \times 6 = 64 \times 6$	384
8 000	$8^3 \times 8 = 512 \times 8$	4 096
8 673	correspond à	4 539

TROISIÈME PROBLÈME. — *Un nombre étant écrit dans le système à base* n, *l'écrire dans un autre système* n'.

Soit à écrire le nombre 8673 du système à base 8 dans le système à base 12.

On transcrit 8673 dans le système décimal, puis l'on transcrit le résultat du système décimal au système à base 12.

On a $8\,673_8$, $4\,539_{10}$, $2\,763_{12}$.

Exercices

1. — Combien y a-t-il de nombres entiers de 2 chiffres, de 3 chiffres, de 4 chiffres, de *n* chiffres ?

2. — Combien faut-il de chiffres pour numéroter les 256 pages d'un livre ?

3. — On écrit les nombres dans leur ordre naturel. Quel est le chiffre qui occupe le 900e rang ? le 1500e rang ?

4. — On a employé 2977 caractères pour paginer un livre ; quel est le nombre de ses pages ?

5. — Ecrire les nombres de 1 à 10 dans le système binaire (à base 2) ; de 1 à 30 dans le système à base 7.

Addition

34. Définition. — *L'addition est une opération qui a pour but, étant donné plusieurs nombres, d'en trouver un autre appelé* SOMME *ou* TOTAL *qui contienne autant d'unités qu'il y en a dans tous les autres séparément.*

En d'autres termes, ajouter deux ou plusieurs collections, c'est réunir ces collections en une seule.

35. — Ainsi 3, 2, 5 sont les trois collections d'unités suivantes :

I I I I I I I I I I

Réunissons ces collections en une seule et nous obtenons la nouvelle collection

I I I I I I I I I I

qui est le nombre 10 ; 10 est donc la somme des nombres. 3, 2, 5.

L'opération s'indique de la manière suivante :

$$3 + 2 + 5 = 10 \qquad (1)$$

Si *a*, *b*, *c*, *d*, sont les nombres donnés et si l'on désigne par *s* leur somme, on a :

$$a + b + c + d = s \qquad (2)$$

Les expressions (1) et (2) qui précèdent sont des *égalités.*

La première comprend *trois parties* ou *trois termes* situés à gauche du signe =, ou comme on dit, trois termes sont dans le *premier membre* de l'égalité. La somme est dans le *second membre* de l'égalité.

Remarquons que l'on peut exprimer un nombre quelconque sous la forme d'une somme de nombres égaux à 1

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

36. Propriétés de l'addition. — *L'addition est une opération* COMMUTATIVE *et* ASSOCIATIVE.

37. Principe 1. — *Dans une addition on peut intervertir l'ordre des termes.*

Ainsi :

$$3 + 2 = 2 + 3$$
$$5 + 7 + 9 = 7 + 5 + 9$$

Plus généralement :

$$a + b + c = a + c + b$$

Cela résulte de ce que, pour réunir plusieurs collections, on peut les réunir dans l'ordre que l'on veut.

38. Principe 2. — *Dans une somme de plusieurs nombres, on peut grouper plusieurs termes et les remplacer par leur somme.*

Ainsi :

$$7 + 3 + 5 + 8 = 3 + (7 + 5) + 8$$

PLUS GÉNÉRALEMENT :

$$a + b + c + d = a + (b + d) + c \qquad (1)$$

39. — On peut donc dans l'addition intervertir les termes, les *permuter*, dans un ordre quelconque. Aussi dit-on que l'addition est COMMUTATIVE.

On peut aussi remplacer plusieurs termes par leur somme, l'addition est ASSOCIATIVE.

40. Théorème. — *Pour ajouter une somme à un nombre, il suffit d'ajouter à ce nombre successivement chacune des parties de la somme.*

Sachant que :

$$15 = 3 + 8 + 4$$

On a :

$$7 + 15 = 7 + (3 + 8 + 4) = 7 + 3 + 8 + 4$$

et d'une façon générale :

$$N + (a + b + c + d) = N + a + b + c + d$$

Pratiquement, les principes et le théorème qui précèdent peuvent être résumés ainsi :

Dans une somme de plusieurs nombres on peut, à volonté, introduire, supprimer, ou déplacer des parenthèses.

(1) Les parenthèses signifient que ce qu'elles renferment doit être considéré un comme seul nombre, c'est-à-dire que l'opération indiquée à l'intérieur des parenthèses doit être considérée comme effectuée.

THÉORIE DE L'OPÉRATION PRATIQUE

41. — La question que l'on se propose est la suivante : Etant donné *plusieurs nombres écrits dans le système décimal, écrire leur somme dans ce même système.*
Nous distinguerons trois cas.

42. 1er Cas. — **Addition de deux nombres d'un seul chiffre.** — Il suffit d'ajouter au premier nombre successivement chacune des unités du second ; on sait le résultat par cœur, il est fourni par la table d'addition.

TABLE D'ADDITION

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

43. Deuxième cas. (Cas général). — **Addition de plusieurs nombres quelconques.**

Exemple : 587 + 6.

On pourrait ajouter les unités de 6 à 587 en disant 587 + 1 = 588 ; 588 + 1 = 589, etc. On préfère remarquer que 7 + 6 = 13 (1er cas) ce qui donne 3 unités et une dizaine, 8 diz. + 1 diz. = 9. Total 593.
On additionne les unités des deux nombres et s'il y a une dizaine de retenue on l'ajoute au chiffre suivant des dizaines.

44. Troisième cas. (Cas général.) — **Addition de plusieurs nombres quelconques.**

Exemple : 495 + 2206 + 313 + 15.

On considère chacun des nombres donnés comme la somme des valeurs relatives de ses différents chiffres ; on ajoute les unités d'un même ordre (1er cas et 2e cas) et on groupe les résultats obtenus suivant les principes de la numération.

495 = 0 mille + 4 centaines + 9 dizaines + 5 unités
2 206 = 2 mille + 2 centaines + 0 dizaine + 6 unités
313 = 0 mille + 3 centaines + 1 dizaine + 3 unités
15 = 0 mille + 0 centaine + 1 dizaine + 5 unités
Tot. = 2 mille + 9 centaines + 11 dizaines + 19 unités

ou successivement :

2 mille + 9 centaines + 11 dizaines + 19 unités
2 mille + 10 centaines + 2 dizaines + 9 unités
3 mille + 0 centaine + 2 dizaines + 9 unités
= 3029.

45. — Dans la pratique on dispose l'opération de la manière suivante de façon que les unités de même ordre soient dans une même colonne.

495
2206
313
15
3029

46. **Preuve de l'addition.** — On appelle *preuve* d'une opération une seconde opération que l'on fait pour contrôler l'exactitude du résultat de la première. En réalité, ce n'est qu'une *probabilité*, car cette seconde opération peut être, comme la première entachée d'erreur.

La preuve de l'addition se fait en recommençant l'opération après avoir interverti l'ordre des nombres. Le résultat de la nouvelle opération doit être le même que celui de l'addition primitive (37).

Exercices

6. — Pourquoi commence-t-on l'addition par la droite? Dans quel cas est-il indifférent de commencer l'addition par la droite ou par la gauche?

7. — Trouver trois nombres entiers consécutifs ayant pour somme 4725.

8. — Démontrer que la somme des n premiers nombres entiers est égale

$$\text{à } \frac{n(n+1)}{2}$$

Soustraction

47. — **Définition.** — *La soustraction est une opération qui a pour but, étant donné deux nombres d'en trouver un troisième qui, ajouté au second, donne une somme égale au premier.*

Ce troisième nombre est ce qu'on appelle la DIFFÉRENCE des deux nombres donnés, ou encore le RESTE de la soustraction, ou encore l'EXCÈS du plus grand nombre sur le plus petit.

De la définition il résulte que le plus grand des deux nombres est la somme du plus petit et de la différence.

On peut donc dire encore:

La soustraction est une opération qui a pour but, étant donné la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre.

48. — Si l'on compare par exemple deux collections inégales de billes comptant respectivement 8 billes et 5 billes, on voit qu'il faut ajouter 3 billes à la petite collection pour obtenir la grande. La différence cherchée est 3.

On a donc

$$5 + 3 = 8$$

La différence 3 se représente par la notation

$$8 - 5 = 3 \text{ (8 moins 5 égale 3)}$$

Si a et b sont les deux nombres donnés et leur différence d, on a :

$$a - b = d$$

avec la condition $b \leqq a$

PROPRIÉTÉS DE LA SOUSTRACTION

49. **Théorème I.** — *Pour retrancher une somme d'un nombre, on retranche successivement de ce nombre toutes les parties de la somme.*

Soit à retrancher du nombre 27 la somme 15 + 3 + 2. On indique l'opération en plaçant la somme entre parenthèses ; on écrit donc

$$27 - (15 + 3 + 2)$$

Pour effectuer cette soustraction, on doit retrancher de 27 toutes les unités contenues dans la somme 15 + 3 + 2, ce que l'on fera en retranchant 15 unités, puis du résultat 3 unités et enfin du nouveau résultat 2 unités.

On obtient successivement :

$$27 - 15 = 12 \; ; \; 12 - 3 = 9 ; \; 9 - 2 = 7$$

d'où l'égalité

$$27 - (15 + 3 + 2) = 27 - 15 - 3 - 2$$

Le théorème s'exprime par l'égalité générale.

$$N - (a + b + c) = N - a - b - c$$

50. Théorème II. — *La différence de deux nombres ne change pas si l'on ajoute un même nombre à chacun d'eux.*

D'après la définition, la différence de deux nombres représente les unités qui se trouvent dans le plus petit. Or, si l'on ajoute le même nombre aux deux nombres donnés, les unités ajoutées à l'un trouvent leurs équivalentes dans celles ajoutées à l'autre, et par suite, la différence est fixe. C'est, d'ailleurs, ce qui arrive pour les âges de deux personnes, dont la différence reste constante.

Soit la différence $a - b$. Ajoutons m à chacun de ces nombres ; leur nouvelle différence est

$$(a + m) - (b + m) \text{ ou } (a + m) - b - m$$

qu'on peut encore écrire

$$a + m - b - m$$

et comme les termes $+ m$ et $- m$ s'annulent, la différence devient

$$a - b$$

c'est-à-dire la différence donnée.

Donc :

$$a - b = (a + m) - (b + m)$$

51. Théorème III. — *Pour ajouter une différence à un nombre, on peut ajouter au nombre le premier terme de la différence et retrancher le second de la somme ainsi obtenue.*

Ainsi :

$$27 + (9 - 4) = 27 + 9 - 4$$

En ajoutant à 27 le nombre 9 au lieu de $9 - 4$ j'ai ajouté 4 unités de trop ; il faut donc qu'on les retranche du résultat $29 + 9$. On obtient $27 + 9 - 4$.

Le théorème s'exprime par l'égalité générale :

$$a + (b - c) = a + b - c$$

52. Théorème IV. — *Pour retrancher une différence d'un nombre, on peut ajouter à ce nombre le second terme de la différence et retrancher le premier de la somme ainsi obtenue.*

Ainsi :

$$15 - (17 - 8) = 15 + 8 - 17$$

En effet, la différence $15 - (17 - 8)$ ne change pas si l'on ajoute le même nombre 8 aux deux termes 15 et $(17 - 8)$; on a donc :

$$15 - (17 - 8) = 15 + 8 - (17 - 8 + 8)$$

ou :

$$15 - (17 - 8) = 15 + 8 - 17$$

Le théorème s'exprime par l'égalité générale :

$$N - (a - b) = N + b - a$$

53. Polynômes arithmétiques. — On appelle polynôme arithmétique une suite d'additions ou de soustractions *toutes possibles* du genre suivant :

$$17 + 8 - 15 + 7 - 8 + 10$$

avec la condition que les opérations se feront de gauche à droite dans l'ordre indiqué.

Supposons qu'un caissier, ayant 17 francs en caisse, ait successivement reçu 8 francs, payé 15 francs, reçu 7 francs, payé 8 francs, et enfin reçu 10 francs.

La somme en caisse serait alors de :

$$17 + 8 - 15 + 7 - 8 + 10$$

ou encore :

$$17 + 8 + 7 + 10 - (15 + 8)$$

54. — D'une manière générale on pourra écrire pourvu que les opérations indiquées soient toutes possibles.

$$a + b - c - d + e = b - c + a + e - d = b + e - d + a - c, \text{ etc.}$$

Notons que les lettres a, b, c, d, e, peuvent représenter elles-mêmes des sommes, des différences ou des polynômes arithmétiques ; on les appelle *termes* du polynôme.

THÉORIE DE L'OPÉRATION PRATIQUE

55. — Etant donné deux nombres écrits dans le système décimal, nous nous proposons d'écrire leur différence dans ce même système.

Nous distinguerons trois cas.

56. Premier cas. — *Le nombre à soustraire et le reste n'ont qu'un seul chiffre.*

Ex. : 15 — 8.

On pourrait enlever une à une 8 unités à 15 et dire

$$15 - 1 = 14; \; 14 - 1 = 13, \text{ etc.}$$

La table d'addition donne immédiatement le résultat. Il faut ajouter 7 à 8 pour obtenir 15, dont $15 - 8 = 7$.

57. Deuxième cas. — *Les deux nombres ont plusieurs chiffres, mais tous les chiffres du plus grand nombre sont supérieurs aux chiffres correspondants du plus petit nombre.*

Ex. : 9867 — 6325.

On considère chacun des nombres comme la somme des valeurs relatives de ses différents chiffres et on procède à la soustraction ordre par ordre en ôtant 5 unités de 7 unités ; 2 dizaines de 6 dizaines, 3 centaines de 8 centaines et 6 unités de mille de 9 unités de mille, toutes opérations du premier cas.

58. — On dispose l'opération de la manière suivante :

Grand nombre	9867
Petit nombre	6 25
Différence	3542

Pratiquement il est bon de faire la soustraction par l'addition. On dira 5 et 2, 7 et l'on écrit 2; 2 et 4, 6 et l'on écrit 4, etc.

59. Troisième cas. — *Les deux nombres sont quelconques.*

Ex. : 5364 — 2297.

On rend l'opération possible en appliquant le théorème (50).

En supposant les ordres comme précédemment on a

5 m.	3 c.	6 d.	4 u.	
2 m.	2 c.	9 d.	7 u.	
3 m.	0 c.	6 d.	7 u.	

et on opère sur

5 m.	3 c.	16 d.	14 u.
2 m.	3 c.	(9 + 1) d.	7 u.

Ne pouvant retrancher 7 unités de 4 unités, on ajoute 10 unités au plus grand nombre, ce qui en fait 14 et l'on dit 7 ôtés de $14 = 7$, on écrit 7. Pour que la différence ne soit pas changée, il faut aussi ajouter 10 unités au plus petit nombre ou 1 dizaine. On dira 1 dizaine de retenue et 9 dizaines font 10 dizaines, 10 ôtés de $16 = 6$, etc. D'où la règle :

60. Règle. — *On écrit le plus petit nombre sous le plus grand de façon que les unités de même ordre se correspondent dans une même colonne verticale. On retranche successivement, en commençant par la droite, les chiffres du plus petit nombre des chiffres correspondants du plus grand. Si une soustraction est impossible, on ajoute 10 au chiffre du plus grand nombre et 1 au chiffre de l'ordre immédiatement supérieur du plus petit nombre. On écrit les chiffres de la différence au fur et à mesure qu'on les obtient, dans la colonne correspondant aux unités qu'ils représentent.*

61. Preuve. — La preuve de la soustraction se fait en ajoutant la différence au plus petit nombre ; on doit trouver le plus grand nombre.

Exercices

9. — Que devient le reste d'une soustraction ?

1° Quand on augmente le grand nombre d'un certain nombre d'unités?

2° Quand on augmente le petit nombre d'un certain nombre d'unités?

3° Quand on diminue le grand nombre d'un certain nombre d'unités?

4° Quand on diminue le petit nombre d'un certain nombre d'unités?

5° Quand on diminue les deux nombres d'un certain nombre d'unités?

6° Quand on augmente le grand nombre d'un certain nombre d'unités et le petit nombre d'un autre nombre d'unités? (Deux cas à considérer.)

7° Quand on diminue le grand nombre d'un certain nombre d'unités et le petit nombre d'un autre nombre d'unités? (Deux cas à considérer.)

8° Quand on augmente le grand nombre et qu'on diminue le petit nombre d'un même nombre d'unités?

9° Quand on diminue le grand nombre et qu'on augmente le petit nombre d'un même nombre d'unités?

10. — Trouver deux nombres, dont la somme est 2283 et la différence 687. Généraliser.

Multiplication

62. Définition. — *La multiplication est une opération qui a pour but, étant donné deux nombres, l'un appelé* MULTIPLICANDE, *l'autre* MULTIPLICATEUR, *d'en trouver un troisième appelé* PRODUIT *qui soit la somme d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.*

63. — Ainsi, par définition, le produit de 12 par 5 est la somme

$$12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60$$

12 est le nombre répété ; c'est le multiplicande, le nombre 5 des termes égaux à 12 est le multiplicateur.

Le multiplicande et le multiplicateur sont dits les *facteurs* du produit.

On remarquera que la multiplication des nombres entiers est un cas particulier de l'addition ; c'est une *addition abrégée.*

Le signe de la multiplication est $\times$ ou un point . ; on l'énonce *multiplié par.*

Ainsi 12 multiplié par 5 s'écrit 12×5 ou $12 . 5$.

Quand les facteurs sont des lettres on supprime tout signe.

Ex. : $ab = a \times b = a.b$.

64. — Dans la pratique on a souvent à faire des opérations telles que 12 fr. $\times$ 5 ; 12 kg. $\times$ 5 ; 12 l. $\times$ 5. Il s'agit alors de répéter 5 fois la grandeur 12 francs ou 12 kilogrammes ou 12 litres ; c'est pourquoi, on dit souvent que le multiplicande est un nombre concret et le produit un nombre concret de même espèce que le multiplicande. La multiplication unique $12 \times 5 = 60$ donne les résultats de toutes les multiplications précédentes.

PROPRIÉTÉS DE LA MULTIPLICATION

I.— Produit d'une somme et d'une différence par un nombre

65. Théorème I. — *Pour multiplier une somme par un nombre, on peut multiplier chaque partie de la somme par ce nombre et additionner les produits ainsi obtenus.*

Soit à multiplier la somme $5 + 3 + 2$ par le nombre 3.

Le produit cherché est la somme de 3 nombres égaux à $5 + 3 + 2$. On a donc :

$$\begin{aligned}(5+3+2) \times 3 &= (5+3+2)+(5+3+2)+(5+3+2)\\ &= 5+3+2+5+3+2+5+3+2 \quad (37)\\ &= 5+5+5+3+3+3+2+2+2 \quad (40)\\ &= 5\times3+3\times3+2\times3\end{aligned}$$

Le théorème s'exprime par l'égalité générale :

$(a + b + c)\, m = am + bm + cm.$

66. Théorème II. — *Pour multiplier une différence par un nombre, on peut multiplier chaque terme de la différence par ce nombre et retrancher le deuxième produit obtenu du premier.*

Soit à multiplier la différence $9 - 4$ par le nombre 3. Le produit cherché est la somme de 3 nombres égaux à $(9 - 4)$. On a donc :

$$\begin{aligned}(9-4) \times 3 &= (9-4) + (9-4) + (9-4)\\ &= 9-4+9-4+9+4\\ &= 9+9+9-4-4-4\\ &= (9+9+9)-(4+4+4)\\ &= 9\times3-4\times3\end{aligned}$$

Le théorème s'exprime par l'égalité générale :

$(a - b)\, m = am - bm.$

67. Remarque. — Pour un polynôme arithmétique on aurait :

$(a - b + c - d - e)\, m = am - bm + cm - dm - em.$

Les deux théorèmes qui précèdent expriment que la multiplication est DISTRIBUTIVE par rapport à l'addition et à la soustraction.

II. — Produits de facteurs

68. Définition. — On appelle *produits de plusieurs facteurs,* rangés dans un certain ordre, le nombre obtenu en multipliant le premier facteur par le second, le résultat obtenu par le troisième et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur.

Ainsi :

$$8 \times 3 \times 5 \times 7 \text{ ou } 8 . 3 . 5 . 7$$

est le produit des facteurs 8, 3, 5, 7, effectué en disant :

$8 \times 3 = 24, \qquad 24 \times 5 = 120, \qquad 120 \times 7 = 840.$

On remarquera que par définition même on pourra remplacer soit les 2 premiers facteurs, soit les 3 premiers..., par leur produit effectué.

Ainsi :

$8 \times 3 \times 5 \times 7 = (8 \times 3) \times 5 \times 7 = 24 \times 5 \times 7$

car on est conduit à effectuer le produit 8×3 avant d'opérer avec 5.

Si on représente les facteurs par les lettres $a\ b\ c\ d\ e$, on a les égalités suivantes :

$a\,b\,c\,d\,e = (a\,b)\,c\,d\,e = (a\,b\,c)\,d\,e = (a\,b\,c\,d)\,e$

Rappelons que quand plusieurs facteurs sont placés entre parenthèses, il faut considérer leur produit comme effectué.

69. Théorème I. — *Un produit de facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs d'*UNE MANIÈRE QUELCONQUE.

La démonstration comprend 5 parties.

1° — *Un produit de deux facteurs est indépendant de leur ordre.*

Je dis que $5 \times 3 = 3 \times 5$.

Formons un tableau ayant 3 lignes de 5 traits chacune.

Cherchons maintenant le nombre total des traits contenus dans ce tableau.

Si l'on compte le nombre de traits par lignes horizontales, on trouve $5 + 5 + 5$ ou 5×3.

En les comptant par colonnes verticales on trouve :

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 \text{ ou } 3 \times 5$$

Comme dans les deux cas on exprime toutes les unités du tableau, on a donc :

$$5 \times 3 = 3 \times 5.$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a \times b = b \times a$$

2° — *On ne modifie pas un produit de* TROIS *facteurs en intervertissant l'ordre des* DEUX DERNIERS.

Je dis que

$$5 \times \times 3 \times 4 = 5 \times 4 \times 3$$

5 5 5
5 5 5
5 5 5
5 5 5

Formons un tableau de 4 lignes, contenant chacune 3 fois le nombre 5.

Calculons par lignes horizontales la somme des nombres de ce tableau.

Puisque la somme des nombres d'une ligne est $5 + 5 + 5$ ou 5×3, il s'en suit que la somme cherchée est $5 \times 3 \times 4$.

D'autre part, procédons par colonnes verticales. Dans chaque colonne la somme est $5 + 5 + 5 + 5$ ou 5×4 ; il en résulte que la somme cherchée est $5 \times 4 \times 3$ donc

$$5 \times 3 \times 4 = 5 \times 4 \times 3$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a \times b \times c = a \times c \times b$$

3° — *On ne change pas un produit d'un* NOMBRE QUELCONQUE *de facteurs en intervertissant l'ordre des* DEUX DERNIERS FACTEURS.

Je dis que :

$$6 \times 2 \times 5 \times 3 \times 4 = 6 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3$$

Par définition du produit de facteurs, on peut considérer le produit des facteurs qui précèdent les deux derniers comme effectué ; et il ne reste plus qu'à considérer un produit de trois facteurs.

$$60 \times 3 \times 4 = 60 \times 4 \times 3$$

ce qui est vrai d'après la 2e partie.

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times c \times e \times d$$

4° — *On ne modifie pas un produit d'un* NOMBRE QUELCONQUE *de facteurs en intervertissant l'ordre de* DEUX FACTEURS CONSÉCUTIFS *quelconques.*

Je dis que :

$$6 \times 2 \times 5 \times 3 \times 4 \times 7 = 6 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 7$$

En effet, on vient de voir que

$$6 \times 2 \times 5 \times 3 \times 4 = 6 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3$$

D'où en multipliant les deux membres de cette égalité par 7 on obtient :

$$6 \times 2 \times 5 \times 3 \times 4 \times 7 = 6 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 7$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a \times b \times c \times d \times e \times f = a \times b \times c \times e \times d \times f$$

5° — *Dans un produit d'un* NOMBRE QUELCONQUE DE FACTEURS *on peut intervertir* A VOLONTÉ *l'ordre des facteurs.*

En effet en intervertissant un certain nombre de fois des facteurs consécutifs, on pourra amener le facteur que l'on voudra à la première place, ensuite on en amènera un autre à la seconde, et ainsi de suite.

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a \times b \times c \times d \times e = b \times e \times a \times d = d \times b \times c \times e \times a$$

etc.

70. Théorème II. — *Dans un produit de facteurs on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué, ou, inversement, décomposer un facteur en plusieurs autres, dont il est le produit.*

Je dis que :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 15 \times 4$$

En effet, en intervertissant l'ordre des facteurs, on a :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 3 \times 5 \times 2 \times 4$$

puis effectuant le produit 3×5 des deux premiers facteurs,

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 15 \times 2 \times 4$$

et intervertissant à nouveau l'ordre des facteurs on obtient :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 15 \times 4$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a \times b \times c \times d \times e = a \times (b \times d) \times c \times e$$

71. Remarque. — Ce théorème exprime que la multiplication est ASSOCIATIVE.

72. Cas particulier 1. — *Pour multiplier un produit de facteurs par un nombre, il suffit de remplacer* UN SEUL *des facteurs par son produit par ce nombre.*

En effet, on a :

$$(a \times b \times c \times d) \times m = a \times b \times c \times d \times m$$

car la suite des opérations n'est pas changée (68).

Si l'on groupe maintenant b et m, on aura :

$$(a \times b \times c \times d) \times m = a \times (b \times m) \times c \times d$$

ce qui démontre la proposition.

73. Cas particulier 2. — *Pour multiplier un nombre par un produit de facteurs, il suffit de multiplier ce nombre par le premier facteur, puis le résultat obtenu par le second facteur, le nouveau résultat par le troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur.*

En effet, on a :

$$m \times (a \times b \times c \times d) = m \times a \times b \times c \times d$$

puisqu'il suffit d'effacer les parenthèses (70).

74. Cas particulier 3. — *Pour multiplier un produit de facteurs par un produit de facteurs, il suffit de former un produit unique contenant tous les facteurs.*

En effet, on a :

$$(a \times b \times c) \times (d \times e) = a \times b \times c \times d \times e$$

Il suffit, en effet, d'effacer les parenthèses, ce qu'on peut faire (70).

75. Remarque. — On peut donc dans un produit de facteurs faire *permuter* ces facteurs dans un ordre quelconque ; en ce sens, la multiplication est COMMUTATIVE.

III. — Produit d'un nombre par une somme ou par une différence. Produit d'une somme par une somme.

76. Théorème I. — *Pour multiplier un nombre par une somme, il suffit de multiplier successivement ce nombre par chacune des parties de la somme et d'ajouter les produits obtenus.*

En effet, nous avons, en intervertissant, l'ordre des facteurs :

$$m \times (a + b + c) = (a + b + c) \times m$$

or :

$$(a+b+c) \times m = a \times m + b \times m + c \times m$$

d'où :

$$m \times (a+b+c) = a \times m + b \times m + c \times m$$

et enfin en intervertissant l'ordre des facteurs dans les trois produits :

$$a \times m, \qquad b + m, \qquad c \times m$$

$$m \times (a+b+c) = m \times a + m \times b + m \times c$$

77. Théorème II. — *Pour multiplier un nombre par une différence, il suffit de multiplier ce nombre par chacun des deux termes de la différence et de faire la différence des produits obtenus.*

On a de la même façon que ci-dessus :

$$m \times (a - b) = (a - b) \times m = a \times m - b \times m$$

ou enfin

$$m \times (a - b) = m \times a - m \times b$$

78. Mise en facteur commun. — Nous venons de démontrer les égalités :

$$m \times (a + b + c) = a \times m + b \times m + c \times m$$

et

$$m \times (a - b) = a \times m - b \times m$$

Ces égalités montrent que le produit d'une somme ou d'une différence par un nombre, ou inversement d'un nombre par une somme ou une différence, peut être remplacé par une somme ou une différence de produits.

Inversement, une somme ou une différence de produits, ayant un facteur commun, peut être remplacée par un produit unique.

Ainsi :

$$5 \times 12 + 5 \times 8 + 5 \times 13 = 5 \times (12 + 8 + 13) = 5 \times 33$$

De même :

$$15 \times 27 - 15 \times 13 = 15 \times (27 - 13) = 15 \times 14$$

Cette opération prend le nom de MISE EN FACTEUR COMMUN.

79. Théorème III. — *Le produit d'une somme par une somme peut s'obtenir en multipliant séparément chacun des termes de la première somme par chacun des termes de la seconde et en ajoutant les produits ainsi obtenus.*

Soit à multiplier :

$$(a + b + c + d) \text{ par } (m + n)$$

Posons $m + n = s$

On a :

$$(a+b+c+d) \times (m+n) = (a \times b \times c \times d) \times s$$

Or :

$$(a \times b \times c \times d) \times s = a \times s + b \times s + c \times s + d \times s$$

Remplaçons s par sa valeur ; il vient :

$$(a+b+c+d) \times (m+n) =$$
$$a \times (m+n) + b \times (m+n) + c \times (m+n) + d \times (m+n)$$

ou enfin

$$(a+b+c+d) \times (m+n) = a \times m + a \times n + b \times m + b \times n + c \times m + c \times n + d \times m + d \times n$$

Et comme on a l'habitude de supprimer le signe $\times$ quand les nombres sont représentés par des lettres :

$$(a+b+c+d) \times (m+n) = am + an + bm + bn + cm + cn + dm + dn$$

IV. — Puissances

80. Définitions. — *On appelle* PUISSANCE *d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.*

*Le nombre des facteurs égaux est ce qu'on appelle l'*EXPOSANT *de la puissance.*

On désigne une puissance en écrivant l'exposant en haut et à droite du nombre élevé à cette puissance.

Ainsi 7^4, on lit 7 puissance quatre, ou par définition :

$$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

Les puissances d'exposant 2 et 3 se prononcent d'ordinaire *carré* et *cube*.

Ainsi $7^2 = 49$ est le carré de 7.

81. Théorème I. — *Le produit de deux ou de plusieurs puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre, dont l'exposant est égal à la somme des exposants des facteurs.*

Soit à effectuer le produit :

$$a^5 \times a^2 \times a^3$$

On peut écrire :

$$a^5 \times a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$$

Par définition, le second membre de cette égalité se compose de 5 + 2 + 3 facteurs égaux à a et c'est bien

$$a^{5+2+3} = a^{10}$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}.$$

82. Théorème II. — *Pour élever à une puissance un produit de facteurs, il suffit d'élever à cette puissance chacun des facteurs du produit.*

Soit à élever à la quatrième puissance le produit $a \times b \times c$. On peut écrire :

$$(a \times b \times c)^4 = (a \times b \times c) \times (a \times b \times c) \times (a \times b \times c) \times (a \times b \times c)$$

Ou d'après (69 et 70) :

$$= a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times c \times c \times c \times c$$
$$= a^4 \times b^4 \times c^4$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$(a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$$

83. Théorème III. — *Pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance, il suffit d'écrire ce nombre avec un exposant égal au* PRODUIT *des exposants de ces puissances.*

Soit à élever a^3 à la puissance m.

Par définition, le nombre cherché est le produit de m nombres égaux à a^3, c'est donc (81) une puissance de a, dont l'exposant est égal à la somme de m nombres égaux à 3, ou bien à 3 m.

NOTATION GÉNÉRALE :

$$(a^m)^p = a^{mp}$$

THÉORIE DE L'OPÉRATION PRATIQUE

84. — Nous nous proposons d'indiquer un procédé pratique pour écrire le produit de deux nombres écrits dans le système décimal.

Nous distinguerons :

85. PREMIER CAS. — **Produit d'un nombre par 10, 100, 1000, etc.**

Soit à multiplier 19 par 100.

On sait que 19 × 100 = 100 × 19.

Or, 100 × 19, c'est la somme de 19 nombres égaux à 100 ou 19 centaines ou 1900. D'où la règle :

86. Règle. — *Pour multiplier un nombre par 10, 100, 1000..., il suffit d'ajouter à sa droite 1, 2, 3... zéros.*

En général, *pour multiplier un nombre par un autre nombre formé de 1 suivi de zéros, il suffit d'ajouter à la droite du multiplicande autant de zéros qu'il y en a dans le multiplicateur.*

87. Cas particulier. — Puissances successives de 10.

Chacune d'elles se déduit de la précédente en la multipliant par 10.

Le *carré* ou *seconde puissance*, est

$$10^2 = 10 \times 10 = 100.$$

Le *cube* ou *troisième puissance*, est

$$10^3 = 10^2 \times 10 = 1000.$$

La *quatrième puissance* est

$10^4 = 10^3 \times 10 = 10000$; et ainsi de suite.

88. Règle. — *Toute puissance de 10 est représentée par l'unité suivie d'autant de zéros, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance.*

89. DEUXIÈME CAS. — **Produit de deux nombres d'un chiffre.** — Soit à multiplier 5 par 4.

On peut obtenir le produit par des additions en appliquant la définition (62).

Ainsi :

$$5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.$$

Il est nécessaire de savoir par cœur le produit de deux nombres d'un chiffre.

On réunit en général ces résultats dans la table suivante dite *table de multiplication* ou *table de Pythagore* (1).

(1) Pythagore (566-470 avant J.-C.), philosophe et mathématicien grec.

90. — Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Cette table à double entrée est construite ainsi :

On écrit d'abord sur une première ligne horizontale les neuf premiers nombres. On ajoute chacun de ces nombres à lui-même et on écrit les résultats dans une seconde ligne. Les nombres de la troisième ligne s'obtiennent en ajoutant ceux de la première aux nombres de la second écrits au-dessous. Et ainsi de suite. D'une manière générale, on obtient une ligne quelconque en ajoutant à la précédente les nombres correspondants de la *première* ligne.

La première ligne contient les produits des neuf premiers nombres par 1. La seconde ligne contient les produits de ces nombres par 2. La troisième ligne les produits par 3, etc.

Pour avoir le produit de deux nombres, on cherche celui qui est inscrit dans la colonne en tête de laquelle se trouve le multiplicande à l'intersection avec la ligne horizontale à gauche de laquelle est inscrit le multiplicateur.

Ainsi le produit de 4 par 5 est à l'intersection de la colonne 4 et de la ligne 5.

91. — TROISIÈME CAS. — Produit d'un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre. — Un nombre quelconque est la somme de ses unités des divers ordres. Pour le multiplier par 4, par exemple, il suffit donc (65) de multiplier successivement chacune des parties par 4 et d'ajouter les résultats.

Soit à faire le produit 4157×4.

4157 se compose de 7 unités simples, 5 dizaines, 1 centaine et 4 mille. Le produit se compose donc de :

$7 \times 4 = 28$ unités ou 2 dizaines et 8 unités.
$5 \times 4 = 20$ dizaines ou 2 centaines.
$1 \times 4 = 4$ centaines.
$4 \times 4 = 16$ mille.

Il y a donc en tout 8 unités simples, 2 dizaines, $2 + 4 = 6$ centaines et 16 mille. Le produit est donc 16628.

On voit qu'on a multiplié successivement tous les *chiffres* par 4, en commençant par la droite.

Lorsqu'un produit était plus grand que 10, on n'a écrit que le chiffre des unités et on a reporté les dizaines sur le produit suivant.

92. Règle. — *On multiplie, en commençant par la droite, chacun des chiffres du multiplicande par le chiffre du multiplicateur. Si le produit est inférieur à 10, on l'écrit au rang des unités qu'il représente. S'il est supérieur à 10, on n'écrit au rang des unités qu'il représente que le chiffre des unités et on retient le nombre des dizaines pour l'ajouter au produit suivant. Le produit du dernier chiffre à gauche par le multiplicateur, augmenté s'il y a lieu de la retenue, s'écrit tel qu'on l'a trouvé à la gauche du produit total.*

93. — Pratiquement on dispose l'opération précédente comme ceci :

$$\begin{array}{r} 4\,157 \\ 4 \\ \hline 16\,628 \end{array}$$

et on dit : 4 fois 7 font 28 ; je pose 8 et je retiens 2 ; 4 fois 5 font 20 ; 20 et 2 de retenue font 22, je pose 2 et je retiens 2 ; etc.

94. QUATRIÈME CAS. — Produit d'un nombre quelconque par un nombre formé d'un seul chiffre significatif suivi de zéros. — Soit à multiplier 1537 par 500.

Comme 500 est égal à 5×100, il suffit de multiplier 1537 par 5 et par 100 (73), c'est-à-dire qu'il suffit de multiplier par 5 et d'ajouter deux zéros à la droite du résultat. Ceci conduit à la règle suivante :

95. Règle. — *Pour multiplier un nombre quelconque par un nombre formé d'un chiffre significatif suivi de zéros, on multiplie le nombre par le chiffre significatif et on ajoute les zéros à la droite du résu tat.*

$$\begin{array}{r} 1\,537 \\ 500 \\ \hline 768\,500 \end{array}$$

On dispose l'opération comme dans le cas précédent ; on multiplie 1537 par 5 ; puis à droite du produit 7685, on écrit deux zéros.

96. CINQUIÈME CAS. — Cas général. — *Le multiplicande et le multiplicateur sont quelconques.* — On considère le multiplicateur comme la somme de ses unités des divers ordres. On a donc à multiplier un nombre par une somme, et les multiplications à effectuer par chacun des différents termes de cette somme (76) rentrent dans un des cinq cas précédents. Il suffit de les faire et d'ajouter les produits obtenus.

Soit à faire le produit

$$647 \times 326.$$

On a :

$$647 \times 326 = 647 \times (300 + 20 + 6).$$

Or

$$\begin{aligned} 647 \times 300 &= 194\,100 \\ 647 \times 20 &= 12\,940 \\ 647 \times 6 &= 3\,882 \\ 647 \times 326 &= 210\,922 \end{aligned}$$

On simplifie l'opération en adoptant la règle suivante :

97. Règle. — *On pose le multiplicateur sous le multiplicande. On multiplie successivement le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur en commençant par la droite. On écrit sous le multiplicateur et les uns au-dessous des autres les différents produits partiels obtenus, de façon que le dernier chiffre à droite de chaque produit partiel se trouve sous le chiffre du multiplicateur qui a servi à l'obtenir. On additionne enfin les produits partiels, colonne par colonne, dans l'ordre où ils sont écrits.*

98. — L'opération de l'exemple ci-dessus se présente alors sous l'aspect suivant :

$$\begin{array}{r} 647 \\ 326 \\ \hline 3882 \\ 1249 \\ 1941 \\ \hline 210922 \end{array}$$

99. Preuve de la multiplication. — On recommence la multiplication en intervertissant les facteurs, c'est-à-dire en prenant le multiplicateur pour multiplicande et inversement (68).

Nous verrons plus tard (148) une autre preuve.

Exercices

11. — Sachant que la somme des 9 premiers nombres est 45, trouver immédiatement, d'après cela, la somme des nombres contenus dans la table de Pythagore.

12. — Que devient le produit de deux nombres quand on augmente d'une unité : 1° le multiplicande seulement ; 2° le multiplicateur seulement ; 3° le multiplicateur et le multiplicande. Justifier les réponses en prenant pour exemple 8 et 16.

13. — Que devient un produit de deux facteurs quand on ajoute un même nombre à chacun d'eux ; quand on augmente un des facteurs d'une certaine quantité et qu'on diminue l'autre de la même quantité ? Dans quel cas le produit augmente-t-il ? Dans quel cas diminue-t-il ?

14. — Le nombre des chiffres d'un produit de deux facteurs est égal au nombre total des chiffres contenus dans les deux facteurs ou à ce nombre diminué de un.

15. — Le carré d'un nombre terminé par 5 est terminé par 25.

Division

100. — Etant donné deux nombres, nous savons qu'on peut toujours retrancher le plus petit du plus grand. Au sujet de la valeur de la différence, il peut se présenter deux cas ; ou bien cette différence est plus petite que le plus petit nombre, ou bien elle est plus grande que lui. Dans ce dernier cas, on peut encore retrancher le plus petit nombre de la différence, une ou plusieurs fois, jusqu'à ce qu'on obtienne une différence plus petite que le plus petit nombre. Le nombre de différences qu'on peut calculer de cette manière ou, plus exactement, le nombre de fois qu'on peut retrancher le plus petit nombre du plus grand s'appelle le *quotient* des deux nombres entiers. L'opération par laquelle on effectue le quotient s'appelle *division*. Le plus grand nombre s'appelle *dividende* ; le plus petit *diviseur*. La dernière différence obtenue est le *reste* de la division. D'après ce que nous avons dit, *le reste est toujours plus petit que le diviseur* ; il peut être nul, on dit alors que la division se fait exactement ou encore que le dividende est un multiple du diviseur.

101. — Dès lors on peut donner la définition suivante :

La division des nombres entiers est une opération qui a pour but, étant donné deux nombres, l'un appelé DIVIDENDE *et l'autre* DIVISEUR, *d'en trouver un troisième appelé* QUOTIENT *qui soit égal au nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende.*

102. Relations fondamentales de la division. — Entre le dividende D, le diviseur d, le reste R et le quotient Q d'une division, existent les relations :

$$\left.\begin{array}{l} D = d \times Q + R \\ R < d \end{array}\right\} (I)$$

Au lieu de

$$R < d$$

on peut écrire

$$R \leq d - 1$$

On peut encore remarquer que D contient d Q fois et ne le contient pas (Q + 1) fois, ce qui est exprimé par les relations

$$d \times Q \leq D < d \times (Q + 1) \quad (II)$$

Les relations (I) et (II) sont équivalentes, c'est-à-dire que D et d restant les mêmes, elles définissent le même nombre Q. Nous laissons au lecteur le soin de montrer qu'on peut passer des premières aux secondes et réciproquement des secondes aux premières.

Signe de la division. — On écrit souvent la division de A par B, au moyen du symbole A : B qui s'énonce A divisé par B.

103. Remarque. — Le quotient du produit de deux facteurs et de l'un des facteurs est l'autre facteur. Il est exact.

PROPRIÉTÉS DE LA DIVISION

104. Définition. — *Lorsqu'un nombre divise exactement un second nombre, il est dit un* diviseur *ou* sous-multiple *de ce second nombre.*

Inversement, le second est dit un multiple *du premier.*

Par exemple, 12 est un *multiple* de 3 ; et 3 est un *diviseur* de 12.

54 est un *multiple* de 6 ; et, inversement, 6 est un *diviseur* ou *sous-multiple* de 54.

Un multiple *d'un nombre est le produit de ce nombre par un autre.*

On obtient donc tous les multiples d'un nombre en le multipliant, successivement, par tous les nombres 1, 2, 3, 4, etc., de la suite naturelle.

THÉORÈMES RELATIFS A LA DIVISION EXACTE

105. Théorème I. — *Lorsque plusieurs nombres sont divisibles par un diviseur commun, leur somme est divisible par lui. Le quotient de la somme par ce diviseur s'obtient en ajoutant les quotients des nombres donnés par ce même diviseur.*

Ainsi, 12, 20 et 24 sont divisibles par 4.

Le quotient de 56 par 4 peut s'obtenir en faisant la somme des quotients de 12, 20 et 24 par 4.

DÉMONSTRATION. — Puisque :

$$12 = 3 \times 4$$
$$20 = 5 \times 4$$
$$24 = 6 \times 4$$

on a :

$$12 + 20 + 24 = 3 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 4$$

ou (78) :

$$12 + 20 + 24 = (3 + 5 + 6) \times 4$$

ce qui montre que le quotient de

$$12 + 20 + 24 \text{ par } 4 \text{ est } 3 + 5 + 6$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$(a + b + c) : d = (a : d) + (b : d) + (c : d)$$

106. — Ce principe peut encore s'énoncer ainsi :

La somme de plusieurs multiples d'un même nombre est multiple de ce nombre.

107. Théorème II. — *Lorsque deux nombres sont divisibles par un troisième, leur différence est divisible par ce troisième. Le quotient de la différence par ce diviseur s'obtient en faisant la différence des quotients des deux nombres donnés par ce diviseur.*

Par exemple, 30 et 12 sont divisibles par 6. Leur différence 30 — 12 = 18 est également divisible par 6.

Le quotient de 18 par 6 peut s'obtenir en faisant la différence des quotients de 30 et 12 par 6.

DÉMONSTRATION. — Puisque :

$$30 = 6 \times 5$$
$$12 = 6 \times 2$$

on a :

$$30 - 12 = 6 \times 5 - 6 \times 2$$

ou (78) :

$$30 - 12 = 6 \times (5 - 2)$$

ce qui prouve que le quotient de

$$30 - 12 \text{ par } 6 \text{ est } 5 - 2$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$(a - b) : d = (a : d) - (b : d)$$

108. — Ce principe peut encore s'énoncer ainsi :

La différence de deux multiples d'un même nombre est un multiple de ce nombre.

109. Remarque. — La division est DISTRIBUTIVE par rapport à l'addition et à la soustraction.

110. Théorème III. — *Lorsque l'un des facteurs d'un produit est divisible par un nombre, le produit est divisible par ce nombre.*

Pour diviser le produit par ce nombre il suffit de remplacer dans le produit ce facteur par son quotient par ce nombre.

Ainsi considérons le produit $4 \times 15 \times 7 = 420$ dans lequel 15 est divisible par 3.

DÉMONSTRATION. — Puisque :

$$15 = 3 \times 5$$

on a (70) :

$$4 \times 15 \times 7 = 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 3 \times (4 \times 5 \times 7)$$

d'où il résulte : 1° que $4 \times 15 \times 7$ est bien divisible par 3 ; 2° que divisé par 3, il donne pour quotient :

$$4 \times 5 \times 7 \quad \text{ou} \quad 4 \times \frac{15}{3} \times 7$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$(a \times b \times c) : d = a \times (b : d) \times c$$

Ce théorème peut encore s'énoncer :

111. — *Tout diviseur d'un nombre est un diviseur de tous les multiples de ce nombre.*

Ainsi tous les multiples de 10 sont divisibles par 2 et par 5, puisque $10 = 2 \times 5$.

112. Remarque. — *Pour diviser un produit de facteurs par l'un de ses facteurs il suffit de supprimer ce facteur.*

113. Théorème IV. — *Si un nombre est divisible par un produit de facteurs on peut effectuer en divisant ce nombre par le premier facteur, puis le quotient de cette division par le second facteur, et ainsi de suite. Le quotient de la division par le dernier facteur est égal au quotient de la division du nombre par le produit de facteurs.*

Ainsi 900 est divisible par $3 \times 5 \times 10 = 150$.

DÉMONSTRATION. — Dire que 900 est divisible par 150 et donne pour quotient 6, c'est dire que l'on a :

$$900 = 150 \times 6$$

Or :

$$150 = 3 \times 5 \times 10$$

donc :

$$900 = (3 \times 5 \times 10) \times 6 = 3 \times (5 \times 10 \times 6)$$

Donc 3 divise exactement 900 et donne pour quotient $5 \times 10 \times 6$.

Ce quotient peut se mettre sous la forme $5 \times (10 \times 6)$: donc 5 le divise exactement et donne pour quotient 10×6.

Enfin, 10 divise exactement ce dernier quotient et donne pour quotient 6, lequel est bien le quotient de la division de 900 par le produit $(3 \times 5 \times 10)$.

NOTATION GÉNÉRALE :

$$N : (a \times b) = (N : a) : b$$

114. Cas particulier. — *Pour diviser un produit de facteurs par le produit de plusieurs de ses facteurs, il suffit de supprimer dans le dividende les facteurs qui forment le diviseur.*

Ainsi le quotient de $2 \times 4 \times 7 \times 3 \times 5$ par le produit $3 \times 5 \times 4$ est 2×7.

115. Théorème V. — *Le quotient de deux puissances d'un même nombre est égal à une puissance de ce nombre ayant pour exposant l'excès de l'exposant du dividende sur celui du diviseur.*

L'énoncé suppose que l'exposant du dividende est supérieur à l'exposant du diviseur.

Je dis que l'on a, par exemple :

$$8^5 : 8^3 = 8^{5-3} = 8^2$$

En effet, pour diviser 8^5 qui est le produit $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$ par $8^3 = 8 \times 8 \times 8$ il suffit de supprimer 3 facteurs 8 dans le premier produit ; il en reste 2.

Donc :

$$\frac{8^5}{8^3} = 8 \times 8 = 8^2$$

NOTATION GÉNÉRALE :

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

THÉORÈMES RELATIFS AUX DIVISIONS QUI DONNENT UN RESTE

116. Théorème I. — *Quand on multiplie le dividende et le diviseur d'une division par un nombre, le quotient ne change pas, mais le reste est multiplié par ce nombre.*

Ainsi en divisant 42 par 8, on trouve 5 au quotient et 2 au reste ; d'autre part, la division de 42×6 ou 252 par 8×6 ou 48 donne 5 au quotient et 12 au reste.

DÉMONSTRATION. — On a :

$$42 = 8 \times 5 + 2$$

avec

$$2 < 8$$

d'où l'on déduit :

$$42 \times 6 = (8 \times 5 + 2) \times 6$$

avec

$$2 \times 6 < 8 \times 6$$

ou

$$12 < 48$$

Or, la première égalité peut s'écrire successivement

$$42 \times 6 = 8 \times 5 \times 6 + 2 \times 6$$
$$252 = 48 \times 5 \times 12$$

Ainsi l'on a donc :

$$252 = 48 \times 5 + 12$$

avec

$$12 < 48$$

ce qui prouve que le quotient de 42×6 ou 252 par 8×6 ou 48 est 5, et que le reste est 2×6 ou 12.

DÉMONSTRATION LITTÉRALE.

$$D = d \times Q + R$$

avec

$$R < D$$

Multipliant les deux membres de l'égalité et les deux membres de l'inégalité par m on a :

$$D \times m = (d \times Q) \times m + R \times m$$
$$\underline{D \times m} = \underline{(d \times m)} \times Q + R \times m$$

avec

$$R \times m < d \times m$$

Le raisonnement est identique au précédent.

117. Théorème II. — *Tout nombre qui divise le dividende et le diviseur d'une division divise le reste de cette division ; si l'on divise le dividende et le diviseur d'une division par ce nombre, le quotient ne change pas, mais le reste est divisé par ce nombre.*

Ainsi, en divisant 252 par 48, on trouve 5 au quotient et 12 au reste ; 6 qui divise exactement 252 et 48 divise aussi le reste 12.

DÉMONSTRATION. — Ce théorème s'établit identiquement comme le précédent.

118. Théorème III. — *Si l'on divise un nombre par le premier facteur d'un produit, le quotient obtenu par le deuxième facteur, le nouveau quotient par le troisième facteur et ainsi de suite, le dernier quotient que l'on obtient est le quotient du nombre donné par le produit donné.*

DÉMONSTRATION. — Soit à diviser le nombre N par le produit $a \times b \times c$.

Désignons par q le quotient et par r le reste de la division de N par a, et de même par q' le quotient et par r' le reste de la division de q par b', et enfin par q'' le quotient et par r'' le reste de la division de q'' par c.

Nous pouvons écrire :

$$N = a \times q + r \quad \text{avec } r < a \text{ d'où } r \leqq a - 1$$
$$q = b \times q' + r' \quad \text{avec } r' < b \text{ d'où } r' \leqq b - 1$$
$$q' = c \times q'' + r'' \quad \text{avec } r'' < c \text{ d'où } r'' \leqq c - 1$$

Remplaçons dans la première égalité d'abord q, puis q' par leurs valeurs tirées des égalités suivantes, il vient d'abord

$$N = a \times b \times q' + ar' + r$$

$$N = a \times b \times c \times q'' + a \times b \times r'' + ar' + r \quad (1)$$

Remarquons que

$$a \times b \times r'' + ar' + r \leq a \times b \times (c-1) + a \times (b-1) + (a-1)$$

ou

$$a.b.r'' + a.r' + r \leq a.b.c - a.b + a.b - a + a - 1$$

et

$$a.b.r'' + a.r' + r \leq a.b.c - 1 \quad (2)$$

L'égalité (1) et l'inégalité (2) montrent que q'' est bien le quotient de la division de N par $a\,b\,c$.

THÉORIE DE L'OPÉRATION PRATIQUE

119. — Le problème est le suivant : Deux nombres étant écrits dans le système décimal, écrire leur quotient dans ce système.

La subdivision de la théorie en plusieurs cas est basée sur le nombre des chiffres du quotient.

120. Détermination du nombre des chiffres du quotient. — Soit 46 295 : 67.

Multiplions le diviseur successivement par 10, 100, 1000... On a :

$$67 \times 10 = 670 \text{ ; or } 670 < 46\,295$$

donc le quotient cherché est au moins 10 ;

$$67 \times 100 = 6\,700 \text{ ; or } 6\,700 < 46\,295$$

donc le quotient cherché est au moins 100 ;

$$67 \times 1\,000 = 67\,000 \text{ ; or } 67\,000 > 46\,295$$

donc le quotient cherché est inférieur à 1000.

Ce quotient est compris entre 100 et 1000 et, par suite, a 3 chiffres.

121. Règle. — *Le nombre des chiffres du quotient est égal au nombre des zéros qu'il est nécessaire d'écrire à droite du diviseur pour obtenir un nombre supérieur au dividende.*

122. Premier cas. — **Le diviseur et le quotient n'ont qu'un chiffre.** — Soit à diviser 53 par 8.

La table de multiplication donne immédiatement le quotient.

On voit que 53 est compris entre 48 et 56. Ainsi on a

$$48 < 53 < 56 \text{ ou } 8 \times 6 < 53 < 8 \times 7$$

Donc 53 contient 6 fois 8 et par la suite 6 est le quotient de 53 par 8.

Le reste est

$$53 - 8 \times 6 = 5.$$

123. Deuxième cas. — **Le dividende et le diviseur sont quelconques, le quotient n'a qu'un chiffre.** — Soit à diviser 45 713 par 8 692. Le quotient n'a qu'un chiffre, puisque 86 920 est plus grand que 45 713. Pour trouver ce chiffre nous remarquons que le produit du diviseur 8 692 par le quotient est la somme des produits des 8 mille, des 6 centaines, des 9 dizaines et des 2 unités par le quotient. Cette somme doit être contenue dans le dividende. A plus forte raison, le produit des 8 mille par le quotient, qui n'est qu'une partie de cette somme, doit-il être contenu dans le dividende. Or, le produit des 8 mille par le quotient est un nombre exact de mille ; il doit donc être contenu dans les 45 mille du dividende. En d'autres termes, 45 contient donc 8 un nombre de fois *au moins* égal au quotient. Le quotient de 45 par 8 (premier cas), qui est 5, est donc le quotient cherché *ou un chiffre trop fort*. Pour reconnaître, si 5 est bien le quotient cherché, nous multiplions 8 692 par 5, ce qui donne 43 460. Ce résultat est plus petit que 45 713, on en conclut que 5 est bien le quotient cherché. Le *reste* est 45 713 — 43 460 = 2 253.

Soit encore à diviser 325 par 87.

En raisonnant comme plus haut, on voit que le quotient de 32 par 8 est le quotient cherché ou un chiffre trop fort.

Or, 32 : 8 = 4. Pour voir si 4 convient, multiplions 87 par 4. Le produit est 348, qui est plus grand que 325 ; 4 est donc trop fort. Essayons alors 3. On a 87 × 3 = 261 qui est contenu dans 325. Le chiffre 3 est donc le *quotient* cherché. Le *reste* est 325 — 261 = 64.

Ceci conduit à la règle suivante :

124. Règle. — *Pour trouver le quotient de deux nombres, lorsque ce quotient n'a qu'un seul chiffre,*

si le dividende a le même nombre de chiffres que le diviseur, on divise le premier chiffre à gauche du dividende par le premier chiffre à gauche du diviseur ;

si le dividende a un chiffre de plus que le diviseur, on divise le nombre formé par les deux premiers chiffres à gauche du dividende par le premier chiffre à gauche du diviseur.

Le chiffre obtenu est le quotient cherché ou un chiffre trop fort.

Pour essayer ce chiffre, on multiplie le diviseur par lui et l'on regarde si le produit obtenu peut être retranché du dividende. Si oui, le chiffre est bon et le reste s'obtient en effectuant la soustraction. Si non, on le diminue d'une unité et l'on fait un nouvel essai. On continue de la sorte, en diminuant à chaque essai infructueux le chiffre à essayer d'une unité, jusqu'à ce qu'on obtienne un chiffre, dont le produit par le diviseur puisse être retranché du dividende. Ce chiffre sera le quotient cherché.

125. — On dispose l'opération de la façon suivante :

45 713	8 692
2 253	5

On dit 5 fois 2 font 10, 10 de 13 il reste 3 ; je pose 3 et je retiens 1. 5 fois 9 font 45 et 1 de retenue font 46, 46 de 51 il reste 5 ; je pose 5 et je retiens 5, 5 fois 6 font 30 et 5 de retenue font 35, 35 de 37 il reste 2 ; je pose 2 et je retiens 3. 5 fois 8 font 40 et 3 de retenue font 43, 43 de 45 il reste 2 ; je pose 2.

126. Troisième cas. — **Cas général. — Le quotient a plusieurs chiffres.** — Le principe de la méthode consiste à décomposer le dividende en ses unités des divers ordres et à partager, *en commençant par les ordres les plus élevés*, les unités d'un même ordre en autant de parties égales que l'indique le diviseur.

Soit à diviser 4695237 par 872.

Le dividende est formé avec 4 unités du 7e ordre, 6 du 6e, 9 du 5e, 5 du 4e, etc. D'abord on ne peut faire 872 parts ni avec les 4 unités du 7e ordre, ni avec les 46 unités du 6e ordre, ni avec les 469 unités du 5e ; mais on peut faire 872 parts avec les unités des quatre premiers chiffres de gauche qui forment 4695 mille. Faire ce partage, c'est diviser 4695 par 872 (division du 2e cas).

4 695	872
335	5

On obtient 5 pour quotient et 335 pour reste.

Le partage donne pour chaque part 5 unités du 4e ordre ou 5 mille et il reste 335 mille.

Cette première opération est celle que pourrait faire un comptable ayant à partager également entre 872 personnes une somme de 4695237 francs, représentés par 7 pièces de 1 franc, 3 pièces de 10 francs, 2 billets de 100 francs et 4695 billets de 1000 francs. Il partage les billets de mille francs et en donne 5 à chaque personne.

Pour continuer l'opération, le comptable convertit les 335 billets de mille qui lui restent en 3350 billets de cent qui, ajoutés aux 2 billets de 100 francs déjà en caisse, forment 3352 billets de 100 francs qu'il va partager entre les 872 personnes.

Autrement dit, nous continuons la division en réunissant les 335 mille qui restent aux 2 centaines du nombre ; ce qui donne 3352 centaines. C'est une division du 2e cas qui donne 3 pour quotient et 736 pour reste. Chaque part aura donc ensuite 3 centaines (chaque personne reçoit ensuite 3 billets de 100 francs).

$$\begin{array}{r|l} 3\,352 & 872 \\ \hline 736 & 3 \end{array}$$

De la même façon, il reste à partager 736 centaines, qui, ajoutées aux 3 dizaines de nombre, forment 7363 dizaines (ou 7363 pièces de 10 fr.) que l'on divise par 872, et qui donne 8 au quotient et 387 au reste.

$$\begin{array}{r|l} 7\,363 & 872 \\ \hline 387 & 8 \end{array}$$

Enfin on réunit les 387 dizaines qui restent à partager aux 7 unités du nombre d'où 3877 unités simples (3877 pièces de 1 franc) qui, partagées en 872 parties, donnent 4 à chaque part avec un reste de 389 unités.

$$\begin{array}{r|l} 3\,877 & 872 \\ \hline 389 & 4 \end{array}$$

Finalement le quotient de la division de 4695237 par 872, c'est-à-dire la part de chaque personne, est formée de 5 mille, de 3 centaines, de 8 dizaines et de 4 unités. C'est 5384, et le reste est 389.

D'où la règle :

127. Règle. — *Pour faire la division de deux nombres quelconques, on écrit le diviseur à la droite du dividende et l'on sépare les deux nombres par un trait vertical. On tire un trait horizontal au-dessous du diviseur. On écrira le quotient au-dessous de ce trait.*

On sépare à la gauche du dividende assez de chiffres pour former un nombre qui contienne au moins une fois et moins de dix fois le diviseur. On a ainsi le premier dividende partiel. *On effectue, d'après la règle du cas précédent, la division de ce premier dividende partiel par le diviseur. On a ainsi le* premier chiffre du quotient *et le* premier reste partiel.

On abaisse à la droite du premier reste partiel le chiffre suivant du dividende ; on forme ainsi le second dividende partiel. *En effectuant la division du second dividende partiel par le diviseur, on a le* second chiffre du quotient *et le* second reste partiel.

On abaisse à la droite du second reste partiel le chiffre suivant du dividende ; on forme ainsi le troisième dividende partiel. *La division de ce dividende partiel par le diviseur donnera le* troisième chiffre du quotient *et le* troisième reste *partiel.*

Et ainsi de suite. On continuera de la sorte jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les chiffres du dividende.

Le dernier reste partiel sera le reste *de l'opération.*

On voit qu'on est ainsi ramené à faire une série de divisions où le quotient n'a qu'un seul chiffre.

128. Preuve de la division. — On contrôlera une division en faisant le produit du diviseur par le quotient et en ajoutant le reste à ce produit ; on doit retrouver le dividende.

Cela résulte de l'égalité :

$$D = d \times Q + R$$

Exercices

16. — Parmi les nombres inférieurs à 200, quels sont ceux qui peuvent servir de dividende et de diviseur à une division, dont le quotient est 4 et le reste 35?

17. — Que devient le quotient d'une division qui se fait exactement : 17856 : 48, lorsque : 1° on multiplie le dividende par 12 et l'on divise en même temps le diviseur par 5 ; 2° on divise le dividende par 31 et l'on multiplie en même temps le diviseur par 6.

18. — On augmente le dividende d'une division de 145 et le diviseur de 2. Le quotient ne change pas et le reste augmente de 3. Trouver le quotient.

19. — Quels sont les nombres D qui, divisés par d, donnent un quotient égal au reste?

20. — Montrer qu'on peut mettre 528 sous la forme

$$528 = A \times 9^2 + B \times 9 + C$$

A, B et C étant des nombres inférieurs à 9 qu'on propose de calculer.

21. — Dans toute division, le dividende est supérieur au double du reste.

PROBLÈMES SUR LES QUATRE OPÉRATIONS

ÉTUDE DE QUELQUES GENRES DE PROBLÈMES

129. — 1er GENRE. — Somme et différence de deux nombres.

PROBLÈME. — *On achète une maison et un jardin au prix total de 15480 francs. La maison coûte 12574 francs de plus que le jardin, on demande le prix du jardin et celui de la maison.*

SOLUTION. — *Données.* — Prix d'achat de la maison + prix d'achat du jardin = 15480 fr.

Prix d'achat de la maison — prix d'achat du jardin = 12574 francs.

Réponses demandées. — 1° Prix d'achat de la maison ; 2° prix d'achat du jardin.

Raisonnement. — Le prix total 15480 francs est égal au prix de la maison plus le prix du jardin. Mais le prix de la maison est lui-même égal au prix du jardin augmenté de 12574 francs.

D'où le prix total contient 2 fois le prix du jardin plus 12574 francs. Le double du prix du jardin est égal à

15480 fr. — 12574 fr. = 2906 fr.

Prix du jardin : 2906 : 2 = 1453 fr.

Prix de la maison : 15480 — 1453 = 14027 fr.

REMARQUE. — On aurait pu dire que la somme 15480 fr. + 12574 fr. des deux nombres représentait le double du prix d'achat de la maison.

On résoudrait d'une manière analogue :

22. — Le périmètre d'un champ rectangulaire a une longueur totale de 670 mètres et l'on sait que la longueur de ce champ a 35 mètres de plus que la largeur. Quelle est la valeur de cette propriété à 1500 francs l'hectare?

23. — Deux piétons sont séparés par une distance de 21 km 6. S'ils allaient l'un vers l'autre, ils se rencontreraient au bout de 2 heures. S'ils marchaient dans le même sens, ils se rejoindraient au bout de 36 heures. On demande la vitesse horaire de chacun.

130. — 2e GENRE. — Somme ou différence et quotient de deux nombres.

PROBLÈME. — *On a acheté 5 mètres de drap et 4 mètres de lainage pour 78 francs. Combien coûte le mètre de chaque étoffe, sachant que 8 mètres de lainage valent autant que 3 mètres de drap ?*

SOLUTION. — *Données.* — Prix de 5 mètres de drap + prix de 4 mètres de lainage = 78 francs ; prix de 8 mètres de lainage = prix de 3 mètres de drap.

Réponses demandées. — 1° Prix du mètre de drap ; 2° prix du mètre de lainage.

Raisonnement. — Puisque 8 mètres de lainage valent autant que 3 mètres de drap, 4 mètres de lainage vaudront autant que 3 m : 2 = 1m 5 de drap.

Par suite, 5m de drap + 1m 5 de drap ou 6m 5 de drap valent 78 francs, d'où :

Prix du mètre de drap : 78 fr. : 6,5 = 12 fr.

et 5 mètres de drap valent donc : 12 × 5 = 60 fr.

et 4 mètres de lainage valent : 78 fr. — 60 fr. = 18 fr.

Prix du mètre de lainage : 18 fr. : 4 = 4 fr. 50.

On résoudrait de la même façon :

24. — Un père a 40 ans, son fils en a 6. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il triple de l'âge du fils?

25. — Une propriété estimée 24900 francs se compose d'un champ valant 20 francs l'are, d'une vigne qui vaut 2500 francs l'hectare, et d'une maison. La valeur de la vigne est double de celle du champ et la maison vaut 3600 francs de plus que la vigne. Quelle est la contenance du champ et celle de la vigne?

131. 3e GENRE. — Méthode de réduction. Double achat, double vente, etc.

PROBLÈME. — *Une personne achète 3 mètres de drap et 8 mètres de toile pour 46 francs ; une deuxième personne achète 6 mètres de drap et 4 mètres de toile pour 68 francs. Combien doit une troisième personne, qui achète 5 mètres de drap et 5 mètres de toile?*

SOLUTION. — *Données.* — Prix de 3 mètres de drap + prix de 8 mètres de toile = 46 francs.

Prix de 6 mètres de drap + prix de 4 mètres de toile = 68 francs.

Réponses demandées. — Prix de 5 mètres de drap + prix de 5 mètres de toile.

Raisonnement. — En doublant les quantités achetées par la première personne nous remarquons que les deux acheteurs possèdent le même nombre de mètres de drap.

La différence des sommes versées provient donc de la différence des mètres de toile achetés. Donc :

Prix de 6 mètres de drap + prix de 16 mètres de toile = 92 francs.

Prix de 6 mètres de drap + prix de 4 mètres de toile = 68 francs ;

d'où : Prix de 16 mètres — 4 mètres ou 12 mètres de toile = 92 — 68 = 24 francs.

Prix du mètre de toile : 24 fr. : 12 = 2 fr.

8 mètres de toile valent : 2 fr. × 8 = 16 fr.

et 3 mètres de drap valent : 46 fr. — 16 fr. = 30 fr.

Prix du mètre de drap : 30 fr. : 3 = 10 fr.

Prix des 5 mètres de drap : 10 fr. × 5 = 50 fr.

Prix de 5 mètres de toile : 2 fr. × 5 = 10 fr.

La troisième personne doit : 50 fr. + 10 fr. = 60 fr.

On résoudrait de la même manière :

26. — Avec 61 francs on a acheté 8 kilogrammes de café et 1 kilogramme de thé ; avec 103 francs on aurait 4 kilogrammes de café et 3 kilogrammes de thé. Quel est le prix du kilogramme de café et celui du kilogramme de thé?

27. — Un propriétaire a 3 caves. Dans la 1re et la 2e réunies, il y a 23 hectolitres de vin. Dans la 2e et la 3e réunies, il y a 36 hectolitres de vin. Enfin dans la 1re et la 3e réunies, il y a 29 hectolitres de vin. Combien y a-t-il d'hectolitres de vin dans chaque cave?

132. 4e GENRE. — Problèmes dits de fausse supposition.

PROBLÈME. — *On veut payer une somme de 135 francs avec 36 pièces, les unes de 2 francs, les autres de 5 francs. Combien doit-on prendre de pièces de chaque espèce?*

SOLUTION. — *Données.* — On a 36 pièces de 2 francs et de 5 francs.

Elles valent ensemble 135 francs.

Réponses demandées. — 1° Combien y a-t-il de pièces de 2 francs ; 2° combien y a-t-il de pièces de 5 francs?

Raisonnement. — Si les 36 pièces étaient de 2 francs, leur valeur serait de 2 fr. × 36 = 72 fr.

Cette valeur est inférieure de 135 fr. — 72 fr. = 63 francs à la valeur donnée ; il y a donc des pièces de 5 francs.

Toutes les fois que l'on remplace une pièce de 2 francs par une pièce de 5 francs, la valeur totale est augmentée de 5 fr. — 2 fr. = 3 fr.

Pour l'augmenter de 63 francs, il faudra donc remplacer 63 : 3 = 21 pièces de 2 francs par 21 pièces de 5 francs.

Le nombre des pièces de 5 francs est de 21.

Celui des pièces de 2 francs est de 36 — 21 = 15

vérification.

5 fr. × 21 = 105 fr. et 2 fr. × 15 = 30 fr.

105 fr. + 30 fr. = 135 fr.

On résoudrait de la même manière :

28. — Un litre de bon lait pèse 1030 grammes. Ma laitière m'a apporté 45 litres de lait pesant 45 kilogrammes. Ce lait contient-il de l'eau? Si oui, quel volume?

29. — Un fermier mène au marché un troupeau composé de 60 têtes de bétail, vaches et veaux ; il les vend pour 21600 francs ; mais comme il a besoin de 25000 francs, il calcule qu'il lui faudra faire une vente supplémentaire ; en supposant que dans la deuxième vente les prix soient ceux de la première, il trouve qu'en vendant 8 vaches, il lui resterait 200 francs, tandis que s'il vendait 20 veaux, il lui manquerait 400 francs. On demande le prix d'une vache, celui d'un veau et le nombre de têtes de bétail de chaque espèce.

RÉVISION GÉNÉRALE

30. — Un père laisse à ses trois enfants un terrain d'une superficie de 54 hectares, partagé en deux parties égales: l'une des parties est en pré et vaut 1250 francs l'hectare, l'autre est en vigne et vaut 1800 francs l'hectare. Le premier enfant prend le pré et le second la vigne. Combien doivent-ils donner chacun au troisième pour que les trois enfants aient des parts égales?

31. — Pour s'acquitter d'une dette, une personne se décide à retirer, d'entre les mains de ses débiteurs, la somme nécessaire pour en payer le montant. En demandant à chacun 1520 francs, il lui manquerait 3110 francs, tandis qu'elle aurait 205 francs de trop si elle leur demandait 1715 francs. Trouver le nombre des débiteurs et le montant de la dette.

32. — Un propriétaire achète des bœufs et des moutons et paye 17400 francs pour 160 têtes de bétail. Il y a 3 fois plus de moutons que de bœufs, 20 moutons coûtent le même prix que 3 bœufs. Quel est le prix d'un bœuf et celui d'un mouton?

Propriétés élémentaires des nombres entiers

DIVISIBILITÉ

I. — Propriétés fondamentales

133. — Rappelons, en les résumant, les définitions déjà données et les principes déjà démontrés.

Si un nombre a *est exactement divisible par un nombre* b, *on dit que* a *est un multiple de* b, *tandis que* b *est un* diviseur, *un* sous-multiple, *une* partie aliquote, *un facteur de* a.

Ainsi :

$$60 = 5 \times 12$$

60 est divisible par 5 ou est un multiple de 5.

5 est un diviseur, un sous-multiple, une partie aliquote ou un facteur de 60.

On a vu que *tout diviseur de plusieurs nombres divise leur somme, et que par suite tout diviseur d'un nombre divise ses multiples.*

Par exemple si d divise a, b et c, il divise la somme $a + b + c$.

Et si d divise a, il divise $a + a$ ou $2a$, $2a + a$ ou $3a$, etc.

On a vu encore que *tout diviseur de deux nombres divise leur différence.*

Par exemple si d divise a et divise b, il divise la différence $(a - b)$.

Ce principe peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Tout nombre qui divise une somme de deux parties et l'une de ces parties divise l'autre.

Rappelons enfin que : *Tout nombre qui en divise deux autres divise le reste de leur division.*

134. — Souvent on a besoin de savoir si des nombres donnés sont divisibles par d'autres nombres donnés. Les *caractères de divisibilité* des nombres permettent de répondre à cette question sans qu'il soit nécessaire de faire les divisions.

D'autres fois on désirerait seulement connaître le reste de la division de deux nombres ; le théorème suivant nous permettra de résoudre ce problème.

135. Théorème I. — *Si un nombre divise l'une des parties d'une somme de deux termes sans diviser l'autre, il ne divise pas la somme ; de plus, le reste de la division de la somme par ce nombre est le même que le reste de la division par ce même nombre de la partie non divisible.*

Soit la somme :

$$63 + 31$$

La première partie 63 est divisible par 7, la deuxième 31 divisée par 7 donne pour reste 3, je dis que si l'on divise 63 + 31 par 7, le reste de la division sera 3.

On a, en effet :

$$\begin{array}{rl} 63 = & 9 \text{ fois } 7 \\ 31 = & 4 \text{ fois } 7 + 3 \\ \hline \text{d'où} \quad 63 + 31 = & 13 \text{ fois } 7 + 3 \end{array}$$

Ce qui démontre le théorème.

136. Remarque. — Ce théorème peut s'énoncer encore :

Si l'on retranche du dividende un multiple du diviseur, le reste ne change pas.

En effet, 63 + 31 donne 3 pour reste de la division ; si l'on retranche 63 qui égale 7 × 9 on obtiendra 31 qui, divisé par 7, donnera pour reste 3.

137. Théorème II. — *Le reste de la division d'une somme par un nombre ne change pas, lorsqu'on remplace chacun des termes de la somme par le reste de sa division par ce nombre.*

Démonstration. — Remplacer un nombre par le reste de sa division revient à lui retrancher un multiple du diviseur — (c'est ici le produit du diviseur par le quotient) — donc remplacer un terme d'une somme par le reste de sa division, c'est retrancher de cette somme un multiple du diviseur. Si on fait subir cette transformation à chacun des termes d'une somme on n'aura pas changé le reste de la division de la somme.

138. Remarque. — On peut sans changer le reste de la division d'une différence par un nombre, retrancher à ses deux termes des multiples du diviseur, pourvu que la soustraction reste possible.

II. — Caractères de divisibilité.

139. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit divisible par un autre s'appelle *caractère de divisibilité* par cet autre nombre.

CARACTÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 2 OU PAR 5

140. Théorème. — *Le reste de la division d'un nombre par 2 ou par 5 est égal au reste de la division par 2 ou par 5 de son dernier chiffre à droite.*

10, étant le produit de 2 par 5, est divisible à la fois par 2 et par 5. Par suite, un nombre quelconque de dizaines est toujours divisible par 2 ou par 5. Si donc on retranche à un nombre le nombre de ses dizaines, on ne change pas le reste de sa division par 2 ou par 5, qui est alors celui de son dernier chiffre à droite.

141. Caractère de divisibilité. — *Un nombre est divisible par 2 ou par 5 quand il est terminé par un zéro ou que son dernier chiffre à droite est divisible par 2 ou par 5.*

Un nombre divisible par 2 est dit nombre pair. Un nombre *impair* est celui qui n'est pas divisible par 2.

CARACTÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 4 OU PAR 25

142. Théorème. — *Le reste de la division d'un nombre par 4 ou par 25 est le même que celui du nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite.*

On raisonne comme pour le théorème précédent, en remarquant que

$$100 = 4 \times 25$$

Si on supprime les centaines d'un nombre, on ne change pas son reste de division par 4 ou par 25.

143. Caractère de divisibilité. — *Un nombre est divisible par 4 ou par 25 quand il est terminé par deux zéros ou que le* nombre formé *par ses deux derniers chiffres à droite est divisible par 4 ou par 25.*

144. Remarque. — On établirait des caractères de divisibilité analogues en remarquant que

$$\begin{array}{rl} 1\,000 = & 8 \times 125 \\ 10\,000 = & 16 \times 625 \\ & \text{etc.} \end{array}$$

CARACTÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 3 OU PAR 9

145. Théorème. — *Le reste de la division d'un nombre par 3 ou par 9 est le même que celui de la somme de ses chiffres.*

Toute puissance de 10 est un multiple de 9 ou de 3 augmentée de 1.

$$\begin{array}{rl} 10 = & 9 + 1 = \text{mult. de } 3 + 1 \\ 100 = & 99 + 1 = \text{mult. de } 9 + 1 = \text{mult. } 3 + 1 \\ 1\,000 = & 999 + 1 = \text{mult. de } 9 + 1 = \text{mult. } 3 + 1 \end{array}$$

Considérons alors un nombre quelconque, 37 692 par exemple. On peut le décomposer de la manière suivante :

$$\begin{array}{rl} 30000 = 3 \times & 10000 = 3 \times (\text{mult. } 9 + 1) = \text{mult. } 9 + 3 \\ 7000 = 7 \times & 1000 = 7 \times (\text{mult. } 9 + 1) = \text{mult. } 9 + 7 \\ 600 = 7 \times & 100 = 6 \times (\text{mult. } 9 + 1) = \text{mult. } 9 + 6 \\ 90 = 9 \times & 10 = 9 \times (\text{mult. } 9 + 1) = \text{mult. } 9 + 9 \\ 2 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \\ \hline 37692 & \text{somme de mult. } 9 + 3 + 7 + 6 + 9 + 2 \end{array}$$

$$37692 = \text{mult. } 3 + 3 + 7 + 6 + 9 + 2$$

Le reste par 9 ou par 3 est évidemment le même que celui de la somme :

$$3 + 7 + 6 + 9 + 2$$

146. Caractère de divisibilité. — *Un nombre est divisible par 3 ou par 9 quand la somme de ses chiffres, pris en valeur absolue, est divisible par 3 ou par 9.*

PREUVE PAR 9

Le caractère de divisibilité par 9, portant sur tous les chiffres d'un nombre, fournit un bon moyen de vérifier les opérations, en particulier la multiplication et la division.

147. Preuve par 9 de la multiplication. — Soient A et B le multiplicande et le multiplicateur, a et b les restes par 9 de ces deux facteurs.

On peut écrire :

$$A \times B = (\text{mult. } 9 + a) \times (\text{mult. } 9 + b)$$

ou (79) :

$$A \times B = \text{mult. } 9 \times \text{mult. } 9 + a \times \text{mult. } 9 + b \times \text{mult. } 9 + a \times b$$

ou enfin :

$$A \times B = \text{mult. } 9 + a \times b$$

Le reste par 9 du produit est donc égal au reste par 9 de $a \times b$, c'est-à-dire au reste par 9 du produit des restes du multiplicande et du multiplicateur. Cette condition est facile à vérifier.

On procède en général de la manière suivante :

148. Règle. — *On écrit le reste par 9 du multiplicande au sommet d'une croix en X, le reste par 9 du multiplicateur au-dessous dans l'angle inférieur de l'X. On fait le produit*

de ces restes et on écrit le reste par 9 à gauche de la croix. Enfin on calcule le reste par 9 du produit de la multiplication et on l'écrit à droite de la croix. Les deux derniers nombres inscrits doivent être égaux.

Exemple :

```
   3742
    347
  26194
 14968
11226
1298474
```

Pour simplifier le calcul du reste par 9, on retranche 9 au fur et à mesure de l'addition des chiffres, chaque fois que la somme dépasse 9. On dit : 3 et 7, 10, moins 9, reste 1 ; 1 et 4, 5, et 2, 7 ; le reste du multiplicande est 7, etc.

149. Preuve par 9 de la division. — On la déduit de l'égalité.

$$D = d \times Q + R$$

Soient a le reste par 9 de D, b le reste de d, q le reste de Q et r de R.

On a :

$$D = \text{mult. } 9 + a$$
$$d = \text{mult. } 9 + b$$
$$Q = \text{mult. } 9 + q$$
$$R = \text{mult. } 9 + r$$

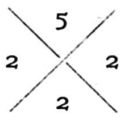
d'où :

$$\text{mult. } 9 + a = (\text{mult. } 9 + b) \times (\text{mult. } 9 + q) + (\text{mult. } 9 + r)$$
$$\text{mult. } 9 + a = \text{mult. } 9 \times \text{mult. } 9 + b \times \text{mult. } 9 + q \times \text{mult. } 9 + b \times q + \text{mult. } 9 + r = \text{mult. } 9 + b \times q + r$$

Il résulte de cette dernière égalité que le reste par 9 de $b \times q + r$ est égal au reste par 9 de a, c'est-à-dire à a lui-même.

150. Règle. — *On dispose la preuve comme pour la multiplication ; on écrit le reste par 9 du diviseur en haut de l'X ; le reste du quotient, en bas ; le reste du dividende, à gauche. A droite, on inscrit le reste par 9 du produit des restes du diviseur et du quotient augmenté du reste de la division. Les deux derniers nombres inscrits doivent être égaux.*

Exemple :




```
37541 | 257
1184  |  146
 1561 |
   19 |
```

151. Remarque. — La preuve par 9 ne fournit, comme toutes les preuves, qu'une probabilité d'exactitude ; elle n'indique pas les erreurs égales à un multiple de 9.

CARACTÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 11

152. Théorème. — *Le reste par 11 d'un nombre est égal au reste par 11 de la différence obtenue en retranchant la somme des chiffres de rang pair de la somme des chiffres de rang impair à compter de la droite.*

On remarque que :

$$10 = 11 - 1$$
$$100 = 99 + 1 = \text{mult. } 11 + 1$$
$$1000 = 10 \times 100 = 10 \text{ mult. } 11 + 10 = \text{mult. } 11 - 1$$
$$10000 = 100 \times 100 = (\text{mult. } 11 + 1)(\text{mult. } 11 + 1) = \text{mult. } 11 + 1$$

et d'une façon générale,

$$10^{2n} = \text{mult. } 11 + 1$$
$$10^{2n+1} = \text{mult. } 11 - 1$$

$2n$ représentant un exposant pair et $2n + 1$, un exposant impair.

Soit alors le nombre 1 842 329 ; on peut le décomposer comme suit :

$$\begin{aligned}
1000000 &= \text{mult. } 11 + 1 &&= \text{mult. } 11 + 1\\
800000 &= 8 \times 100000 = 8 \times (\text{mult. } 11 - 1) &&= \text{mult. } 11 - 8\\
400000 &= 4 \times 10000 = 4 \times (\text{mult. } 11 + 1) &&= \text{mult. } 11 + 4\\
2000 &= 2 \times 1000 = 2 \times (\text{mult. } 11 - 1) &&= \text{mult. } 11 - 2\\
300 &= 3 \times 100 = 3 \times (\text{mult. } 11 + 1) &&= \text{mult. } 11 + 3\\
20 &= 2 \times 10 = 2 \times (\text{mult. } 11 - 1) &&= \text{mult. } 11 - 2\\
9 &= \ldots\ldots\ldots\

157. Remarque. — Si R est nul, B divise exactement A, c'est le plus grand commun diviseur de A et de B. Si R n'est pas nul, les diviseurs communs à A et à B sont les mêmes que les diviseurs communs à A et à R ; mais alors ils sont aussi les mêmes que ceux de R et du reste R_1 de la division de B par R. Ceux de R et de R_1 sont à leur tour les mêmes que ceux de R_1 et du reste R_2 de la division de R par R_1, et ainsi de suite. Comme, d'ailleurs, on a :

$$R < B$$
$$R_1 < R$$
$$R_2 < R_1 \text{ etc.}$$

il arrivera nécessairement dans la suite des divisions un moment où le reste sera nul. Supposons que ce soit R_4.

$$R_4 = 0$$

Cela veut dire que R_3 divise exactement R_2, ou que R_2 est un multiple de R_3. Dans ce cas, les diviseurs de R_3 sont communs à R_1 et R_2, ou à R_2 et R_1, ou à R_1 et R, ou à R et B, ou enfin à B et A. En particulier, le plus grand commun diviseur de A et de B est R_3.

158. Règle. — *Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on divise le plus grand de ces nombres par le plus petit ; si le reste est nul, le plus grand commun diviseur est le plus petit nombre lui-même. Sinon on divise le plus petit nombre par le reste de la première division : si le nouveau reste est nul, le premier reste est le plus grand commun diviseur cherché. Sinon on divise le premier reste par le second, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on tombe sur un reste nul. Le dernier reste non nul obtenu est le plus grand commun diviseur cherché.*

159. — On dispose l'opération de la manière suivante : Soit à trouver le plus grand commun diviseur de 792 et de 639.

	1	4	5	1	2
792	639	153	27	18	9
153	27	18	9	0	

On écrit les restes successifs au-dessous des dividendes correspondants et les quotients au-dessus des diviseurs. On reporte chaque fois le reste de la division à la droite du diviseur qui devient le dividende de la division suivante, 9 est le plus grand commun diviseur cherché.

160. Remarque. — Les diviseurs communs de deux nombres sont les diviseurs de leur plus grand commun diviseur.

Tout nombre qui en divise deux autres divise leur plus grand commun diviseur.

Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres

161. — Puisque les diviseurs communs de deux nombres sont les diviseurs de leur plus grand commun diviseur, les diviseurs communs de trois nombres seront ceux de l'un de ces nombres et du plus grand commun diviseur de deux d'entre eux. En particulier, le plus grand commun diviseur de ces trois nombres sera le plus grand commun diviseur de l'un d'eux et du plus grand commun diviseur des deux autres.

De même, les communs diviseurs et en particulier le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres seront ceux de l'un de ces nombres et du plus grand commun diviseur de tous les autres.

Cette remarque donne le moyen de calculer le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. *On calcule d'abord le plus grand commun diviseur de deux de ces nombres ; puis le plus grand commun diviseur du troisième nombre et du premier plus grand commun diviseur trouvé, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé la série des nombres.*

162. Remarque. — Les communs diviseurs de plusieurs nombres sont les diviseurs de leur plus grand commun diviseur ; et tout nombre qui en divise plusieurs autres divise leur plus grand commun diviseur.

163. Théorème. — *Si l'on multiplie ou si l'on divise plusieurs nombres par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est multiplié ou divisé par ce nombre.*

Choisissons d'abord le cas de la multiplication et soient les nombres A, B, C ; je dis que si on les multiplie par un même nombre m, leur plus grand commun diviseur est multiplié par m. Soit d_2 le plus grand commun diviseur des trois nombres ; on l'obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de C, et du plus grand commun diviseur d_1 de A et de B. Pour trouver d_1 on divise A par B, puis B par le reste R de la première division, et ainsi de suite (voir la règle). Soient R, R_1, R_2..., d_1 les restes successifs. On peut écrire, Q, Q , Q_2..., Q étant les quotients successifs :

$$A = B \times Q + R$$
$$B = R \times Q_1 + R_1$$
$$R = R_1 \times Q_2 + R_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{n-2} = R_{n-1} \times Q_n + d_1$$
$$R_{n-1} = d_1 \times Q_{n+1}$$

Or, conformément au théorème (116), si on multiplie A et B par m, tous les restes successifs jusqu'au dernier seront multipliés par m et les égalités deviendront :

$$A \times m = B \times m \times Q + R \times m$$
$$B \times m = R \times m \times Q_1 + R_1 \times m$$
$$\vdots$$
$$R_{n-1} \times m = d_1 \times m \times Q_{n+1}$$

ce qui nous montre que, d'après la règle, $d_1 \times m$ est le plus grand commun diviseur de $A \times m$ et de $B \times m$. Or, si d_2 est le plus grand commun diviseur de d_1 et de C, le même raisonnement prouve que $d_2 \times m$ est le plus grand commun diviseur de $d_1 \times m$ et de $C \times m$, c'est-à-dire celui de $A \times m$, $B \times m$ et $C \times m$.

La démonstration se ferait de la même façon pour le cas de la division.

Nombres premiers entre eux

164. Définition. — On dit que des nombres sont premiers entre eux, quand leur plus grand commun diviseur est l'unité.

Il n'est pas évident qu'il existe de tels nombres. On le démontre par le théorème suivant :

165. Théorème. — *Si on divise plusieurs nombres, par leur plus grand commun diviseur, les quotients sont premiers entre eux.*

La démonstration résulte du théorème (163). Si on divise plusieurs nombres par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est divisé par ce nombre ; si le diviseur employé est le plus grand commun diviseur lui-même, celui-ci est divisé par lui-même, il devient égal à l'unité ; donc les quotients sont premiers entre eux (164).

166. Théorème. — *Si un nombre divise un produit de deux facteurs et qu'il soit premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.*

Soient A et B les deux facteurs et C un nombre qui divise leur produit et qui soit premier avec A.

A et C ont pour plus grand commun diviseur 1. Si on les multiplie tous les deux par B, leur plus grand commun diviseur est multiplié par B (163), c'est-à-dire qu'il devient B lui-même. Or, C divise le produit $A \times B$, par hypothèse ; il divise aussi son multiple $C \times B$. Il divise donc le plus grand commun diviseur de $A \times B$ et de $C \times B$ (160, *Remarque*), c'est-à-dire B.

167. Théorème. — *Si un nombre est divisible séparément par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.*

Soit un nombre A divisible séparément par plusieurs facteurs a, b, c premiers entre eux deux à deux. Soit Q le quotient de la division de A par a ; on a :

$$A = a \times Q$$

Or, b divise A ou $a \times Q$, il est premier avec a (hypothèse), donc il divise Q (166). Soit, Q′ le quotient de Q par b, on a :

$$Q = b \times Q'$$

Mais le même raisonnement prouve que c divise Q′. Or, s'il divise Q′ il divise le produit $b \times Q'$ qui est égal à Q et, comme il est premier avec b, il divise Q′.

Si on appelle Q″ le quotient de Q′ par c, on a donc encore : $Q' = c \times Q''$.

En définitive, on peut donc rapprocher les trois relations :

$$\begin{aligned} A &= a \times Q \\ Q &= b \times Q' \\ Q' &= c \times Q'' \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre ces trois relations, on obtient encore une égalité :

$$A \times Q \times Q' = a \times b \times c \times Q \times Q' \times Q''$$

qui reste vraie si on divise les deux membres par le produit $Q \times Q'$:

$$A = a \times b \times c \times Q''$$

Cette dernière relation prouve que A est le produit de $a \times b \times c$ par un nombre entier Q″ et que, par conséquent, il est divisible par le produit :

$$a \times b \times c$$

168. Application. — Ce théorème s'applique à la recherche de certains caractères de divisibilité. En effet, si un diviseur est égal à un produit de facteurs premiers entre eux deux à deux, pour qu'un nombre soit exactement divisible par ce diviseur, il faut et il suffit qu'il soit divisible séparément par chacun des facteurs.

Exemple : Pour qu'un nombre soit divisible par 6, il faut et il suffit qu'il soit divisible séparément par 2 et par 3.

Plus petit commun multiple de plusieurs nombres

(P. P. C. M.)

169. Définition. — Un nombre peut être à la fois multiple de plusieurs autres nombres ; on dit que c'est un *commun multiple* de ces nombres.

L'existence d'un multiple commun est évidente, puisque, par exemple, le produit des nombres proposés est un multiple commun de ces nombres.

Un multiple d'un nombre étant au moins égal à ce nombre, un multiple commun de plusieurs nombres ne peut pas être plus petit que le plus grand de ces nombres. Il s'ensuit que, si la série des multiples communs de plusieurs nombres peut être accrue indéfiniment, par exemple, par multiplication de l'un de ces multiples communs par la série des nombres entiers, y a cependant une limite inférieure à la valeur de ces multiples, il existe un multiple commun qui est *plus petit que tous les autres*. C'est ce dernier qu'on appelle *plus petit multiple commun* des nombres donnés.

Il peut être utile de connaître ce plus petit commun multiple.

170. Théorème. — *Si l'on divise un multiple d'un produit de deux facteurs par l'un de ces facteurs, le quotient est un multiple de l'autre facteur.*

Soient le produit $a \times b$ et un multiple M de ce produit. M est le produit de $a \times b$ par un nombre entier m ; on a donc :

$$M = a \times b \times m$$

Cette égalité montre que M est également le produit par a de $b \times m$; donc, si on divise M par a, le quotient de cette opération est $b \times m$ qui est un multiple de b.

171. Théorème. — *Les communs multiples de deux nombres sont les mêmes que les multiples du quotient du produit de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur.*

Soient A et B les deux nombres considérés et D leur plus grand commun diviseur. Soient a le quotient de A par D et b le quotient de B par D. On a :

$$\begin{aligned} A &= a \times D \\ B &= b \times D \end{aligned}$$

et de plus a et b sont premiers entre eux.

Soit M un multiple commun de A et de B ; c'est un multiple commun de $a \times D$ et de $b \times D$. D'après le théorème (170), si on divise M par D, le quotient Q est donc à la fois un multiple de a et de b, et, par suite, un multiple de leur produit $a \times b$; m étant un nombre entier quelconque, on peut donc écrire :

$$Q = a \times b \times m$$

Si on multiplie les deux membres par D, on a :

$$Q \times D = a \times b \times D \times m$$

ou :

$$M = a \times b \times D \times m$$

mais $a \times b \times D$ est le quotient de $A \times B$ par D, puisque :

$$A \times B = a \times D \times b \times D$$

M est donc bien un multiple de $A \times B$, divisé par D.

D'ailleurs, tout multiple de $a \times b \times D$ est évidemment un multiple de $a \times D$ et de $b \times D$ ou de A et de B.

Donc, enfin, les multiples communs à A et à B sont les mêmes que les multiples du quotient de $A \times B$ par D.

Le plus petit de ces multiples est le quotient lui-même.

Par conséquent :

172. Corollaire. — *Le plus petit commun multiple de deux nombres est le quotient du produit de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur.*

Il résulte de ce qui précède que les multiples communs de deux nombres sont les mêmes que ceux de leur plus petit commun multiple.

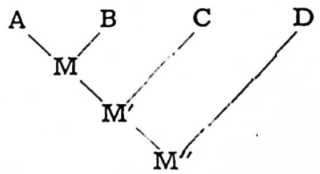
Par suite, *pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs nombres, on cherche d'abord le plus petit commun multiple des deux premiers ainsi trouvé et du troisième, puis le plus petit commun multiple de ce nouveau nombre et du quatrième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres proposés.*

On procède d'une manière analogue à celle de la recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.

Soit à trouver le plus petit commun multiple des nombres A, B, C, D.

On recherche le plus petit multiple commun M des deux premiers nombres A et B, puis le plus petit multiple commun M′ de M et du troisième nombre C et ainsi de suite.

La suite des opérations peut se représenter schématiquement comme suit :



173. Remarque. — Les communs multiples de plusieurs nombres sont les mêmes que ceux de leur plus petit multiple commun.

Exercices

37. — Calculer le p. g. c. d. des trois nombres 629, 44 et 629×444, sans effectuer le produit indiqué ni la décomposition en facteurs premiers.

38. — Démontrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 48.

39. — Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, démontrer que les deux nombres ab et $a + b$, ab et $a - b$ sont aussi premiers entre eux.

40. — Démontrer que le produit $(n^2 - 1)\, n^2\, (n^2 + 1)$ est divisible par 60.

Nombres premiers

174. Définition. — Un nombre premier est un nombre supérieur à 1 qui n'admet d'autre diviseur que lui-même et l'unité.

175. Théorème. — *Si un nombre n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier.*

Soit A ce nombre ; il admet un ou plusieurs diviseurs différents de l'unité, soit a le plus petit de ces diviseurs. Je dis que a est premier. En effet, si a n'était pas premier, il aurait au moins un diviseur a' plus grand que l'unité qui serait aussi un diviseur de A. Par conséquent, a ne serait pas le plus petit diviseur de A, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc a est premier.

176. Corollaire. — *Si plusieurs nombres ne sont pas premiers entre eux, ils admettent au moins un diviseur premier commun.*

En effet, ils ont un plus grand commun diviseur, plus grand que l'unité, qui est lui-même premier ou qui admet au moins un diviseur premier.

177. Théorème. — *La suite des nombres premiers est illimitée.*

Il suffit de démontrer que, étant donné un nombre premier quelconque, on peut toujours trouver un nombre premier qui lui soit supérieur.

Soit a un nombre premier quelconque. Formons le produit :

$$P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times a$$

de tous les nombres entiers jusqu'à a ; puis considérons la somme

$$P + 1$$

Si $P + 1$ est un nombre premier, le théorème est démontré, par P est évidemment plus grand que a. S'il n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier, p par exemple. Or, p ne peut être contenu dans la série des nombres de 1 à a, autrement il serait l'un des facteurs du produit P et il diviserait leur différence 1 (107) et il serait égal à 1, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que p soit supérieur à a. Il existe donc dans tous les cas un nombre premier supérieur à a.

178. Table des nombres premiers. — Il peut être utile d'avoir à sa disposition une table des nombres premiers. *La suite de ces nombres étant illimitée*, il est bien évident qu'on peut seulement se proposer de construire une table des nombres premiers inférieurs à un nombre donné.

Soit à construire la table des nombres premiers inférieurs à 100. On écrit tous les nombres de 2 à 100 :

2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17
..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..
93	94	95	96	97	98	99	100

On remarque que le plus petit nombre premier est 2. Tout nombre qui admet comme diviseur premier 2, n'est pas premier. Par suite, nous devons supprimer du tableau tous les nombres pairs, sauf 2 : barrons-les. 3, n'ayant pas été barré, est premier, car le seul nombre qui le précède ne le divise pas. Tout nombre qui admet comme diviseur 3, n'est pas premier : barrons tous les multiples de 3 qui n'ont pas été barrés comme multiples de 2. 5, n'ayant pas été barré, est premier, car les nombres premiers qui le précèdent ne le divisent pas, et le nombre 4 ne peut le diviser, puisque c'est un multiple de 2 et que 2 ne divise pas 5. On barre les multiples de 5 qui n'ont pas été barrés comme multiples de 2 ou de 3. 7 est premier, car aucun des nombres premiers qui le précèdent ne le divise ; quant à ceux qui ne sont pas premiers et que l'on a barrés, ils ne divisent pas 7 non plus, puisque ce sont des multiples de nombre premiers qui ne divisent pas 7. On barre les multiples de 7.

Le tableau se compose des nombres qui n'ont pas été barrés. Il est terminé. En effet, le nombre premier qui suit 7 est 11 ; le carré de 11, 11×11, est supérieur à 100 ; or, tous les multiples de 11 inférieurs à 11×11 ont été barrés comme multiples des nombres premiers précédents ; 2, 3, 5, 7. Le tableau est donc achevé après la suppression des multiples de 7.

Quelle que soit la limite supérieure fixée pour le tableau, on s'arrêtera donc quand on aura barré les multiples du nombre premier qui précède celui dont le carré est supérieur à la limite proposée.

179. Problème. — *Reconnaître si un nombre donné est premier*, quand on n'a pas de table à sa disposition.

On le divise successivement par les nombres premiers dans l'ordre de grandeur croissante : 2, 3, 5, 7... Si l'une des divisions se fait exactement, le nombre n'est pas premier. Sinon, on remarque qu'il suffit de continuer les essais jusqu'au plus petit nombre premier, dont le carré est supérieur au nombre proposé.

180. Théorème. — *Si un nombre premier ne divise pas un autre nombre, il est premier avec lui.*

En effet, le plus grand commun diviseur de ces deux nombres ne peut être que l'unité, puisque le nombre premier donné n'admet d'autres diviseurs que lui-même ou l'unité.

181. Théorème. — *Si un nombre premier divise un produit de facteurs, il divise au moins l'un des facteurs.*

Soient $a \times b \times c$ le produit et p le nombre premier. Si p ne divise pas a, il est premier avec lui (180) et alors il divise le produit $b \times c$ (166). S'il ne divise pas b, il est premier avec lui et il divise c. Donc il divise au moins l'un des facteurs.

Ce théorème s'applique en particulier aux produits de facteurs égaux, c'est-à-dire aux puissances d'un nombre, si p divise a^m, il divise a.

182. Théorème. — *Les puissances de deux nombres premiers entre eux sont premières entre elles.*

Soient a et b deux nombres premiers entre eux et a^m et b^n des puissances de ces nombres. Si a^m et b^n n'étaient pas premiers entre eux, ils admettraient au moins un diviseur premier commun (176), soit p ce diviseur, p divisant a^m diviserait a (181) et, divisant b^n, il diviserait b ; a et b auraient donc un diviseur premier commun, ce qui est impossible.

183. Théorème. — *Si un nombre n'est pas premier, il est égal à un produit de facteurs premiers.*

Soit un nombre N ; s'il n'est pas premier, il admet au moins un facteur premier a et il est alors égal au produit de a par un certain nombre N_1. Si N_1 est premier, le théorème est démontré ; s'il n'est pas premier, il admet au moins un facteur premier b et N_1 est égal au produit de b par un certain nombre N_2. En continuant de la sorte, on remarque que les nombres N, N_1, N_2, N_3, etc., vont en décroissant et qu'il arrivera forcément un moment où l'on tombera sur un quotient premier n. Le nombre N pourra alors se mettre sous la forme :

$$N = a \times b \times c \times \ldots \times n$$

a, b, c... n étant des nombres premiers.

Cette opération s'appelle : *décomposer un nombre en facteurs premiers.*

184. Théorème. — *Il n'y a qu'une seule façon de décomposer un nombre en facteurs premiers.*

Supposons qu'on ait décomposé le nombre N en deux produits de facteurs premiers :

$$N = a \times b \times c \times \ldots \times n$$
$$N = a' \times b' \times c' \times \ldots \times n'$$

Nous allons démontrer que ces produits se composent des mêmes facteurs.

En effet, on a :

$$a \times b \times c \times \ldots \times n = a' \times b' \times c' \times \ldots \times n'$$

L'un des facteurs a du premier membre, divisant évidemment le produit dont il fait partie, divise le produit égal $a' \times b' \times c' \times \ldots \times n'$. Par suite, il divise au moins un des facteurs de ce produit (181) a par exemple. Mais puisque a est premier, a ne peut le diviser que s'il lui est égal donc :

$$a = a'$$

et par suite en divisant les deux produits égaux par a :

$$b \times c \times \ldots \times n = b' \times c' \times \ldots n'$$

En répétant le raisonnement sur cette nouvelle relation, on démontrera que b est égal à l'un des facteurs du second membre, b' par exemple ; et en continuant jusqu'à ce qu'on ait épuisé la série des facteurs, on aura finalement :

$$a = a' \qquad b = b' \qquad c = c' \qquad \ldots \qquad n = n'$$

185. Remarque. — Les théorèmes (183) et (184) sont encore vrais si certains facteurs premiers sont égaux entre eux ; si par exemple on a :

$$b = c = n$$

Dans ce cas, on pourra remplacer le produit des facteurs égaux par la puissance convenable, b^2 par exemple.

186. Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers. — Le produit de facteurs premiers par le lequel un nombre peut être remplacé étant bien déterminé, présente une grande importance au point de vue du calcul et en particulier dans la recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun de plusieurs nombres.

187. Règle. — *Pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers, on le divise successivement par tous les nombres premiers, dans l'ordre de grandeur croissante ; on inscrit les quotients des divisions qui se font exactement, les uns au-dessous des autres, sous le nombre proposé, et on inscrit à droite, en face des dividendes successifs, les diviseurs employés. Lorsqu'on a employé un diviseur, on doit toujours essayer si le quotient obtenu n'est pas encore divisible par le même nombre. On arrête les opérations quand le quotient est égal à 1.*

Exemple : Soit à décomposer 1260 en ses facteurs premiers. L'opération se présente sous l'aspect suivant :

1 260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

On a donc :

$$1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

ou :

$$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

188. Théorème. — *Pour qu'un nombre soit divisible par un autre, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers figurant dans la décomposition du second nombre figurent avec des exposants au moins égaux dans la décomposition du premier nombre.*

1° La condition est *nécessaire* ; car, si le premier nombre est divisible par le second, il est égal au produit de ce dernier nombre par un nombre entier quelconque. Il contient donc tous ses facteurs premiers avec des exposants au moins égaux.

2° La condition est *suffisante* : car, si le premier nombre contient tous les facteurs premiers du second avec des exposants au moins égaux, on peut l'écrire sous forme d'un produit du second nombre par un nombre entier quelconque.

Exemple : Soient les deux nombres 3780 et 125 ; la décomposition en facteurs premiers donne :

$$3780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$$
$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Le nombre 3780 est divisible par 126, car tous les facteurs premiers de 126 sont contenus dans 36780 avec des exposants au moins égaux.

On peut remarquer que le quotient s'obtient très aisément par soustraction des exposants des facteurs égaux ; c'est :

$$2 \times 3 \times 5$$

189. Théorème. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres décomposés en leurs facteurs premiers est le produit des facteurs premiers communs à tous ces nombres, ces facteurs premiers étant pris avec leur plus faible exposant.*

En effet, d'après le théorème précédent, tous les facteurs premiers du plus grand commun diviseur doivent être contenus parmi les facteurs premiers de chacun des nombres proposés et avoir un exposant au plus égal à celui de ces derniers facteurs. D'ailleurs, le produit composé d'après l'énoncé du théorème est bien le plus grand commun diviseur et non un commun diviseur quelconque ; autrement, pour obtenir le plus grand commun diviseur, il faudrait multiplier ce produit par un facteur nouveau et celui-ci ne serait pas contenu dans tous les nombres proposés, ce qui est impossible (188).

Exemple : Soient les nombres

3780 2970 126

La décomposition en facteurs premiers donne :

$$3780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$$
$$2970 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 11$$
$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Le plus grand commun diviseur est donc :

$$2 \times 3^2 = 18$$

190. Théorème. — *Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres décomposés en leurs facteurs premiers est le produit de tous les facteurs premiers différents contenus dans l'ensemble de ces nombres, chacun de ces facteurs étant pris avec le plus grand exposant.*

La démonstration résulte du théorème.

Le plus petit commun multiple des nombres :

$$2970 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 11$$
$$3780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$$
$$126 = 2 \times 3^3 \times 7$$

est :

$$2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 41580$$

Exercices

41. — Tout nombre premier autre que 2 et 3 est un multiple de 6 augmenté ou diminué de 1. — La réciproque est-elle vraie ?

42. — Expliquer comment on reconnaît si le nombre 617 est premier et dire pourquoi l'on peut affirmer, après un nombre convenable d'essais de divisions, que le nombre 617 est premier.

Problèmes

43. — On veut planter le long des bords d'une plate-bande rectangulaire un certain nombre de rosiers, également espacés, de manière que la distance d'un

rosier au suivant soit au moins de 1 mètre et moins de 2 mètres, et qu'il y ait un rosier à chaque coin de cette plate-bande.

La longueur de celle-ci est de 14 mètres 84 et sa largeur de 10 mètres 60. Combien faut-il avoir de rosiers? (*Brevet supérieur.*)

44. — Un père de famille donne à ses deux enfants une somme qu'ils doivent se partager en parties égales. La part du premier enfant, qui habite la France, peut être exactement payée en pièces de 20 francs. Le deuxième enfant, qui habite l'Angleterre, reçoit un nombre exact de livres sterling, valant 25 francs 20.

La somme donnée par le père étant comprise entre 12.000 et 13.000 francs, quelle est cette somme ? (*Brevet supérieur.*)

45. — Un bataillon, dont on ignore le nombre d'hommes, mais qu'on sait ne pas dépasser *mille*, fait l'exercice sur un champ de manœuvre.

En le voyant se mettre en colonne :

1° par files de 8 hommes ;

2° par files de 15 hommes ;

3° par files de 25 hommes ;

un spectateur qui a remarqué que dans les trois cas les files n'étaient pas complètes et que la dernière file, dans les trois cas, ne comprenait que 5 hommes, déclare qu'il sait le nombre des hommes et affirme que s'ils se mettaient en colonne, par files de 11 hommes, toutes les files seraient complètes.

Trouver le nombre des hommes et montrer qu'il satisfait à toutes les conditions énoncées.

Fractions

191. Définition. — Une grandeur finie quelconque : longueur, surface, volume, poids, angle, durée, etc., étant donnée, on conçoit qu'on puisse trouver une autre grandeur de même nature, dont le double ou le triple ou le quadruple, etc., soit justement égal à la grandeur proposée.

Supposons par exemple qu'une longueur A étant donnée, on en trouve une autre B qui soit contenue 7 fois dans A. Nous dirons que B est le *septième* de A. On écrira : B vaut $\frac{1}{7}$ de A. L'expression $\frac{1}{7}$ s'appelle une FRACTION ; 1 est le NUMÉRATEUR et 7 le DÉNOMINATEUR de la fraction.

La fraction $\frac{1}{7}$, ayant pour numérateur 1, est particulièrement simple. Mais supposons, maintenant, qu'on prenne une troisième grandeur C, valant trois fois B. Puisque B vaut un septième de A, C vaut trois septièmes de A. C'est ce qu'on exprime par la fraction $\frac{3}{7}$.

A étant choisi pour unité, on dit que le dénominateur de la fraction représente la partie de l'unité et que le numérateur représente le nombre de fois qu'on a pris cette partie de l'unité.

Ainsi la fraction $\frac{3}{7}$ indique qu'on a partagé l'unité en sept parties égales et qu'on a additionné trois de ces parties.

Si la grandeur mesurée contient une ou plusieurs unités plus une partie plus petite que l'unité — telle une longueur de deux mètres et un tiers de mètre — on dit que la grandeur est fractionnaire et sa mesure est le NOMBRE FRACTIONNAIRE $2 + \frac{1}{3}$ ou $2\frac{1}{3}$.

On remplace souvent le nombre fractionnaire par une expression ayant la forme d'une fraction, telle que $\frac{7}{3}$, qu'on appelle EXPRESSION FRACTIONNAIRE et qui, par son origine, est plus grande que 1.

192. — Pour énoncer une fraction, on lit d'abord le numérateur, puis le dénominateur, en le faisant suivre de la terminaison *ième*. $\frac{15}{21}$ se dit quinze vingt-et-unièmes. Cependant lorsque le dénominateur est l'un des nombres, 2, 3, 4, l'usage veut que l'on dise *demi*, *tiers*, *quart*, et non deuxième, troisième, quatrième.

193. — Par ce qui précède on voit *qu'une fraction sert à indiquer la mesure d'une grandeur qui contient une ou plusieurs fois exactement une partie aliquote de l'unité.*

D'une façon abstraite, *une fraction indique une ou plusieurs parties de l'unité que l'on a divisée en parties égales.*

194. Remarques. — Si le numérateur et le nominateur d'une fraction sont égaux, il est évident, d'après ce que nous venons de dire, que cette fraction équivaut à l'unité.

$$\frac{7}{7} = 1$$

Si le numérateur est inférieur au dénominateur, la fraction est inférieure à l'unité :

$$\frac{3}{7} < 1$$

Si le numérateur est supérieur au dénominateur, la fraction est supérieure à l'unité :

$$\frac{9}{7} > 1$$

Dans un but de simplification on convient d'appeler fraction toute forme composée d'un numérateur et d'un dénominateur, mais en réservant, conformément au sens primitif, le nom de *fraction proprement dite* à une fraction plus petite que 1 ; toutefois quand cette distinction a une utilité. Par suite :

$$\frac{3{,}3 \times 5}{7{,}7}, \frac{9 \times 6}{7 \times 11}$$

sont des fractions.

195. — Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur :

$$\frac{9}{11} > \frac{5}{11}$$

Si deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur :

$$\frac{5}{4} > \frac{5}{7}$$

Si on augmente le numérateur, ou si on diminue le dénominateur, la fraction augmente :

$$\frac{9}{17} < \frac{9+5}{17} \text{ ou } \frac{14}{17} ; \frac{9}{17} < \frac{9}{17-7} \text{ ou } \frac{9}{10}$$

si on diminue le numérateur, ou si on augmente le dénominateur, la fraction diminue

$$\frac{7}{14} > \frac{7-3}{14} \text{ ou } \frac{4}{14} ; \frac{7}{14} > \frac{7}{14+3} \text{ ou } \frac{7}{17}$$

Tous ces théorèmes sont évidents ; leur démonstration résulte des considérations précédentes.

196. Théorème. — *Si on multiplie les deux termes d'une fraction par un même nombre entier, la nouvelle fraction obtenue est égale à la première.*

Soit la fraction $\frac{2}{3}$. Il résulte de la définition des fractions que le nombre $\frac{2}{3}$ a été obtenu en faisant la somme de deux nombres égaux $\frac{1}{3}$. L'unité elle-même se compose de la somme de trois nombres égaux à $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Multiplions par un nombre quelconque, 2 par exemple, les deux termes de la fraction ; nous obtenons la fraction $\frac{4}{6}$; je dis que $\frac{4}{6}$ est égal à $\frac{2}{3}$.

En effet, le dénominateur 6 de la nouvelle fraction indique que celle-ci se compose d'un certain nombre de sixièmes de l'unité. Or, il y a 2 fois plus de sixièmes dans l'unité que de tiers et l'unité est égale à la somme de six nombres égaux à $\frac{1}{6}$:

$$\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}_{\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}_{\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}_{\frac{1}{3}}=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

Le tableau précédent montre qu'il faut 2 sixièmes pour faire 1 tiers. Si donc je veux former une fraction ayant pour dénominateur 6 et égale à la fraction $\frac{2}{3}$, il que je prenne 2 fois plus de sixièmes, c'est-à-dire $2 \times 2 = 4$. En définitive on a :

$$\frac{2}{3}=\frac{2 \times 2}{3 \times 2}=\frac{4}{6}$$

Le raisonnement serait le même avec d'autres nombres.

197. Théorème. — *Si, les deux termes d'une fraction étant divisibles par un même nombre, on les divise par ce nombre, on obtient une fraction égale à la première.*

En effet, soit la fraction $\frac{18}{21}$, dont les deux termes sont divisibles par 3. On peut écrire :

$$\frac{18}{21}=\frac{6 \times 3}{7 \times 3}$$

et d'après le théorème précédent :

$$\frac{6}{7}=\frac{6 \times 3}{7 \times 3}$$

On a donc :

$$\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$

SIMPLIFICATION DES FRACTIONS

198. — D'après le théorème précédent, on voit que si les deux termes d'une fraction sont divisibles par un même nombre, on peut obtenir une fraction égale à la fraction proposée et ayant des termes plus simples.

On en déduit une méthode de *simplification* des fractions qui consiste à diviser les deux termes de la fraction par leur plus grand commun diviseur.

Si les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, ce qui résulte en particulier de l'application de la méthode précédente, on ne peut plus avoir recours à ce procédé. Toutefois il ne paraît pas impossible *a priori* qu'on puisse employer une autre méthode de simplification, applicable aussi dans le cas où les deux termes sont premiers entre eux.

Lorsqu'une fraction ne peut plus être simplifiée, on dit qu'elle est *irréductible* ou qu'elle est *réduite à sa plus simple expression*. Nous allons voir, qu'en appliquant la méthode précédente, on obtient une fraction irréductible.

199. Théorème. — *Si une fraction a ses deux termes premiers entre eux, toute fraction égale à celle-ci a pour termes des équimultiples de ses termes.*

Soit une fraction $\frac{8}{15}$ dont les termes sont premiers entre eux et une fraction $\frac{a}{b}$ égale à $\frac{8}{15}$. Multiplions les deux termes termes de $\frac{a}{b}$ par 15 et les deux termes de $\frac{8}{15}$ par b.

On a :

$$\frac{a \times 15}{b \times 15}=\frac{a}{b} \qquad \frac{8 \times b}{15 \times b}=\frac{8}{15}$$

et, par suite de l'hypothèse :

$$\frac{a \times 15}{b \times 15}=\frac{8 \times b}{15 \times b}$$

Comme les deux fractions ont même dénominateur, leurs numérateurs sont nécessairement égaux :

$$\text{(I)} \qquad a \times 15 = 8 \times b$$

Puisque 15 divise le produit $a \times 15$, il divise $8 \times b$ et, comme il est premier avec 8, il divise b. C'est donc le produit de 15 par un certain facteur m :

$$b = 15 \times m$$

L'égalité (I) peut alors s'écrire :

$$a \times 15 = 8 \times 15 \times m$$

d'où on déduit :

$$a = 8 \times m$$

Les termes a et b sont bien des équimultiples de 8 et de 15, ils sont respectivement le produit de chacun de ces nombres par m.

200. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction soit irréductible, c'est que ses termes soient premiers entre eux.*

Soit une fraction $\frac{a}{b}$ dont les termes sont premiers entre eux. Je dis qu'elle est irréductible. En effet, soit une fraction $\frac{a'}{b'}$ égale à la première, ses termes ne ne peuvent être plus simples que a et b ; car, de deux choses l'une, ou bien l'on a :

$$a' = a$$
$$b' = b$$

ou bien (199) a et b sont des équimultiples de a et de b, et la fraction $\frac{a'}{b'}$ peut être ramenée par simplification à la forme $\frac{a}{b}$.

201. Théorème. — *Si deux fractions irréductibles sont égales, elles ont respectivement les mêmes termes.*

Soit, en effet, les deux fractions irréductibles

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

Elles ont respectivement leurs termes premiers entre eux ; d'autre part, les termes de $\frac{a'}{b'}$ sont des équimultiples de a et de b, ou sont respectivement égaux à a et à b. C'est cette deuxième conclusion qui est la vraie, car si l'on avait :

$$a' = a \times m \qquad b' = b \times m$$

a' et b' seraient tous deux divisibles par m, ils ne seraient pas premiers entre eux. Il faut que $m = 1$.

202. Conséquence. — Il n'existe qu'une fraction irréductible égale à une fraction donnée.

203. Théorème. — *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.*

En effet, la nouvelle fraction obtenue est égale à la première et elle a ses deux termes premiers entre eux.

204. Remarque. — Pour trouver toutes les fractions égales à une fraction donnée, on réduit d'abord cette fraction à sa plus simple expression. Il suffit ensuite de multiplier les deux termes de cette fraction irréductible par 2, 3, 4, 5..

RÉDUCTION DES FRACTIONS AU MÊME DENOMINATEUR

Etant donné qu'on ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre, on peut faire varier, arbitrairement, dans une certaine mesure, le dénominateur d'une fraction. Autrement dit, on peut se proposer de transformer une fraction de telle manière que son dénominateur devienne égal à un nombre N arbitrairement choisi. Le problème est possible à condition que N soit un multiple du dénominateur de la fraction, ou que, le dénominateur de la fraction étant égal au produit de N par un nombre entier *m*, le numérateur soit divisible par *m*.

En particulier, plusieurs fractions étant données, on peut, pour faciliter leur comparaison, se proposer de les transformer de façon que leurs dénominateurs soient tous égaux entre eux. C'est ce qu'on appelle *réduire* des fractions *au même dénominateur*.

205. Définition. — *Réduire des fractions au même dénominateur, c'est chercher des fractions respectivement égales aux fractions proposées, et qui aient le même dénominateur.*

206. Théorème. — *A tout commun multiple des dénominateurs de plusieurs fractions, correspond un système de réduction de ces fractions au même dénominateur.*

Soient par exemple les fractions :

$$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{7}{9}$$

et soit 108 un multiple commun de leurs dénominateurs. Les quotients exacts de 108 par 4, 12 et 9 sont :

$$108 : 4 = 27$$
$$108 : 12 = 9$$
$$108 : 9 = 12$$

Si on multiple les deux termes de $\frac{3}{4}$ par 27, les deux termes de $\frac{5}{12}$ par 9 et les deux termes de $\frac{7}{9}$ par 12, on aura un système de fractions respectivement égales aux fractions proposées et réduites au dénominateur 108.

$$\frac{3 \times 27}{4 \times 27} = \frac{81}{108}$$

$$\frac{5 \times 9}{12 \times 9} = \frac{45}{108}$$

$$\frac{7 \times 12}{9 \times 12} = \frac{84}{108}$$

Le même raisonnement s'appliquerait à tout autre multiple des fractions.

Ce théorème montre qu'il y a une infinité de systèmes de réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. Il faut remarquer, du reste, qu'on peut remplacer les fractions données par d'autres fractions égales aux premières, mais ayant d'autres dénominateurs ; en particulier, on peut remplacer les fractions données par les fractions irréductibles correspondantes.

207. Théorème. — *Quand on réduit au même dénominateur plusieurs fractions irréductibles, le dénominateur commun est un commum multiple des dénominateurs de ces fractions.*

En effet, soit $\frac{a}{b}$ l'une des fractions données ; après la réduction au même dénominateur, elle devient par exemple $\frac{A}{B}$. D'après le théorème (199), A et B sont des équimultiples de *a* et *b*. Par conséquent, B est un multiple de *b*. On montrerait de même que B est un multiple des autres dénominateurs.

Il suit de là qu'on formerait tous les systèmes de réduction de plusieurs fractions au même dénominateur, en réduisant d'abord chacune de ces fractions à sa plus simple expression, en formant tous les multiples communs des dénominateurs de ces fractions irréductibles et en prenant pour dénominateur commun successivement tous ces multiples communs.

Comme on vise avant tout la simplicité des calculs, on choisira, parmi tous les multiples communs, le plus petit, et on réduira les fractions au *plus petit dénominateur commun*.

208. Règle. — *Pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commum, on réduit d'abord ces fractions à leur plus simple expression ; on forme le plus petit multiple commun des dénominateurs des fractions irréductibles ainsi obtenues ; on divise ce plus petit multiple commun par chacun des dénominateurs et on multiplie les deux termes de chaque fraction correspondante par le quotient ainsi obtenu.*

Exemple : On veut réduire au plus petit dénominateur commum les fractions :

$$\frac{27}{96} \quad \frac{25}{60} \quad \frac{16}{56}$$

Réduisons-les d'abord à leur plus simple expression :

$$\frac{27}{96} = \frac{9}{32} \quad \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \quad \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$$

Le plus petit multiple commun de 32, 12 et 7 est :

$$32 \times 3 \times 7 = 672$$

dont le quotient par :

32 est 2
13 est 5
7 est 96

Les fractions réduites au plus petit dénominateur commun sont donc :

$$\frac{9 \times 21}{32 \times 21} = \frac{189}{672} \quad \frac{5 \times 56}{12 \times 56} = \frac{280}{672} \quad \frac{2 \times 96}{7 \times 96} = \frac{192}{672}$$

Exercices

46. — On donne la fraction $\frac{7}{18}$; quelles modifications subit-elle : 1° lorsqu'on ajoute 35 au numérateur ; 2° lorsqu'on retranche 12 au dénominateur ; 3° lorsque, simultanément, on ajoute 21 au numérateur et qu'on retranche 9 au dénominateur.

47. — La somme des deux termes d'une fraction est 154 ; lorsqu'on multiplie le numérateur par 3 et le dénominateur par 2, la différence des résultats est 42. 1° Déterminer la fraction; 2° la réduire à sa plus simple expression ; 3° chercher la fraction équivalente, dont les termes dépassent 1000 de nombres aussi petits que possible.

48. — Peut-on comparer entre elles deux fractions non réduites au même dénominateur ? Ranger par ordre

de grandeur, sans les réduire au même dénominateur, les fractions suivantes :

$$\frac{168}{240}, \frac{1625}{7075}, \frac{627}{981}$$

Donner la suite des opérations et le raisonnement qui vous conduisent à trouver leurs valeurs relatives.

49. — Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{3}{5}$ pour que la différence entre la nouvelle fraction et l'unité soit $\frac{1}{1000}$.

50. — Trouvez deux fractions ayant pour numérateur l'unité ; pour dénominateur deux nombres entiers consécutifs, et qui comprennent entre elles la fraction $\frac{7}{41}$. Expliquez votre manière de procéder et appliquez-la à cette autre fraction $\frac{7}{603}$.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS
ADDITION

209. Définition. — *D'une manière générale, l'addition est une opération qui a pour but de trouver un nombre qui contienne toutes les unités et parties de l'unité contenues dans plusieurs nombres donnés.*

Ce nombre, appelé *somme* ou *total*, sera encore la mesure de la grandeur égale à la somme des grandeurs mesurées par les nombres donnés, ces grandeurs étant supposées de même espèce et mesurées avec la même unité.

210. — Etant donné deux ou plusieurs fractions de même dénominateur, additionner ces fractions, c'est faire la somme d'autant de parties égales de l'unité qu'il y en a dans l'ensemble des nombres proposés.

Par exemple additionner ;

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}$$

c'est faire la somme de 3 + 5 + 2 parties de l'unité égales à $\frac{1}{7}$.

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}. \quad \frac{5}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

La somme est aussi un certain nombre de septièmes, elle sera donc exprimée par une fraction, dont le dénominateur est 7 et le numérateur la somme des numérateurs des fractions proposées.

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=\frac{10}{7}$$

211. Règle. — *Pour additionner plusieurs fractions qui ont même dénominateur, on forme une fraction, dont le dénominateur est celui des fractions proposées, et dont le numérateur est la somme des numérateurs des fractions proposées.*

212. Remarque. — On voit immédiatement que la somme est indépendante de l'ordre dans lequel on range les fractions à additionner.

213. — Plusieurs fractions étant données, on peut toujours les réduire au même dénominateur ; donc on peut toujours faire la somme de plusieurs fractions en les réduisant d'abord au même dénominateur et en appliquant la règle (211).

Si l'on a à additionner des fractions et des nombres entiers, on considère ces derniers comme des fractions ayant pour dénominateur 1.

Exemple :

$$4+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{4}{1}+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=$$

$$=\frac{4\times 35}{1\times 35}+\frac{3\times 7}{5\times 7}+\frac{2\times 5}{7\times 5}=\frac{140}{35}+\frac{21}{35}+\frac{10}{35}$$

On peut encore additionner à part les entiers et les fractions.

$$4+\frac{3}{5}+5+\frac{2}{7}=9+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{7}\right)=9+\frac{31}{35} \text{ ou } 9\frac{31}{35}$$

SOUSTRACTION

214. Définition. — *La soustraction, en général, est une opération qui a pour but, étant donné une somme de deux parties et l'une de ces parties de trouver l'autre.*

215. — On appellera donc *différence* de deux fractions, le nombre qu'il faudra ajouter à la plus petite pour reproduire la plus grande.

Soient deux fractions réduites au même dénominateur ; la théorie de l'addition des fractions nous permet d'affirmer que la différence des deux fractions données est une fraction ayant même dénominateur que celle-ci et ayant pour numérateur la différence des numérateurs des fractions données.

Exemple : Faire la différence des deux fractions :

$$\frac{5}{7} \text{ et } \frac{2}{7}$$

On a :

$$\frac{5}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$$

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

Comme on peut toujours réduire deux fractions au même dénominateur, on peut toujours former leur différence.

MULTIPLICATION

216. — Définition. — *Multiplier un nombre (multiplicande) par un autre (multiplicateur), c'est en trouver un troisième (produit) qui se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur avec l'unité.*

Cette définition renferme celle que nous avons déjà donnée (62), car si l'on considère le produit de B par A comme la somme de A termes égaux à B, cette somme se compose bien d'autant de nombres égaux au multiplicande que le multiplicateur se compose de nombres égaux à l'unité.

217. — Premier cas. — *Multiplier une fraction (multiplicande) par un nombre entier (multiplicateur).*

Le produit se composera d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y a d'unités dans le nombre entier.

Soient $\frac{a}{b}$ la fraction, n le nombre entier, le produit est :

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}=\frac{a\times n}{b}$$

Car le produit est la somme de n nombres égaux à $\frac{a}{b}$, c'est donc une fraction ayant pour dénominateur b et, pour numérateur, la somme de n nombres égaux à a, c'est-à-dire $a \times n$.

218. Règle. — *Pour multiplier une fraction par un nombre entier, on multiplie le numérateur de la fraction par ce nombre.*

219. Remarque. — Si le dénominateur de la fraction est divisible par le nombre entier, on peut simplifier le produit en divisant ses deux termes par ce nombre.

On peut donc, dans ce cas, multiplier la fraction donnée en divisant son dénominateur par le nombre entier multiplicateur.

Exemple : Soit à multiplier $\frac{3}{8}$ par 4.

On a $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3 \times 4}{8}$ ou en simplifiant par 4

$$\frac{3}{8:4} = \frac{3}{2}$$

D'où le théorème :

Si on divise le dénominateur d'une fraction par un de ses sous-multiples, la fraction est multipliée par ce nombre.

220. — Second cas. — *Multiplier un nombre entier (multiplicande) par une fraction (multiplicateur).*

Soit le nombre entier n à multiplier par la fraction $\frac{a}{b}$.

Le multiplicateur $\frac{a}{b}$ se compose d'un certain nombre a de $b^{\text{ièmes}}$ de l'unité ; le produit P doit donc se composer d'un nombre a de $b^{\text{ièmes}}$ de n.

$\frac{1}{b}$ étant le $b^{\text{ième}}$ de l'unité, le $b^{\text{ième}}$ de n est n fois plus grand, c'est :

$$\frac{1}{b} \times n = \frac{1 \times n}{b} = \frac{n}{b}$$

Mais P est égal à a fois le $b^{\text{ième}}$ de n, c'est-à-dire à :

$$\frac{n}{b} \times a = \frac{n \times a}{b}$$

Exemple : Soit $8 \times \frac{3}{5}$. Par définition, c'est prendre 3 fois le cinquième de 8, soit d'abord $\frac{8}{5}$ puis $\frac{8 \times 3}{5}$.

221. Règle. — *Pour multiplier un nombre entier par une fraction, on forme une fraction ayant pour dénominateur celui de la fraction multiplicateur et pour numérateur le produit du nombre entier par le numérateur de la fraction multiplicateur.*

222. Théorème. — *Dans un produit de deux facteurs, dont l'un est un nombre entier et l'autre une fraction, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.*

Car le produit du nombre entier et du numérateur de la fraction ne change pas (69).

223. Troisième cas. — *Multiplier une fraction par une fraction.*

Soient $\frac{a}{b}$ le multiplicande et $\frac{c}{d}$ le multiplicateur.

Le multiplicateur est la somme de c nombres égaux au $d^{\text{ième}}$ de l'unité ; donc le produit P est la somme de c nombres égaux au $d^{\text{ième}}$ de $\frac{a}{b}$. Le $d^{\text{ième}}$ de $\frac{a}{b}$ est lui-même égal à a fois le $d^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{b}$. $\frac{1}{b}$ étant contenu b fois dans l'unité ; le $d^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{b}$ étant contenu d fois dans $\frac{1}{b}$ est contenu $b \times d$ fois dans l'unité, c'est donc

$$\frac{1}{b \times d}$$

Le $d^{\text{ième}}$ de $\frac{a}{b}$ est donc en définitive $\frac{a}{b \times d}$.

Mais alors

$$P = \frac{a}{b \times d} \times c = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple : Soit $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$. C'est prendre trois fois le cinquième de $\frac{4}{7}$, soit d'abord $\frac{4}{7 \times 5}$, puis $\frac{4 \times 3}{7 \times 5}$.

224. Règle. — *Pour multiplier une fraction par une fraction, on multiplie le numérateur du multiplicande par le numérateur du multiplicateur et la dénominateur du multiplicande par le dénominateur du multiplicateur.*

225. Théoréme. — *Dans un produit de deux fractions on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.*

Car le produit des numérateurs et celui des dénominateurs ne changent pas.

226. Produit de plusieurs nombres. Définition. — *Faire le produit des plusieurs nombres entiers ou fractionnaires, c'est faire le produit du premier par le second, puis de ce produit par le troisième et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur.*

De ce qui procède, on déduit la règle suivante :

227. Règle. — *Pour obtenir le produit de plusieurs nombres entiers ou fractionnaires, on forme une fraction ayant pour numérateur le produit des nombres entiers et des numérateurs des fractions proposées et, pour dénominateur, le produit des dénominateurs des fractions proposées.*

Exemple :

$$\frac{5}{6} \times 4 \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{5}{8} = \frac{5 \times 4 \times 7 \times 2 \times 6 \times 5}{6 \times 9 \times 3 \times 8}$$

228. Théorème. — *Dans un produit de plusieurs facteurs entiers ou fractionnaires, on peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.*

Car ni le produit des numérateurs et des nombres entiers, ni celui des dénominateurs ne changent.

229. Remarque. — Les théorèmes établis à propos des produits des nombres entiers s'appliquent aux nombres fractionnaires.

230. Puissance. — La puissance $m^{\text{ième}}$ d'une fraction est le produit de m facteurs égaux à cette fraction.

Il résulte de cette définition que la puissance $m^{\text{ième}}$ de la fraction $\frac{a}{b}$ est égale à $\frac{a^m}{b^m}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Si $\frac{a}{b}$ est irréductible $\frac{a^m}{b^m}$ l'est aussi (182).

DIVISION

231. Définition. — La division, en général, est une opération qui a pour but, étant donné le produit de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre.

232. — Nous avons défini le dividende, le diviseur, le quotient et le reste d'une division par les relations.

$$D = d \times Q + R \text{ avec } R < d$$

Si le reste R est nul, ces relations peuvent se remplacer par la relation unique :

$$D = d \times Q$$

Le nombre Q défini par cette relation s'appelle *quotient exact* de la division de D par d.

233. Théorème. — *Une fraction est le quotient exact de son numérateur et de son dénominateur.*

Soit la fraction $\frac{a}{b}$, il s'agit de démontrer que $\frac{a}{b}$ est le quotient exact de a par b, c'est-à-dire que la relation

$$a = b \times \frac{a}{b}$$

est exacte. Or, on a (220) :

$$b \times \frac{a}{b} = \frac{b \times a}{b}$$

une unité contient b $b^{\text{ièmes}}$, a unités contiennent $b \times a$ $b^{\text{ièmes}}$. Donc la fraction $\frac{b \times a}{b}$ vaut a unités.

$$\frac{b \times a}{b} = a$$

Ce résultat se déduit d'ailleurs immédiatement de la théorie de la simplification des fractions.

234. Conséquence. — Il suit de là qu'on peut toujours écrire le quotient exact de deux nombres entiers au moyen d'une fraction ayant pour numérateur le dividende et, pour dénominateur, le diviseur :

$$a : b = \frac{a}{b}$$

235. Inverse d'un nombre. — On appelle *inverse* d'une *fraction* la fraction qui a pour numérateur le dénominateur de la première et, pour dénominateur, le numérateur de la première :

$$\frac{b}{a} \text{ est l'inverse de } \frac{a}{b}$$

Un nombre entier peut toujours être considéré comme une fraction, dont le dénominateur est 1 ; en conséquence, la définition précédente devient applicable aux nombres entiers :

$$\frac{1}{n} \text{ est l'inverse de } n$$

236. Théorème. — *Le produit d'un nombre entier ou fractionnaire par son inverse est égal à 1.*

En effet, ce produit est une fraction, dont le numérateur est égal au dénominateur (194) :

$$\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times b}{a \times b} = 1$$

237. Théorème. — *Pour obtenir le quotient exact de deux nombres, il suffit de multiplier le dividende par l'inverse du diviseur.*

En effet, soit D le dividende, d le diviseur, Q le quotient (nombres entiers ou fractionnaires), on a (232) :

$$D = d \times Q$$

Si l'on fait :

$$Q = D \times \frac{1}{d}$$

on aura identiquement :

$$D = d \times D \times \frac{1}{d} = D \times \frac{d}{d} = D \times 1 = D$$

Ce théorème permet de trouver dans tous les cas le quotient exact de deux nombres entiers ou fractionnaires.

Exemples :

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

238. Remarque. — Si on multiplie le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction est divisée par ce nombre. Car cela revient à multiplier la fraction par l'inverse du nombre.

239. Fractions complexes. — On peut convenir de représenter le quotient de deux nombres a et b par le symbole $\frac{a}{b}$, a et b pouvant être fractionnaires.

Ainsi on écrira :

$$(2 + {}^3/_4) : (5 + {}^9/_{11}) = \frac{2 + {}^3/_4}{5 + {}^9/_{11}} = \frac{{}^{11}/_4}{{}^{64}/_{11}} = \frac{11}{4} \times \frac{11}{64} = \frac{121}{256}$$

L'expression $\frac{a}{b}$ s'appelle alors *fraction complexe* ou *fraction composée.*

Exercices

51. — Trouver un nombre entier qui, divisé par $\frac{6}{13}$ donne un quotient qui lui soit supérieur de 210.

52. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible soit le carré d'une autre fraction.

53. — Démontrer que le quotient de deux nombres est plus petit ou plus grand que le dividende suivant que le diviseur est plus grand ou plus petit que l'unité.

54. — Expliquer pourquoi dans la division de $\frac{24}{35}$ par $\frac{6}{7}$, on peut, pour obtenir le résultat, diviser le numérateur de la fraction dividende par celui de la fraction diviseur, et le dénominateur de la fraction dividende par celui de la fraction diviseur.

55. — Les deux aiguilles d'une montre se rencontrent à midi précis. On demande à quelle heure exacte elles se rencontrent de nouveau ?

56. — Une ânesse portait du vin côte à côte avec un mulet et, écrasée sous le poids, elle se plaignait fortement. Alors le mulet mit fin à ses plaintes en lui disant : « Qu'as-tu à te plaindre comme une petite fille, la mère ? Si je prenais une de tes mesures, ma charge serait double de la tienne, et si tu en prenais une des miennes, j'en aurais encore autant que toi. » Dis-moi, savant mathématicien, combien de mesures ils portent chacun ? (Anthologie grecque.)

57. — Un père, en mourant, laisse à un certain nombre d'enfants une somme qu'ils doivent se partager ainsi : le premier doit recevoir 100 fr. et le dixième du reste ; le deuxième 200 fr. et le dixième du reste, et ainsi de suite, en ajoutant toujours 100 fr. A la fin, il arrive que les enfants ont une égale part. Quelle est la somme et quel est le nombre des enfants ?

58. — Une route, reliant deux localité A et B, présente des parties horizontales, des montées et des descentes. La distance A B et de 128 km. et, quand on marche dans le sens A B, la longueur des descentes est les $\frac{7}{10}$ de la longueur des montées. Un bicycliste, qui a une vitesse de 30 km. en descente, de 15 km. en montée et de 25 km. à l'heure en palier, va d'abord de A en B et revient ensuite de B en A. Sachant que le temps qu'il a mis pour aller de A en B surpasse de 24 minutes le temps qu'il a mis pour revenir de B en A, on demande :

1° Les longueurs exprimées en kilomètres, des montées et des descentes qu'il a parcourues en allant de A en B et les longueurs des parties horizontales de la route ;

2° Le temps employé pour aller de A en B et le temps employé pour revenir de B en A.

59. — Un ouvrage est entrepris par 3 ouvriers. Le premier et le second le feraient ensemble en 13 jours $\frac{1}{3}$; le second et le troisième en 10 jours $\frac{10}{11}$; le premier et le troisième en 12 jours.

Si l'ouvrage est commencé simultanément par les 3 ouvriers et que le second l'abandonne avant qu'il soit achevé, il faut que les deux autres travaillent 3 jours $\frac{2}{3}$ de plus qu'il n'eut fallu sans la défection de leur camarade. Après combien de jours le second ouvrier a-t-il quitté l'ouvrage ?

Rapports — Proportions

240. Définition. — On donne souvent au *quotient exact de deux nombres quelconques* le nom de RAPPORT. Dans le cas particulier où les deux nombres sont entiers, le rapport se réduit à une fraction.

Cette définition du rapport de deux nombres s'accorde avec la suivante :

On appelle rapport de deux nombres le nombre par lequel il faut multiplier le second pour reproduire le premier.

Dans le langage courant, on dit que deux nombres a et b sont *dans le rapport de a à b*. On écrit ce rapport sous la forme $\frac{a}{b}$.

241. Théorème. — *Si on multiplie ou si on divise les deux termes d'un rapport par un même nombre quelconque, on obtient un rapport égal.*

Soit le rapport $\frac{a}{b}$. Désignons par q le quotient exact de a par b. On a donc $\frac{a}{b} = q$ d'où $a = bq$.

Multiplions les deux nombres de cette égalité par n, on a $an = bn \times q$, égalité qui montre que q est le quotient exact de an par bn ; on a donc :

$$\frac{an}{bn} = q = \frac{a}{b}$$

On démontrerait de même que

$$\frac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(\frac{b}{m}\right)} = \frac{a}{b}$$

242. Application. — Les règles de simplification, de réduction au même dénominateur, établies pour les fractions ordinaires s'appliquent aux rapports. Il en sera de même pour les autres opérations : addition, soustraction, multiplication, division, etc.

243. Définition. — *On donne à l'égalité de deux rapports le nom de* PROPORTION. Par exemple $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est une proportion, et on dit que les nombres a, b, c, d forment une proportion, dont ils sont le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième terme ; a et d sont les termes *extrêmes*, b et c sont les termes *moyens* ; ces termes sont des nombres quelconques ou même des expressions non calculées.

244. Théorème fondamental. — *Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit la proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

On peut multiplier les deux membres de l'égalité par le produit $b \times d$:

$$\frac{a}{b} \times b \times d = \frac{c}{d} \times b \times d$$

ce qui donne :

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d}$$

ou :

$$a \times d = c \times b$$

245. Théorème réciproque. — *Si deux produits de deux facteurs sont égaux, on peut écrire entre les quatre nombres une proportion dans laquelle les deux nombres qui entraient comme facteurs dans un même produit sont, en même temps, extrêmes ou, en même temps, moyens.*

Soient les deux produits égaux :

$$a \times d = c \times b$$

On peut diviser les deux membres de l'égalité par l'un des quatre produits :

$$a \times b \qquad a \times c \qquad d \times b \qquad d \times c$$

On obtient ainsi les quatre proportions :

$$(1)\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \qquad (2)\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

$$(3)\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (4)\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

dans lesquelles a et d sont toujours extrêmes, b et c toujours moyens. Si nous étions partis de la forme

$$c \times b = a \times d$$

nous aurions obtenu quatre proportions dans lesquelles b et c auraient été extrêmes et a et d moyens.

246. Théorème. — *Dans une proportion, on peut intervertir l'ordre des extrêmes et celui des moyens soit séparément, soit simultanément.*

En effet, de la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

on déduit :

$$a \times d = b \times c$$

et de cette dernière égalité on tire :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

247. Théorème. — *Si on forme un rapport ayant pour numérateur la somme ou la différence des numérateurs d'une proportion et, pour dénominateur, la somme ou la différence des dénominateurs de cette proportion, ce rapport est égal à ceux de la proportion.*

Les transformations suivantes démontrent le théorème :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\text{Or } \frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{c} = \frac{b}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\text{donc } \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \quad \text{et enfin } \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

On aurait de même :

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

248. Remarque. — D'autres transformations sont possibles. De

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

On peut déduire par exemple:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

249. Généralisation. — *Une suite de rapports égaux étant donnée, on forme un rapport égal aux rapports donnés en additionnant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.*

En effet, soit la suite de rapports :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots\ldots$$

On en tire successivement (247) :

$$\frac{a + a'}{b + b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots\ldots$$

$$\frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots\ldots$$

$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} = \frac{a}{b}$$

250. Remarque. — Le théorème est encore vrai si on remplace les additions par des soustractions. Il est vrai également si on additionne les termes de certains rapports et si on retranche les termes de certains autres.

On aurait aussi par exemple :

$$\frac{a - a' + a'' - a'''}{b - b' + b'' - b'''} = \frac{a}{b}$$

251. Quatrième proportionnelle. — Trois nombres étant donnés on peut toujours en trouver un quatrième qui forme une proportion avec les trois autres. On donne à ce quatrième nombre le nom de *quatrième proportionnelle.*

Pour que la quatrième proportionnelle soit bien définie, il faut connaître sa position dans la proportion. Par exemple, la quatrième proportionnelle aux trois nombres a, b, c sera définie si l'on sait qu'elle occupe la troisième place dans la proportion.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$$

Il s'agit de calculer x. Pour cela, il suffit de multiplier les deux membres de l'équation par c.

$$\frac{a \times c}{b} = x$$

Si x devait occuper la quatrième place

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

on commencerait par intervertir l'ordre des extrêmes

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{a}$$

puis on multiplierait les deux membres par b

$$x = \frac{b \times c}{a}$$

252. Moyenne proportionnelle. — Si dans une proportion, les moyens sont tous deux égaux à un même nombre m, m prend le nom de *moyenne proportionnelle* entre les extrêmes.

Dans la proportion :

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$

m est moyenne proportionnelle entre a et b.

a et b étant donnés, on peut aisément calculer m.

Il suffit de multiplier par $m \times b$ les deux membres de l'équation :

$$a \times b = m \times m$$
$$a \times b = m^2$$

Exercices

60. — Deux arcs d'une même circonférence valent respectivement 17°21′45″ et 11°27′3″. Quel est le rapport du premier arc au second ?

61. — La moyenne géométrique de deux nombres est moindre que leur moyenne arithmétique. Quand lui est-elle égale ?

62. — Trouver deux nombres connaissant leur rapport $\frac{3}{4}$ et leur somme 2100.

63. — Trouver deux nombres connaissant leur rapport $\frac{1}{3}$ et la somme 625 de leurs carrés.

64. — Montrer l'égalité des rapports $\frac{43}{65}$ et $\frac{4343}{6565}$ en s'appuyant sur les propriétés des proportions.

Nombres décimaux

253. Fraction décimale et nombre décimal. — On appelle *fraction décimale* une fraction qui a pour dénominateur une puissance de 10 :

Exemple :

$$\frac{7421}{1\,000}, \quad \frac{33}{100}, \quad \frac{8}{10}$$

Notre système de numération décimale permet de représenter ces nombres sous une forme plus simple. Il suffit d'étendre la convention sur laquelle repose ce système.

Nous savons, en effet, que *un chiffre placé immédiatement à la droite d'un autre, dans un nombre, exprime des unités dix fois plus petites que celles exprimées par cet autre chiffre.*

On étend cette convention aux chiffres écrits à la droite du chiffre des unités absolues ; et, pour indiquer la place de ces dernières, ont fait suivre d'une *virgule* le chiffre des unités.

Soit, par exemple, le nombre 337,64201. Le chiffre 6, placé immédiatement à la droite du chiffre des unités 7, exprime des unités dix fois plus petites, c'est-à-dire des *dixièmes* ; le chiffre 4 exprime des unités dix fois plus petites que les dixièmes, c'est-à-dire des *centièmes* ; de même le 2 occupe le rang des *millièmes* ; le 0 le rang des *dix-millièmes* ; le 1 le rang des *cent-millièmes.*

Autrement dit, le nombre donné représente la somme.

$$337 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1\,000} + \frac{1}{100\,000}$$

C'est un *nombre décimal.*

Soit maintenant la fraction

$$\frac{7421}{1\,000}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{7421}{1\,000} = \frac{7\,000}{1\,000} + \frac{400}{1\,000} + \frac{20}{1\,000} + \frac{1}{1\,000} =$$

$$= \frac{7}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1\,000}$$

et, par conséquent, sous la forme d'un nombre décimal :

$$\frac{7421}{1\,000} = 7{,}421$$

254. **Règle.** — *Pour écrire une fraction décimale sous forme de nombre décimal, on écrit le numérateur et on sépare au moyen d'une virgule, à droite du nombre obtenu, autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur.*

Il peut arriver que le numérateur de la fraction n'ait pas assez de chiffres pour qu'on puisse placer la virgule.

Dans ce cas, on ajoute à la gauche du nombre autant de zéros qu'il est nécessaire.

$$\frac{196}{100\,000} = 0{,}00196$$

Les chiffres qui suivent la virgule s'appellent décimaux.

255. Remarque. — Il est facile de procéder inversement, c'est-à-dire de passer d'un nombre décimal à la fraction décimale correspondante. Il suffit d'écrire au numérateur le nombre débarrassé de sa virgule et d'écrire au dénominateur une puissance de 10, formée d'autant de 0 qu'il y a de chiffres décimaux dans le nombre proposé.

Exemple :

$$1\,432{,}06901 = \frac{143\,206\,901}{100\,000}$$

256. Théorème. — *Un nombre décimal ne change pas quand on écrit à sa droite un certain nombre de zéros.*

En effet, soit un nombre décimal

33,492

il est égal à la fraction décimale

$$\frac{33\,492}{1\,000}$$

Si j'ajoute un certain nombre de zéros à la droite du nombre, deux par exemple, j'obtiendrai le nombre

33,49200

qui est égal à la fraction décimale

$$\frac{3\,349\,200}{100\,000}$$

dans cette nouvelle fraction le numérateur est cent fois plus grand que celui de la première, mais le dénominateur comporte lui-même deux zéros de plus, il est cent fois plus grand que le dénominateur de la première fraction. En conséquence, la nouvelle fraction est obtenue en multipliant les deux termes de la première par un même nombre, elle est égale à la première.

Pour les mêmes raisons, un nombre décimal ne change pas si on supprime des zéros à sa droite.

$$7{,}5400 = 7{,}54$$

257. Théorème. — *Si, dans un nombre décimal, on déplace la virgule de* n *rangs vers la droite ou vers la gauche, ce nombre est multiplié ou divisé par* 10^n.

En effet le dénominateur de la fraction décimale correspondante est divisé ou multiplié par 10^n.

Exemple : Soit le nombre décimal.

$$561{,}8618 = \frac{5\,618\,618}{10\,000}$$

En déplaçant la virgule de 2 rangs vers la droite, j'obtiens le nombre

$$56186{,}18 = \frac{5\,618\,618}{100}$$

Le nombre décimal donné a été multiplié par 10^2.

En déplaçant la virgule du même nombre de 3 rangs vers la gauche, j'obtiens le nombre

$$0{,}5618616 = \frac{5\,618\,618}{10\,000\,000}$$

Le nombre décimal donné a été divisé par 10^3.

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX

258. Addition. — Les nombres décimaux n'étant, à vrai dire, que des fractions, il faut, pour les additionner, les réduire au même dénominateur et additionner ensuite les numérateurs. Soient par exemple les nombres décimaux

13,5017 852,073 9,12953

ils correspondent aux fractions

$$\frac{135\,017}{10\,000} \qquad \frac{852\,073}{1\,000} \qquad \frac{912\,953}{100\,000}$$

Réduisons ces fractions au même dénominateur :

$$\frac{1\,350\,170}{100\,000} \qquad \frac{85\,207\,300}{100\,000} \qquad \frac{912\,953}{100\,000}$$

Les nombres décimaux correspondants sont

13,50 170 852,07 300 9,12 953

Par définition on a :

(1) $$13{,}50\,170 + 852{,}07\,300 + 9{,}12\,953 = \frac{1\,350\,170}{100\,000} + \frac{85\,207\,300}{100\,000} + \frac{912\,953}{100\,000}$$

La somme de ces trois dernières fractions a pour dénominateur 100 000, c'est-à-dire qu'elle correspond à un nombre décimal ayant 5 chiffres décimaux. Si donc, sans tenir compte des virgules, on additionne les trois nombres décimaux écrits dans le premier membre de l'égalité (1) et qui, à part la virgule, sont identiques aux numérateurs des fractions décimales du second membre ; si, ensuite, on sépare, au moyen d'une virgule, cinq chiffres à la droite de la somme, celle-ci sera égale à la fraction décimale obtenue en faisant la somme des fractions du second membre, et ce sera bien, par conséquent, la somme des nombres décimaux.

Si nous posons pour les additionner les nombres donnés en écrivant la virgule

$$\begin{array}{r} 13{,}50170 \\ 852{,}07300 \\ 9{,}12953 \\ \hline \end{array}$$

nous remarquons que les virgules se trouvent toutes sur la même ligne verticale ; et, comme la somme doit avoir autant de chiffres décimaux que chacun des nombres, puisqu'elle correspond à une fraction décimale de même dénominateur, la virgule de cette somme se trouvera elle-même sur la même ligne verticale que les autres virgules.

259. Remarque. — La virgule peut donc servir de repère pour poser les nombres à additionner et il n'est pas nécessaire de donner à ceux-ci un même nombre de chiffres décimaux en ajoutant des zéros à leur droite. On se contentera de placer les nombres les uns au-dessus des autres, de façon que toutes les virgules soient dans une même colonne verticale, on additionnera les chiffres de chacune des colonnes en procédant comme pour l'addition des nombres entiers et on placera la virgule de la somme dans la même ligne verticale que les virgules des nombres donnés :

$$\begin{array}{r} 13{,}5017 \\ 852{,}073 \\ 9{,}12953 \\ \hline 874{,}70423 \end{array}$$

260. Soustraction. — Le raisonnement est exactement le même que pour l'addition.

Si le dernier chiffre du nombre à retrancher n'est pas précédé dans la même colonne verticale d'un chiffre du plus grand nombre, on écrit un ou plusieurs zéros pour remplir le vide, ou on suppose qu'ils ont été écrits.

Exemple :

451,236 — 78,40327

on pose

$$\begin{array}{r} 415{,}236 \\ 67{,}40327 \\ \hline 372{,}83273 \end{array}$$

on opère comme si on avait posé

$$\begin{array}{r} 451{,}23600 \\ 78{,}40327 \\ \hline \end{array}$$

261. Multiplication. — Soit à multiplier 95,17 par 0,452.

L'opération revient à multiplier la fraction $\frac{9517}{100}$ par la fraction $\frac{452}{1000}$:

En appliquant la règle de la multiplication des fractions, on trouve

$$\frac{9517}{100} \times \frac{452}{5000} = \frac{9517 \times 452}{100 \times 5000} = \frac{9517 \times 456}{100\,000}$$

On effectuera le produit 9517×456 et l'on séparera à la droite du résultat $2 + 3 = 5$ chiffres décimaux.

D'où la règle :

262. Règle. — *On fait le produit des nombres décimaux donnés, sans tenir compte des virgules, et on sépare, au moyen d'une virgule, à la droite de ce produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans l'ensemble des facteurs.*

Pratiquement, on a l'opération suivante :

```
   95,17
    0,452
   19034
   47585
  38069
  43,01685
```

263. Division. — Le quotient exact de deux nombres décimaux est évidemment la fraction complexe ayant pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur.

Exemple : Soit à trouver le quotient exact de 36,415 et 16,02. Ce quotient est :

$$\frac{36,415}{16,02} = \frac{\frac{36415}{1\,000}}{\frac{1\,602}{100}} \text{ mais } \frac{\frac{36415}{1\,000}}{\frac{1\,602}{100}} = \frac{36415}{1\,000} \times \frac{100}{1\,602} = \frac{36415}{16020}$$

264. Règle. — *Pour obtenir le quotient exact de deux nombres décimaux, on ajoute des zéros s'il y a lieu à la partie décimale de l'un d'eux, de manière qu'ils aient le même nombre de chiffres décimaux ; on supprime ensuite les virgules et l'on fait le quotient exact des deux nombres entiers ainsi obtenus. Ce quotient est la fraction qui a pour termes ces deux nombres entiers.*

Remarque. — Il peut arriver que la fraction ordinaire obtenue soit égale à un nombre entier ou à un nombre décimal. Le quotient exact peut donc être soit un nombre entier, soit un nombre décimal.

265. Quotient approché de deux nombres à moins de $\frac{1}{n}$ près.

Soient A et B deux nombres entiers ou décimaux. Le nombre Q défini par les relations.

$$\frac{Q}{n} \leqq \frac{A}{B} < \frac{Q+1}{n} \qquad (1)$$

s'appelle quotient approché à moins de $\frac{1}{n}$ près de ces deux nombres. Donc :

Trouver le quotient de deux nombres à $\frac{1}{n}$ près, c'est chercher le plus grand nombre de $n^{\text{ièmes}}$ qui soit contenu dans le quotient exact des deux nombres.

En langage ordinaire on peut dire que le quotient exact $\frac{A}{B}$ des deux nombres (263) est égal ou supérieur à la fraction $\frac{Q}{n}$ et inférieur à la fraction $\frac{Q+1}{n}$.

Les relations (1) donnent, en multipliant les trois membres par $B \times n$:

$$B \times Q \leqq A \times n < B \times (Q + 1) \qquad (2)$$

On voit que le nombre Q défini par ces dernières relations (2) est le quotient des deux nombres $A \times n$ et B.

Il s'ensuit que, pour obtenir le nombre Q, il suffit de diviser $A \times n$ par B, suivant les règles de la division des nombres entiers.

Remarque. — Par un raisonnement analogue, on trouverait le quotient de deux nombres à $\frac{m}{n}$ près.

266. Quotient approché à moins de $\frac{1}{10^p}$ près.

En particulier, si la fraction $\frac{1}{n}$ a pour dénominateur une puissance de 10, 10^p, il suffit de diviser par B, $A \times 10^p$ pour avoir le numérateur Q du quotient $\frac{10^p}{Q}$ approché à $\frac{1}{10^p}$.

Soit par exemple à trouver le quotient à moins de $\frac{1}{1\,000}$ près des deux nombres

$$A = 375,7586 \text{ et } B = 21,8415.$$

On a : $\frac{Q}{1\,000} \leqq \frac{375,7586}{21,8415} < \frac{Q+1}{1\,000}$

ou :

$$21,8415 \times Q \leqq 375,7586 \times 1\,000 < 21,8415 \times (Q + 1)$$

Pour trouver Q, il suffit de diviser

$375,7586 \times 1\,000$ par $21,8415$.

Or : $375,7586 \times 1\,000 = 375\,758,6$

Il suffit donc de diviser 375 758,6 par 21,8415.

Mais, d'un autre côté, nous avons vu que le quotient de 375 758,6 par 21,8415 est le même que celui de 375 758,6 × 10 000 par 21,8415 × 10.000, c'est-à-dire de 3 757 586 000 par 218 415. Cette dernière remarque permet de faire disparaître la virgule du diviseur et l'on peut alors opérer la division comme pour les nombres entiers. Le quotient Q des deux nombres 3 757 586 000 et 218 415 représente le numérateur du quotient $\frac{Q}{1\,000}$ approché à moins de $\frac{1}{1\,000}$ des des deux membres 375,7586 et 21,8415. Il est facile de transformer $\frac{Q}{1\,000}$ en nombre décimal en séparant, au moyen d'une virgule, trois chiffres sur la droite.

Or, on peut remarquer que les trois derniers chiffres du quotient décimal ainsi obtenu correspondent aux trois dernières divisions partielles de 3 757 586 000 par 218 415.

Supposons qu'au lieu de multiplier le dividende d'abord par 1 000, puis par 10 000, nous l'ayons simplement multiplié par 10 000, nous aurions à trouver le quotient de 3 757 586 = 3 757 586,000 et de 218,415.

Si l'on convient de placer une virgule au quotient après le chiffre obtenu en divisant par le diviseur le dividende partiel correspondant au chiffre 6, le quotient obtenu sera justement égal à la fraction $\frac{Q}{1\,000}$

```
3757586,000 | 218 415
218415      |  17,203
1573436
1528905
  445310
  436830
   848 000
   655 245
   192 755
```

On place la virgule au quotient après le 7, chiffre correspondant à la division par le diviseur du dividende partiel 1573436 obtenu en abaissant le chiffre 6 qui précède la virgule au dividende.

267. Remarque. — On voit qu'on pourrait faire suivre le dividende d'un plus grand nombre de 0 ; mais comme on désire que le quotient représente un certain nombre de millièmes, il est inutile de continuer

la division au delà du troisième chiffre après la virgule. On s'arrêtera quand on aura abaissé le troisième chiffre situé après la virgule dans le dividende.

Du reste, les chiffres décimaux du dividende ne sont pas nécessairement des 0. Par exemple la division de 342,8162 par 18,72 est la même que la division de 34281,62 par 1872. Pour obtenir le quotient à un millième près de ces deux nombres, il suffira d'ajouter un 0 au dividende. Pour obtenir le quotient à un dixième près, on arrêterait la division après avoir abaissé le 6, chiffre des dixièmes.

Enfin il peut arriver que la partie entière du dividende ne contienne pas le diviseur. Dans ce cas le premier chiffre du quotient doit occuper le même rang que le dernier chiffre de la partie du dividende qu'il a fallu séparer sur la gauche pour obtenir un nombre plus grand que le diviseur ou égal à ce dernier.

Par exemple, si on divise 31,457 par 912 à un millième près, le premier chiffre 3 du quotient résultera de la division de 3145 par 912, il devra occuper le même rang que 5, c'est-à-dire le rang des centièmes, il s'écrira : 0,03.

En résumé, nous pouvons énoncer la règle suivante :

268. Règle de la division des nombres décimaux, quotient approché à moins de $\frac{1}{10^n}$.

Pour trouver le quotient approché à moins de $\frac{1}{10^n}$, de deux nombres, on supprime la virgule du diviseur en multipliant le dividende et le diviseur par une puissance de 10 convenable ; on limite le nouveau dividende obtenu au $n^{ième}$ chiffre après la virgule en complétant si c'est nécessaire, le nombre des chiffres par un ou plusieurs zéros ; enfin on opère comme pour les nombres entiers. Pour placer la virgule au quotient, on compte autant de chiffres décimaux qu'il y en a au dividende modifié et limité comme il a été dit.

Exemples :

I. — Soit à trouver le quotient à $\frac{1}{100}$ près des deux nombres 49,731 et 8,42.

1° Multiplions par 100 le dividende et le diviseur, ils deviennent :

4973,1 et 842

2° Limitons le dividende au deuxième chiffre après la virgule ($100 = 10^2$) ; il nous faut ajouter un zéro :

4973,10

3° Divisons d'après la règle des nombres entiers et sans nous occuper de la virgule le nombre 4973,10 par le nombre 842 :

4973,10	843
7631	590
530	

nous trouvons le quotient 590.

4° Le dernier chiffre du quotient devant occuper le rang des centièmes, la virgule doit se trouver après 5 ; le quotient à $\frac{1}{100}$ près de 49,731 et de 8,42 est donc 5,90

II. — Quotient à $\frac{1}{10}$ de 37,126 et de 347,2.

1° Multiplions par 10 les deux nombres pour faire disparaître la virgule du diviseur, soit 371,26 : 3472.

2° Limitons le dividende au premier chiffre après la virgule ($10 = 10^1$) :

371,2 : 3472

3° Divisions d'après la règle des nombres entiers, sans tenir compte de la virgule :

3712 : 3472 = 1.

4° Le dernier chiffre du quotient devant occuper le rang des dixièmes, le quotient est 0,1.

269. Quotient approché par défaut et quotient approché par excès. — Dans tout ce qui précède, nous avons toujours calculé le QUOTIENT PAR DÉFAUT, c'est-à-dire le nombre Q défini par les relations

$$B \times \frac{Q}{n} \leq A < B \times \frac{Q+1}{n}$$

Le nombre $\frac{Q+1}{n}$ est appelé QUOTIENT APPROCHÉ PAR EXCÈS ; on voit qu'il se déduit du précédent par addition de $\frac{1}{n}$. En particulier, si n est une puissance de 10, le quotient approché par excès s'obtient en augmentant d'une unité le chiffre des dernières unités décimales du quotient obtenu d'après la règle précédente.

Exemple :

Le quotient approché à $\frac{1}{100}$ par défaut de 49,731 et de 8,42 est 5,90 ; le quotient approché à $\frac{100}{1}$ par excès est 5,91.

270. Remarque. — Le quotient des nombres entiers, tel que nous avons appris à le calculer, est dit *quotient à une unité près par défaut* ; ce nombre augmenté de 1 devient *le quotient à une unité près par excès.*

Exercices

65. — Quel est le nombre qui, multiplié par 0,025, donne pour produit 1. Expliquez la réponse.

66. — Un élève s'est trompé dans le choix des termes d'une division. Il a pris le dividende pour le diviseur, et réciproquement, et a trouvé au quotient 0,0875. Quel est le vrai quotient? Raisonner.

67. — On exploite une mine de cuivre en payant 18 francs le quintal de minerai qui contient les $\frac{12}{100}$ de son poids en cuivre. Dans la préparation du métal, il se perd environ les $\frac{35}{1000}$ de ce dernier. Sachant que les frais de traitement pour extraire le métal d'une tonne de cuivre s'élèvent à 85 francs, on demande à combien revient le quintal de cuivre?

68. — Un observateur, voulant calculer la distance qui le sépare du point d'explosion d'une torpille, compte 10 secondes entre l'instant où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'eau et celui où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'air. Dans les conditions de température où l'on se trouve, la vitesse du son dans l'air est de 340 mètres et dans l'eau de 1.450 mètres. Déterminer d'après cela, à une unité du deuxième ordre décimal près, à combien de kilomètres de l'observateur se trouve la torpille.

Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales

Les expressions de 50 pour cent ou 0,50 ; de 33 pour cent ou 0,33 ; de 25 pour cent ou 0,25, etc. ; et notamment les expressions de 7 pour cent, 11 pour cent, etc., sont bien plus souvent employées que les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. ; et presque tous les calculs se font avec les fractions décimales et non avec les fractions ordinaires autrefois presque exclusivement utilisées.

Cela tient évidemment à ce que les calculs sur les nombres décimaux sont plus faciles et plus simples que les calculs sur les fractions ordinaires. Au surplus, les nombres décimaux figurent seuls dans la nomenclature du système métrique des poids et mesures.

De ce qui précède, résulte l'utilité qu'il y a de convertir les fractions ordinaires en fractions décimales et nous nous proposerons inversement de passer des fractions décimales aux fractions ordinaires.

271. Opération de la conversion. — Soit la fraction $\frac{1}{2}$. Elle est égale à $\frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$; ce qu'on peut écrire 0,5.

De même $\frac{3}{25} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

D'ailleurs, une fraction pouvant être considérée comme le quotient de son numérateur par son dénominateur (233), il suffira d'évaluer en décimales, le quotient de 1 par 2, de 3 par 25.

Ainsi les fractions ordinaires $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{25}$ sont respectivement *égales* aux fractions décimales 0,5 et 0,12 ; on dit que ces fractions ont été *converties* en fractions décimales.

Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, c'est trouver une fraction décimale égale à la fraction ordinaire donnée.

Généralement la conversion *exacte* d'une fraction ordinaire en fraction décimale n'est pas possible.

Soit à convertir la fraction $\frac{5}{7}$ en fraction décimale.

```
50          | 7
 10         |-----------
  30        | 0,714285714285...
   20
    60
     40
      50
       10
```

La fraction $\frac{5}{7}$ étant égale au quotient de 5 par 7, on évalue ce quotient en décimales.

On voit que les six premiers restes sont 5, 1, 3, 2, 6, 4, les six suivants sont *les mêmes*, les six suivants seraient encore *les mêmes* et dans le même ordre ; et ainsi de suite.

Au quotient, les six premiers chiffres sont 714 285, les six suivants sont les *mêmes*, les six suivants seraient encore *les mêmes*, et ainsi de suite.

Dans ces deux exemples, à partir d'un certain moment, les chiffres du quotient se reproduisent *périodiquement*. L'opération pourra se poursuivre indéfiniment sans s'arrêter. Le quotient est dit *périodique*, le nombre 714285 est la *période*.

La fraction $\frac{5}{7}$ ne peut donc pas être convertie *exactement* en décimales.

Le théorème suivant permet de reconnaître *a priori* si une fraction ordinaire donnée est exactement convertible en décimales.

272. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire* irréductible *soit égale à une fraction décimale est que son dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soit $\frac{a}{b}$ une fraction ordinaire *irréductible* égale à la fraction décimale $\frac{q}{10^n}$.

Alors q et 10^n sont des équimultiples de a et de b ; en particulier 10^n qui ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5 est un multiple de b ; donc b ne contient pas d'autres facteurs *premiers* que 2 et 5.

2° *La condition est suffisante.* — Soit $\frac{a}{b}$ une fraction ordinaire *irréductible* ou non. Si b ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5, il sera facile d'obtenir une fraction décimale égale à $\frac{a}{b}$; pour cela on multipliera les deux termes de $\frac{a}{b}$ par une puissance de 2 ou de 5 convenable afin de rendre égaux les exposants de 2 et de 5 dans le dénominateur b.

Exemple : $\frac{11}{80} = \frac{11}{2^4 \times 5} = \frac{11 \times 5^3}{10^4} = \frac{1375}{10000} = 0{,}1375$.

REMARQUE. — La fraction décimale $\frac{11 \times 5^3}{10^4}$ a 4 chiffres décimaux ; or, le nombre 4 est le plus grand des exposants des facteurs 2 et 5 qui figuraient dans le dénominateur de la fraction donnée avant la multiplication des deux termes par 5^3. Donc :

Lorsqu'une fraction irréductible donne naissance à une fraction décimale exacte, le nombre des chiffres décimaux est égal au plus grand exposant du facteur 2 ou du facteur 5 figurant au dénominateur.

273. Théorème. — *Lorsqu'une fraction ordinaire ne peut être réduite exactement en fraction décimale, la division du numérateur par le dénominateur donne nécessairement pour quotient une fraction décimale périodique.*

Soit à convertir la fraction $\frac{5}{7}$ en fraction décimale (233). Le dénominateur contenant un facteur autre que 2 et 5, la division de 5 par 7 se continuera indéfiniment (272). Or, chaque division partielle donne un reste plus petit que 7 ; on ne peut donc trouver plus de 6 restes différents, et, après 6 divisions au plus, un des restes précédemment obtenus reviendra forcément. Ainsi le reste de la 6e division est 5 qui est le numérateur lui-même. Pour continuer l'opération, on abaisse un zéro, ce qui donne le dividende 50, utilisé précédemment. A partir de ce moment, l'opération recommence et la partie décimale 714285 se reproduira indéfiniment.

La fraction réduite en fraction décimale donne donc le quotient illimité périodique 0,714285714285. . .

Il en sera de même si l'on convertit en fraction décimale $\frac{31}{55}$; on trouve le quotient illimité et périodique 0, 56363.

Remarquons que dans ce dernier exemple, le premier chiffre décimal 5 ne se reproduit pas.

274. Définitions. — Lorsque la période commence immédiatement après la virgule, la fraction décimale est dite *périodique simple*.

Exemple : 0,714285714285...

Lorsque la période ne commence pas immédiatement après la virgule, la fraction décimale est dite *périodique mixte*.

Exemple : 0,5636363...

Les chiffres qui ne se reproduisent pas, s'appellent les *chiffres irréguliers* ou *non périodiques*.

En résumé, quand on réduira une fraction ordinaire irréductible en fraction décimale, on obtiendra ou une fraction décimale exacte ou une fraction décimale périodique. La fraction périodique sera ou périodique simple ou périodique mixte.

Exercices

69. — Réduire $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}$ en fractions décimales en multipliant les deux termes de chacune par un même nombre. Comment trouve-t-on chacun des 6 multiplicateurs?

70. — La fraction $\frac{2727}{1616}$ peut-elle être convertie en fraction décimale équivalente? Dans l'affirmative effectuer la conversion.

71. — Citez les fractions, dont le numérateur est 7, dont le dénominateur est inférieur à 30, et qui peuvent être converties exactement en fractions décimales.

Racine carrée

275. Définition. — On appelle *carré d'un nombre* le produit de deux facteurs égaux à ce nombre (80).

276. Théorème. — *Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de chacun de ces nombres et du double produit du premier nombre par le second.*

En effet, soit $a + b$ la somme de deux nombres, le carré de cette somme est le produit :

$$(a + b) \times (a + b)$$

D'après le théorème (79) ce produit est égal à

$$(a + b) \times (a + b) = a \times a + a \times b + b \times b$$
$$(a + b) \times (a + b) = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

a^2, carré du premier nombre, $2 \times a \times b$, double produit du premier nombre par le second ; b^2, carré du second.

Donc :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

277. Théorème. — *Deux nombres sont dans la même relation de grandeur que leurs carrés.*

Si l'on a

$$a < c \qquad (1)$$

on a aussi

$$a^2 < c^2 \qquad (2)$$

En effet, c étant supérieur à a, on a

$$c = a + b$$

b étant un nombre bien déterminé, la différence de c et de a. On a donc :

$$c^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

et le dernier membre est évidemment plus grand que a^2.

278. Remarque. — Il suit de là que si l'on élève au carré les nombres entiers successifs, on forme une suite de nombres croissant indéfiniment.

D'un autre côté, le nombre entier b qui succède immédiatement à un nombre entier a est lié à ce dernier par la relation :

$$b = a + 1$$

qui entraîne.

$$b^2 = a^2 + 2 \times a \times 1 + 1^2 = a^2 + 2 \times a + 1$$

On voit donc que les carrés de deux nombres entiers successifs diffèrent entre eux de plus d'une unité et que, par conséquent, *tous les nombres de la série illimitée des nombres entiers ne sont pas les carrés d'autres nombres entiers.*

Exemple :

$$1^2 = 1 ; 2^2 = 4 ; 3^2 = 9 ; 4^2 = 16, \text{ etc.}$$

les nombres 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, etc., ne sont pas les carrés d'autres nombres entiers.

279. Définition. — On appelle RACINE CARRÉE APPROCHÉE A MOINS D'UNE UNITÉ PAR DÉFAUT d'un nombre entier, *le plus grand nombre entier, dont le carré soit contenu dans le nombre donné.*

Suivant cette définition, la racine carrée de 5, approchée par défaut, est 2, parce que 5 contient le carré de 2 et ne contient pas celui de 3.

Si un nombre entier est le carré exact d'un autre, ce dernier est naturellement la racine carrée du premier.

Entre un nombre entier A et sa racine approchée a, il existe donc les relations :

$$a^2 \leqq A < (a + 1)^2$$

CALCUL DE LA RACINE CARRÉE APPROCHÉE A MOINS D'UNE UNITÉ D'UN NOMBRE ENTIER

280. Théorème général. — *Le nombre des dizaines de la racine carrée d'un nombre donné est la racine carrée à une unité près des centaines du nombre donné.*

En effet, soit 147856 un nombre entier, a la racine carrée à une unité près du nombre des centaines de ce nombre 1478. On a :

$$a^2 \leqq 1478 < (a + 1)^2$$

multiplions par $100 = 10^2$ les trois membres de ces relations :

$$a^2 \times 10^2 \leqq 1478 \times 100 < (a + 1)^2 \times 10^2$$
$$(10 \times a)^2 < 147\,800 < [10 \times (a + 1)]^2$$

Les nombres $(10 \times [a + 1])^2$ et 147 800 qui se composent de centaines diffèrent au moins d'une centaine ; si donc on ajoute au nombre 147 800 le nombre 56, la dernière relation subsiste et la première devient à plus forte raison une inégalité.

$$(10 \times a)^2 < 147\,856 < [10 \times (a + 1)]^2$$

Ces dernières relations prouvent que la racine carrée de 147 856 est comprise entre $10 \times a$ et $10 \times (a + 1)$, c'est-à-dire entre a dizaines et $a + 1$ dizaines. Le nombre des dizaines de la racine est donc égal à a.

281. — PREMIER CAS. — *Le nombre est inférieur à 100.*

La racine carrée de 100 étant 10, la racine carrée du nombre donné n'a qu'un chiffre, elle est fournie par la table de multiplication.

282. — DEUXIÈME CAS. — *Le nombre est compris entre 100 et 10 000.*

Soit à extraire la racine carrée de 3586 à une unité près. Ce nombre, compris entre 100 et 10 000, a sa racine comprise entre 10 et 100 ; elle a deux chiffres.

Désignons par d le chiffre des dizaines et par u celui des unités, la racine cherchée est de la forme $10\,d + u$, et l'ont peut écrire :

$$3586 = (10\,d + u)^2 + R \qquad (1)$$

R pouvant être nul.

Développons le second membre, on a :

$$3586 = 100\,d^2 + 2 \times 10\,du + u^2 + R$$

Le théorème général (280) montre que l'on obtiendra le chiffre d en extrayant la racine carrée des 35 centaines (1er cas). 5 est le chiffre des dizaines.

Retranchons $100\,d^2$ aux deux membres de l'égalité (1), il vient :

$$3586 - 100\,d^2 = 2 \times 10\,du + u^2 + R$$

ou encore, en remplaçant d par sa valeur 5 :

$$3586 - 2500 = 2 \times 10 \times 5 \times u + u^2 + R$$

ou

$$1086 = 2 \times 10 \times 5 \times u + u^2 + R \qquad (2)$$

Les 108 dizaines doivent contenir le produit $2 \times 5\,d \times u + u^2$ ou $(10\,d + u)\,u + R$.

Donc, on double 5 et on divise 108 par 10, en tenant compte du produit par lui-même du nombre des unités cherché, produit qui peut donner 9 dizaines au plus et un certain nombre d'unités. Le chiffre cherché est 9 car $(100 + 9)\,9 = 981$. Le reste est $1086 - 981 = 105$.

La racine de 3586 est 59 et le reste est :

$$1086 - 981 = 105$$
$$3586 = 59^2 + 105$$

283. Remarque. — On dispose l'opération comme il suit :

```
3586 | 59
25   | 109 × 9
1086
 981
 105
```

Notons que pour faire l'essai du chiffre 9, on écrit des dizaines et on multiplie le nombre ainsi obtenu par le chiffre 9 à essayer. Si le produit peut se retrancher du reste 1086, le chiffre est bon ; sinon, il est trop fort. On le diminue alors de une unité et on essaie le nouveau chiffre de la même manière.

284. Cas général. — *Le nombre est quelconque.*

Soit à extraire la racine carrée de 5 213 687.

D'après le théorème général (280) on obtiendra le *nombre* des dizaines en extrayant la racine carrée des 52 136 centaines du nombre. Ces dizaines connues on calculera le *chiffre des unités* comme il vient d'être dit dans le deuxième cas.

Nous sommes ainsi amenés à extraire la racine carrée de 52 136, nombre plus grand que 100. La racine de ce nombre a des dizaines ; on les obtiendra, d'après le théorème général, en extrayant la racine carrée de 521.

Le nombre 521 étant plus grand que 100, a des dizaines à sa racine ; on les obtiendra en extrayant la racine carrée des 5 centaines.

On est donc conduit à diviser le nombre en tranches de deux chiffres en commençant par la droite.

285. — La méthode est générale et peut s'appliquer à tout autre nombre. A part le premier chiffre de la racine, tous les autres s'obtiennent par *tâtonnements.*

On dispose l'opération comme il suit :

5|2 1|3 6 8 7	2 283		
4	2 × 2 = 4	22 × 2 = 44	228 × 2 = 456
1 2.1	43	448	4 563
8 4	3	8	3
3 7 3.6	129	3.584	13 689
3 5 8 4	42		
1 5 2 8.7	2		
1 3 6 8.9	84		
1 5 9 8			

On peut effectuer les soustractions mentalement, sans écrire les produits, ce qui simplifie l'écriture.

De ce qui précède, résulte la règle suivante :

286. Règle. — *Pour extraire la racine carrée, à une unité près, d'un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres en commençant par la droite ; la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre.*

La racine carrée de la première tranche à gauche donne le premier chiffre de la racine. On soustrait le carré de ce chiffre de la première tranche ; on a ainsi le premier reste partiel.

On abaisse à la droite du premier reste partiel la tranche suivante et on sépare dans le nombre obtenu le dernier chiffre à droite. On divise la partie de gauche par le double du chiffre trouvé à la racine. Le quotient est le second chiffre ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on l'écrit à droite du double du chiffre trouvé à la racine et on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre à essayer. Si ce produit peut être retranché du nombre formé par le premier reste partiel et la seconde tranche, le chiffre essayé est bon ; sinon, on diminue le chiffre d'une unité et on fait un nouvel essai. On continue de la sorte, en diminuant chaque fois le chiffre à essayer d'une unité, jusqu'à ce qu'on obtienne une soustraction possible. On effectue cette soustraction et on a le second reste partiel.

A la droite du second reste partiel, on abaisse la tranche suivante et on sépare, dans le nombre obtenu, le dernier chiffre à droite. On divise la partie de gauche par le double de la partie calculée à la racine. Le quotient est le chiffre cherché ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du double de la partie calculée à la racine et on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre qu'on essaye. Si ce produit peut être retranché du nombre formé par le second reste partiel et la troisième tranche, le chiffre essayé est bon ; sinon, on le diminue d'une unité et on recommence l'essai.

On continue de la sorte jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les tranches.

Le résultat de la dernière soustraction donne le reste *de l'opération.*

287. Preuve de la racine carrée. — La vérification consiste à faire le carré de la racine trouvée et à y ajouter le reste de l'opération. La somme doit être égale au nombre donné.

Mais on peut aussi appliquer la preuve par 9.

Soit N le nombre, A sa racine, R le reste. Soit n, a et r les restes par 9 de ces trois nombres. On a :

$$N = \text{mult. } 9 + n \quad A = \text{mult. } 9 + a \quad R = \text{mult. } 9 \times r$$

$$N = A^2 + R$$

$$\text{mult. } 9 + n = (\text{mult. } 9 + a)^2 + \text{mult. } 9 + r$$

$$\text{mult. } 9 + n = (\text{mult } 9)^2 + 2 \times \text{mult. } 9 \times a + a^2 + \text{mult. } 9 + r$$

ou, à un multiple de 9 près :

$$n = a^2 + r$$

Pour faire la preuve, il suffit donc de former le reste par 9 du nombre donné, soit n, celui de la racine, soit a, et celui du reste, soit r, n doit être égal au reste par 9 de $a^2 + r$.

En reprenant l'exemple précédent, nous trouvons pour

$$N = 5\,213\,687 \qquad n = 5$$
$$A = 2\,283 \qquad a = 6$$
$$R = 1\,598 \qquad r = 5$$
$$a^2 + r = 36 + 5 = \text{mult. } 9 + 5$$

donc, à un multiple de 9 près :

$$n = a^2 + r = 5$$

288. Racine carrée approchée à moins de $\frac{1}{10^p}$. — Trouver la racine carrée approchée à moins de $\frac{1}{10^p}$ d'un nombre entier ou décimal donné N, c'est calculer le nombre A tel que l'on ait

$$\left(\frac{A}{10^p}\right)^2 \leqq N < \left(\frac{A+1}{10^p}\right)^2$$

Ces inégalités peuvent s'écrire :

$$\frac{A^2}{10^{2p}} \leqq N < \frac{(A+1)^2}{10^{2p}}$$

ou, en multipliant ces trois nombres par 10^2, il vient :

$$A^2 \leqq N \times 10^{2p} < (A \times 1)^2$$

Pour trouver la racine à $\frac{1}{10^p}$ près, il suffit donc de calculer la racine à une unité près de $N \times 10^{2p}$ et de séparer p chiffres décimaux à la droite du nombre obtenu.

Exemple :

Racine carrée à $\frac{1}{1000}$ près du nombre 571,164

Il faut d'abord extraire la racine carrée à une unité près de

$$571{,}164 \times 1000^2 = 571\,164\,000$$

5|7 1|1 6|4 0|0 0	23899
1 7.1	43 | 468 | 4769 | 47789
4 2 1.6	
4 7 2 4.0	
4 3 1 9 0.0	
1 7 9 9	

La racine cherchée s'obtient en séparant trois décimales au nombre 23 899. C'est donc 23,899.

On peut donc remarquer que cette virgule se place d'elle-même, si on rétablit la virgule du nombre donné à la place où elle se trouvait avant la multiplication et si on inscrit la virgule à la racine immédiatement après le chiffre obtenu au moyen de la tranche qui précède immédiatement la virgule dans le nombre donné. D'où la règle :

289. Règle. — *Pour calculer la racine carrée à $\frac{1}{10^p}$ près d'un nombre entier ou décimal, on limite ce nombre au chiffre de rang 2 p après la virgule, en y ajoutant un certain nombre de zéros s'il est nécessaire. Puis on opère sur le nombre ainsi formé exactement comme il a été*

dit pour la racine carrée approchée à moins d'une unité d'un nombre entier. On place la virgule à la racine après le chiffre obtenu au moyen de la tranche du nombre donné qui précède immédiatement la virgule dans ce dernier.

On remarquera que le nombre des chiffres décimaux du nombre donné doit être amené à une valeur *paire* et que, par conséquent, la virgule se trouve toujours entre deux tranches différentes et non entre les deux chiffres d'une même tranche.

290. Remarque. — Quand on veut représenter dans les calculs la racine carrée exacte d'un nombre A, on fait précéder ce nombre du signe $\sqrt{\ }$ (radical).

Par définition on a identiquement

$$\sqrt{A^2} = A$$

L'expression $\sqrt{A}$ s'énonce : racine de A.

Quand on veut représenter la racine cubique, ou quatrième, etc., d'un nombre, on emploie le même signe, en plaçant dans l'angle à gauche du radical un petit chiffre indiquant son degré.

Exemple : $\sqrt[3]{A}$: racine cubique de A.

Exercices

72. — Trouver deux nombres pairs consécutifs, sachant que la différence de leurs carrés est 692.

73. — Trouver le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 1962 pour obtenir un carré parfait. Trouver ce carré et sa racine.

74. — Un nombre entier est égal au produit de deux nombres entiers qui diffèrent de deux unités ; on demande de démontrer que le plus petit de ces facteurs, est la racine du nombre entier par défaut à moins de une unité.

75. — Les nombres entiers 1045, 3225 et 5625 sont-ils des carrés parfaits ? Rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre entier, dont le chiffre des unités est 5, soit un carré parfait.

76. — Un jardinier veut planter des arbres en carré plein. S'il en met un certain nombre par rangée, il lui en reste 20. S'il essaye d'en mettre un de plus par rangée, il lui en manque 5 pour compléter le carré. Combien le jardinier a-t-il d'arbres ?

77. — Un ouvrier a peint, à raison de 1 fr. 20 le mètre carré, les surfaces de trois carrés mesurant ensemble 136 m² 8725 ; il a reçu pour l'un des carrés 43 fr. 20 et l'on sait que la différence des prix pour les deux autres est de 52 fr. 343. Calculer les côtés des trois carrés.

Système métrique

291. Mesure des grandeurs. — *Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une grandeur de même espèce prise pour unité.*

Si, par exemple, je veux mesurer la longueur d'une table, je pourrai la comparer à la longueur de ma main et je dirai que la longueur de la table vaut, en la circonstance, 7 fois la longueur de ma main.

292. Choix d'une unité. — Rappelons que le choix de l'unité de mesure a une grande importance. Pour qu'une unité soit bonne, il faut qu'elle soit bien définie, qu'elle soit facile à manier (10), c'est-à-dire ni trop grande, ni trop petite par rapport à l'ordre des grandeurs à mesurer, qu'elle soit toujours comparable à elle-même et à ses dérivés.

Les anciens systèmes de mesure étaient défectueux à cet égard. Les multiples et les sous-multiples des mesures de longueur ne se déduisaient pas aisément les uns des autres. En outre, les unités étaient en général mal définies ; le pied qui valait 33 centimètres dans une région, n'en valait plus que 29 ou 30 dans une autre. Les mesures étaient donc difficilement comparables entre elles.

En résumé, l'ancien système des poids et mesures n'était ni *uniforme*, ni *simple*, ni *fixe*.

293. Système métrique. — Le système métrique usité aujourd'hui en France, et dans beaucoup d'autres pays, a été imaginé pour remédier à ces inconvénients.

Il a été adopté par la Convention le 18 Germinal An III, et rendu obligatoire par la loi du 4 juillet 1837.

Ce système est dit *métrique*, parce que ses différentes unités se déduisent du mètre. Il est *décimal*, parce que les multiples et les sous-multiples des unités fondamentales sont entre eux comme les puissances de 10 et que, par suite, la mesure d'une grandeur peut toujours être exprimée dans le système métrique par un nombre décimal.

294. Espèces de grandeurs. — Les principales espèces de grandeurs que nous avons à mesurer sont les suivantes :

Longueur, surface, volume, poids, valeur marchande.

Il faut y ajouter un certain nombre d'autres grandeurs, dont les unités se déduisent de celles des grandeurs précédentes ; ce sont par exemple : la *force*, le *travail*, la *vitesse*, etc.

Enfin, il y a certaines grandeurs, dont les unités ne font pas partie du système métrique, comme le *temps*, les *angles*, etc.

295. Mesures de longueur. — L'unité de longueur est le MÈTRE qui sert de base au système métrique.

« *La longueur du mètre est très approximativement la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, qui a été prise comme point de départ pour l'établir.* »

(Note annexée au décret du 28 juillet 1903.)

On peut donner la définition : LE MÈTRE EST LA LONGUEUR, A LA TEMPÉRATURE DE ZÉRO DEGRÉ CENTÉSIMAL, DU MÈTRE TYPE EN PLATINE IRIDIÉ, DÉPOSÉ AUX ARCHIVES NATIONALES.

On désigne abréviativement le mètre par le symbole *m*.

Les multiples et les sous-multiples du mètre sont :

Le kilomètre, *km*, qui vaut 1.000 mètres.
L'hectomètre, *hm*, qui vaut 100 mètres.
Le décamètre, *Dm*, qui vaut 10 mètres.
Le décimètre, *dm*, qui vaut 0 m 1.
Le centimètre, *cm*, qui vaut 0 m 01.
Le millimètre, *mm*, qui vaut 0 m 001.

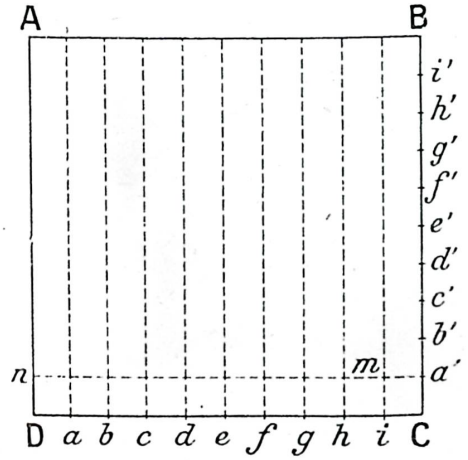
On ne compte guère plus qu'en km, m, cm et mm,

296. Mesures de surface. — L'unité d'aire (ou de surface) se déduit du mètre par la définition suivante :

L'UNITÉ D'AIRE EST L'AIRE DU CARRÉ D'UN MÈTRE DE COTÉ. CETTE UNITÉ PREND LE NOM DE MÈTRE CARRÉ.

On le désigne abréviativement par le symbole m^2.

Les multiples et sous-multiples du mètre carré se déduisent des multiples et des sous-multiples du mètre, comme le mètre carré se déduit du mètre. Par exemple : la décamètre carré est l'aire du carré construit sur le décamètre comme côté.



Un multiple ou un sous-multiple quelconque du mètre est 10 *fois supérieur à celui qui lui succède immédiatement.*

Un multiple ou un sous-multiple quelconque du mètre carré est 100 *fois supérieur à celui qui lui succède immédiatement.*

Il est facile de le démontrer. Soit un carré A B C D d'un décamètre de côté (voir la fig.). Divisons le côté D C en dix parties égales par les points *a, b, c, d, e, f, g, h, i,* et le côté B C en dix parties égales par les points *a' b', c', d', e', f', g, h', i'*. Menons, par *a, b, c, d... i* des parallèles au côté B C, et par *a', b', c', d',... i'*, des parallèles au côté D C. Nous formons ainsi une série de petits carrés *a' C i m*, dont chacun vaut 1 mètre carré, puisqu'il a 1 mètre de côté. Mais, dans chaque bande horizontale telle que *a' C Dn*, il y a 10 de ces carrés et, comme on peut former ainsi 10 bandes horizontales les unes au-dessus des autres, on voit que le carré A B C D contient 10 × 10 mètres carrés, c'est-à-dire 100.

Les multiples et les sous-multiples du mètre carré sont :

Le kilomètre carré, km^2, qui vaut 1000000 m^2.
L'hectomètre carré, hm^2, qui vaut 10000 m^2.
Le décamètre carré, Dm^2, qui vaut 100 m^2.
Le décimètre carré, dm^2, qui vaut 0 m^2 01.
Le centimètre carré, cm^2, qui vaut 0 m^2 0001.
Le millimètre carré, mm^2, qui vaut 0 m^2 000001.

297. Mesures agraires. — On emploie souvent pour mesurer les terrains de culture une autre unité d'aire : l'ARE, qui vaut 1 décamètre carré.

L'are a un multiple, l'*hectare*, qui vaut cent ares, et qui n'est autre que l'hectomètre carré. Il a un sous-multiple, le *centiare*, qui vaut la centième partie de l'are et qui n'est autre que le mètre carré.

298. Mesures de volume. — L'UNITÉ DE VOLUME EST LE VOLUME DU CUBE D'UN MÈTRE D'ARÊTE. C'EST LE MÈTRE CUBE.

On désigne *légalement* le mètre cube par le symbole m^3.

Les multiples et les sous-multiples du mètre cube se déduisent de ceux du mètre par des définitions analogues. Par exemple, le décamètre cube est le volume du cube construit sur le décamètre comme arête.

Par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour les multiples et les sous-multiples du mètre carré, on démontre qu'*un multiple ou un sous-multiple quelconque du mètre cube est* 1.000 *fois plus grand que celui qui lui succède immédiatement.*

Les noms décamètre cube, hectomètre cube, etc., ne sont pas usités. Cela tient probablement à ce que ces volumes sont trop grands.

On n'emploie que les sous-multiples du mètre cube. Ce sont :

Le décimètre cube, dm^3, qui vaut 0 m^3 001.
Le centimètre cube, cm^3, qui vaut 0 m^3 000001.
Le millimètre cube, mm^3, qui vaut 0 m^3 000000001.

299. Mesures de chauffage. — On emploie pour mesurer les quantités de bois de chauffage une unité de volume, appelée STÈRE, qui n'est autre que le mètre cube. On le désigne abréviativement par *s*.

Le *stère* admet un multiple : le *décastère*, qui vaut 10 stères, et un sous-multiple: le *décistère*, qui vaut le dixième du stère.

1 *das* = 10 s. 1 *ds* = 0 s 1.

300. Mesures de poids. — L'unité fondamentale de poids est le KILOGRAMME.

La masse du kilogramme est, très approximativement, celle de un décimètre cube d'eau à son maximum de densité, qui a été prise comme point de départ pour l'établir.

« Rappelons que la *masse* d'un corps est le quotient de la force qui agit sur lui par l'accélération ; son *poids* est le produit de sa masse par l'accélération. Pour un même corps en repos et en un même lieu, ces deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre.

LE KILOGRAMME EST LE POIDS DU KILOGRAMME TYPE EN PLATINE IRIDIÉ, DÉPOSÉ AUX ARCHIVES NATIONALES.

Le GRAMME est *la millième partie du kilogramme.* On le désigne abréviativement par *g*.

Les multiples et les sous-multiples du gramme, qui se succèdent comme les puissances de 10, sont :

Le kilogramme, *kg*, qui vaut 1000 grammes.
L'hectogramme, *hg*, qui vaut 100 grammes.
Le décagramme, *Dg*, qui vaut 10 grammes.
Le décigramme, *dg*, qui vaut 0 gr 1.
Le centigramme, *cg*, qui vaut 0 gr 01.
Le milligramme, *mg*, qui vaut 0 gr 001.

Il faut ajouter à cette liste la *tonne* (*t*) qui vaut 1000 kilogrammes, et le *quintal* métrique (*q*) qui vaut 100 kilogrammes.

A cause de l'importance du fait, il est bon de se rappeler les correspondances principales entre les volumes d'eau et leurs poids :

1 cm^3 d'eau pèse sensiblement 1 gramme.
1 dm^3 d'eau pèse sensiblement 1 kilogramme.
1 m^3 d'eau pèse sensiblement 1 tonne.

Pour ces raisons :

Le gramme et le centimètre cube, le kilogramme et le décimètre cube, la tonne et le mètre cube, sont appelés UNITÉS CORRESPONDANTES.

301. Mesures de capacité. — Pour mesurer le volume des denrées commerciales liquides, granuleuses ou pulvérulentes, on a le plus souvent recours à un groupe de mesures dérivées des volumes.

L'unité principale est le LITRE.

LE LITRE EST LE VOLUME OCCUPÉ PAR UN KILOGRAMME D'EAU PURE A SON MAXIMUM DE DENSITÉ (4°), ET SOUS LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE NORMALE (760 mm. de mercure).

Le volume du litre est très approximativement égal à un décimètre cube.

On le désigne en abrégé par *l*.

Les multiples et les sous-multiples du litre sont :

Le kilolitre, *kl*, qui vaut 1000 litres.
L'hectolitre, *hl*, qui vaut 100 litres.
Le décalitre, *Dl*, qui vaut 10 litres.
Le décilitre, *dl*, qui vaut 0 l 1.
Le centilitre, *cl*, qui vaut 0 l 01.
Le millilitre, *ml*, qui vaut 0 l 001.

De la définition même du litre, il résulte que :

1 kl d'eau pèse exactement 1 tonne.
1 l d'eau pèse exactement 1 kg.
1 ml d'eau pèse exactement 1 gr.

Le kilolitre et la tonne, le litre et le kilogramme, le millilitre et le gramme sont des UNITÉS CORRESPONDANTES.

302. Mesures monétaires. — Pour mesurer la valeur marchande d'un objet on emploie un groupe de mesures, dont la base est le FRANC.

Le *franc* a deux sous-multiples : le *décime*, qui vaut la dixième partie du franc, le *centime*, qui vaut la centième partie du franc.

Les monnaies usitées en France sont les suivantes :

1° **Monnaies de bronze** ou de billon, composées de

Cuivre	0,95
Etain	0,04
Zinc	0,01

Le *centime* qui pèse 1 gramme.
Le *demi-décime* (5 centimes) qui pèse 5 g (1 sou).
Le *décime* (10 centimes) qui pèse 10 g (2 sous).
Le gramme de cuivre monnayé vaut légalement 0 fr. 01.

Les monnaies de billon sont peu à peu remplacées par celles de nickel.

2° **Monnaies de nickel :**
La pièce de *deux décimes et demi* (25 centimes).
La pièce de 5 centimes.
La pièce de 10 centimes.
Ces pièces sont percées d'un trou.

3° Monnaies en bronze d'aluminium ou en bronze de nickel :

Emises tout d'abord sous le nom de jetons par les Chambres de Commerce, ces monnaies seront, en vertu de la loi du 25 juin 1928, émises par l'Etat.

Elles comprennent :

Le *demi-franc.*
Le *franc.*
Le *double-franc.*

On a aussi voté la loi autorisant la frappe des :

4° Monnaies d'argent, composées de

Argent 0,680
Cuivre ..... 0,120 $\left(\text{titre de } \frac{680}{1000}\right)$ (1)

La pièce de 10 *francs* qui pèse 10 grammes.
La pièce de 20 *francs* qui pèse 20 grammes.
Le gramme d'argent monnayé vaut légalement un franc.

5° Monnaie d'or, composée de

Or 0,9
Cuivre ..... 0,1 $\left(\text{titre de } \frac{900}{1000}\right)$

La pièce de 100 *francs* pèse 6 gr. 550.
Le franc est constitué par 65 milligrammes et demi d'or au titre de neuf cent millièmes de fin.

Exercices

78. — Un champ de forme rectangulaire a un périmètre égal à 280 mètres. La différence entre les deux dimensions vaut 168 mètres. Calculer : 1° la surface d'un losange qui aurait pour diagonale les deux dimensions du champ ; 2° la surface du trapèze qui aurait pour bases ces mêmes dimensions et pour hauteur la moyenne entre ces bases.

79. — Un terrain ayant la forme d'un trapèze de 64 mètres de hauteur, et dont la différence des bases est le tiers de la plus grande, a été payé 5040 francs à raison de 3500 francs l'hectare. On revend ce terrain en deux lots. Sur le premier lot on fait un bénéfice de 25% ; sur le second, un bénéfice de 10%, et le bénéfice total s'élève à 840 francs. — Trouver : 1° les deux bases du trapèze ; 2° la surface de chaque lot.

80. — Trouver la capacité et les dimensions d'une boîte rectangulaire en fer-blanc, sans couvercle, sachant : 1° que le fond de cette boîte est un rectangle ayant un côté double de l'autre et que la profondeur est égale au plus petit côté du rectangle ; 2° que le fer-blanc, dont la boîte est formée, pèse 2 dg par dm² et que le poids total de la boîte vide est de 90 grammes.

81. — Quelle est la hauteur d'une salle rectangulaire de 6 m $\frac{1}{4}$ de longueur et de 3 m $\frac{3}{5}$ de largeur, sachant que l'air qu'elle renferme contient autant d'oxygène qu'il y en a dans 27 l 1593 d'eau ? On sait que l'eau contient les $\frac{8}{9}$ de son poids d'oxygène, qu'un litre d'oxygène pèse 1 g 437, et que l'air renferme les $\frac{21}{100}$ de son volume d'oxygène.

(B. E., *Aspirantes, Paris,* 1906.)

82. — Un lingot cylindrique d'or pur a 3 centimètres de rayon et 7 décimètres de hauteur. La densité du métal est 19. On demande : 1° le poids du lingot ; 2° le nombre de pièces d'or de 10 francs qu'on pourra faire avec ce lingot. On prendra $\pi = \frac{22}{7}$.

(1) Le **titre** *d'un alliage est le nombre que l'on obtient en divisant le poids du métal fin par le poids total de l'alliage.* On exprime toujours un titre en millièmes. Ainsi une pièce de 10 f qui pèse 10 grammes, contient 6,g8 d'argent. Le *titre* est donc égal à 6,8 : 10 = 0,680. On dit que le titre est de 680 *millièmes.*

Grandeurs proportionnelles

303. Rapport de deux grandeurs. — *On appelle rapport de deux grandeurs de même espèce le rapport des nombres qui expriment ces grandeurs quand on les mesure avec la même unité.*

304. Théorème. — *Le rapport d'une grandeur A à une grandeur B de même espèce est le nombre qui exprime la mesure de A quand on prend B pour unité.*

En effet, supposons qu'on ait mesuré A et B avec une même unité et que ces mesures aient donné les nombres m pour A et n pour B. Le rapport des deux grandeurs est $\frac{m}{n}$. Si l'on mesure A avec B pour unité, B sera évidemment contenu dans A autant de fois que n dans m. C'est-à-dire que la mesure de A au moyen de l'unité B est justement exprimée par le quotient de m par n qui est, par définition, le rapport $\frac{m}{n}$ (240).

305. Corollaire. — *Il suit de là que le rapport de deux grandeurs de même espèce est un nombre bien défini, indépendant de l'unité de mesure choisie.*

306. Grandeurs proportionnelles. — Soient des grandeurs A, B, C, etc., susceptibles de varier dans des conditions données. On a choisi pour chacune des grandeurs A, B, C une unité convenable au moyen de laquelle on effectuera toutes les mesures de la grandeur correspondante au cours de ses variations.

Dans un premier ensemble de conditions, les mesures des grandeurs A, B, C, etc., sont respectivement : a_1, b_1, c_1... Dans un second ensemble de conditions, elles sont respectivement : a_2, b_2, c_2... On dit que les grandeurs A, B, C... sont DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES, lorsqu'on a toujours :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \quad .$$

autrement dit : *lorsque le rapport de deux valeurs quelconques de la première est égal au rapport des valeurs correspondantes de chacune des autres.*

Si les deux grandeurs A et B varient de telle façon que l'on ait :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b}$$

on dit qu'elles sont INVERSEMENT PROPORTIONNELLES. Autrement dit : *deux grandeurs sont inversement proportionnelles, lorsque le rapport de deux valeurs de la première est inverse du rapport des valeurs correspondantes de la seconde.*

Il résulte de ces définitions que : *si deux grandeurs sont directement proportionnelles, quand l'une devient 2, 3, 4... fois plus grande ou plus petite, l'autre devient 2, 3, 4... fois plus grande ou plus petite et réciproquement.*

Si deux grandeurs sont inversement proportionnelles, quand l'une devient 2, 3, 4... fois plus grande ou plus petite, l'autre devient 2, 3, 4... fois plus petite ou plus grande et réciproquement.

307. Expressions caractéristiques des grandeurs proportionnelles. — Soient deux grandeurs A et B directement proportionnelles, et supposons que A et B passent simultanément par les valeurs suivantes, se correspondant par colonnes verticales :

A : a_1 a_2 a_3 a_4 ..... a_n
B : b_1 b_2 b_3 b_4 ..... b_n

On a (306) :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} \quad \frac{a_1}{a_4} = \frac{b_1}{b_4} \quad \ldots \quad \frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$$

Mais en vertu du théorème (246), on peut écrire :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_4}{b_4} \quad \ldots \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_n}{b_n}$$

ou :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \ldots \frac{a_n}{b_n}.$$

Le rapport des mesures de deux grandeurs directement proportionnelles au même moment de la variation est constant.

Supposons maintenant que ces mêmes grandeurs soient inversement proportionnelles, on pourra écrire (306) :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_3}{b_1} \quad \frac{a_1}{a_4} = \frac{b_4}{b_1} \quad \ldots \quad \frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1}$$

ou :

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 \; a_1 b_1 = a_3 b_3 \; a_1 b_1 = a_4 b_4 \; \ldots \; a_1 b_1 = a_n b_n$$

ou :

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = a_4 b_4 = \ldots a_n b_n$$

Le produit des mesures au même instant de deux grandeurs inversement proportionnelles est constant.

308. Grandeurs proportionnelles à plusieurs autres. — Il peut arriver qu'une grandeur A soit proportionnelle séparément à plusieurs autres.

Ainsi le poids d'un cylindre métallique varie avec la densité du métal, le rayon de sa base, la longueur de son axe.

On dit qu'une grandeur A est directement proportionnelle aux grandeurs B et C et inversement proportionnelle à la grandeur D, lorsque :

1° C et D étant constantes, A et B sont directement proportionnelles.

2° B et D étant constantes, A et C sont directement proportionnelles.

3° B et C étant constantes, A et D sont inversement proportionnelles.

Remarque. — Les sciences mathématiques et physiques offrent de nombreux exemples de grandeurs proportionnelles :

Le prix d'une marchandise qui se vend au poids est proportionnel au poids.

Le salaire d'un ouvrier qui travaille à l'heure est proportionnel au nombre d'heures pendant lesquelles il a travaillé.

L'espace parcouru par un mobile qui se déplace d'un mouvement uniforme est proportionnel à la durée du déplacement.

La longueur d'une circonférence est proportionnelle au rayon.

Le temps nécessaire pour faire un certain travail est inversement proportionnel au nombre d'ouvriers employés à ce travail.

Le capital nécessaire pour produire un certain intérêt est inversement proportionnel à la durée du placement.

Les volumes occupés par une masse de gaz à température constante, sont inversement proportionnels aux pressions qu'elle supporte. (Loi de Marotte.)

L'arithmétique ne démontre pas la proportionnalité des grandeurs, elle l'admet. Cette proportionnalité est conventionnelle ou démontrée par d'autres sciences.

Règle de trois

309. Définition. — *On appelle règle de trois un problème dans lequel, les valeurs correspondantes de plusieurs grandeurs directement ou inversement proportionnelles étant données, on demande ce que devient l'une d'elles lorsqu'on attribue aux autres de nouvelles valeurs.*

Une règle de trois est dite *simple* ou *composée* selon qu'il y figure *deux ou plus de deux* grandeurs. Une règle de trois *simple* est *directe* ou *inverse*, selon que les deux grandeurs sont *directement* ou *inversement proportionnelles.*

310. Règle de trois simple directe. — *Sachant qu'un décimètre cube de fer pèse 7 kg 25, trouver le poids de 25 décimètres cubes de fer.*

Le volume A du fer et son poids B sont deux grandeurs directement proportionnelles. Les valeurs correspondantes sont :

A. — $a_1 = 1$ dm³ $\quad a_2 = 25$ dm³
B. — $b_1 = 7$ *kg* 25 $\quad b_2 =$ = inconnue.

Méthode de réduction à l'unité. — Connaissant le poids du dm³ de fer, en le multipliant par 25 on aura le poids de 25 dm³, d'où :

$$b_2 = 7 \text{ kg } 25 \times 25 = 181 \text{ kg } 25$$

Cette méthode, d'ailleurs très simple, convient aux débutants. Toute la difficulté consiste à reconnaître si les deux grandeurs, dont il s'agit, sont directement ou inversement proportionnelles.

Méthode par la 4ᵉ proportionnelle. — On a :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b_2}$$

ou :

$$b_2 = \frac{a_2 b_1}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{25 \times 7{,}27}{1} = 181{,}25$$

Problème. — *Treize mètres de drap coûtent 29 fr. 25 ; combien coûtent 21 mètres de drap ?*

A : $a_1 = 13 \quad a_2 = 21$
B : $b_1 = 29{,}25 \quad b_2 =$ inconnue.

Méthode de réduction à l'unité. — Cherchons d'abord le prix de 1 mètre de drap ; en le multipliant par 21 nous aurons le prix de 21 mètres.

Prix de 1 m de drap : $\frac{29{,}^{f}25}{13}$

Prix de 21 m de drap : $\frac{29{,}^{f}25 \times 21}{13} = 47^{f}25$

Méthode par la 4ᵉ proportionnelle. — On a :

$$b_2 = \frac{a_2 b_1}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{21 \times 29{,}25}{13} = 47 \text{ fr. } 25$$

311. Règle de trois inverse. — *Il faut 25 mètres d'étoffe de 0 m 80 de large pour tendre un mur ; combien faudra-t-il de mètres d'étoffe de 1 m 10 de large ?*

La largeur A de l'étoffe et la longueur B nécessaire pour tendre le mur sont des grandeurs inversement proportionnelles.

A : $a_1 = 0^{m}80 \quad a_2 = 1^{m}10$
B : $b_1 = 25$ mètres $\quad b_2 =$ inconnue.

Méthode de la réduction à l'unité. — Si l'étoffe n'avait que 1 dm de large au lieu de 8, la longueur serait 8 fois plus grande, elle mesurerait 25 m × 8. Quand l'étoffe à 11 cm au lieu de 1 cm, il en faut prendre 11 fois moins ou

$$\frac{25 \times 8}{11} \text{ d'où } b_2 = \frac{25 \times 0{,}8}{1{,}1} = 18^{m}18$$

Méthode par la 4ᵉ proportionnelle. — On a :

$$a_1 b_1 = a_2 b_2$$

D'où :

$$b_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2}$$

$$b_2 = \frac{0{,}80 \times 25}{1{,}10} = 18^{m}18$$

Problème. — *La pression d'une masse gazeuse étant de 760 mm de mercure, cette masse occupe un volume de 15 litres; quel sera son volume sous une pression de 748 mm ?*

A : $a_1 = 760$ $a_2 = 748$
B : $b_1 = 15$ $b_2 =$ inconnue

Méthode de réduction à l'unité. — Si la pression était de 1 mm, le volume de la masse gazeuse serait 760 fois plus grand ou de 15 l × 760.

Quand la pression mesure 748 mm. au lieu de 1 mm., le volume devient 748 fois plus petit ou

$$\frac{15 \times 760}{748} = 15 \text{ lit. } 24$$

Méthode par la 4e proportionnelle. — On a :

$$b_2 = \frac{a_1\, b_1}{a_2}$$

$$b_2 = \frac{760 \times 15}{748} = 15 \text{ lit. } 24$$

312. Règle de trois composée. — *Dans une exploitation de fiacres automobiles, on a employé 15 ouvriers à faire une certaine modification sur 4 voitures et il leur a fallu 2 jours pour la terminer; combien faudra-t-il d'ouvriers pour faire la même modification sur 450 voitures en un mois ?*

Le nombre A d'ouvriers est directement proportionnel au nombre B de voitures et inversement proportionnel au nombre C de jours.

A : $a_1 = 15$ $a_2 =$ inconnue
B : $b_1 = 4$ $b_2 = 450$
C : $c_1 = 2$ $c_2 = 30$

Méthode de réduction à l'unité. — Si pour réparer 4 voitures, en travaillant 2 jours, il faut 15 ouvriers, pour réparer 4 voitures en ne travaillant que 1 jour, il faudra 15 × 2 ouvriers; et pour réparer 4 voitures en travaillant 30 jours, il faudra $\frac{15 \times 2}{30}$ ou 1 ouvrier.

Pour réparer 450 voitures, il faudra autant d'ouvriers que 4 sont contenus dans 450 ou 450 : 4 = 112,5, il faudra 113 ouvriers.

La méthode de réduction à l'unité conduit parfois à des raisonnements peu conformes aux réalités; il ne faut donc pas l'employer à tout propos et machinalement.

Méthode par la 4e proportionnelle. — On a :

$$\frac{a_1\, c_1}{b_1} = \frac{a_2\, c_2}{b_2}$$

$$a_2 = \frac{a_1\, c_1\, b_2}{b_1\, c_2}$$

$$a_2 = \frac{15 \times 2 \times 450}{4 \times 30} = \frac{5 \times 45}{2} = \frac{225}{2} = 112{,}5$$

Il faudra 113 ouvriers.

Exercices

83. — 500 ouvriers de chemin de fer, en travaillant 10 heures par jour, ont posé 2300 mètres de voie en 28 jours. Combien 425 ouvriers, travaillant 8 heures par jour, poseront-ils de mètres de voie en 42 jours ?

84. — Le prix du diamant est proportionnel au carré de son poids. Un diamant vaut 3600 fr.; on le casse en deux morceaux, dont l'un est les $\frac{2}{5}$ du tout. On demande la valeur totale des deux morceaux et la perte subie en cassant le diamant.

85. — 21 ouvriers ont mis 11 jours pour élever un mur en moellons de 45 mètres de longueur, 3 m 50 de hauteur et 0 m 45 d'épaisseur. On demande combien de temps 18 ouvriers mettront pour construire un mur en briques ayant les mêmes dimensions que le premier en longueur et en hauteur et ayant 0 m 36 d'épaisseur; on sait que pour exécuter les mêmes volumes de maçonnerie en moellons et en briques, les temps employés sont entre eux comme 4 et 7 (4 correspondant à la maçonnerie en moellons).

86. — Un certain travail peut être fait en 44 jours par 15 ouvriers travaillant 8 heures par jour; après 10 jours, 5 ouvriers cessent de travailler; les autres font alors 9 heures par jour. Au bout de combien de temps le travail sera-t-il terminé ? Combien recevra chacun des 5 premiers ouvriers, puis chacun des 10 autres, s'ils ont reçu en tout 2112 francs ?

87. — Le nombre des vibrations transversales qu'une corde tendue exécute dans l'unité de temps est proportionnel à la racine carrée du poids qui la tend et inversement proportionnel à sa longueur, à son diamètre, ainsi qu'à la racine carrée de sa densité. Cela posé, une corde de cuivre ayant 0 m 363 de longueur, 0 m 0015 de diamètre, et tendue par un poids de 13 kg. 35 exécute 8000 vibrations en une seconde; on demande combien de vibrations exécutera en $\frac{1}{16}$ de minute, un fil d'acier de 0 m 953 de longueur et de 0 m 0005 de diamètre, tendu par un poids de 3 kg. 54 (densité du cuivre 8,8 et densité de l'acier 7,8).

(*Arts et Métiers.*)

Règles d'intérêts

313. Un CAPITAL C étant placé, son propriétaire (le prêteur) reçoit une indemnité I, appelée INTÉRET, qui est proportionnelle au capital et à la durée du placement, *n*.

On appelle TAUX, *t*, l'intérêt de 100 francs pour un an.

L'intérêt I est directement proportionnel au capital C et au temps n (en années).

Le problème général se réduit à l'énoncé suivant :

SACHANT QU'UN CAPITAL DE 100 FRANCS, PLACÉ PENDANT 1 AN, RAPPORTE t FRANCS, TROUVER L'INTÉRÊT D'UN CAPITAL C AU BOUT DE n ANNÉES.

Capital : 100 C
Intérêt : t I
Temps : 1 n

Méthode de réduction à l'unité. — On dira :
100 fr. placés pendant 1 an rapportent t francs

1 » » » 1 » » $\frac{t}{100}$

C » » » 1 » » $\frac{C \times t}{100}$

C » » » n » » $\frac{C \times t \times n}{100}$

d'où : $$I = \frac{C\, t\, n}{100}$$

Méthode par la 4e proportionnelle. — On a :

$$\frac{t}{100 \times 1} = \frac{I}{C \times n}$$

(1) $$I = \frac{C\, t\, n}{100}$$

La formule (1) donne l'intérêt.

EXEMPLE : *Quel est l'intérêt rapporté en 5 ans par un capital de 7.500 francs, placé à 4 % ?*

$$= \frac{7500 \times 4 \times 5}{100} = 1500 \text{ fr.}$$

Mais la formule (1) peut se modifier de manière à permettre le calcul de l'une des trois quantités C, t ou n, les deux autres et l'intérêt I étant connus.

(2) $$C = \frac{100\ I}{t\ n}$$

(3) $$t = \frac{100\ I}{C\ n}$$

(4) $$n = \frac{100\ I}{C\ t}$$

EXEMPLE (formule [2]) : *Quel capital faut-il placer pendant 7 ans au taux de 3 % pour obtenir 2.500 francs d'intérêt ?*

$$C = \frac{100 \times 2500}{3 \times 7}$$

EXEMPLE (formule [3]) : *A quel taux faut-il placer pendant 10 ans un capital de 100.000 francs pour obtenir un intérêt de 45.000 francs ?*

$$t = \frac{100 \times 45000}{100000 \times 10}$$

EXEMPLE (formule [4]) : *Pendant combien de temps faut-il placer un capital de 13.700 francs à 4 % pour produire un intérêt de 5.000 francs ?*

$$n = \frac{100 \times 5000}{13700 \times 4}$$

314. Remarque. — Il peut arriver que le temps soit exprimé en mois ou en jours. Il faut modifier la formule en conséquence, en se souvenant que l'année commerciale vaut 360 jours et le mois 30 jours.

j étant le nombre de jours, n sera remplacé dans les formules précédentes par $\frac{j}{360}$. S'il s'agit d'un nombre de mois m, on remplacera n par $\frac{m}{12}$.

EXEMPLE : *Quel est l'intérêt d'un capital de 15.000 francs placé à 3 % pendant 1 an, 6 mois et 17 jours ?*

Le temps est en jours :

$$j = 360 + 180 + 17 = 557$$

Et en années ou fraction d'année :

$$n = \frac{557}{360}$$

La forme :

$$I = \frac{C\ t\ n}{100}$$

deviendra donc :

$$I = \frac{C\ t\ j}{360 \times 100} \quad \text{ou} \quad I = \frac{C\ t\ j}{36000}$$

$$I = \frac{15000 \times 3 \times 557}{36000}$$

Si le temps était exprimé au mois, la formule générale deviendrait :

$$I = \frac{C\ t\ n}{1200}$$

315. Cas particulier. — EXEMPLE : *Quelle est la somme qui, placée à 5 % par an, est devenue, au bout de 3 ans, égale à 3.174 francs, capital et intérêts compris ?*

Première solution. — Aucune des formules précédentes n'est immédiatement applicable à ce problème. Représentons par A le capital et les intérêts réunis, on a:

$$A = C + \frac{C\ t\ n}{100}$$

Mettons C en facteur commun :

$$A = C\left(1 + \frac{t\ n}{100}\right)$$

$$A = C\left(\frac{100 + t\ n}{100}\right)$$

$$\text{d'où } C = \frac{100\ A}{100 + t\ n}$$

Application :

$$C = \frac{100 \times 3174}{100 + 15} = 2760 \text{ fr.}$$

Deuxième solution. — On peut résoudre le problème directement de la manière suivante :

100 francs rapportent en 3 ans 5 × 3 = 15 fr. et deviennent 100 + 15 = 115 francs.

Puisque 115 fr. proviennent d'un capital de 100 fr.

1 fr. proviendra » » » $\frac{100}{115}$ ».

3174 fr. proviendront d'un capital de

$$\frac{100 \times 3174}{115} = 2760 \text{ fr.}$$

Règles d'escompte

316. Dans le commerce, il arrive souvent qu'un *acheteur*, au lieu de payer comptant, donne à son créancier un *billet*, par lequel il s'engage à payer la somme due, à une *échéance* déterminée. Cette reconnaissance, souscrite par l'acheteur, s'appelle BILLET A ORDRE. Le billet à ordre est un *effet de commerce*. D'autres fois, c'est le *vendeur* qui prie l'acheteur de lui payer à lui-même, ou *à son ordre*, la somme due, à une date fixée, dite *date d'échéance*. Cette deuxième espèce d'effet de commerce s'appelle TRAITE OU LETTRE DE CHANGE.

La personne qui est en possession d'un effet de commerce peut l'*escompter* chez son banquier, c'est-à-dire se faire verser avant l'échéance la somme inscrite sur l'effet moyennant une retenue qu'on nomme L'ESCOMPTE et qui représente l'intérêt de la somme pendant le temps qui reste à courir jusqu'à l'échéance.

Cet escompte, généralement calculé au taux de 6 %, représente le plus souvent l'intérêt de la VALEUR NOMINALE inscrite sur le billet. C'est alors L'ESCOMPTE COMMERCIAL ou *en dehors*.

Mais, logiquement, il devrait représenter non pas l'intérêt de la valeur nominale du billet, mais celui de la VALEUR ACTUELLE, c'est-à-dire de la somme qui, *augmentée de ses intérêts au jour de l'échéance*, reproduit la valeur nominale. L'escompte calculé sur la valeur actuelle s'appelle ESCOMPTE RATIONNEL ou *en dedans*.

317. Escompte commercial. — L'escompte commercial, exclusivement usité en France, est l'intérêt même, jusqu'au jour de l'échéance, de la valeur nominale d'un billet. Les règles d'escompte sont donc les mêmes que les règles d'intérêt.

L'escompte commercial se calculera donc par la formule de l'intérêt simple, I représentant alors l'escompte.

EXEMPLE : *Quel est l'escompte en dehors d'un billet de 375 francs à échoir dans 3 mois, le taux étant de 6 % ?*

I = l'escompte C = 375 $t = 6$ $n \frac{3}{12}$

$$I = \frac{375 \times 6 \times 3}{100 \times 12} = 5 \text{ fr. } 625$$

318. Bordereau d'escompte. — Outre l'escompte, dont il vient d'être parlé, le banquier retient en outre pour son salaire une *commission* qui varie de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{2}$% du montant du billet, et qui est indépendante du temps ; il perçoit encore, pour les effets qui seront payés dans une ville autre que celle de la négociation, un *change de place* pour l'indemniser des frais de recouvrement ; cette retenue varie de $\frac{1}{20}$ à 2% du montant du billet et elle est indépendante du temps.

L'ensemble des trois retenues porte le nom d'*agio*.

Le *bordereau d'escompte* est la note que le banquier remet au porteur de l'effet.

PROBLÈME. — *Faire le bordereau d'escompte d'un effet de 3.400 francs, payable dans 65 jours, taux 6%, commission* $\frac{1}{4}$ %, *change de place* $\frac{1}{2}$ %.

Valeur à échéance ..... 3.400,— fr.
Escompte sur 3.400 fr. 65 jours, 36 fr. 85

Commission $\frac{1}{4}$ % sur 3.400 fr. 8 fr. 50

Change $\frac{1}{2}$ % sur 3.400 fr. .. 17 fr. 00
agio 62 fr. 35 — 62,35 fr.
Net à payer ..... 3.337,65 fr.

Cherchons à quel taux réel l'escompte a été fait, en appliquant la formule :

$$t = \frac{36000\ I}{C\,n}$$

$$t = \frac{36000 \times 62.35 \text{ fr.}}{3400 \times 65} = 10 \text{ fr. } 15$$

391. Escompte rationnel. — *L'escompte rationnel est la différence de la valeur nominale du billet et de sa valeur rationnelle actuelle* ; la valeur nominale étant connue, il faut trouver la valeur actuelle.

EXEMPLE : *Soit à trouver la valeur rationnelle actuelle du billet de 375 francs de l'exemple précédent* :

Dans 3 mois, 100 francs vaudront :

$$100 + 6 \times \frac{3}{12} = 101{,}5$$

Ce qui vaudra 101 fr. 5 dans 3 mois, vaut 100 francs aujourd'hui. On trouve par une règle de trois simple ce que vaut aujourd'hui, la somme qui vaudra 375 francs dans 3 mois.

$$\begin{array}{ll} 375 & v = \text{inconnue} \\ 101{,}5 & 100 \end{array}$$

$$\frac{375}{101{,}5} = \frac{v}{100}$$

$$v = \frac{375 \times 100}{101{,}5}$$

L'escompte rationnel est donc :

$$E = 375 - \frac{375 \times 100}{110{,}5} = 5{,}542$$

320. Relation entre les deux escomptes. — Soient V_n la valeur nominale d'un billet, V_a sa valeur rationnelle actuelle et e_r l'escompte rationnel.

On a, par définition de l'escompte rationnel :

$$V_n - V_a = e_r$$

d'où l'on tire :

intérêt de V_n — intérêt de V_a = intérêt de e_r.
or intérêt de V_n = escompte commercial
intérêt de V_a = escompte rationnel ;
donc :
Escompte commercial — escompte rationnel = intérêt de l'escompte rationnel ; donc :

L'escompte commercial est égal à l'escompte rationnel plus l'intérêt de l'escompte rationnel.

Exercices

88. — Une personne a engagé un certain capital dans une entreprise. La première année, elle a perdu 15% de son capital, et la deuxième année, 5% du capital restant. La troisième année, la somme qui lui reste produit un bénéfice de 8 %, et il s'en faut de 5.116 francs pour reconstituer le capital primitif. Quel est le montant du capital engagé, le bénéfice de la troisième année ?

89. — Les $\frac{8}{15}$ d'un certain capital ont été employés à l'achat de rente française 3 % au cours de 96 francs. Avec le reste de ce capital on a acheté de la rente russe 3 % au cours de 70 francs. La différence entre les revenus de ces deux achats est de 225 francs. Calculer le capital placé et son revenu annuel.

90. — On place un certain capital à 4 % pendant 130 jours. Au bout de ce temps, le capital et les intérêts réunis sont placés à 6 % pendant 120 jours. On a eu ainsi 365 fr. 20 d'intérêt. On demande quel était le capital primitif ?

91. — Une personne a acheté une propriété de 16.000 francs. Elle s'est engagée à payer 4.000 francs comptant, 4.000 francs dans 30 jours, 4.000 francs dans 60 jours, et 4.000 francs dans 90 jours. Elle se propose ensuite de payer le tout ensemble ; à quelle époque doit s'effectuer le paiement ? Les intérêts sont calculés à 5 %.

(B. S., *Loire-Inférieure.*)

Partages proportionnels

321. Définition. — *Partager un nombre N en parties proportionnelles à des nombres donnés 3, 5 et 7 par exemple ; c'est trouver trois nombres x, y, z tels que l'on ait à la fois :*

$$x + y + z = N$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$$

Les problèmes sur les partages proportionnels se résolvent sans difficultés, soit par l'application des propriétés des proportions (249), soit par le procédé, de la réduction à l'unité.

Résolvons d'abord le problème général.

322. Problème général. — *Etant donné un nombre N, le partager en parties proportionnelles à des nombres donnés a, b, c...*

Soient x, y, z... les parties cherchées. On a :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c}$$

$$\frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{N}{a + b + c}$$

On a donc :

$$\frac{x}{a} = \frac{N}{a + b + c} \qquad \frac{y}{b} = \frac{N}{a + b + c} \qquad \frac{z}{c} = \frac{N}{a + b + c}$$

$$x = \frac{a\,N}{a + b + c} \qquad y = \frac{b\,N}{a + b + c} \qquad z = \frac{c\,N}{a + b + c}$$

323. Application. — La *règle de société* qui a pour objet de partager entre plusieurs associés leurs bénéfices ou leurs pertes ; la *répartition de l'actif d'une faillite*, la *répartition des impôts directs* votés par les Chambres sont des applications des partages proportionnels.

PROBLÈME. — *Une maison de commerce a fait 15.000 francs de bénéfice, partager cette somme entre trois associés proportionnellement à leurs mises. Le premier a mis 5.000 francs, le second 3.500 francs et le troisième 2.700 francs dans l'affaire.*

Première solution. — Soient x, y et z les parts. On a :

$$x = \frac{5000 \times 15000}{5000 + 3500 + 2700} \qquad y = \frac{3500 \times 15000}{5000 + 3500 + 2700}$$

$$z = \frac{2700 \times 15000}{5000 \times 3500 \times 2700}$$

Deuxième solution. — Le capital social est

$$5000 + 3500 + 2700 = 11200 \text{ francs.}$$

A la mise totale 11200 francs reviennent les 15000 francs de bénéfice.

à une mise de 1 fr. revient $\frac{15000}{11200}$

à une mise de 5000 fr. revient $\frac{5000 \times 15000}{11200} = 6696{,}40$ fr

à une mise de 3500 fr. revient $\frac{3500 \times 15000}{11200} = 4687{,}48$ fr.

à une mise de 2700 fr. revient $\frac{2700 \times 15000}{11200} = 3616{,}05$ fr.

Vérification : total des parts ..... = 14999,93fr.

324. Définition. — *Partager un nombre en parties inversement proportionnelles à des nombres donnés, a, b, c, c'est le partager en parties directement proportionnelles aux inverses* $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ *des nombres donnés.*

Soit à partager 7220 en parties inversement proportionnelles aux nombres 3, $\frac{5}{8}$ et 1,35.

Désignons les 3 parties par x, y et z, on a :

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{z}{\left(\frac{100}{135}\right)}$$

ou en réduisant les fractions au même dénominateur :

$$\frac{x}{\left(\frac{45}{135}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{216}{135}\right)} = \frac{z}{\left(\frac{100}{135}\right)} \text{ ou encore } \frac{x}{45} = \frac{y}{216} = \frac{z}{100}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{x}{45} = \frac{y}{216} = \frac{z}{100} = \frac{x + y + z}{45 + 216 + 100} = \frac{7220}{361} = 20$$

$$x = 20 \times 45 = 900$$
$$y = 20 \times 216 = 4320$$
$$z = 20 \times 100 = 2000$$

Exercices

92. — Un oncle laisse à ses neveux une somme de 50.000 francs qu'ils doivent se partager proportionnellement à leur âge. Le premier a 23 ans, le second 18 et le troisième 13 ans. Quelle sera la part de chacun ?

93. — Trois voisins ont logé des troupes, savoir : le premier 6 hommes et 4 chevaux pendant 15 jours ; le deuxième 8 hommes et 3 chevaux pendant 12 jours ; le troisième 10 hommes pendant 9 jours. Il leur est accordé une indemnité totale de 180 francs. Faire la répartition sachant que 2 chevaux doivent entrer en compte pour un homme seulement.

94. — Quatre associés ont placé dans une entreprise : le premier 12.000 francs pendant 15 mois, le second 18.000 francs pendant 9 mois, le troisième 7.500 francs pendant 19 mois et le quatrième 10.000 francs pendant 20 mois. Le bénéfice s'est élevé à 20.000 francs. On demande la part de bénéfice de chaque associé.

95. — Un oncle laisse en mourant 36.000 francs, qui doivent être partagés entre ses cinq neveux. Il a stipulé dans son testament que la part de chacun d'eux doit être en raison inverse de son âge. On demande quelles seront les parts, sachant que le premier neveu est âgé de 30 ans, le deuxième de 20 ans, le troisième de 18 ans, le quatrième de 12 ans et le cinquième de 10 ans.

Règles de mélanges

325. Il arrive qu'on mélange des poids, ou des volumes différents de marchandises de valeurs diverses ; par exemple, des engrais de prix divers, plusieurs sortes de cafés, des vins de prix différents, etc.

Les questions relatives aux mélanges se ramènent à deux problèmes principaux.

I. — Calcul du prix moyen.

Problème. — *On mélange 130 litres de vin à 0 fr. 25 le litre avec 190 litres de vin à 0 fr. 30 le litre. Quelle est la valeur du litre de mélange?*

Il suffit de trouver la valeur totale du mélange et de diviser cette valeur par le nombre de litres du mélange.

La valeur totale du mélange est :

$$130 \times 0{,}25 + 190 \times 0{,}30$$

et la valeur du litre du mélange est :

$$\frac{130 \times 0{,}25 + 190 \times 0{,}30}{130 + 190}$$

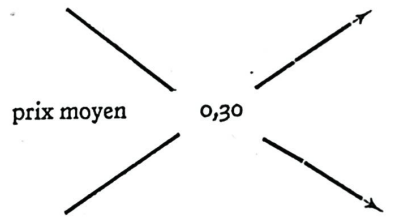
II. — Calcul du rapport dans lequel on doit mélanger deux substances.

Problème. — *On a du vin à 0 fr. 25 le litre et du vin à 0 fr. 45. Combien de litres de chaque sorte faut-il mélanger pour obtenir 300 litres de vin à 0 fr. 30 ?*

Chaque litre de vin à 0 fr. 25 fait perdre 0 fr. 05 à la valeur du mélange ; chaque litre à 0 fr. 45 augmente de 0 fr. 15 la valeur du mélange. Comme il faut que le gain et la perte se compensent, le nombre de litres de vin à 0 fr. 25 et le nombre de litres à 0 fr. 45 doivent être inversement proportionnels à 0,05 et à 0,15.

Dans la pratique on forme le tableau ci-dessous :

prix supérieur 0,45 — différence 0,05



prix inférieur 0, 25 — différence 0, 15

dans lequel on place l'un sous l'autre le prix supérieur et le prix inférieur, puis entre les deux et à droite le prix moyen. On fait les différences en croix 0,40 — 0,30 et 0,30 — 0,25 comme l'indiquent les flèches et on obtient le rapport cherché 0, 05 à 0,15, ou, plus simplement, 1 à 3.

Règles d'alliages

326. Rappelons que le *titre* d'un alliage est le quotient obtenu en divisant le poids du métal précieux, contenu dans l'alliage, par le poids total de l'alliage.

Les problèmes d'alliages sont analogues à ceux des mélanges.

I. — Calcul du titre moyen.

Problème. — *On fond ensemble un lingot d'argent au titre de* $\frac{835}{1000}$ *et pesant 500 grammes et un lingot d'argent au titre de* $\frac{900}{1000}$ *et pesant 600 gramme. Trouver le titre de l'alliage.*

Il suffit de trouver la quantité d'argent contenue dans le lingot provenant du mélange et de diviser par le poids total du lingot.

La quantité d'argent pur contenue dans le lingot est :

$$\frac{835}{1000} \times 500 + \frac{900}{1000} \times 200$$

le titre de l'alliage est :

$$\frac{\frac{835}{1000} \times 500 + \frac{900}{1000} \times 200}{700}$$

ou

$$\frac{835 \times 500 + 900 \times 200}{700 \times 5000} = \frac{853{,}57}{5000}$$

II. — CALCUL DU RAPPORT DANS LEQUEL ON DOIT ALLIER DEUX LINGOTS.

Problème. — *On a de l'argent au titre* $\frac{835}{1000}$ *et de l'argent au titre de* $\frac{900}{1000}$ *combien faut-il prendre de chaque pour faire un lingot de 200 grammes au titre de* $\frac{850}{1000}$ *?*

En prenant a grammes d'argent à $\frac{835}{1000}$ on prend de moins qu'il ne faudrait :

$$\frac{850-835}{1000} \times a$$

En prenant b grammes d'argent à $\frac{900}{1000}$ on prend de plus qu'il ne faudrait :

$$\frac{900-850}{1000} \times b$$

Or, il faut que ces quantités en plus et en moins s'annulent, c'est-à-dire qu'elles soient égales :

$$\frac{850-835}{1000} \times a = \frac{900-850}{1000} \times b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{900-850}{850-835}$$

a et b doivent être inversement proportionnels aux différences du titre qu'on veut obtenir et des titres de chacun des deux lingots. Comme on connaît leur somme, 200 grammes, il ne reste qu'à partager 200 en deux parties proportionnelles à des nombres donnés.

Appliquons la disposition pratique indiquée ci-dessus, on obtient immédiatement le rapport cherché :

titre supérieur 0,900 — différence 0,015 — 3

titre moyen 0,850

titre inférieur 0, 835 — différence 0, 050 — 10

Ainsi, on prendra 3 parties du lingot à 0,900 pour 10 du lingot à 0,835.

Exercices

96. — Un épicier a deux espèces de café : l'une à 4 fr. 20 le kilogramme et l'autre à 4 fr. 60. Il en a fait un mélange de 15 kilogrammes. Le prix de ce mélange est de 4 fr. 30 le kilogramme. On demande combien il a mis de kilogrammes de chaque espèce.

97. — Un tonneau de 228 litres de capacité contient 198 litres de vin qui valent 120 francs. On remplit le tonneau d'eau, puis on enlève 15 litres du mélange et on les remplace par un égal volume d'eau. Quelle est la quantité de vin contenue dans un litre du nouveau mélange et quelle en est sa valeur ?

98. — On demande le titre d'un lingot d'argent allié de cuivre, formé par la réunion de cinq lingots, dont les poids et les titres sont indiqués ci-dessous :

Un lingot du poids de	17 kg. 525	au titre de	0,980
— —	6 kg. 125	—	0,910
— —	3 kg. 005	—	0,820
— —	10 kg. 300	—	0,850
— —	9 kg. 900	—	0,870

On demande en outre quelle est la quantité totale de cuivre qu'il faudrait ajouter pour ramener le nouvel alliage au titre normal de 0,835.

Corrigé des Exercices

NUMÉRATION

1. — *Combien y a-t-il de nombres entiers de 2 chiffres, de 3 chiffres, de 4 chiffres, de... n chiffres ?*

Solution. — Il y a 9 nombres de un chiffre.

Le plus grand nombre de deux chiffres est 99 ; le nombre des nombres de 2 chiffres est donc de :

$$99 - 9 = 90$$

De même le plus grand des nombres de 3 chiffres est 999 ; il y a donc :

$$999 - 99 = 900$$

nombre de trois chiffres et ainsi de suite.

Le nombre des nombres de quatre chiffres est alors de :

$$9999 - 999 = 9000$$

Le nombre des nombres de n chiffres est obtenu en faisant suivre le chiffre 9 de $n - 1$ zéro, soit :

$$9\overbrace{00\ldots0}^{1-n}$$

Réponses :

$$9,\ 90,\ 900,\ \ldots\ 9\overbrace{00\ldots0}^{1-n}$$

2. — *Combien faut-il de chiffres pour numéroter les 526 pages d'un livre ?*

Solution. — De la page 1 à la page 9, il y a 9 nombres d'un chiffre, ou :

$$1 \times 9 = 9 \text{ caractères.}$$

De la page 9 à la page 99, il y a 90 nombres de deux chiffres, ou :

$$2 \times 90 = 180 \text{ caractères.}$$

De la page 100 à la page 526 il y a 427 nombres de trois chiffres, ou :

$$3 \times 427 = 1381 \text{ caractères.}$$

En tout :

$$9 + 180 + 1381 = 1470 \text{ caractères.}$$

Réponse : 1470.

3. — *On écrit les nombres dans leur ordre naturel. Quel est le chiffre qui occupe le 900e rang? le 1500e rang?*

Solution. — Lorsqu'on écrit la suite naturelle des nombres, on écrit les 9 premiers nombres ou 9 caractères. Il y a ensuite 99 — 9 = 90 nombres de 2 chiffres pour l'écriture desquels il faut

$$2 \times 90 = 180 \text{ caractères.}$$

Pour les nombres de 3 chiffres, dont le nombre est 999 — 99 = 900, il faut :

$$3 \times 900 = 2700 \text{ caractères.}$$

Donc pour écrire tous les nombres depuis 1 jusqu'à 999 il faut un nombre de caractères égal à :

$$9 + 2 \times 9 \times 10 + 3 \times 9 \times 100 \text{ ou}$$

$$(1 + 2 \text{ dizaines} + 3 \text{ centaines})$$

ou :

$$9 \times 312 = 2889$$

D'ailleurs, il a fallu pour écrire les nombres de 1 à 99 un nombre de caractères égal à :

$$9 \times 21 = 189$$

Or, 1500, rang du chiffre cherché, est compris entre 189 et 2889 ; donc le chiffre appartient à un nombre placé entre 99 et 999, c'est-à-dire à un nombre de 3 chiffres.

Le rang du chiffre, dans cette suite de nombres de 3 chiffres, est de 1 500 — 189 = 1311e ; comme 1311 : 3 = 437.

Le nombre est 437 et le chiffre est 7.

Réponse : 7.

Même raisonnement pour le chiffre qui occupe le 900e rang, le 1500e rang.

4. — *On a employé 2977 caractères pour paginer un livre ; quel est le nombre de ses pages ?*

Solution. — Pour écrire tous les nombres de 1 à 999 il faut 2889 caractères (problème 3).

Le nombre des pages du livre est donc supérieur à 999.

Le nombre des caractères employés pour imprimer les nombres de 4 chiffres est de 2977 — 2889 = 88, et comme 88 : 4 = 22, le 2977e caractère est le dernier chiffre du 22e nombre de 4 chiffres, c'est-à-dire 1021. Le livre a 1021 pages.

Réponse : 1021.

5. — *Ecrire les nombres de 1 à 10 dans le système binaire (à base 2) ; de 1 à 30 dans le système à base 7.*

Solution. — Puisque 2 est la base, on l'écrira 10 ; 4 ou 2^2 s'écrira 10^2 ou 100 ; 2^2 ou 8 s'écrira 10^3 ou 1000. On aura donc :

1 10 11 100 101 110 111 1000 1001

Un, deux, trois, quatre, cinq, six , sept, huit, neuf, 1010.
dix.

Puisque 7 est la base, on l'écrira 10, deux fois 7 ou 14 s'écrira 20, trois fois 7 ou 21 s'écrira 30.

On aura donc :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

on pourra nommer ces nombres: un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, sept-un, sept-deux, sept-trois, sept-quatre, sept-cinq, sept-six, deux-sept, deux-sept-un, deux-sept-deux, deux-sept-trois, deux-sept-quatre, deux-sept-cinq, deux sept-six.

ADDITION

6. — *Pourquoi commence-t-on l'addition par la droite? Dans quel cas est-il indifférent de commencer l'addition par la droite ou par la gauche?*

Raisonnement. — On commence l'addition par la droite pour ne pas avoir à modifier, par suite des retenues, des résultats déjà écrits.

Il est indifférent de commencer l'addition par la droite ou par la gauche, quand dans les nombres proposés, la somme des unités des divers ordres ne dépasse pas 9, c'est-à-dire lorsque pour chaque colonne il n'y a pas de retenue à reporter à la colonne suivante.

7. — *Trouver trois nombres entiers consécutifs ayant pour somme 4725.*

Solution. — Désignons par n le plus petit nombre, les deux nombres suivants seront

$$n + 1 \text{ et } n + 2$$

La somme de ces trois nombres est $n + (n + 1) + (n + 2)$ ou $3n + 3$.

Donc :

$$3n + 3 = 4725 \quad \text{et} \quad 3n = 4725 - 3 = 4722$$

et

$$n = \frac{4722}{3} = 1574$$

Les 3 nombres entiers consécutif, cherchés sont 1574 — 1575 — 1576.

Réponse : 1574 — 1575 — 1576.

8. — *Démontrer que la somme des n premiers nombres entiers est égale à :*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Solution. — Ecrivons sur une première ligne horizontale les nombres entiers de 1 à n dans leur ordre naturel, et sur une deuxième ligne les même nombres de n à 1, de telle sorte que ceux de la seconde ligne correspondent verticalement à ceux de la première :

1,	2,	3,	4...,	$n-1$,	n
n,	$n-1$,	$n-2$,	$n-3$...	2,	1

Nous avons ainsi n colonnes verticales, de deux nombres chacune, et dont la somme totale vaut deux fois la somme cherchée.

La première colonne donne, comme total partiel, $n + 1$; la seconde donne également $n + 1$ et il en est de même pour toutes les colonnes suivantes. Les n additions partielles donnent donc un total égal à $n(n + 1)$; et comme ce total vaut deux fois la somme cherchée, celle-ci est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

SOUSTRACTION

9. — *Que devient le reste d'une soustraction :*

1° Quand on augmente le grand nombre d'un certain nombre d'unités ?

2° Quand on augmente le petit nombre d'un certain nombre d'unités?

3e Quand on diminue le grand nombre d'un certain nombre d'unités ?

4° Quand on diminue le petit nombre d'un certain nombre d'unités ?

5° Quand on diminue les deux nombres d'un même nombre d'unités ?

6° Quand on augmente le grand nombre d'un certain nombre d'unités et le petit nombre d'un autre nombre d'unités? (Deux cas à considérer.)

7° Quand on diminue le grand nombre d'un certain nombre d'unités et le petit nombre d'un autre nombre d'unités? (Deux cas à considérer.)

8° Quand on augmente le grand nombre et qu'on diminue le petit nombre d'un même nombre d'unités ?

9° Quand on diminue le grand nombre et qu'on augmente le petit nombre d'un même nombre d'unités ?

Raisonnement. — 1. — *Le reste est augmenté du même nombre d'unités.*

Les nombres a et b ont pour différence $a - b$, les nombres $a + n$ et b ont pour différence $a + n - b$ ou $a - b + n$ et l'on voit que la différence $a - b$ a été dans le 2e cas augmentée de n.

2. — *Le reste est diminué du nombre d'unités ajouté au petit nombre.*

Soient les nombres a et b, leur différence est $a - b$. Les nombres a et $b + n$ ont pour différence $a - (b + n)$ ou $a - b - n$; la première différence a été diminuée de n unités.

3. — *Le reste est diminué de ce nombre d'unités.*

En effet, les nombres a et b par exemple, ont pour différence $a - b$ et les nombres $a - n$ et b ont pour différence $a - n - b$ ou $a - b - n$. La différence $a - b$ est bien diminuée de n unités.

4. — *Le reste est augmenté de ce nombre d'unités.*

5. — *Le reste n'est pas changé.*

6. — *Si le nombre ajouté au grand nombre est supérieur au nombre ajouté au petit nombre, le reste est augmenté de la différence des deux nombres ajoutés.*

Si le nombre ajouté au grand nombre est inférieur au nombre ajouté au petit nombre, le reste est diminué de la différence des deux nombres ajoutés.

7. — *Cas analogue au précédent.*

8. — *Le reste est augmenté de 2 fois le nombre d'unités ajoutées et retranchées.* Soit 2 n si à $a - b$ on substitue $(a + n) - (b - n)$.

9. — *Le reste est diminué de 2 fois le nombre d'unités ajoutées et retranchées.* Soit 2 n si à $a - b$ on substitue $(a - n) - (b + n)$.

10. — *Trouver deux nombres, dont la somme est 2283 et la différence 687?*

Généraliser.

Solution. — Soient a et b deux nombres quelconques, leur somme est $a + b$ et leur différence $a - b$:

Ajoutons $(a + b)$ et $(a - b)$, on a : $(a + b) + (a - b) = a + b + a - b = 2a$.

Ainsi, quand à la somme de deux nombres, on ajoute leur différence, on obtient 2 fois le grand nombre.

Retranchons $(a - b)$ de $(a + b)$, on a : $(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2\,b$.

Ainsi, quand de la somme de deux nombres on retranche leur différence, on obtient 2 fois le petit nombre.

Donc :

$$\text{Grand nombre} = \frac{\text{somme} + \text{différence}}{2}$$

$$\text{Petit nombre} = \frac{\text{somme} - \text{différence}}{2}$$

Application.

$$\text{Grand nombre} = \frac{2283 + 687}{2} = \frac{2970}{2} = 1485$$

$$\text{Petit nombre} = \frac{2283 - 687}{2} = \frac{1596}{2} = 798$$

Réponse : 798 et 1485.

MULTIPLICATION

11. — *Sachant que la somme des 9 premiers nombres est 45, trouver immédiatement, d'après celà, la somme des nombres contenus dans la table de Pythagore.*

Raisonnement. — D'après la construction de la table de Pythagore, la 2e ligne s'obtient en ajoutant chacun des 9 premiers nombres à lui-même, elle contient donc le produit par 2 des nombres de 1 à 9.

La 3e ligne contient le produit par 3 des nombres de 1 à 9.

.....

La 9e ligne contient le produit par 9 des nombres de 1 à 9.

La somme des nombres de la 1re ligne vaut 45; celle des nombres de la 2e ligne vaut 2 fois 45, celle des nombres de la 3e ligne, 3 fois 45..., celle des nombres de la 9e ligne vaudra 9 fois 45.

Soit S la somme des nombres contenus dans la table, on a :

$S = 45 + 45 \times 2 + 45 \times 3 + \dots + 45 \times 9$; mettant 45 en facteur, il vient :

$S = 45\,(1 + 2 + 3 + 4 \dots + 9) = 45 \times 45 = 2025$.

Réponse : 2025.

12. — *Que devient le produit de deux nombres quand on augmente d'une unité : 1° le multiplicande ; 2° le multiplicateur seulement ; 3° le multiplicande et le multiplicateur ? Justifier les réponses trouvées en prenant pour exemple 9 et 16.*

Raisonnement. — Soit le produit 9×16.

Si on augmente le multiplicande de 1, on a :

$$(9 + 1) \times 16 = 9 \times 16 + 16.$$

Le produit a été augmenté de 16, c'est-à-dire du multiplicateur.

Si on augmente le multiplicateur de 1, on a :

$$9\,(16 + 1) = 9 \times 16 + 9.$$

Le produit a été augmenté de 9, c'est-à-dire du multiplicande.

Si on augmente à la fois le multiplicande et le multiplicateur de 1, on a :

$$(9 + 1)\,(16 + 1) = 9 \times 16 + 16 + 9 + 1$$

Le produit a été augmenté du multiplicande, du multiplicateur et de 1.

13. — *Que devient un produit de deux facteurs quand on ajoute un même nombre à chacun d'eux? Quand on augmente un des facteurs d'une certaine quantité et qu'on diminue l'autre de la même quantité? Dans quel cas le produit augmente-t-il? Dans quel cas diminue-t-il?*

Raisonnement. — 1° On ajoute n aux deux facteurs a et b. On a alors :

$$(a + n)\,(b + n) = ab + (a + b)\,n + n^2$$

Le produit ab est donc augmenté de la somme: $(a + b)\,n + n^2$.

2° On retranche n (n est supposé plus petit que le plus petit des facteurs).

On a dans ce cas :

$(a - n)\,(b - n) = ab - (a + b)\,n + n^2 = ab - [n\,(a + b) - n^2]$

comme on a :

$$n < a + b$$

on a aussi :

$$n^2 < n\,(a + b)$$

le produit diminue donc de la différence

$$n\,(a + b) - n^2$$

3° — *On ajoute n unités à l'un des facteurs et on retranche n unités de l'autre. Supposons $a < b$ et examinons les deux cas : a augmenté de n et a diminué de n.*

Dans le premier cas on a :

$(a + n)\,(b - n) = ab - (a - b)\,n - n^2 = ab - [n\,(a - b) + n^2]$

Le produit ab diminue de la somme entre crochets.

Dans le deuxième cas on a :

$(a - b)\,(b + n) = ab + (a - b)\,n - n^2 = ab + n\,(a - b - n)$

Le produit augmente si on a $a - b - n > o$ ou $a - b > n$; le produit diminue si on a

$$a - b < n.$$

Si $a - b = n$ le produit ne change pas.

14. — *Le nombre des chiffres d'un produit de deux facteurs est égal au nombre total des chiffres contenus dans les deux facteurs ou à ce nombre diminué de un.*

Solution. — Considérons le produit 5827×543.

Le multiplicateur 543 est compris entre 100 et 1000 ; le produit est donc compris entre 100 fois 5827 et 1000 fois 5827, ce que l'on exprime par la double inégalité :

$$5827 \times 100 < 5827 \times 543 < 5827 \times 1000$$

ou encore :

$$582700 < 5827 \times 543 < 5827000$$

Le produit est compris entre deux nombres, dont l'un a 6 chiffres et l'autre 7 chiffres ; il aura donc au moins 6 chiffres et au plus 7 chiffres, c'est-à-dire autant qu'il y en a dans les deux facteurs ou ce nombre diminué de un.

15. — *Le carré d'un nombre terminé par 5 est terminé par 25.*

Raisonnement. — Soit le nombre 785 ; on peut écrire :

$$785 = 780 + 5$$

or :

$785^2 = (780 + 5)^2 = 780^2 + 2 \times 5 \times 780 + 5^2$

or :

$780^2 = (78 \times 10)^2 = 78^2 \times 100 = 78^2$ centaines

et :

$2 \times 5 \times 780 = 78 \times 100 = 78$ centaines

Donc le carré de 785 se compose d'un nombre de centaines égal à $78^2 + 78$, auquel il faut ajouter 5^2 ou 25 unités. Ce carré sera donc terminé par 25.

DIVISION

16. — *Parmi les nombres inférieurs à 200, quels sont ceux qui peuvent servir de dividende et de diviseur à une division, dont le quotient est 4 et le reste 35?*

Raisonnement. — Si on désigne par D le dividende, par d le diviseur, par q le quotient et par r le reste d'une division, on a la double relation :

$$D = d\,q + r$$

avec : $$r < d$$

On doit donc avoir :

$$D = d \times 4 + 35$$

avec : $$35 < d.$$

Le diviseur devant être supérieur à 35 a pour première valeur 36, puis d pourra prendre les valeurs 37, 38, 39, 40 et 41. Il ne pourra égaler 42, car alors le dividende serait supérieur à 200.

En effet, pour $d = 42$ on a :

$$D = 42 \times 4 + 35 = 168 + 35 = 203.$$

On aura donc pour première valeur du dividende :

$$36 \times 4 + 35 = 144 + 35 = 179$$

Les autres valeurs de D sont données par les expressions :

$$37 \times 4 + 35 = 148 + 35 = 183$$
$$38 \times 4 + 35 = 152 + 35 = 187$$
.....
$$41 \times 4 + 35 = 164 + 35 = 199$$

17. — *Que devient le quotient d'une division qui se fait exactement ; 17856 : 48, lorsque : 1° on multiplie le dividende par 12 et l'on divise, en même temps, le diviseur par 5 ; 2° on divise le dividende par 31 et l'on multiplie, en même temps, le diviseur par 6.*

Raisonnement. — Quand dans une division le reste est nul, on a l'égalité :

$$D = d \times q \qquad (1)$$

Multipliant par 12 les deux membres de cette égalité, il vient :

$$12\,D = 12 \times d \times q = d \times 12\,q$$

Ce qui exprime que si le dividende est multiplié par 12, le diviseur ne changeant pas, le quotient est rendu 12 fois plus grand.

Multipliant et divisant par 5 le deuxième membre de l'égalité (1), on a :

$$D = \frac{d}{5} \times 5\,q$$

ce qui exprime que quand on divise par 5 le diviseur d'une division, le dividende, ne changeant pas, le quotient est rendu 5 fois plus grand. Donc, si à la fois on multiplie le dividende par 12 et le diviseur par 5, le quotient sera rendu $12 \times 5 = 60$ fois plus grand.

Vérification aisée sur l'exemple donné.

$17856 : 48 = 372 \qquad 17856 \times 12 = 214272$
$48 : 5 = 9{,}6$

$$214272 : 9{,}6 = 22320$$

or :

$$22320 : 372 = 60$$

Raisonnement analogue pour le 2° exemple donné.

Réponse : 60.

18. — *On augmente le dividende d'une division de 145 et le diviseur de 2. Le quotient ne change pas et le reste augmente de 3. Trouver le quotient.*

Raisonnement. — La relation $D = d \times q + r$ (1) devient :

$$D + 145 = (d + 2)\,q + r + 3$$

ou en effectuant :

$$D + 145 = d\,q + 2\,q + r + 3 \qquad (2)$$

Retranchant (1) de (2) on obtient deux restes égaux, d'où :

$$145 = 2\,q + 3 \text{ et } 2\,q = 145 - 3$$

d'où :

$$q = 142 : 2 = 71$$

Réponse : 71.

19. — *Quels sont les nombres D qui, divisés par d, donnent un quotient égal au reste.*

Raisonnement. — Soit q le quotient, le reste est aussi q et les nombres D et de sont définis par les deux relations :

$$D = d\,q + q$$

avec : $$q < d$$

Or : $$D = d\,q + q = q\,(d + 1)$$

on aura donc, d'après cela, toutes les valeurs de D en donnant à q toutes les valeurs inférieures à d. Si par exemple $d = 10$, *q prendra les valeurs* 1, 2, 3..., 9, et D les valeurs 1×11, 2×11, 3×11..., 9×11.

20. — *Montrer qu'on peut mettre 528 sous la forme $528 = A \times 9^2 + B \times 9 + C$, A, B, et C étant des nombres inférieurs à 9 qu'on propose de calculer.*

Raisonnement. — L'égalité proposée peut s'écrire :

$$528 = (A \times 9 + B) \times 9 + C$$

C étant inférieur à 9, est le reste de la division par 9 du nombre 528, le quotient étant représenté par $A \times 9 + B$.

Or :

$$528 = 58 \times 9 + 6$$

donc :

$$C = 6$$

et :

$$A \times 9 + B = 58$$

L'égalité $58 = A \times 9 + B$ montre que B est le reste de la division par 9 du nombre 58 ; A est le quotient de cette division.

Or :

$$58 = 6 \times 9 + 4$$

donc :

$$B = 4$$

et :

$$A = 6$$

et nous avons :

$$528 = 6 \times 9^2 + 4 \times 9 + 6$$

21. — *Dans toute division, le dividende est supérieur au double du reste.*

Raisonnement. — On connaît la double relation de la division :

$$D = d\,q + r \qquad \text{avec} \qquad r < d$$

r étant plus petit que d est aussi plus petit que $d\,q$, car q est au moins égal à 1 ; par suite $2\,r$ est plus petit que $d\,q + r$ ou que son égal D.

PROBLÈMES SUR LES QUATRE OPÉRATIONS

30. — *Un père laisse à ses trois enfants un terrain d'une superficie de 54 hectares, partagé en deux parties égales : l'une des parties est en pré et vaut 1250 francs l'hectare, l'autre est en vigne et vaut 1800 francs l'hectare. Le premier enfant prend le pré et le second la vigne. Combien doivent-ils donner chacun au troisième pour que les trois enfants aient des parts égales ?*

Solution. — Chacune des deux parties du terrain a une superficie de :

$$54 : 2 = 27 \text{ hectares}$$

27 hectares de pré valent : $1250 \times 27 = 33750$ fr.
27 hectares de vigne valent : $1800 \times 27 = 48600$ fr.
La valeur totale de l'héritage est de $33750 + 48600 = 82350$ fr.
La part de chacun des 3 enfants devra donc être : 82350 fr. : 3 = 27450 fr.
Le premier enfant ayant reçu 33750 fr., devra remettre au troisième : 33750 — 27450 = 6300 fr.
Le deuxième enfant ayant reçu 48600 fr., devra remettre au troisième : 48600 — 27540 = 21150 fr.
La part du troisième sera ainsi égale à 6300 + 21150 = 27450 fr.

Réponses : 6300 francs et 21150 francs.

31. — *Pour s'acquitter d'une dette, une personne se décide à retirer, d'entre les mains de ses débiteurs, la*

somme nécessaire pour en payer le montant. En demandant à chacun 1520 francs, il lui manquerait 3110 francs, tandis qu'elle aurait 205 francs de trop si elle leur demandait 1715 francs. Trouver le nombre des débiteurs et le montant de la dette.

Solution. — En demandant 1715 francs au lieu de 1520 francs, la personne réclame 1715 — 1520 = 195 francs de plus à chacun des débiteurs.

La différence des sommes reçues dans les deux cas est de 3110 fr. + 205 fr. = 3315 francs.

Le nombre des débiteurs est par suite de 3315 : 195 = 17.

Les 17 débiteurs versant chacun 1520 francs fournissent 1520 × 17 = 25840 francs.

La dette s'élevait à 25840 + 3110 = 28950 francs.

Réponses : 17 débiteurs ; 28950 francs.

32. — *Un propriétaire achète des bœufs et des moutons et paye 17400 francs pour 160 têtes de bétail. Il y a trois fois plus de moutons que de bœufs et 20 moutons coûtent le même prix que trois bœufs. Quel est le prix d'un bœuf et celui d'un mouton ?*

Solution. — Sur 4 têtes de bétail il y a 3 moutons et 1 bœuf ; sur 160 têtes il y a donc 160 : 4 = 40 bœufs et 160 — 40 = 120 moutons.

Les 120 moutons ou 6 groupes de 20 moutons valent autant que 3 × 6 = 18 bœufs.

Le propriétaire a donc payé la même somme que s'il avait acheté 40 + 18 = 58 bœufs.

Le prix de chaque bœuf est : 17400 : 58 = 300 francs.

3 bœufs ou 20 moutons valent : 300 × 3 = 900 francs.

Le prix d'un mouton est donc : 900 : 20 = 45 francs.

Réponses : 300 francs ; 45 francs.

DIVISIBILITÉ

33. — *Etant donné deux nombres quelconques, l'un d'eux, ou leur somme, ou leur différence, est divisible par 3. — Démontrer.*

Raisonnement. — Si l'un des nombres est divisible par 3, le théorème est démontré. — Si les deux nombres sont divisibles par 3, leur somme et leur différence le sont aussi.

Si les deux nombres ne sont pas divisibles par 3, deux cas peuvent se présenter :

1° ou les deux nombres donnent des restes égaux. On a alors :

$$a = 3\,m + r \quad \text{et} \quad b = 3\,m' + r$$

d'où :

$$a - b = 3\,m + r - 3\,m' - r = 3\,(m - m')$$

c'est-à-dire que $a - b$ est divisible par 3.

2° ou les deux nombres donnent des restes inégaux ; l'un de ces restes est nécessairement 1 et l'autre 2. On a par exemple :

$$a = 3\,m + 1 \text{ et } b = 3\,m' + 2$$

d'où :

$$a + b = 3\,m + 1 + 3\,m' + 2 = 3\,(m + m') + 3$$

et par conséquent $a + b$ est divisible par 3.

34. — *Un nombre est divisible par 6 lorsque le chiffre des unités, ajouté à 4 fois la somme de tous les autres, donne une somme divisible par 6.*

Raisonnement. — Soit le nombre 8623.

On a :

$$8623 = 8000 + 600 + 20 + 3$$

Or :

$$10 = 6 + 4 = \text{mult. } 6 + 4$$
$$100 = 96 + 4 = \text{mult. } 6 + 4$$
$$1000 = 996 + 4 = \text{mult. } 6 + 4$$

D'où il résulte que :

$$20 = 2 \times 10 = 2\,(\text{mult. } 6 + 4) = \text{mult. } 6 + 2 \times 4$$
$$600 = 6 \times 100 = 6\,(\text{mult. } 6 + 4) = \text{mult. } 6 + 6 \times 4$$
$$8000 = 8 \times 1000 = 8\,(\text{mult. } 6 + 4) = \text{mult. } 6 + 8 \times 4$$

et par suite il vient :

$$8620 = \text{mult. de } 6 + (2 + 6 + 8) \times 4$$

et :

$$8623 = \text{mult. de } 6 + [(2 + 6 + 8) \times 4 + 3]$$

35. — *Quels peuvent être les restes de la division par 5 d'un nombre ? Démontrer que le carré d'un nombre non divisible par 5 est toujours un multiple de 5 plus 1 ou un multiple de 5 moins 1.*

Raisonnement. — Les restes de division par 5 d'un nombre peuvent être 1, 2, 3 ou 4.

Soit un nombre n non divisible par 5, il est de l'une des formes :

$$5\,k + 1\,; \quad 5\,k + 2\,; \quad 5\,k + 3 \text{ ou } 5\,k - 2\,;$$
$$5\,k + 4 \text{ ou } 5\,k - 1.$$

Si le reste de la division par 5 est 1 ou 4 on a : $n = 5\,k \pm 1$ et $n^2 = (5\,k \pm 1)^2 = 25\,k^2 \pm 10\,k + 1$ = mult. 5 + 1.

Si le reste de la division par 5 est 2 ou 3, on a : $n = 5\,k \pm 2$ et $n^2 = (5\,k \pm 2)^2 = 25\,k^2 \pm 20\,k + 4$ = mult. 5 + 4 = mult. 5 — 1.

36. — *Démontrer que le produit $n\,(n^2 + 2)$ est divisible par 3, quel que soit n.*

Raisonnement. — On a :

$$\begin{aligned} n\,(n^2 + 2) &= n^3 + 2\,n \\ &= n^3 + 3\,n - n \\ &= 3\,n + n\,(n^2 - 1) \\ &= 3\,n + n\,(n - 1)\,(n + 1) \end{aligned}$$

Or $3\,n$ est un mult. de 3. Des trois nombres consécutifs $(n - 1)$, n et $(n + 1)$ l'un d'eux étant divisible par 3, leur produit $n\,(n - 1)\,(n + 1)$ est divisible par 3. La somme $3\,n + n\,(n - 1)\,(n + 1)$ est donc aussi divisible par 3.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

37. — *Calculer le p. g. c. d. des trois nombres 629, 444 et 629 × 444 sans effectuer le produit indiqué ni la décomposition en facteurs premiers.*

Raisonnement. — Le p. g. c. d. de 629 et de 629 × 444 est 629.

Le p. g. c. d. de 444 et de 629 × 444 est 444.

Le p. g. c. d. des trois nombres est donc le même que celui de 629 et 444. En employant la méthode des divisions successives ou trouve 37 comme p. g. c. d. de 629 et de 444 ; 37 est donc le p. g. c. d. des trois nombres donnés.

38. — *Démontrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est toujours divisible par 48.*

Raisonnement. — On sait que

$$48 = 2^4 \times 3$$

Il faut donc montrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs contient le facteur 2 avec un exposant au moins égal à 4 et le facteur 3.

1° Deux nombres pairs consécutifs contiennent l'un au moins le facteur 2^2 et l'autre le facteur 2. Leur produit étant multiplié par un autre nombre pair, on obtient un nombre qui contient au moins le facteur 2^4.

2° Si le plus petit des trois nombres est divisible par 3, leur produit contient le facteur 3.

Si, divisé par 3, il donne pour reste 1, il est de la forme $3\,k + 1$, et le nombre pair suivant égale $3\,k + 1 + 2 = 3\,k + 3$; il contient le facteur 3.

Si, divisé par 3, le plus petit des trois nombres donne pour reste 2, il est de la forme $3\,k + 2$, et le plus grand est égal à $3\,k + 2 + 4 = 3\,k + 6$, il contient le facteur 3.

Donc le produit est toujours divisible par 48.

39. — *Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, démontrer qu'il en est de même de $a\,b$ et $a + b$, de $a\,b$ et $a - b$.*

Raisonnement. — Si $a\,b$ et $a + b$ admettaient un diviseur premier commun autre que l'unité, ce diviseur premier divisant $a\,b$ diviserait a ou b, a par exemple, par suite la différence

$$(a + b) - a \text{ ou } b$$

a et b ne seraient donc pas premiers entre eux ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le raisonnement est analogue pour $a\,b$ et $a - b$.

40. — *Démontrer que le produit*

$$(n^2 - 1)\ n^2\ (n^2 + 1)$$

est divisible par 60.

Raisonnement. — Il faut démontrer que ce produit est divisible séparément par 2^2, 3 et 5, dont le produit égale 60.

1° Divisibilité par 2^2. — Le produit peut s'écrire $(n^2 - 1)\ n^2$.

Si n est pair, n^2 est divisible par 4.

Si n est impair, n^2 est de la forme mult. $4 + 1$ et $n^2 - 1$ de la forme mult. 4. Il y a donc toujours un facteur divisible par 4 ou 2^2.

2° Divisibilité par 3. — Le produit s'écrit encore $(n - 1)\ (n + 1)\ (n^2 + 1)\ n^2$; l'un des trois nombres consécutifs $n - 1$, n, $n + 1$ est divisible par 3 ; le produit est donc lui-même divisible par 3.

3° Divisibilité par 5. — C'est évident si n est mult. de 5. Si n n'est pas mult. de 5, on sait que n^2 = mult. 5 ± 1 (probl. 35), donc

n^4 = mult. $5 + 1$ et $n^4 - 1$ est divisible par 5.

NOMBRES PREMIERS

41. — *Tout nombre premier autre que 2 et 3 est un multiple de 6 augmenté ou diminué de 1. — La réciproque est-elle vraie ?*

Raisonnement. — Soit un nombre premier n autre que 2 et 3.

n étant premier, n'est pas divisible par 6. Le reste de la division de n par 6 est donc 1, 2, 3, 4 ou 5.

On ne peut avoir :

$$n = 6 \times k + 2$$

ou :

$$n = 6 \times k + 4$$

car le 2e membre de ces égalités étant divisible par 2, n serait divisible par 2, ce qui est impossible.

On ne peut avoir :

$$n = 6 \times k + 3$$

car le 2e membre de cette égalité serait divisible par 3, ce qui est impossible.

On peut avoir :

$$n = 6\,k + 5 \text{ ou } n = 6\,k - 1$$

et $n = 6\,k + 1$.

La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'un multiple de 6 augmenté ou diminué de 1 n'est pas un nombre premier.

Ainsi : 25 = mult. $6 + 1$, n'est pas premier.
35 = mult. $6 - 1$, n'est pas premier.

42. — *Expliquer comment on reconnaît si le nombre* 617 *est premier ; et dire pourquoi l'on peut affirmer après un nombre convenable d'essais de division, que le nombre* 617 *est premier.*

Raisonnement. — Si 617 n'est pas premier, il admet un diviseur premier autre que l'unité. Divisons donc successivement par les nombres premiers 2, 3, 5...

Si l'une des divisions se fait exactement, le nombre 617 n'est pas premier.

Si aucune des divisions ne se fait exactement et qu'un quotient soit inférieur ou égal au diviseur, 617 est premier.

Ainsi 617 n'est divisible par aucun des nombres premiers, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 et le quotient de la division de 617 par 29 est 21. Le nombre 617 est premier, car s'il ne l'était pas, il serait divisible par un nombre premier supérieur à 29 et l'on aurait, a étant ce diviseur premier et b le quotient :

$$617 = a \times b$$

b serait inférieur ou égal au dernier quotient trouvé 21 ; donc 617 serait divisible par un nombre b inférieur à 29 et par suite admettrait un diviseur premier inférieur à 29, ce qui n'est pas. Donc 617 est premier.

43. — *On veut planter le long des bords d'une plate-bande rectangulaire un certain nombre de rosiers, également espacés, de manière que la distance d'un rosier au suivant soit au moins de un mètre et moins de deux mètres, et qu'il y ait un rosier à chaque coin de la plate-bande. La longueur de celle-ci est de* 14 m 84, *et sa largeur de* 10 m 60. *Combien faut-il avoir de rosiers ?*

(Brevet supérieur.)

La distance séparant deux rosiers étant la même sur la longueur et sur la largeur, cette distance exprimée en centimètres sera un nombre diviseur de 1484 cm. et 1060. La plus grande distance qui puisse séparer deux rosiers sera donnée par le p. g. c. d. de 1484 et 1060.

Or : $1484 = 2 \times 2 \times 7 \times 53 = 2^2 \times 7 \times 53$
$1060 = 2 \times 2 \times 5 \times 53 = 2^2 \times 5 \times 53$

d'où :

$$\text{P. G. C. D.} = 2^2 \times 53 = 4 \times 53 = 212$$

L'espace séparant deux rosiers étant compris entre 1 m et 2 m, ne peut être que $\frac{212}{2} = 106$ cm. ou 1 m 06.

Le périmètre de la plate-bande rectangulaire est de :

$$(14^{\text{m}}\,84 + 10^{\text{m}}\,60)\ 2 = 25^{\text{m}}\,44 \times 2 = 50^{\text{m}}\,88$$

Le nombre des rosiers à planter est de :

$$50^{\text{m}}\,88 : 1^{\text{m}}\,06 = 48.$$

Réponse : Il faut avoir 48 rosiers.

44. — *Un père de famille donne à ses deux enfants une somme qu'ils doivent se partager en parties égales. La part du premier enfant, qui habite la France, peut être exactement payée en pièces de* 20 *francs. Le deuxième enfant qui habite l'Angleterre, reçoit un nombre exact de livres sterling, valant* 25 *fr.* 20.

La somme donnée par le père étant comprise entre 12000 *et* 13000 *francs, quelle est cette somme ?*

(Brevet supérieur.)

Solution. — L'héritage de chaque enfant doit être un multiple de 20 fr. et de 25 fr. 20.

Il sera ou le plus petit multiple commun de 20 fr. ou 200 décimes et de 25 fr. 20 ou 252 décimes ou un multiple de ce plus petit commun multiple.

Or :

$$200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 5^2$$
$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

$$\text{P. p. c. m.} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 200 \times 63 = 12600$$

12600 décimes font 1260 francs.

La suite naturelle des multiples de 2520 est

$$2520 \times 2,\quad 2520 \times 3,\ 2520 \times 4,\quad 2520 \times 5,$$
$$\ldots\ldots 2520 \times n.$$

Le multiple $2520 \times 5 = 12600$ fr., compris entre 12000 fr. et 13000 fr. répond à la question.

La somme donnée par le père à ses enfants est de 12600 fr.

Réponse : 12600 fr.

45. — *Un bataillon, dont on ignore le nombre d'hommes, mais qu'on sait ne pas dépasser* mille, *fait l'exercice sur un champ de manœuvres.*

En le voyant se mettre en colonne :

1° *Par files de* 8 *hommes ;*
2° *par files de* 15 *hommes ;*
3° *par files de* 25 *hommes ;*

un spectateur qui a remarqué que dans les trois cas les files n'étaient pas complètes, et que la dernière file, dans les trois cas ne comprenait que 5 *hommes, déclare qu'il sait le nombre d'hommes, et affirme que s'ils se mettaient en colonne par files de* 11 *hommes, toutes les files seraient complètes.*

Trouver le nombre des hommes et montrer qu'il satisfait à toutes les conditions énoncées.

Solution. — Le bataillon comprend un nombre d'hommes qui est à la fois un multiple de 8 plus 5, un multiple de 15 plus 5 et un multiple de 25 plus 5.

Le plus petit commun multiple de 8, 15 et 25 augmenté de 5, ou un multiple de ce p. p. c. m. augmenté de 5, fournira le nombre d'hommes du bataillon.

Or :

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$
$$15 = 3 \times 5$$
$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

Le p. p. c. m. de ces trois nombres est $2^2 \times 3 \times 5^2 = 8 \times 3 \times 25 = 600$.

Si l'on ajoute 5 à 600, on obtient 605, nombre qui, divisé par 8,15 ou 25, donnera pour reste 5.

De plus, le caractère de divisibilité par 11 nous apprend que 605 est un multiple de 11.

Donc, le bataillon comprenait 605 hommes.

Réponse : 605 hommes.

Fractions.

46. — *On donne la fraction* $\frac{7}{18}$; *quelles modifications subit-elle* : 1° *lorsqu'on ajoute* 35 *au numérateur* ; 2° *lorsqu'on retranche* 12 *au dénominateur* ; 3° *lorsque, simultanément, on ajoute* 21 *au numérateur et qu'on retranche* 9 *au dénominateur.*

Solution. — 1° Comme 35 est égal à 5 fois 7, si on ajoute 35 à 7, la somme égale 6 fois 7, le numérateur de la fraction étant multiplié par 6, la fraction est aussi multipliée par 6.

2° Le dénominateur 18 est égal à 3 fois 6, si on retranche 12 ou 2 fois 6, il reste une fois 6, le dénominateur est donc divisé par 3, donc la fraction est multipliée par 3.

3° En ajoutant 21 ou 3 fois 21 au numérateur, celui-ci sera multiplié par 4 et la fraction $\frac{7+21}{18}$ ou $\frac{28}{18}$ est égale à 4 fois $\frac{7}{18}$

D'autre part, en retranchant 9 du dénominateur de $\frac{28}{18}$ on divise son dénominateur par 2, la fraction est multipliée par 2 ; $\frac{28}{9}$ est le double de $\frac{28}{18}$; donc $\frac{28}{9}$ vaut 8 fois $\frac{7}{18}$

Réponses : 1° La fraction est rendue 6 fois plus grande ; 2° la fraction est rendue 3 fois plus grande ; 3° la fraction est rendue 8 fois plus grande.

47. — *La somme des deux termes d'une fraction est* 154 ; *lorsqu'on multiplie le numérateur par* 3 *et le dénominateur par* 2, *la différence des résultats est* 42.

1° *Déterminer la fraction* ; 2° *la réduire à sa plus simple expression* ; 3° *chercher la fraction équivalente, dont les termes dépassent* 1000 *de nombres aussi petits que possible.*

Solution. — 1° On sait que :

1 fois le numérateur plus 1 fois le dénominateur = 154.

3 fois le numérateur moins 2 fois le dénominateur = 42.

Doublons la première ligne et ajoutons la deuxième, il vient :

5 fois le numérateur valent $154 \times 2 + 42 = 350$

Donc :

Numérateur $= 350 : 5 = 70$
Dénominateur $= 154 - 70 = 84$

La fraction cherchée est $\frac{70}{84}$.

2° Le p. g. c. d. de 70 et de 84 est 14. La fraction irréductible, équivalente à $\frac{70}{84}$ est $\frac{70 : 14}{84 : 14} = \frac{5}{6}$

3° Toute fraction équivalente à $\frac{5}{6}$ a pour termes des équimultiples de 5 et 6. Le numérateur devant être supérieur à $1000 = 5 \times 200$, est au moins $5 \times 201 = 1005$; le dénominateur est alors $6 \times 201 = 1206$.

La fraction demandée est $\frac{1005}{1206}$.

Réponses : 1° $\frac{70}{84}$; 2° $\frac{5}{6}$; 3° $\frac{1005}{1206}$.

48. — *Peut-on comparer entre elles deux fractions non réduites au même dénominateur ? Ranger par ordre de grandeur, sans les réduire au même dénominateur, les fractions suivantes* : $\frac{168}{240}$, $\frac{1625}{7075}$, $\frac{627}{981}$. *Donner la suite des opérations et le raisonnement qui vous conduisent à trouver leurs valeurs relatives.*

Solution. — Pour comparer deux fractions, on peut :

1° les réduire au même dénominateur et comparer les numérateurs

2° les réduire au même numérateur et comparer les dénominateurs ;

3° les comparer à un troisième nombre convenablement choisi, à l'unité par exemple, quand la différence entre le numérateur et le dénominateur est la même ;

4° les convertir en décimales.

Mais, quel que soit le procédé employé, il y a avantage à raisonner sur des fractions irréductibles.

Or : $\frac{168}{240} = \frac{7}{10}$; $\frac{1625}{7075} = \frac{65}{283}$; $\frac{627}{981} = \frac{209}{327}$

On voit immédiatement que $\frac{65}{283}$ est plus petite que $\frac{1}{2}$ ou $\frac{65}{130}$ tandis que les deux autres sont plus grandes que $\frac{1}{2}$; $\frac{168}{240} > \frac{120}{240}$ et $\frac{209}{327} > \frac{209}{418}$ donc $\frac{65}{283}$ est la plus petite des trois fractions.

On voit encore que $\frac{209}{327}$ est plus petite que $\frac{7}{10}$ car $\frac{209}{327}$ est inférieur à $\frac{2}{3}$ ou $\frac{218}{327}$ tandis que $\frac{7}{10}$ est supérieur à $\frac{2}{3}$ ou 0,666.

Converties en décimales, les trois fractions deviennent respectivement 0,7... ; 0,2... ; 0,6.

Comme

$$0{,}2 < 0{,}6 < 0{,}7, \text{ on a } \frac{1625}{7075} < \frac{627}{981} < \frac{168}{240}.$$

49. — *Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction* $\frac{3}{5}$ *pour que la différence entre la nouvelle fraction et l'unité soit* $\frac{1}{1000}$.

Solution. — Quand on ajoute aux deux termes d'une fraction un nombre de plus en plus grand, cette fraction s'approche indéfiniment de l'unité, sans jamais l'atteindre, et l'on peut donner à ce nombre une valeur assez grande pour que la fraction diffère de l'unité d'une quantité aussi voisine de zéro qu'on le veut.

Soit la fraction $\frac{3}{5}$. Considérons les fractions :

$$\frac{3+1}{5+1}, \frac{3+2}{5+2}, \frac{3+3}{5+3}, \ldots \frac{3+n}{5+n} \ldots\ldots$$

Elles sont toutes inférieures à l'unité, chacune d'elles est plus grande que les précédentes, ces résultats vont donc en croissant, sans jamais atteindre l'unité.

Choisissons n de manière que $\frac{3+n}{5+n}$ diffère de l'unité de $\frac{1}{1000}$.

L'excès de l'unité sur $\frac{3+n}{5+n}$ est $\frac{2}{5+n}$.

Or, on veut :

$$\frac{2}{5+n} = \frac{1}{1000} \text{ ou } \frac{2}{5+n} = \frac{2}{2000}.$$

Il suffit donc de prendre pour cela :

$$5 + n = 2000 \text{ ou } n = 2000 - 5 = 1995.$$

Vérification. — $\frac{3 + 1995}{5 + 1995} = \frac{1998}{2000}$.

Or $1 - \frac{1998}{2000} = \frac{2000 - 1998}{2000} = \frac{2}{2000} = \frac{1}{1000}$.

Réponse : 1995.

50. — *Trouvez deux fractions ayant pour numérateur l'unité, pour dénominateur deux nombres entiers consécutifs, et qui comprennent entre elles la fraction* $\frac{7}{41}$. *Expliquez votre manière de procéder et appliquez-là à cette autre fraction* $\frac{7}{603}$.

Soit $\frac{1}{x}$ la plus grande fraction ayant pour numérateur l'unité et qui soit inférieure à la fraction donnée $\frac{7}{41}$ plus petite que 1.

La fraction immédiatement supérieure à $\frac{1}{x}$ et ayant 1 pour numérateur est $\frac{1}{x-1}$.

On doit donc avoir :

$$\frac{1}{x} < \frac{7}{41} < \frac{1}{x-1}$$

d'où l'on déduit :

$$x > \frac{41}{7} \text{ et } x > \frac{41}{7} + 1$$

ou encore :

$$\frac{41}{7} < x < \frac{41}{7} + 1$$

ou :

$$5 + \frac{6}{7} < x < 5 + 1 + \frac{6}{7}$$

La double inégalité sera satisfaite en prenant $x = 6$; la fraction cherchée est $\frac{1}{6}$. D'où la règle.

On cherche le quotient à une unité près, par défaut, de la division du dénominateur de la fraction donnée par son numérateur, ce quotient augmenté d'une unité est le dénominateur de la fraction cherchée.

On a par suite :

$$\frac{1}{6} < \frac{7}{41} < \frac{1}{5}$$

Remarque. — Utilisant la notion indiquée (n° 239) on pouvait écrire :

$$\frac{7}{41} = \frac{1}{\frac{41}{7}} = \frac{1}{5 + \frac{6}{7}}$$

Or, $5 + \frac{6}{7}$ est compris entre les entiers 5 et 6 donc :

$$6 > 5 + \frac{6}{7} > 5$$

Formons les inverses :

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{5 + \frac{6}{7}}, \frac{1}{5} \text{ on a}$$

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5 + \frac{6}{7}} < \frac{1}{5}$$

ou :

$$\frac{1}{6} < \frac{7}{41} < \frac{1}{5}$$

Appliquons la règle précédente à la fraction $\frac{7}{603}$, on a :

$$\frac{7}{603} = \frac{1}{\frac{603}{7}} = \frac{1}{86 + \frac{1}{7}}$$

comme $87 > 86\frac{1}{7} > 86$ on a : $\frac{1}{87} < \frac{7}{602} < \frac{1}{86}$

51. — *Trouver un nombre entier qui, divisé par* $\frac{6}{13}$ *donne un quotient qui lui soit supérieur de 210.*

Diviser un nombre par $\frac{6}{13}$ c'est le multiplier par $\frac{13}{6}$; c'est donc l'augmenter de ses $\frac{13}{6} - \frac{6}{6} = \frac{7}{6}$ et ce sont ces $\frac{7}{6}$ du nombre qui valent 210. Le nombre cherché est donc $\frac{210 \times 6}{7} = 180$.

Réponse. — 180.

52. — *Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible soit le carré d'une autre fraction.*

Solution. — Pour qu'une fraction irréductible soit le carré d'une autre fraction, il faut et il suffit que ses deux termes soient les carrés des deux termes de l'autre fraction.

1° La condition est nécessaire, c'est-à-dire que si la fraction $\frac{a}{b}$ est le carré de la fraction irréductible $\frac{m}{n}$, on a $a = m^2$ et $b = n^2$

En effet $\frac{a}{b} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ et puisqu'on élève une fraction au carré en élevant ses deux termes au carré, on a $\frac{a}{b} = \frac{m^2}{n^2}$.

La fraction $\frac{m}{n}$ étant irréductible, ses deux termes m et n sont premiers entre eux : donc m^2 et n^2 le sont aussi et $\frac{m^2}{n^2}$ est irréductible.

Les fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ et $\frac{m^2}{n^2}$ étant égales leurs termes sont respectivement égaux.

Donc : $a = m^2$ et $b = n^2$

2° La condition est suffisante, c'est-à-dire que si $a = m^2$ et $b = n^2$, on a $\frac{a}{b} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

En effet, on a par hypothèse :

$$\frac{a}{b} = \frac{m^2}{n^2} \text{ Or } \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

donc :

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

53. — *Démontrer que le quotient de deux nombres est plus petit ou plus grand que le dividende suivant que le diviseur est plus grand ou plus petit que l'unité.*

Le quotient de deux nombres est égal au produit du dividende par l'inverse du diviseur.

Ainsi : $17 : 4 = 17 \times \frac{1}{4}$

$$11 : \frac{3}{5} = 11 \times \frac{5}{3}$$

Si le diviseur est plus grand que l'unité, son inverse est plus petit que l'unité, et par suite le produit du dividende par cet inverse est inférieur au dividende.

Si le diviseur est plus petit que l'unité, son inverse est plus grand que l'unité, et par suite le produit du dividende par cet inverse est supérieur au dividende.

54. — *Expliquer pourquoi dans la division de* $\frac{24}{35}$ *par* $\frac{6}{7}$, *on peut, pour obtenir le résultat, diviser le numérateur de la fraction dividende par celui de la fraction diviseur, et le dénominateur de la fraction dividende par celui de la fraction diviseur.*

Diviser $\frac{24}{35}$ par $\frac{6}{7}$, c'est chercher un nombre qui, multiplié par $\frac{6}{7}$, reproduise $\frac{24}{35}$.

Donc, les $\frac{6}{7}$ du quotient égalent $\frac{24}{35}$.

$\frac{1}{7}$ du quotient vaudra 6 fois moins ou $\frac{24 : 6}{35}$ et les $\frac{7}{7}$ vaudront 7 fois plus ou $\frac{24}{35} : \frac{6}{7} = \frac{4}{5}$.

Cette règle, on le voit, n'est applicable que lorsque les deux termes de la fraction dividende sont des multiples des termes correspondants de la fraction diviseur.

55. — *Les deux aiguilles d'une montre se rencontrent à midi précis. On demande à quelle heure exacte elles se rencontreront de nouveau.*

La grande aiguille fait un tour du cadran pendant que la petite aiguille ne parcourt que 5 des 60 divisions.

A une heure de l'après-midi, la petite aiguille est en avance de 5 divisions sur la grande, puisque celle-ci est sur midi.

Or, en une minute, la grande aiguille avance d'une division ; la petite aiguille n'avance pendant ce temps que des $\frac{5}{60}$ d'une division ou de $\frac{1}{12}$; la grande aiguille se rapproche donc de la petite de $\frac{11}{12}$ de division pendant une minute ; comme elle doit se rapprocher de 5 divisions, le nombre de minutes employées sera :

$$5 : \frac{11}{12} = \frac{5 \times 12}{11} = 5^m, \frac{5}{11}.$$

Il sera donc exactement 1 h. $5^m, \frac{5}{11}$ quand les deux aiguilles se rencontreront pour la première fois.

Réponse : 1 h. $5^m \frac{5}{11}$.

56. — *Une ânesse portait du vin côte à côte avec un mulet, et écrasée sous le poids, elle se plaignait fortement. Alors le mulet mit fin à ses plaintes, en lui disant : « Qu'as-tu à te plaindre comme une petite fille, la mère? Si je prenais une de tes mesures, ma charge serait double de la tienne, et si tu en prenais une des miennes, j'en aurais encore autant que toi. « Dis-moi, savant mathématicien, combien de mesures ils portent chacun?* (Anthologie grecque.)

Solution. — Quand le mulet prend une mesure à l'ânesse, sa charge devenant double de celle de l'ânesse, la charge de cette dernière est le tiers de la charge totale du mulet et de l'ânesse, celle du mulet en est les $\frac{2}{3}$.

Quand l'ânesse prend une mesure au mulet, celui-ci en a deux de moins que précédemment ; la charge de chacun est la moitié de la charge totale.

Donc les $\frac{2}{3}$ du nombre total des mesures que portent les deux animaux surpassent de 2 unités la $\frac{1}{2}$ de ce nombre.

Or : $$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

par conséquent le $\frac{1}{6}$ du nombre cherché est 2.

Le mulet et l'ânesse transportent donc ensemble $2 \times 6 = 12$ mesures. Quand l'ânesse prend une mesure au mulet, ils en ont chacun 6, donc le mulet a 7 mesures à transporter et l'ânesse 5.

Réponse : 7 et 5.

57. — *Un père, en mourant, laisse à un certain nombre d'enfants une somme qu'ils doivent se partager ainsi : le premier doit recevoir 100 fr. et le dixième du reste ; le deuxième 200 fr. et le dixième du reste, et ainsi de suite, en ajoutant toujours 100 francs. A la fin, il arrive que les enfants ont une égale part. Quelle est la somme et quel est le nombre des enfants?*

Solution. — Le dernier enfant prendra autant de fois 100 fr. qu'il y a d'unités dans son numéro d'ordre ; mais il n'aura pas de dixième du reste, sans quoi les $\frac{9}{10}$ restants ne seraient pas attribués aux héritiers.

L'avant-dernier a 100 fr. de moins que le dernier, mais il a en plus le dixième du reste ; comme les parts sont égales, $\frac{1}{10}$ du reste valait 100 fr., le reste était 1.000 fr., sur lesquels le dernier a eu $\frac{9}{10}$ ou 900 fr.

Le nombre des enfants est de $900 : 100 = 9$.

La somme à partager est de $900 \times 9 = 8100$ fr.

Vérification : Part du premier $= 100$ fr. $+ \frac{8000}{10}$ $= 100$ fr. $+ 800 = 900$ fr. — Il reste 7.200 fr.

Part du deuxième $= 200 + \frac{7000}{10} = 200 + 700$ $= 900$ fr. — Il reste 6.300 fr., etc.

Réponses : 8100 fr. et 9.

58. — *Une route, reliant deux localités A et B, présente des parties horizontales, des montées et des descentes. La distance A B est de 128 km, et, quand on marche dans le sens AB, la longueur des descentes est les* $\frac{7}{10}$ *de la longueur des montées. Un bicycliste qui a une vitesse de 30 km en descente, de 15 km en montée et de 25 km à l'heure en palier, va d'abord de A en B et revient ensuite de B en A Sachant que le temps qu'il a mis pour aller de A en B surpasse de 24 minutes le temps qu'il a mis pour revenir de B en A, on demande :*

1° Les longueurs exprimées en kilomètres, des montées et des descentes qu'il a parcourues en allant de A en B et les longueurs des parties horizontales de la route ;

2° Le temps employé pour aller de A en B et le temps employé pour revenir de B en A.

Solution. — 1° En descente, le bicycliste parcourt 30 km. à l'heure ou 1 km. en 2 minutes, en montée, il fait 15 km. à l'heure ou 1 km. en 4 minutes.

Puisqu'il met plus de temps à l'aller qu'au retour, les montées dans le sens A B sont plus longues que les descentes.

En parcourant l'excès des montées sur les descentes, il perd 24 minutes, or, il perd $4^m - 2^m = 2^m$ par km.

Les montées surpassent donc les descentes dans le sens A B de 1 km. $\times \frac{24}{2} = 12$ km. et comme la longueur des descentes est les $\frac{7}{10}$ de la longueur des montées, ces 12 km. représentent les $\frac{3}{10}$ des montées.

Par conséquent, il y a :

$$12^{\text{km}} \times \frac{10}{3} = 40^{\text{km}} \text{ de montées,}$$

$$40^{\text{km}} \times \frac{7}{10} = 28^{\text{km}} \text{ de descentes.}$$

et $128^{\text{km}} - (40^{\text{km}} + 28^{\text{km}}) = 60^{\text{km}}$ de parties horizontales.

2° Dans le sens A B, le cycliste met :

$4^{\text{m}} \times 40 = 160$ minutes pour les montées ;
$2^{\text{m}} \times 28 = 56$ minutes pour les descentes ;

$60^{\text{m}} \times \frac{60}{25} = 144$ minutes pour les parties horizontales, soit en tout :

$160 + 56 + 144 = 360$ minutes ou 6 heures.

Dans le sens B A, il met :

$$6 \text{ h.} - 24^{\text{m}} = 5 \text{ h. } 36^{\text{m}},$$

Réponses : 40 km. ; 28 km. ; 60 km.
5 h.; 5 h. 36 m.

59. — *Un ouvrage est entrepris par 3 ouvriers. Le premier et le second le feraient ensemble en 13 jours* $\frac{1}{3}$; *le second et le troisième en 10 jours* $\frac{10}{11}$; *le premier et le troisième en 12 jours.*

Si l'ouvrage est commencé simultanément par les 3 ouvriers et que le second l'abandonne avant qu'il soit achevé, il faut que les deux autres travaillent 3 jours $\frac{2}{3}$ *de plus qu'il n'eût fallu sans la défection de leur camarade. Après combien de jours le second ouvrier a-t-il quitté l'ouvrage?*

Solution. — Le premier et le deuxième ouvrier pouvant achever le travail en 13 jours $\frac{1}{3}$ ou $\frac{40}{3}$ de jour, font par jour $\frac{3}{40}$ du travail.

Le deuxième et le troisième pouvant achever le travail en 10 jours $\frac{10}{11}$ ou $\frac{120}{11}$ font par jour $\frac{11}{120}$ du travail.

De même le premier et le troisième font par jour $\frac{1}{12}$ du travail.

Donc, 2 équipes identiques feraient ensemble $\frac{3}{40} + \frac{11}{120} + \frac{1}{12} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ du travail par jour.

Les 3 ouvriers font ensemble $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$ du travail, et par suite devraient mettre 8 jours pour faire le travail entier.

Le premier et le troisième travaillent

$$8 \text{ j} + 3 \text{ j } \frac{2}{3} = 11 \text{ j } \frac{2}{3}$$

et font $\frac{3}{40} \times 11 \text{ j } \frac{2}{3} = \frac{105}{120} = \frac{21}{24}$ du travail.

Donc le second a fait $\frac{24}{24} - \frac{21}{24} = \frac{3}{24}$ du travail.

L'équipe entière faisait $\frac{1}{8}$ du travail par jour, et le premier et le troisième en faisant ensemble $\frac{1}{12}$, le deuxième en fait $\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$.

Pour en faire $\frac{3}{24}$, il a donc travaillé 3 jours.

Réponse : 3 jours.

RAPPORTS ET PROPORTIONS

60. — *Deux arcs d'une même circonférence valent respectivement 17° 21′ 45″ et 11° 27′ 3″. Quel est le rapport du premier arc au second?*

Solution. — Exprimons les deux arcs de même rayon en secondes, on a :

$$17^\circ\ 21'\ 45'' = (60 \times 17 + 21)\ 60 + 45'' = 62505''$$
$$11^\circ\ 27'\ 3'' = (60 \times 11 + 27)\ 60 + 3'' = 41223''$$

Le rapport cherché est :

$$\frac{62505}{41223} = \frac{20835}{13741}$$

Réponse. — $\frac{20835}{13741}$.

61. — *La moyenne géométrique de deux nombres est moindre que leur moyenne arithmétique. Quand lui est-elle égale?*

Solution. — Soient a et b deux nombres ; leur moyenne géométrique est $\sqrt{ab}$, leur moyenne arithmétique est $\frac{(a+b)}{2}$.

Il faut donc prouver que l'on a :

$$\sqrt{ab} < \frac{(a+b)}{2}$$

Elevons au carré les deux membres de cette inégalité, on obtient la nouvelle inégalité :

$$ab < \frac{(a+b)^2}{4} \text{ ou } 4\,ab < (a+b)^2$$

$$\text{ou } 0 < (a+b)^2 - 4\,ab \text{ ou } 0 < a^2 - 2\,ab + b^2$$
$$\text{ou } 0 < (a-b)^2$$

Or, si $(a - b)$ n'est pas nul, $(a - b)^2$ n'est pas nul ; donc dans ce cas $(a - b)^2 > 0$, d'où en remontant d'inégalité en inégalité :

$$\sqrt{ab} < (a+b)^2$$

Mais si $a - b = 0$, l'inégalité finale est remplacée par une égalité et l'on a alors :

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$$

Vérifions. Si $a = b$, $\frac{a+b}{2} = a$;

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a.$$

62. — *Trouver deux nombres connaissant leur rapport* $\frac{3}{4}$ *et leur somme* 2100.

Solution. — Désignons par a et b les deux nombres cherchés, on a : $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

On sait que, dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est au second comme la somme des deux derniers est au quatrième, d'où :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4}$$

Mais $a + b = 2100$.

d'où la proportion $\frac{2100}{b} = \frac{7}{4}$.

On obtient : $b = \frac{2100 \times 4}{7} = 300 \times 4 = 1200$

et $a = 2100 - 1200 = 900$.

Vérification. — $\frac{900}{1200} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Réponse : 900 et 1200.

63. — *Trouver deux nombres, connaissant leur rapport $\frac{3}{4}$ et la somme 625 de leurs carrés.*

Désignons par a et b les deux nombres cherchés, on a $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

Elevons au carré chacun des rapports on a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{ ou } \frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{16}$$

Mais $\frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{16}$ permet d'écrire $\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{9 + 16}{16}$

et comme $a^2 + b^2 = 625$

il vient : $\frac{625}{b^2} = \frac{25}{16}$

d'où : $b^2 = \frac{625 \times 16}{25} = 25 \times 16 = 400$

et : $b = \sqrt{400} = 20$

Comme $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ on a $\frac{a}{20} = \frac{3}{4}$

d'où : $a = \frac{20 \times 3}{4} = 15$.

Vérification. — $\frac{a}{b} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

et $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$.

Réponse : 15 et 20.

64. — *Montrer l'égalité des rapports $\frac{43}{65}$ et $\frac{4343}{6565}$ en s'appuyant sur les propriétés des propositions.*

Pour montrer l'égalité :

$$\frac{43}{65} = \frac{4343}{6565}$$

on pourrait vérifier que le produit 43×6565 est égal au produit 65×4343. Nous allons procéder autrement :

On a : $\frac{43}{65} = \frac{43 \times 100}{65 \times 100}$ ou $\frac{43}{65} = \frac{4300}{6500}$

Permutons les extrêmes, on a : $\frac{6500}{65} = \frac{4300}{43}$.

Nous obtiendrons une nouvelle proportion en ajoutant dans chaque membre le dénominateur au numérateur, donc :

$$\frac{6500 + 65}{65} = \frac{4300 + 43}{43} \text{ ou } \frac{6565}{65} = \frac{4343}{43}$$

Et en permutant de nouveau les extrêmes :

$$\frac{43}{65} = \frac{4343}{6565}$$

NOMBRES DÉCIMAUX

65. — *Quel est le nombre qui, multiplié par 0, 025, donne pour produit 1. Expliquez la réponse.*

Appelons n le nombre cherché ; le produit de ce nombre par 0, 025 a pour produit l'unité ; d'où $0{,}025 \times n = 1$.

Mais : $0{,}025 = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$

donc : $n \times \frac{1}{40} = 1$ et $n = 40$

Réponse : 40.

66. — *Un élève s'est trompé dans le choix des termes d'une division. Il a pris le dividende pour le diviseur, et réciproquement, et a trouvé au quotient 0,0875. Quel est le vrai quotient? Raisonner.*

Désignons par D le dividende, d le diviseur et q le quotient d'une division, on a :

$$\frac{D}{d} = q \text{ (} q \text{ est le quotient exact).}$$

L'inverse de $\frac{D}{d}$ est 1 : $\frac{D}{d} = \frac{d}{D}$ et l'inverse de q est $\frac{1}{q}$.

Les inverses de deux nombres égaux sont évidemment égaux.

Donc : $\frac{d}{D} = \frac{1}{q}$.

Mais on a trouvé : $\frac{d}{D} = 0{,}0875$.

C'est donc que $\frac{1}{q} = 0{,}0875$ et $q = \frac{1}{0.0875} = \frac{1000}{875} = \frac{80}{7}$.

Réponse : $\frac{80}{7}$.

67. — *On exploite une mine de cuivre en payant 18 fr. le quintal de minerai qui contient les $\frac{12}{100}$ de son poids en cuivre. Dans la préparation du métal, il se perd environ les $\frac{35}{1000}$ de ce dernier. Sachant que les frais de traitement pour extraire le métal d'une tonne de minerai s'élèvent à 85 fr., on demande à combien revient le quintal de cuivre?*

Les frais d'extraction du métal contenu dans un quintal de minerai s'élèvent à

85 fr. : 10 = 8 fr. 50.

Donc le cuivre obtenu avec un quintal de minerai revient à

18 fr. + 8 fr. 50 = 26 fr. 50.

Le poids du cuivre contenu dans un quintal de minerai est les $\frac{12}{100}$ d'un quintal ; puisqu'on perd dans la préparation du métal les $\frac{35}{1000}$ du poids du métal, on n'obtient qu'une fraction égale à :

$$1 - \frac{35}{1000} = \frac{1000 - 35}{1000} = \frac{965}{1000}$$

Donc, on n'obtient que les $\frac{965}{1000}$ des $\frac{12}{100}$ d'un quintal de cuivre

ou $\frac{12}{100} \times \frac{965}{1000} = \frac{11580}{100000} = \frac{1158}{10000}$ de quintal.

C'est ce poids de cuivre qui revient à 26 fr. 50.

Le prix de revient d'un quintal est égal à :

$$26{,}5 : \frac{1158}{10000} = \frac{26{,}5 \times 10000}{1185} = 228 \text{ fr. } 84$$

Réponse : 228 fr. 84.

68. — *Un observateur, voulant calculer la distance qui le sépare du point d'explosion d'une torpille, compte 10 secondes entre l'instant où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'eau et celui où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'air. Dans les conditions de température où l'on se trouve, la vitesse du son dans l'air est de 340 mètres et dans l'eau de 1450 mètres. Déterminer d'après cela, à une unité du deuxième ordre décimal près, à combien de kilomètres de l'observateur se trouve la torpille.*

Solution. — Pour parcourir 1450 mètres dans l'air, le son met $\frac{1450}{340} = \frac{145}{34}$ de seconde.

Pour parcourir 1450 mètres dans l'eau, le son met 1 seconde ou $\frac{34}{34}$ de seconde.

Pour une différence de temps de $\frac{145}{34} - \frac{34}{34} = \frac{111}{34}$ de seconde dans l'audition des deux sons, la torpille a éclaté à 1450 mètres de l'observateur.

Autant de fois $\frac{111}{34}$ de seconde seront contenus dans 10 secondes, autant de fois il y aura 1450 mètres entre le point d'explosion de la torpille et l'observateur.

Or $10 : \frac{111}{34} = \frac{10 \times 34}{11} = 3{,}06306$.

D'où $1450 \times 3{,}063 = 4441$ mètres ou $4^{km}\,44$.

Réponse : $4^{km}\,44$.

69. — *Réduire* $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}$ *en fractions décimales en multipliant les deux termes de chacune par un même nombre. Comment trouvera-t-on chacun des 6 multiplicateur ?*

Solution.

Comme

$2 \times 5 = 10$, on a : $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{15}{10} = 1{,}5$

$4 \times 25 = 100$, on a : $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$

$8 \times 125 = 1000$, on a : $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$

De même :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0{,}024$$

Pour obtenir chacun des six multiplicateurs, on divisera 10 par 2, ou 10 par 5 ;

on divisera 10^2 ou 100 par $4 = 2^2$, ou 100 par $25 = 5^2$;

on divisera 10^3 ou 1000 par $8 = 2^3$, ou 1000 par $125 = 5^3$.

On divise la puissance de 10 qui a même exposant que la puissance de 2 ou de 5 dans le dénominateur donné.

70. — *La fraction* $\frac{2727}{1616}$ *peut-elle être convertie en fraction décimale équivalente ? Dans l'affirmative effectuer la conversion.*

On a :

$2727 = 2700 + 27 = 27\,(100 + 1) = 27 \times 101$

et :

$1616 = 1600 + 16 = 16\,(100 + 1) = 16 \times 101$.

Donc : $\frac{2727}{1616} = \frac{27 \times 101}{16 \times 101} = \frac{27}{16}$

Or, $16 = 2^4$, donc la fraction $\frac{2727}{1616}$ est égale à une fraction décimale qui a quatre chiffres décimaux.

Cette fraction qu'on obtiendrait en cherchant le quotient à 0,0001 près de 2727 par 1616 est égale à :

$$\frac{27 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{27 \times 625}{10000} = \frac{16875}{10000} = 1{,}6875$$

71. — *Citez les fractions, dont le numérateur est 7, dont le dénominateur est inférieur à 30, et qui peuvent être converties exactement en fractions décimales.*

Solution. — 1° La fraction est irréductible. Alors son dénominateur ne peut pas contenir d'autres facteurs premiers que 2 et 5 avec des exposants, au plus égaux à 4 et 2, car $2^4 = 32$ et $5^3 = 125$; donc le dénominateur est un diviseur inférieur à 30 du nombre $2^4 \times 5^2 = 400$. Ces diviseurs de 400 sont 1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 20, 25. Comme $\frac{7}{1}$ est un nombre entier, il reste les huit dénominateurs différents 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20 et 25.

On a donc les fractions : $\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{8}, \frac{7}{10}, \frac{7}{16}, \frac{7}{20}$, et $\frac{7}{25}$.

2° La fraction n'est pas irréductible. — Alors son dénominateur peut contenir le facteur 7 qui disparaîtra par la simplification. Mais le produit des facteurs premiers 2 ou 5 est inférieur à 5, puisque $7 \times 5 = 35$. On ne peut donc prendre que les seuls dénominateurs $7 \times 2 = 14$ et $7 \times 4 = 28$.

On a donc les fractions : $\frac{7}{14}$ et $\frac{7}{28}$.

Réponses : $\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{8}, \frac{7}{10}, \frac{7}{14}, \frac{7}{16}, \frac{7}{20}, \frac{7}{25}$ et $\frac{7}{28}$,

RACINE CARRÉE

72. — *Trouver deux nombres pairs consécutifs, sachant que la différence de leurs carrés est 692.*

Solution. — Désignons par $2n$ le plus petit des deux nombres, le plus grand sera $2n + 2$.

Or :

$(2n)^2 = 4n^2$ et $(2n + 2)^2 = 4n^2 + 8n + 4$

D'où $(2n + 2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4$.

Si de la différence donnée 692 on retranche 4, on a pour reste 4 fois le plus petit des deux nombres pairs.

Donc 4 fois le plus petit nombre pair est égal à

$$692 - 4 = 688.$$

Le plus petit nombre pair $= 688 : 4 = 172$.

Le plus grand nombre pair $= 172 + 2 = 174$.

Vérification. — $\overline{174}^2 = 30276$; $\overline{172}^2 = 29584$; or : $30276 - 29584 = 692$.

Réponses : 172, 174.

73. — *Trouver le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 1962, pour obtenir un carré parfait. Trouver ce carré et sa racine.*

Décomposons 1962 en ses facteurs premiers ; on a :

$$1962 = 2 \times 3^2 \times 109$$

Multiplions les deux nombres de cette égalité par le produit $2 \times 109 = 218$, on aura :

$1962 \times 218 = 2 \times 3^2 \times 109 \times 2 \times 109 = 2^2 \times 3^2 \times 109^2$.

Or, la racine de

$2^2 \times 3^2 \times 109^2$ est $2 \times 3 \times 109$ ou 654.

Et $1962 \times 218 = 427716$.

Le nombre cherché est 218 ; le carré parfait est 427716 et sa racine 654.

Réponses : 218 ; 427716, 654.

74. — *Un nombre entier est égal au produit de deux nombres entiers qui diffèrent de deux unités ; on demande de démontrer que le plus petit de ces facteurs est la racine du nombre entier par défaut à moins de une unité.*

Soient a et a + 2 les deux nombres, N leur produit. On a :

$$a(a + 2) = N$$

D'une part, $a(a + 2) = a^2 + 2a$ est plus grand que a^2, donc $a^2 < N$.

D'autre part, $a(a + 2) = a^2 + 2a$ est plus petit que $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$, donc $N < (a + 1)^2$

Par suite, on a :

$$a^2 < N < (a + 1)^2$$

double inégalité qui exprime que a est la racine carrée approchée à 1 près par défaut de N.

75. — *Les nombres entiers* 1045, 3225 et 5625 *sont-ils des carrés parfaits ? Rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre entier, dont le chiffre des unités est* 5, *soit un carré parfait.*

Solution. — Le carré d'un nombre se termine par le même chiffre que le carré de ses unités.

Un carré parfait, dont le chiffre des unités est 5, est le carré d'un nombre terminé par 5 ; il est de la forme $(10d + 5)^2$.

Condition nécessaire :

On a $(10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100d(d + 1) + 25$,

donc, un nombre entier, terminé par 5, est un carré parfait s'il est terminé par 25 et si le nombre total des centaines est le produit de deux nombres consécutifs.

Condition suffisante : Un nombre remplissant les conditions précédentes est de la forme $100d(d + 1) + 25$, et peut s'écrire :

$100d(d + 1) + 25 = 100d^2 + 100d + 25 = (10d + 5)^2$.

Applications : 1045 n'est pas un carré parfait ; il n'est pas terminé par 25.

3225 n'est pas un carré parfait, 32 n'est pas le produit de deux nombres consécutifs.

5625 est un carré parfait, car on a :

$$5625 = 100 \times 7 \times 8 + 25 = 75^2$$

76. — *Un jardinier veut planter des arbres en carré plein. S'il en met un certain nombre par rangée, il lui en reste* 20. *S'il essaye d'en mettre un de plus par rangée il lui en manque* 5 *pour compléter le carré. Combien le jardinier a-t-il d'arbres ?*

Solution. — Pour planter un arbre de plus par rangée, il faut disposer de

$$20 + 5 = 25 \text{ arbres.}$$

Or, 25 représente la différence des carrés de deux nombres consécutifs ; on sait que cette différence est égale à deux fois le plus petit nombre augmenté de un. D'où :

2 fois le petit nombre $= 25 - 1 = 24$
le petit nombre $= 24 : 2 = 12$.
Le jardinier possède $12 \times 12 + 20 =$
$144 + 20 = 164$ arbres.

Vérification. — $13^2 = 169$, $169 - 164 = 5$.

Réponse : 164.

77. — *Un ouvrier a peint, à raison de* 1 *fr.* 20 *le mètre carré, les surfaces de trois carrés mesurant ensemble* $136^{m}8725$; *il a reçu pour l'un des carrés* 43 *fr.* 20, *et l'on sait que la différence de prix pour les deux autres est de* 52 *fr.* 343. *Calculer les côtés des trois carrés.*

Solution. — Le premier carré a pour superficie $\frac{43,20}{1,20} = 36^{m^2}$.

La somme des surfaces des deux autres carrés est de

$$136^{m}8725 - 36^{m^2} = 10^{m^2}8725$$

La différence des prix payés pour chacun des deux derniers carrés provient de la différence de leur superficie.

Cette différence de superficie est de

$$\frac{52,343}{1,20} = 43^{m^2}6191.$$

En additionnant la somme $100^{m^2}8725$ à la différence $43^{m^2}6191$ on obtiendra le double de la surface du second carré, d'où :

Surface du second carré :

$$= \frac{100^{m^2}8725 + 43^{m^2}6191}{2} = \frac{144^{m^2}4916}{2} = 72^{m^2}2458$$

En retranchant de la somme $100^{m^2}8725$ la différence $43^{m^2}6191$ on obtiendra le double de la surface du troisième carré, d'où :

Surface du troisième carré :

$$= \frac{100^{m^2}8725 - 43^{m^2}6191}{2} = \frac{57^{m^2}2534}{2} = 28^{m^2}6267$$

Le côté du premier carré mesure :

$$\sqrt{36} = 6 \text{ mètres.}$$

Le côté du deuxième carré mesure :

$$\sqrt{72,2458} = 8^{m}49.$$

Le côté du troisième carré mesure :

$$\sqrt{28,6267} = 5^{m}35$$

Réponses : 6 m., $8^{m}49$, $5^{m}35$.

SYSTÈME MÉTRIQUE

78. — *Un champ de forme rectangulaire a un périmètre égal à* 820 *mètres. La différence entre les deux dimensions vaut* 168 *mètres. Calculer* : 1° *la surface d'un losange qui aurait pour diagonales les deux dimensions du champ* ; 2° *la surface du trapèze qui aurait pour bases ces mêmes dimensions et pour hauteur la moyenne entre ces bases.*

Solution. — Le demi-périmètre du champ rectangulaire est de $820^{m} : 2 = 410$ m.

Si de 410 mètres, somme des deux dimensions, on retranche leur différence on obtiendra le double de la largeur du champ. D'où :

Largeur du rectangle : $\frac{410 - 168}{2} = \frac{242}{2} = 121^{m}$.

Longueur du rectangle : 121 m. + 168 m. = 289 m.

La surface d'un losange est égale à la moitié du produit de ses diagonales. D'où :

Surface du losange : $\frac{289 \times 121}{2} = 17484^{m^2}50$.

La surface d'un trapèze s'obtient en multipliant la demi-somme des bases par la hauteur.

Or, la demi-somme des bases $= \frac{289 + 121}{2} = \frac{410}{2} = 205$.

La moyenne des bases est précisément leur demi-somme. D'où :

Surface du trapèze : $205 \times 205 = 42025$ m².

Réponses : $17484^{m^2}5$; 42025 m².

79. — *Un terrain ayant la forme d'un trapèze de* 64 *mètres de hauteur et dont la différence des bases est le tiers de la plus grande, a été payé* 5040 *francs, à raison de* 3500 *francs l'hectare. On revend ce terrain en deux lots. Sur le premier lot on fait un bénéfice de* 25 % ; *sur le second, un bénéfice de* 10 %, *et le bénéfice total s'élève à* 840 *francs. Trouver* : 1° *les deux bases du trapèze* ; 2° *la surface de chaque lot.*

Solution. — La superficie du terrain est de 5040 : 3500 = 1 ha 44 ou 14400 m².

La hauteur du trapèze étant de 64 mètres, la demi-somme des bases est de

14400 : 64 = 225 mètres ; et la somme des bases mesure $225 \times 2 = 450$ m.

La petite base est les $\frac{2}{3}$ de la grande base et par suite la somme des deux bases est les $\frac{5}{3}$ de la grande base. D'où :

Longueur de la grande base : $\frac{450 \times 3}{5} = 270^{m}$.

Longueur de la petite base : $270 \times \frac{2}{3} = 180$ m.

Vérifions en cherchant la surface du trapèze. On a : $\frac{270 + 180}{2} \times 64 = 225 \times 64 = 14400$ mètres carrés.

Si on avait fait 25 % de bénéfice sur le tout, le bénéfice réalisé eut été de

$$\frac{5040 \times 25}{100} = \frac{5040}{4} = 1260 \text{ fr.}$$

Or, on n'a fait que 840 fr. de bénéfice, soit en moins :

$$1260 - 840 = 420 \text{ fr.}$$

Quand pour 100 fr. de prix de vente on ne fait que 10 fr. de bénéfice au lieu de 25 fr., le bénéfice total est diminué de 25 — 10 = 15 fr. Autant de fois 15 fr. seront contenus dans 420 fr. autant de fois on aura de 100 fr. sur lesquels on aura fait 10 % de bénéfice.

Comme 420 : 15 = 28 c'est que pour 28 × 100 = 2800 fr. de vente, le bénéfice a été de 10 %, et pour 5040 — 2800 = 2240 fr. fr. le bénéfice a été de 25 %.

Le lot revendu à 10 % de bénéfice a une superficie de $\frac{2800}{35} = 80$ ares.

Le lot revendu à 25 % de bénéfice a une superficie de $\frac{2240}{35} = 64$ ares.

Réponses : 270 m. et 180 m. ; 64 ares à 25 % et 80 ares à 10 %.

80. — *Trouver la capacité et les dimensions d'une boîte rectangulaire en fer-blanc, sans couvercle, sachant : 1° que le fond de cette boîte est un rectangle ayant un côté double de l'autre et que la profondeur est égale au plus petit côté du rectangle ; 2° que le fer-blanc, dont la boîte est formée, pèse 2 décigrammes par décimètre carré, et que le poids total de la boîte vide est de 900 grammes.*

Solution. Appelons *a* la longueur du petit côté du rectangle formant le fond de la boîte, l'autre dimension de ce rectangle est 2 *a* et sa surface $2a \times a = 2a^2$.

La surfaces des parois latérales est $4a^2$ pour les deux plus longues et $2a^2$ pour les deux bouts. Soit une surface totale de $8a^2$.

Cette surface, d'après les données, est encore de $\frac{90}{0,2} = 450$ dm².

La surface d'un des bouts est donc de 450 : 8 = 56 dm² 25.

La longueur du côté est de $\sqrt{56,25} = 7^{dm}\,5$.

Les dimensions de la boîte sont donc : longueur = $7^{dm}\,5 \times 2 = 15$ dm.

Largeur = $7^{dm}\,5$ et profondeur = $7^{dm}\,5$.

Capacité de la boîte : 15 × 7,5 × 7,5 = 843 dm³ 750, ou 843 l 75.

Réponses : 1 m 50, 0 m 75, 0 m 75 ; 843 l 75.

81. — *Quelle est la hauteur d'une salle rectangulaire de 6 m. $\frac{1}{4}$ de longueur et de 3 m. $\frac{3}{5}$ de largeur, sachant que l'air qu'elle renferme contient autant d'oxygène qu'il y en a dans 27 l 1593 d'eau ? On sait que l'eau contient les $\frac{8}{9}$ de son poids d'oxygène, qu'un litre d'oxygène pèse 1 gr 437, et que l'air renferme les $\frac{21}{100}$ de son volume d'oxygène.* (*B. E., Aspirantes*, Paris, 1906.)

Solution. — 27 l 1593 d'eau pèsent 27 kg 1593.

Poids de l'oxygène contenu dans l'eau :

$$\frac{27^{kg}\,1593 \times 8}{9} = 24^{kg}\,1416.$$

Volume de l'oxygène : $\frac{24,1416}{1,437} = 16800$ dm³, ou 16 m³ 800.

Volume de l'air : $\frac{16^{m^3}\,8 \times 100}{21} = 0,8 \times 100 = 80$ m³.

Le volume de la salle est de 80 m³.

Remarquons que $6^{m}\,\frac{1}{4} = 6^{m}\,25$ et que $3^{m}\,\frac{3}{5} = 3^{m}\,60$.

La surface du plancher est de 6,25 × 3,6 = 22 m² 5.

Hauteur de la salle : 80 : 22,5 = 3 m 555.

Réponse : 3 m 555.

82. — *Un lingot cylindrique d'or pur a 3 centimètres de rayon et 7 centimètres de hauteur. La densité du métal est 19. On demande : 1° le poids du lingot ; 2° le nombre de pièces d'or de 10 francs qu'on pourra faire avec ce lingot. On prendra* $\pi = \frac{22}{7}$.

Solution. — Le volume d'un cylindre s'obtient en multipliant sa surface de base par sa hauteur.

Evaluons le volume du cylindre en centimètres cubes.

$$V = \pi \times 3^2 \times 70$$

Le centimètre cube d'or pèse 19 grammes. Le poids du lingot est de

$$\pi \times 3^2 \times 70 \times 19 = \frac{22}{7} \times 9 \times 70 \times 19 = 37620 \text{ gr.}$$

L'or monayé valant 3 fr 10 le gramme, la pièce de 10 fr. pèse $\frac{10}{3,10} = \frac{100}{31}$ de gramme et contient $\frac{100}{31} \times \frac{9}{10} = \frac{90}{31}$ de gramme d'or pur.

On pourra fabriquer 37620 : $\frac{90}{31}$ ou $\frac{37620 \times 31}{90}$ = 22 × 19 × 31 = 12958 pièces de 10 francs.

Réponses : 37 kg 620 ; 12958 pièces.

RÈGLES DE TROIS

83. — *500 ouvriers de chemin de fer, en travaillant 10 heures par jour, ont posé 2300 mètres de voie en 28 jours. Combien 425 ouvriers, travaillant 8 heures par jour, poseront-ils de mètres de voie en 42 jours ?*

Données : 500 ouv. 10 h. 23000 m. 28 j.
425 ouv. 8 h. *x* m. 42 j.

Méthode par la 4e proportionnelle. — Le nombre de mètres posés est directement proportionnel au nombre des ouvriers, au nombre des jours et au nombre des heures par jour. On multiplie donc 2300 par les trois rapports.

$$\frac{425}{500}, \quad \frac{8}{10}, \quad \frac{42}{28}.$$

Le nombre cherché est :

$$2300 \times \frac{425}{500} \times \frac{8}{10} \times \frac{42}{28} = 23 \times 17 \times 6 = 2346 \text{ m.}$$

Méthode de réduction à l'unité. — Calculons d'abord le nombre d'heures de travail que nécessite la pose de 1 mètre de voie.

Or, 500 ouvriers, en travaillant 10 heures par jour, font 500 × 10 heures de travail. En 28 jours ils font donc 500 × 10 × 28 heures de travail. Comme ils ont posé 2300 mètres de voie, on aura le temps nécessaire pour poser 1 mètre en divisant 500 × 10 × 28 par 2300, soit

$$\frac{500 \times 10 \times 28}{2300}$$

D'autre part, 425 ouvriers, travaillant 8 heures par jour pendant 42 jours, font 425 × 8 × 42 heures de travail. Ils poseront donc autant de mètres de voie que $\frac{500 \times 10 \times 28}{2300}$ est contenu dans 425 × 8 × 42.

Le nombre cherché est donc

$$425 \times 8 \times 42 : \frac{500 \times 10 \times 28}{2300} = \frac{425 \times 8\,42 \times 2300}{500 \times 10 \times 28}$$
$$= 2346 \text{ m.}$$

Réponse : 2346 m.

84. — *Le prix du diamant est proportionnel au carré de son poids. Un diamant vaut 3600 francs ; on le casse en deux morceaux, dont l'un est les $\frac{2}{5}$ du tout. On demande la valeur totale des deux morceaux et la perte subie en cassant le diamant.*

Solution. — Les poids de l'un des fragments et du diamant entier étant entre eux comme 2 et 5, les prix sont entre eux comme 4 et 25. En désignant par x le prix du fragment, on a :

$$\frac{x}{3600} = \frac{4}{25} \text{ d'où } x = \frac{4 \times 3600}{25} = 4 \times 36 \times 4 = 576 \text{ fr.}$$

Le prix de l'autre fragment qui est au prix total comme 9 est à 25 est par suite :

$$\frac{9 \times 3600}{25} = 9 \times 36 \times 4 = 1296 \text{ fr.}$$

Le prix total des deux fragments est de 576 fr. + 1296 fr. = 1872 fr.

La perte subie est donc de 3600 — 1872 = 1728.

Réponses : 1872 fr. ; 1728 fr.

85. — *21 ouvriers ont mis 11 jours pour élever un mur en moellons de 45 mètres de longueur, 3 m 50 de hauteur et 0 m 45 d'épaisseur. On demande combien de temps 18 ouvriers mettront pour construire un mur en briques, ayant les mêmes dimensions que le premier en longueur et en hauteur et ayant 0 m 36 d'épaisseur ; on sait que pour exécuter les mêmes volumes de maçonnerie en moellons et en briques les temps employés sont entre eux comme 4 et 7 (4 correspondant à la maçonnerie en moellons).*

Données :

21 ouv. — 11 j. — 45 × 3,5 × 0,36 m³ — 7
18 ouv. — x — 45 × 3,5 × 0,36 m³ — 7

La méthode par la 4e proportionnelle comme celle de réduction à l'unité donne pour x la valeur :

$$x = \frac{11 \times 21 \times 0{,}36 \times 7}{18 \times 0{,}45 \times 4} = \frac{11 \times 7 \times 14}{15 \times 4} = \frac{1078}{60} =$$

17 jours $\frac{29}{30}$.

Réponse : 18 jours.

86. — *Un certain travail peut être fait en 44 jours par 15 ouvriers travaillant 8 heures par jour ; après 10 jours, 5 ouvriers cessent de travailler ; les autres font alors 9 heures par jour. Au bout de combien de temps le travail sera-t-il terminé ? Combien recevra chacun des 5 premiers ouvriers, puis chacun des 10 autres, s'ils ont reçu en tout 2112 francs ?*

Solution. — Le nombre d'heures de travail à fournir est de 8 h. × 15 × 44 = 5280 heures.

Après 10 jours de travail, il reste à donner 14 jours qui représentent 8 h. × 15 × 34 = 4080 heures.

Les 10 ouvriers qui restent, accomplissent quotidiennement 9 h. × 10 = 90 heures de travail.

Pour obtenir 4080 heures, il faudra $\frac{4080}{90} = 45 \text{ j} \frac{1}{3}$.

Le travail sera terminé au bout de

$$10 \text{ j} + 45 \text{ j} \frac{1}{3} = 55 \text{ j} \frac{1}{3}.$$

Les 5280 heures étant payées 2112 fr., l'heure ressort à $\frac{2112}{5280} = 0^{\text{f}}40$.

Chacun des 5 ouvriers a fourni 8 h. × 10 = 80 h. ; il recevra donc $0^{\text{f}}40 \times 80 = 32$ fr.

Ces 5 ouvriers ont reçu $32^{\text{f}} \times 5 = 160$ fr.

Les 10 ouvriers qui ont continué le travail, ont reçu 2112 fr. — 160 fr. = 1952 fr.

Chacun d'eux a touché 1952 : 10 = $195^{\text{f}}20$.

Réponses : $55 \text{ j} \frac{1}{2}$; 32 fr. ; $195^{\text{f}}20$.

87. — *Le nombre des vibrations transversales qu'une corde tendue exécute dans l'unité de temps est proportionnel à la racine carrée du poids qui la tend et inversement proportionnel à sa longueur, à son diamètre, ainsi qu'à la racine carré de sa densité. Cela posé, une corde de cuivre ayant 0 m 363 de longueur, 0 m 0015 de diamètre, et tendue par un poids de 13 kg 35, exécute 8000 vibrations en une seconde; on demande combien de vibrations exécutera en $\frac{1}{16}$ de minute, un fil d'acier de 0 m 953 de longueur, et de 0 m 0005 de diamètre, tendu par un poids de 3 kg 54. (Densité du cuivre 8,8 et densité de l'acier 7,8)*

Solution. — Puisqu'une corde de 0m 363 exécute 8000 vibrations en une seconde, une corde de 1 mètre de longueur en exécuterait :

$$800 : \frac{1}{0{,}363} \text{ ou } 8000 \times 0{,}363$$

et une corde de 0m 963 en exécuterait

$$8000 \times 0{,}363 \times \frac{1}{0{,}953} \text{ ou } 8000 \times \frac{0{,}363}{0{,}953}.$$

En $\frac{1}{16}$ de minute ou $\frac{60}{16}$ de seconde le nombre des vibrations du fil d'acier sera, en tenant compte du diamètre du fil et du poids tenseur :

$$\frac{60}{16} \times 8000 \times \frac{0{,}363}{0{,}953} \times \frac{0{,}0015}{0{,}0005} \times \sqrt{\frac{3{,}54}{13{,}35}} \times \sqrt{\frac{8{,}8}{7{,}8}}$$

On a successivement :

$$\frac{60 \times 8000 \times 0{,}363 \times 0{,}0015}{16 \times 0{,}953 \times 0{,}0005} \times \sqrt{\frac{3{,}54 \times 8{,}8}{13{,}35 \times 7{,}8}}$$

$$\text{ou } \frac{60 \times 100 \times 363 \times 15}{953} \times \sqrt{\frac{354 \times 88}{1335 \times 78}}$$

$$\text{ou } \frac{32\,670\,000}{953} \times \sqrt{\frac{5191}{17355}}$$

ou $34281{,}21 \times \sqrt{0{,}299\,164}$ ou $34\,218{,}21 \times 0{,}5469$ ou 18 748,88

Le fil exécutera 18748 vibrations.

Réponse : 18748.

RÈGLES D'INTÉRÊTS ET D'ESCOMPTE

88. — *Une personne a engagé un certain capital dans une entreprise. La première année, elle a perdu 15% de son capital, et, la deuxième années, 5% du capital restant. La troisième année, la somme qui lui reste produit un bénéfice de 8% et il s'en faut de 5116 francs pour reconstituer le capital primitif. Quel est le montant du capital engagé, le bénéfice de la troisième année?*

Solution. — Supposons un capital engagé de 1000 fr.

La première année, la perte est de $\frac{15 \times 100}{100}$ = 150 fr. et il reste 1000 — 150 = 850 francs.

La deuxième année, la perte est de

$\frac{850 \times 5}{100} = 42^{\text{f}}50$ et il reste 850 — $42^{\text{f}}50 = 807^{\text{f}}50$.

La troisième année, le bénéfice est de 8% de $807^{\text{f}}50$ ou 8 × 8,075 = $64^{\text{f}}60$, et le capital devient $807^{\text{f}}50 + 64^{\text{f}}60 = 872^{\text{f}}10$.

La perte sur 1000 fr. est alors de

1000 fr. — $872^{\text{f}}10 = 127^{\text{f}}90$.

Autant de fois $127^{\text{f}}90$ seront contenus dans 5116 fr., autant de fois 1000 fr. la personne aura engagés, d'où :

Montant du capital engagé :

$$1000 \times \frac{5116}{127{,}9} = 1000 \times 40 = 40.000 \text{ fr.}$$

La perte de la première année a été de

15 × 400 = 6000 francs ;

il restait 40000 — 6000 = 34000 francs ;

La perte de la deuxième année a été de

5 × 340 = 1700 francs ;

il restait 34000 — 1700 = 32300 francs.

Le bénéfice de la troisième année a été de $8 \times 323 = 2584$ francs.

Vérification. — Le capital devient $32300 + 2584 = 34884$ francs.

Il manque au capital primitif 40000 fr. — 34884 fr. = 5116 fr.

Réponses : 4000 francs ; 2584 francs.

89. — *Les* $\frac{8}{15}$ *d'un certain capital ont été employés à l'achat de rente française 3% au cours de 96 francs.*

Avec le reste de ce capital, on a acheté de la rente russe 3% au cours de 70 francs. La différence entre les revenus de ces deux achats est de 225 francs. Calculer le capital placé et son revenu annuel.

Solution. — Supposons un capital placé s'élevant à 1500 fr.; il y a 800 fr. employés à l'achat de rente française et 700 francs employés à l'achat de rente russe.

Les 800 francs placés en rente française rapportent

$$\frac{3 \times 800}{96} = 25 \text{ francs.}$$

Les 700 francs placés en rente russe rapportent

$$\frac{3 \times 700}{70} = 30 \text{ francs.}$$

La différence des revenus est de $30^{fr} - 25^{fr} = 5$ francs.

Autant de fois 5 francs seront contenus dans 225 fr. autant de fois on aura placé 1500 fr.

Or, $225 : 5 = 45$.

Le capital placé est $1500 \times 45 = 67500$ francs.

Les 1500 fr. rapportaient $30^{fr} + 25^{fr} = 55^{fr}$; les 67500 francs rapporteront $55^{fr} \times 45 = 2475$ francs.

Réponses : 67.000 fr.; 2475 fr.

90. — *On place un certain capital à 4% pendant 130 jours. Au bout de ce temps, le capital et les intérêts réunis sont placés à 6% pendant 120 jours. On a eu ainsi 365 fr 20 d'intérêts. On demande quel était le capital primitif.*

Solution. — Cherchons d'abord la valeur du capital et des intérêts réunis après le premier placement. La somme ainsi obtenue placée à 6% pendant 120 jours, a donné 365 fr 20 d'intérêts. Le capital étant proportionnel à l'intérêt et inversement proportionnel à la durée,

on a $x = 100 \times \frac{365,2}{6} \times \frac{360}{120} = \frac{36520}{2}$ fr.

Dans le premier placement, 100 francs, en 130 jours, rapportent $\frac{4 \times 130}{360}$ francs.

En plaçant 100 francs, on a donc touché $100 + \frac{4 \times 130}{360}$ ou $\frac{36000 + 520}{360} = \frac{36520}{360}$ francs, au bout de 130 jours.

On a la règle de trois simple :

$\frac{36520}{360}$ est la valeur acquise par 100 francs,

$\frac{36520}{2}$ est la valeur acquise par x francs,

$$\text{d'où } x = 100 \times \frac{\left(\frac{36520}{2}\right)}{\left(\frac{36520}{360}\right)} = \frac{100 \times 36520 \times 360}{2 \times 36520} = 18000$$

Réponse : 18000 francs.

91. — *Une personne a acheté une propriété de 16.000 francs. Elle s'est engagée à payer 4000 fr. comptant, 4000 fr. dans 30 jours, 4000 fr. dans 60 jours, et 4000 fr. dans 90 jours. Elle se propose ensuite de payer le tout ensemble ; à quelle époque doit s'effectuer le paiement? Les intérêts sont calculés à 5%.*

Solution. — Si la personne payait comptant, on devrait déduire du prix total 16000 fr. :

1° les intérêts de 4000 fr. pendant 30 jours ou

$$\frac{4000 \times 5 \times 30}{36000} = \frac{50}{3} \text{ de franc.}$$

2° Les intérêts de 4000 francs pendant 60 jours ou 2 fois 30 jours, c'est-à-dire

$$\frac{50 \times 2}{3} = \frac{100}{3} \text{ de franc.}$$

3° Les intérêts de 4000 francs pendant 90 jours ou 3 fois 30 jours, c'est-à-dire

$$\frac{50 \times 3}{3} = \frac{150}{3} \text{ de franc.}$$

Soit au total $\frac{50 + 100 + 150}{3} = \frac{300}{3} = 100$ francs.

Désignons par x le nombre de jours pendant lequel 16000 francs auront rapporté 100 francs ;

$$\text{on aura : } 100 = \frac{1600 \times 5 \times x}{36000} = \frac{20\,x}{9}$$

d'où $20\,x = 400$ et $x = \frac{900}{20} = 45$.

Le paiement devra s'effectuer 45 jours après l'achat.

Vérification.

$$\frac{16000 \times 5 \times 45}{36000} = \frac{16 \times 5 \times 45}{36} = 4 \times 5 \times 5 = 100$$

Réponse : 45 jours.

PARTAGES PROPORTIONNELS

92. — *Un oncle laisse à ses neveux une somme de 50000 francs qu'ils doivent se partager proportionnellement à leur âge. Le premier a 23 ans, le second 18 et le troisième 13 ans. Quelle sera la part de chacun ?*

Solution. — La somme des nombres proportionnels est $23 + 18 + 13 = 54$.

La part du premier neveu est de

$$\frac{50000 \times 24}{54} = 21296^{fr}\,275$$

Celle du troisième de

$$\frac{50000 \times 18}{54} = 16666^{fr}\,65$$

Celle du deuxième de

$$\frac{50000 \times 13}{54} = 12037^{fr}\,025$$

Vérification : $49999^{fr}\,95$.

Réponses : $21296^{fr}\,30$; $16666^{fr}\,65$; $12037^{fr}\,05$.

93. — *Trois voisins ont logé des troupes, savoir : le premier 6 hommes et 4 chevaux pendant 15 jours ; le deuxième 8 hommes et 3 chevaux pendant 12 jours ; le troisième 10 hommes pendant 9 jours. Il leur est accordé une indemnité totale de 180 francs. Faire la répartition, sachant que 2 chevaux doivent entrer en compte pour un homme seulement.*

Solution. — L'indemnité du premier sera calculée pour 6 hommes et 4 chevaux ou pour $12 + 4 = 16$ chevaux logés pendant 15 jours, soit sur $16 \times 15 = 240$ chevaux pendant 1 jour.

L'indemnité du second sera calculée sur le logement de $8 \times 2 + 3 = 19$ chevaux pendant 12 jours ou de $19 \times 12 = 228$ chevaux pendant 1 jour.

L'indemnité du troisième sera calculée sur le logement de $10 \times 2 = 20$ chevaux pendant 9 jours ou sur $20 \times 9 = 180$ chevaux pendant 1 jour.

On devra donc partager 180 francs proportionnellement à 240, 228, et 180.

Les parts respectives seront :

Pour le premier $\frac{180 \times 240}{648} = \frac{200}{3} = 66^{fr}\,66$

Report.....66^{fr} 66

Pour le deuxième $\frac{180 \times 228}{648} = \frac{190}{3} = 63^{fr}\ 33$

Pour le troisième $\frac{180 \times 180}{648} =$ 50^{fr}

Vérification : 179^{fr} 99

Réponses : 66 ^{fr} 66 ; 63^{fr} 33 ; 50 ^{fr}.

94. — *Quatre associés ont placé dans une entreprise : le premier 12000 fr. pendant 15 mois, le second 18000 fr. pendant 9 mois, le troisième 7500 pendant 19 mois et le quatrième 1000 fr. pendant 20 mois. Le bénéfice s'est élevé à 20000 fr. On demande la part de bénéfice de chaque associé?*

Solution. — Les 12000 fr. du premier associé placés pendant 15 mois, sont supposés rapporter le même intérêt qu'une somme égale à

12000 × 15 = 180000 fr. pendant 1 mois .

De même 18000 fr. pendant 9 mois rapportent autant que 18000 × 9 = 162000 fr. pendant 1 mois ; 7500 fr. pendant 19 mois, autant que

7500 × 19 = 142500 fr. pendant 1 mois ;

enfin 10000 fr. pendant 20 mois, autant que

10000 × 20 = 200000 pendant 1 mois.

Il faut partager le bénéfice en parties proportionnelles aux nombres 180000, 162000, 142500, 200000, ou encore aux nombres 1800, 1620, 1425 et 2000, dont la somme est 6845. On a ainsi :

Part du premier associé :

$$\frac{20000 \times 1800}{6845} = 5259^{f}\ 24$$

Part du deuxième associé :

$$\frac{20000 \times 1620}{6845} = 4733^{f}\ 316$$

Part du troisième associé :

$$\frac{20000 \times 1425}{6845} = 4163^{f}\ 565$$

Part du quatrième associé :

$$\frac{20000 \times 2000}{6845} = 5843^{f}\ 60$$

Vérification : 19999^{f} 721

Réponses : 5259^{f} 25 ; 4733^{f} 30 ; 4163^{f} 55 ; 5843^{f} 60.

95. — *Un oncle laisse en mourant 36000 francs qui doivent être partagés entre ses cinq neveux. Il a stipulé dans son testament que la part de chacun d'eux doit être en raison inverse de son âge. On demande quelles seront les parts, sachant que le premier neveu est âgé de 30 ans, le deuxième de 20 ans, le troisième de 18 ans, le quatrième de 12 ans et le cinquième de 10 ans.*

Solution. — Partager 36000 francs en parties inversement proportionnelles à 30, 20, 18, 12 et 10, c'est partager 36000 fr. en parties directement proportionnelles à $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{10}$ ou à $\frac{6}{180}$, $\frac{9}{180}$, $\frac{10}{180}$, $\frac{15}{180}$ et $\frac{18}{180}$ ou enfin à 6, 9, 10, 15 et 18.

La somme des nombres proportionnels étant 6 + 9 + 10 + 15 + 18 = 58. On a :

Part du premier neveu :

$$\frac{36000}{58} \times 9 = 620{,}689 \times 6 = 3724^{f}\ 13$$

Part du deuxième neveu :

$$\frac{36000}{58} \times 6 = 620{,}689 \times 9 = 5586^{f}\ 20$$

Part du troisième neveu :

$$\frac{36000}{58} \times 10 = 620{,}689 \times 10 = 6206^{f}\ 89$$

Part du quatrième neveu :

$$\frac{36000}{58} \times 15 = 620{,}689 \times 15 = 9310^{f}\ 34$$

Part du cinquième neveu:

$$\frac{36000}{58} = 18 = 620{,}689 \times 18 = 11172^{f}\ 40$$

Vérification : 35999^{f} 96

Réponses : 3724^{f} 15 ; 5586^{f} 20 ; 6206^{f} 90 ; 9310^{f} 35 ; 11172^{f} 40.

MÉLANGES ET ALLIAGES

96. — *Un épicier a deux espèces de café : l'une à 4^{f} 20 le kilogramme et l'autre à 4^{f} 60. Il en a fait un mélange de 15 kg. Le prix de ce mélange est de 4^{f} 30 le kg. On demande combien il a mis de kilogrammes de chaque espèce.*

Solution. — Chaque kilogramme de café de la deuxième qualité fait gagner 4^{f} 30 — 4^{f} 20 = 0^{f} 10.

Chaque kilogramme de café de la première qualité fait perdre 4^{f} 60 — 4^{f} 30 = 0^{f} 30.

Pour qu'il y ait compensation entre le gain et la perte, il faudra prendre 30 kg. de la deuxième qualité pour 10 kg. de la première.

Donc sur 40 kg. du mélange de cafés il y a 30 kg. de deuxième qualité et 10 kg. de première. Sur 15 kg. de mélange il y a donc $\frac{30 \times 15}{40} = 11^{kg}\ 25$ de deuxième qualité et $\frac{10 \times 15}{40} = 3^{kg}\ 75$ de première qualité.

Réponses : 11^{kg} 25 à 4^{f} 20 et 3^{kg} 75 à 4^{f} 60.

97. — *Un tonneau de 228 litres de capacité contient 198 litres de vin qui valent 120 francs. On remplit le tonneau d'eau, puis on enlève 15 litres du mélange et on les remplace par un égal volume d'eau. Quelle est la quantité de vin contenue dans un litre du nouveau mélange et quelle est sa valeur ?*

Solution. — Le tonneau contient une première fois 198 litres de vin et 228 — 198 = 30 litres d'eau.

En enlevant 15 litres de ce mélange on retire les $\frac{15}{228}$ du vin qui y est contenu soit les $\frac{15}{228}$ de 198 litres ou $\frac{198 \times 15}{228}$ litres. Il reste dans le tonneau 198 — $\frac{198 \times 15}{228}$ ou $\frac{228 \times 198 - 198 \times 15}{228}$ ou $\frac{198\ (228 - 15)}{228}$ ou $\frac{198 \times 213}{228}$ litres.

Un litre du mélange renferme donc une quantité de vin égale à $\frac{198 \times 213}{228 \times 228} = 0^{l}\ 81$.

Les 198 litres valent 120 fr., le prix de 0^{l} 81 est de $\frac{120 \times 0{,}81}{198} = 0^{f}\ 49$.

Réponses : 0^{f} 81 ; 0^{f} 49.

98. — *On demande le titre d'un lingot d'argent allié de cuivre, formé par la réunion de cinq lingots, dont les poids et les titres sont indiqués ci-dessous :*

Un lingot du poids de		17^{kg} 525	au titre de	0,980
—		6^{kg} 125	—	0,910
—	—	3^{kg} 005	—	0,820
—	—	10^{kg} 300	—	0,850
—	—	9^{kg} 900	—	0,870

On demande, en outre, quelle est la quantité totale de cuivre qu'il faudrait ajouter pour ramener le nouvel alliage au titre normal de 0,835.

Solution. — Poids d'argent pur contenu dans le premier lingot $17^{kg}\,525 \times 0{,}980 = 17^{kg}\,17450$

Poids d'argent pur contenu dans le deuxième lingot $6^{kg}\,125 \times 0{,}910 = 5^{kg}\,57375$

Poids d'argent pur contenu dans le troisième lingot $3^{kg}\,005 \times 0{,}820 = 2^{kg}\,46410$

Poids d'argent pur contenu dans le quatrième lingot $10^{kg}\,300 \times 0{,}850 = 8^{kg}\,75500$

Poids d'argent pur contenu dans le cinquième lingot $9^{kg}\,900 \times 0{,}870 = 8^{kg}\,61300$

Poids total d'argent pur entrant dans le lingot final ..... $42^{kg}\,58035$

Le poids total du lingot étant de $46^{kg}\,855$, son titre est de $\frac{42{,}58035}{46{,}855} = \frac{8{,}51607}{9{,}371} = 0{,}9087$.

Dans le lingot au titre de 0,835 il y aura $42^{kg}\,58035$ d'argent pur ; ce poids d'argent pur formant les $\frac{835}{1000}$ du poids du lingot, le poids total du lingot est alors de

$$\frac{42{,}58035 \times 1000}{835} = 50^{kg}\,994.$$

Le poids du cuivre à ajouter est

$$50^{kg}\,994 - 46^{kg}\,855 = 4^{kg}\,139.$$

Réponses : 0,9087 ; $4^{kg}\,139$.

ALGÈBRE

AVERTISSEMENT

L'algèbre, généralisation de l'arithmétique, considère les nombres affectés des signes positif et négatif, c'est-à-dire, étudie les grandeurs susceptibles d'être comptées dans des sens différents (longueurs, temps, températures etc.).

La compréhension de l'algèbre n'est possible qu'à la suite d'une étude complète et sérieusement faite de l'arithmétique. Le lecteur retrouvera, en effet, au début de cette étude, la théorie relative aux quatre règles. toutes opérations valables tant pour les nombres algébrique que pour les expressions algébriques (monômes, polynômes, fractions, etc.). De nombreuses applications pratiques sont proposées dont la solution raisonnée est donnée en fin de chapitre. Le lecteur devra faire et refaire ces problèmes jusqu'à ce qu'il puisse les résoudre sans aucune faute de calcul et sans hésitation.

L'étude des équations qui vient ensuite et qui constitue la base de l'algèbre, ne peut être abordée que si le lecteur est rompu aux artifices du calcul algébrique, à la règle des signes etc.

Muni de ce bagage indispensable, le lecteur pourra peu à peu résoudre un très grand nombre de problèmes. Il devra s'imposer de remplacer les données numériques proposées par des lettres ce qui lui permettra de généraliser les données du problème, de discuter, d'interpréter les solutions trouvées, en particulier les solutions négatives et de fixer les conditions de possibilité du problème.

Nous insistons sur l'intérêt presque constant qu'il y a à ne pas effectuer les calculs numériques ou non, en cours de route, ce qui permet presque toujours d'entrevoir plus aisément des simplifications.

Nous terminons ce chapitre par l'étude des logarithmes, des intérêts composés et des annuités et nous indiquons le principe de la représentation graphique d'un phénomène ou d'une fonction dont nous trouverons par la suite de nombreuses applications.

ALGÈBRE

Nombres algébriques

1. — Nous avons vu en arithmétique comment l'on arrive à la notion du nombre. De nouvelles considérations vont nous permettre, d'acquérir la notion du *nombre affecté de signe*, du *nombre positif* ou *négatif*.

Remarquons d'abord que, dans un grand nombre de cas, il ne suffit pas d'exprimer une quantité par un nombre arithmétique pour définir exactement cette quantité. C'est ainsi que, si un mouvement de fonds s'est fait dans une banque, il ne suffit pas de dire qu'il a été de 20000 ou de 30000 francs pour qu'on sache s'il a augmenté ou diminué les dispositions de la banque, s'il correspond à une recette ou à un paiement. Dans des conditions analogues, une date n'est définie que si on fixe une origine du temps, la date de la naissance de Jésus-Christ, par exemple. Nous disons : 120 ans avant Jésus-Christ, 1800 ans après Jésus-Christ. Nous disons aussi qu'il fait 10° au-dessus de 0° ou 3° au-dessous de 0°.

Pour rendre nos explications plus claires et plus faciles à comprendre, nous nous appuierons dans ce qui va suivre sur la comparaison des nombres et des longueurs ; mais les mêmes raisonnements pourraient se baser sur la comparaison avec toute autre grandeur ; ils sont généraux.

2. Grandeur affectée de sens. — Imaginons une droite indéfinie x' x et un mobile A se déplaçant sur cette droite.

Le déplacement de ce mobile, au bout d'un certain temps, sera défini par la distance qu'il aura parcourue, 3 mètres, par exemple. Mais pour qu'on puisse déter-

miner exactement la nouvelle position du point A, il faudra connaître, en outre, le sens dans lequel le mobile se sera déplacé, soit à droite, soit à gauche. Imaginons donc que le mobile se soit déplacé vers la droite en parcourant 3 mètres de A en B. Supposons maintenant qu'à partir de cette nouvelle position B, il ait effectué un nouveau déplacement, vers la gauche cette fois, de 5 mètres, de B en C. Si, après ces deux déplacements, la position du point A étant donnée, on veut connaître la position du point C, il n'est pas nécessaire pour cela de faire exécuter au mobile les deux parcours AB et BC, il suffit d'effectuer le déplacement AC.

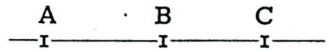
Addition et Soustraction des nombres algébriques

3. Somme. — Le déplacement A C est dit *somme* de A B et de B C. A prend le nom *d'origine* du mouvement, C celui *d'extrémité*.

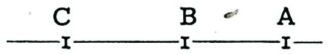
D'après cette définition, la somme des deux longueurs A B et B C est la longueur A C, mesurée entre l'origine et l'extrémité du mouvement et dans le sens A C (de droite à gauche sur la figure ci-dessus).

En ce qui concerne la mesure de cette somme, il peut se présenter quatre cas :

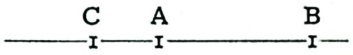
1° Les deux longueurs A B et B C ont été portées dans le même sens vers la droite.



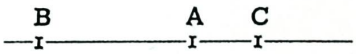
2° Elles ont été portées dans le même sens vers la gauche.



3° Elles ont été portées en sens contraire : A B à droite et B C à gauche.



4° Elles ont été portées en sens contraire : A B à gauche et B C à droite.



On voit immédiatement que, si A B a 3 mètres et B C 5 mètres, le segment A C mesure :

Dans le 1er cas : $3 + 5 = 8$ mètres de gauche à droite.

Dans le 2e cas : $3 + 5 = 8$ mètres de droite à gauche.

Dans le 3e cas : $5 - 3 = 2$ mètres de droite à gauche.

Dans le 4e cas : $5 - 3 = 2$ mètres de gauche à droite.

Nous allons imaginer une convention qui nous permettra d'exprimer librement la mesure du segment A C dans les quatre cas possibles.

4. Convention des signes. — Commençons par définir sur l'axe indéfini x' x un *sens positif* de gauche à droite et un *sens négatif* de droite à gauche, et convenons que tout déplacement du mobile dans le sens positif sera exprimé par un nombre affecté du signe + et que tout déplacement du mobile dans le sens négatif sera exprimé par un nombre affecté du signe —.

Suivant cette convention, nous écrirons que les segments A B, B C et A C sont représentés, dans les quatre cas considérés ci-dessus, par les *nombres algébriques* suivants :

1er cas : A B = (+ 3) B C = (+ 5) A C = (+ 8)
2e cas : A B = (— 3) B C = (— 5) A C = (— 8)
3e cas : A B = (+ 3) B C = (— 5) A C = (— 2)
4e cas : A B = (— 3) B C = (+ 5) A C = (+ 2)

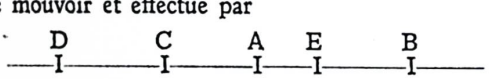
Par convention également, nous écrirons que nous faisons la somme des grandeurs A B et B C, suivant les cas, de la façon suivante :

1er cas : (+ 3) + (+ 5) = (+ 8)
2e cas : (— 3) + (— 5) = (— 8)
3e cas : (+ 3) + (— 5) = (— 2)
4e cas : (— 3) + (+ 5) = (+ 2)

De la considération de ces quatre cas, *les seuls possibles*, nous déduisons immédiatement la règle suivante :

5. Règle de l'addition de deux nombres algébriques. — *Pour additionner deux nombres algébriques :* 1° *s'ils sont de même signe, on additionne leurs valeurs arithmétiques (dites aussi : valeurs absolues) et on fait précéder la somme du signe commun aux deux nombres ;* 2° *s'ils sont de signes contraires, on fait la différence arithmétique de leurs valeurs absolues et on fait précéder cette différence du signe du nombre le plus grand en valeur absolue.*

6. — Généralisation : somme de plusieurs nombres algébriques. — Supposons que le mobile, après avoir parcouru les segments A B et B C, continue à se mouvoir et effectue par



exemple les déplacements C D et D E. En généralisant la définition donnée plus haut pour deux segments (3), nous dirons que la somme des segments A B, B C, C D, D E, est le segment A E défini par l'origine et par l'extrémité du déplacement, dans le sens A E (positif sur la figure).

En supposant que les segments soient mesurés respectivement par les nombres algébriques suivants : A B = (+ 3) B C = (— 5) C D = (— 2) D E = (+ 6) d'après notre convention, la somme de ces segments est exprimée par l'écriture :

$$(+3) + (-5) + (-2) + (+6)$$

Nous avons vu en arithmétique que faire la somme de plusieurs nombres, c'était faire la somme du premier et du second, puis ajouter cette somme partielle au troisième nombre et ainsi de suite jusqu'au dernier nombre.

Pour que nos conventions soient acceptables, il faut que cette définition puisse s'étendre aux nombres algébriques.

Voyons donc par quelle série d'opérations nous pouvons obtenir la mesure du segment A E.

Le mobile s'est déplacé de A en B, puis de B en C ; ce faisant, il a parcouru le segment A C, qui est la somme des deux segments A B et B C, et dont la valeur s'exprime par l'égalité :

$$(+3) + (-5) = (-2)$$

Le mobile s'est déplacé ensuite de C en D ; à ce moment, il a parcouru, à partir du point A, le segment A D qui est la somme de A C et de C D et qui s'exprime par l'égalité :

$$(-2) + (-2) = (-4)$$

Enfin le mobile s'est déplacé de D en E ; arrivé en E, il a parcouru, à partir du point A, le segment A E qui est la somme de A D et de D E et qui s'exprime par l'égalité :

$$(-4) + (+6) = (+2)$$

Nous voyons, par conséquent, que, pour faire la somme des segments A B, B C, C, D, D E, nous avons d'abord fait la somme A C de A B et de B C, puis la somme A D de A C et de C D, et enfin la somme A E de A D et de D E, et, pour faire la somme des nombres algébriques correspondants, nous avons effectué suivant la règle (5) l'addition du premier et du second, puis de la somme partielle obtenue et du troisième et enfin de la seconde somme partielle et du quatrième nombre.

Nos conventions sont, par conséquent, justifiées sur ce premier point.

7. Théorème. — *Pour faire la somme de plusieurs nombres algébriques,* a, b, c, d..., l, m, p, q..., s, *on peut faire la somme des* n *premiers nombres* a + b + c + d + ... + l, *puis la somme des derniers* m + p + q + ... + s *et ajouter les résultats.*

En effet, reprenons l'exemple précédent : le segment A E peut être considéré comme la somme du segment A C, c'est-à-dire A B + B C, et du segment C E, c'est-à-dire C D + D E ; car on peut, évidemment, toujours remplacer deux ou plusieurs déplacements consécutifs du mobile par la résultante des déplacements, le mouvement A B, B C équivaut au mouvement A C et le mouvement C D, D E équivaut au mouvement C E.

En appliquant cette considération aux nombres algébriques correspondants, nous remarquons que la somme

$$(+3) + (-5) + (-2) + (+6)$$

est égale à la somme des deux sommes

$$(+3 + (-5) = (-2) \text{ et } (-2) + (+6) = (+4)$$
$$(-2) + (+4) = (+2)$$

8. Théorème. — *Une somme de deux nombres algébriques ne change pas quand on change l'ordre de ses termes.*

En effet, la règle (5), que nous avons établie plus haut, ne préjuge rien sur l'ordre des termes.

9. Théorème. — *Dans une somme de trois nombres algébriques, on peut changer l'ordre des deux derniers termes sans changer la somme.*

Soient les trois nombres algébriques a, b, c. Le théorème (7) nous apprend que nous pouvons faire la somme de ces trois termes en additionnant d'abord les deux derniers et en ajoutant leur somme $(b + c)$ au premier :

$$a + b + c = a + (b + c)$$

Mais on a aussi (8) :

$$b + c = c + b$$

et par conséquent :

$$a + (b + c) = a + (c + b)$$
$$a + b + c = a + c + b$$

10. Théorème. — *Dans une somme d'un nombre quelconque de termes, on peut intervertir l'ordre des deux derniers sans changer la somme.*

Soit la somme :

$$a + b + c + d + \dots \dots + k + l + m$$

On a (7) :

$$a + b + c + d + \dots + k + l + m =$$
$$(a + b + c + d + \dots + k) + (l + m)$$

et d'après 8 :

$$\begin{aligned} & a + b + c + d + \dots + k + l + m \\ = \; & (a + b + c + d + \dots + k) + (m + l) \\ & a + b + c + d + \dots + k + l + m \\ = \; & a + b + c + d \quad \dots + k + m + l \end{aligned}$$

11. Théorème. — *Dans une somme d'un sombre quelconque de termes, on peut intervertir l'ordre de deux termes consécutifs sans changer la somme.*

Soit la somme :

$$a + b + c + d \quad \dots + k + l + m$$

Je dis qu'on peut intervertir les deux termes b et c, par exemple, sans changer la valeur de la somme.

En effet (7) :

$$a + b + c + d + \ldots + k + l + m$$
$$= (a + b + c) + (d + \ldots + k + l + m)$$

et (10) :

$$a + b + c = a + c + b$$

D'où :

$$a + b + c + d + \ldots + k + l + m$$
$$= (a + c + b) + (d + \ldots + k + l + m)$$

et

$$a + b + c + d + \ldots + k + l + m$$
$$= a + c + b + d + \ldots + k + l + m$$

12. Théorème. — *Dans une somme d'un nombre quelconque de termes, on peut intervenir à volonté l'ordre des termes sans changer la valeur de la somme.*

En effet, en appliquant un nombre convenable de fois le théorème précédent, on peut amener à un rang déterminé l'un quelconque des termes de la somme.

Exemple :

$$a + b + c + d + e + f = b + a + e + d + c + f$$

car on a successivement :

$$a + b + c + d + e + f = b + a + d + c + e + f$$

en intervertissant l'ordre de b et de a, de d et de c.

$$b + a + d + c + e + f = b + a + d + e + c + f$$

en intervertissant l'ordre de e et de c.

$$b + a + d + e + c + f = b + a + e + d + c + f$$

en intervertissant l'ordre de e et de d.

13. Conséquence. — Puisqu'on peut ranger les termes de la somme dans un ordre quelconque, on peut, par exemple, écrire d'abord tous les termes positifs, puis tous les termes négatifs, et, en vertu du théorème (7), on peut faire d'abord la somme des termes positifs et la somme des termes négatifs, puis additionner les deux sommes. D'où la règle suivante :

14. Règle de l'addition de plusieurs nombres algébriques. — *On fait séparément la somme des termes positifs et la somme des termes négatifs ; on calcule ensuite la différence arithmétique des valeurs absolues des deux sommes et on fait précéder cette différence, qui représente la valeur absolue de la somme algébrique cherchée, du signe de la plus grande somme en valeur absolue.*

Exemple : Soit à effectuer l'addition suivante :

$$(+3) + (-4) + (-2) + (+6) + (-1) + (+2) + (+7)$$

On calcule les deux sommes :

$$(+3) + (+6) + (+2) + (+7) = (+18)$$

et

$$(-4) + (-2) + (-1) = (-7)$$

On fait la différence arithmétique de 18 et de 7

$$18 - 7 = 11$$

et on fait précéder 11 du signe + qui est celui de la plus grande somme en valeur absolue. La somme algébrique cherchée est

$$(+ 11)$$

15. Corollaire. — *Des théorèmes (7) et (12), il résulte que pour additionner plusieurs nombres algébriques on peut toujours remplacer deux ou plusieurs termes par leur somme effectuée.*

16. Différence. — On appelle *différence* de deux nombres algébriques le nombre qu'il faut ajouter à l'un d'eux pour reproduire l'autre.

Soient a et b deux nombres algébriques, la différence c de a et de b sera définie par la relation

$$a = b + c$$

qui équivaut par convention à

$$a - b = c$$

On remarquera que la définition précédente ne préjuge rien sur la relation de grandeur de a et de b, et, que, par conséquent, on peut aussi bien faire la différence $a - b$ que la différence $b - a$.

Bien que cela ne signifie rien au sens absolu, on convient de dire qu'on *retranche* b de a ou a de b.

17. Symétrique ou opposé d'un nombre. — On appelle *symétrique* d'un nombre algébrique, un nombre algébrique qui a même valeur absolue que le premier et qui est affecté du signe contraire.

D'après la règle de l'addition de deux nombres algébriques (5) nous voyons immédiatement que la somme d'un nombre et de son symétrique est nulle.

Exemple :

$$(+ 4) \text{ a pour symétrique } (- 4)$$

et la somme

$$(+ 4) + (- 4)$$

est nulle.

Réciproquement, si la somme de deux nombres est nulle, ces nombres sont symétriques l'un de l'autre ; car il n'y a qu'un nombre qui, ajouté à un autre, donne une somme nulle.

18. Soustraction. — Ceci posé, considérons l'égalité

$$a = b + c \quad \text{(I)}$$

dans laquelle c représente la différence de a et de b. Il n'est pas évident que c existe ; la remarque suivante le démontre. On peut ajouter aux deux membres de l'égalité le symétrique b' de b:

$$a + b' = b + c + b' \quad \text{(II)}$$

Si l'égalité (I) est possible, l'égalité (II) l est aussi et réciproquement. Mais (17) :

$$b + b' = 0$$

L'égalité (II) se réduit donc à :

$$a + b' = c$$

qui signifie que la différence de a et de b est égale à la somme de a et du symétrique de b. Or, cette somme est toujours possible, donc c existe toujours, c'est un nombre positif, négatif ou nul.

19. Règle. — *Pour soustraire un nombre algébrique d'un autre, il suffit d'ajouter à ce dernier le premier nombre changé de signe.*

Exemple : Soit à retrancher (—15) de (+ 7).

On a :

$$(+ 7) - (- 15) = (+ 7 + (+ 15 = (+ 22)$$

Remarque. — Pour simplifier l'écriture, on convient de supprimer, quand on écrit une somme de nombres algébriques, les signes + d'addition qui séparent ces nombres, ainsi que les parenthèses. En vertu de cette convention, la somme

$$(+ 2) + (-3) + (-5) + (+7) + (+11) + (-1)$$

devient

$$+ 2 - 3 - 5 + 7 + 11 - 1$$

La même convention peut s'appliquer au signe — de la soustraction, à condition de remplacer le nombre algébrique qui suit ce signe par son symétrique. Ainsi la différence

$$(+ 7) - (- 15)$$

étant égale à la somme

$$(+ 7) + (+ 15)$$

on peut l'écrire

$$+ 7 + 15$$

Enfin on se dispense en général d'écrire le signe + devant un terme, quand ce terme commence à la ligne ainsi l'on écrit :

$$2 - 3 - 5 + 7 + 11 - 1$$
$$7 + 15$$

Ces simplifications ne doivent pas faire perdre de vue qu'il s'agit de nombres *algébriques, affectés de signe*, et

que les signes + et — qui subsistent dans l'écriture, n'ont pas le même sens que les signes + et — servant à indiquer les opérations d'addition et de soustraction.

20. Théorème. — *Le symétrique d'une somme est la somme des symétriques des termes de cette somme.*

En effet, soit :

$$S = a + b + c + d + e$$

une somme algébrique et soient a, b', c', d', e', les symétriques de a, b, c, d, e.

On a (17) :

$$a+a' = 0 \quad b+b' = 0 \quad c+c' = 0 \quad d+d' = 9 \quad e+e' = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}(a+a')+(b+b')+(c+c')+(d+d')+(e+e') &= 0\\ a+a'+b+b'+c+c'+d+d'+e+e' &= 0\\ a+b+c+d+e+a'+b'+c'+d'+e' &= 0\\ (a+b+c+d+e)+(a'+b'+c'+d'+e') &= 0\end{aligned}$$

La somme

$$S' = a' + b' + c' + d' + e'$$

est donc bien le symétrique de S.

21. Théorème. — *Pour retrancher une somme algébrique d'un nombre ou d'une somme algébrique, il suffit de l'écrire à la suite du nombre ou de la somme en changeant les signes de tous ses termes.*

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement du théorème (20).

Soit à retrancher une somme

$$S = a + b + c + d$$

d'un nombre ou d'une somme algébrique N. On sait que la différence

$$N - S$$

est égale à la somme

$$N + S'$$

de N et du symétrique S' de S. Or S' est égal à la somme des symétriques de a, b, c, d, c'est-à-dire à la somme de ces nombres changés de signe.

Exemple : Pour retrancher la somme

$$S = (+2) + (-3) + (-4) + (+1)$$

de N, il suffit d'écrire

$$N + (-2) + (+3) + (+4) + (-1)$$

Ou, en supprimant les parenthèses, d'après la convention adoptée plus haut :

$$S = +2 - 3 - 4 + 1$$
$$N - S = N - 2 + 3 + 4 - 1$$

La considération du symétrique d'un nombre permettant de substituer l'addition à la soustraction, tous les théorèmes démontrés plus haut à propos des sommes s'appliquent aussi aux différences.

En particulier, on peut énoncer le théorème suivant qui se déduit immédiatement des théorèmes (12) et (21).

22. Théorème. — *Pour retrancher une somme d'une somme, il suffit d'ajouter les termes de la première somme, changés de signe, aux termes de la seconde, dans un ordre quelconque.*

Soit, par exemple, à retrancher

$$(+2) + (-3) + (+6) + (-4) + (-1)$$

de

$$(-7) + (-5) + (+4) + (+11) + (-3)$$

On peut écrire :

$$[(-7) + (-5) + (+4) + (+11) + (-3)] -$$
$$[(+2) + (-3) + (+6) + (-4) + (-1)] =$$
$$(-7) + (-5) + (+4) + (+11) + (-3) + (-2) + (+3) + (-6) + (+4) + (+1)$$

et dans cette somme on peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des facteurs : on peut l'écrire par exemple :

$$(-7) + (-2) + (-5) + (+4) + (+1) + (+4) + (-6) + (+3) + (+11) + (-3)$$

Or, par démonstration, faire la somme de (—7) et de (—2), c'est la même chose que faire la différence de (—7) et de (+2)

$$(-7) + (-2) = (-7) - (+2)$$

on voit de même que

$$(-5) + (+4) = (-5) - (-4)$$
$$(-5) + (+4) + (+1) = (-5) + (+4) - (-1)$$
$$= (-5) - (-4) - (-1)$$

Et la différence ci-dessus peut s'écrire :

$$(-7) - (+2) + (-5) - (-4) - (-1) + (+4) - (+6) - (-3) + (+11) + (-3)$$

Cette considération nous montre que, dans les calculs algébriques, nous pourrons avoir des suites de nombres, les uns à additionner, les autres à retrancher. Ces suites de nombres devront toujours être regardées comme des sommes algébriques, étant bien entendu que les termes précédés du signe — de soustraction doivent être remplacés dans la pensée par leur symétrique.

Ainsi a, b, c, d, e... n étant des nombres algébriques positifs ou négatifs, on n'aura pas à s'occuper dans les calculs ni dans les raisonnements de l'ordre dans lequel les opérations entre ces nombres sont écrites :

$$a-b+b+d-e+\ldots-n = -b+a+d-e+c+\ldots-n$$

Multiplication et division des nombres algébriques

23. Définition. — *Multiplier un nombre* (multiplicande) *par un autre* (multiplicateur), *c'est en trouver un troisième* (produit) *qui se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur avec l'unité positive.*

Constatons d'abord que cette définition s'applique au cas *particulier* des nombres arithmétiques.

Nous avons dit, en effet, en arithmétique que le produit du multiplicande par le multiplicateur était la somme d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y avait d'unités dans le multiplicateur.

Si on appelle M le multiplicande, m le multiplicateur, P le produit, on voit que P *se compose* de la somme de m termes égaux à M, et que m *se compose de* m termes égaux à l'unité. Le produit se compose donc bien avec le multiplicande, comme le multiplicateur avec l'unité.

24. Multiplication. — Deux cas peuvent se présenter :

1° Le multiplicateur est positif ;

2° Le multiplicateur est négatif.

Soient M, m, P, le multiplicande, le multiplicateur et le produit.

Premier cas. — Le multiplicateur est la *somme de m termes égaux* à l'unité positive, le produit est donc la *somme de m termes égaux* au multiplicande.

Second cas. — Le multiplicateur est la *somme de m termes égaux au symétrique* de l'unité positive, le produit est donc la *somme de m termes égaux au symétrique* du multiplicande.

Nous remarquerons que, dans le premier cas, le produit s'obtient en effectuant le produit arithmétique des deux facteurs et en faisant précéder ce produit du signe du multiplicande.

Dans le second cas, le produit s'obtient en effectuant le produit arithmétique des deux facteurs et en faisant précéder ce produit du signe du symétrique du multiplicande, c'est-à-dire du signe contraire du signe du multiplicande.

25. Règle des signes. — Il suit de là que :

1° Si les deux facteurs sont de *même signe*, le produit est *positif* ;

2° Si les deux facteurs sont de *signes contraires*, le produit est *négatif*.

Exemples :

$$(+2) \times (+3) = (+6) + \text{ par } + \text{ donne } +$$
$$(-2) \times (-3) = (+6) - \text{ par } - \text{ donne } +$$
$$(-2) \times (+3) = (-6) - \text{ par } + \text{ donne } -$$
$$(+2) \times (-3) = (-6) + \text{ par } - \text{ donne } -$$

26. Définition. — *Faire le produit de plusieurs facteurs, c'est multiplier le premier par le second, le produit obtenu par le troisième et ainsi de suite jusqu'au dernier.*

27. Généralisation de la règle des signes. — On remarquera que, dans la suite des multiplications, le signe change chaque fois qu'on multiplie par un facteur négatif, il reste le même si on multiplie par un facteur positif. Deux facteurs négatifs au point de vue du signe, ont le même effet qu'un facteur positif, puisque le signe changé par la première multiplication se trouve rétabli par la seconde.

Exemple : $(+2) \times (-3) \times (-5)$

on a :

$$(+2) \times (-3) \times (-5) = (-6) \times (-5) = (+30)$$

En conséquence, si un produit de plusieurs facteurs contient un *nombre pair de facteurs négatifs*, ce produit est *positif*. Si un produit de plusieurs facteurs contient un *nombre impair de facteurs négatifs*, il est lui-même *négatif*.

Remarque. — Quand les facteurs sont représentés par des lettres, on se dispense, en général, d'écrire le signe $\times$, à moins qu'une confusion ne soit possible.

28. Théorème. — *Dans un produit de deux ou de plusieurs facteurs algébriques, on peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.*

En effet, la règle des signes prouve que le signe du produit ne change pas. Quant à la valeur absolue du produit, elle ne change pas, puisque nous avons démontré en arithmétique qu'un produit ne change pas quand on intervertit l'ordre de ses facteurs.

29. Corollaire. — Dans un produit de plusieurs facteurs algébriques, on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué.

30. Corollaire. — Pour multiplier un nombre algébrique par un produit, il suffit d'intercaler ce nombre parmi les facteurs du produit.

31. Théorème. — *Pour multiplier une somme par un nombre, on peut multiplier chacun des termes de la somme par ce nombre et ajouter les résultats.*

Soit à multiplier la somme :

$$S = a + b + c + \dots + n$$

par un nombre algébrique m.

Par définition, multiplier la somme S par m, c'est faire la somme de m sommes égales à S si m est positif, et la somme de m (en valeur absolue) sommes symétriques de S si m est négatif. Dans les deux cas, la démonstration est la même : Supposons m positif.

On peut écrire sous la forme de m sommes égales à S.

$$P = (a + b + c + d + \dots + n) + (a + b + c + d + \dots + n) + (a + \dots + n) + \dots$$

ou :

$$P = a + b + c + d + \dots + n + a + b + c + \dots + n + a + b + \dots + c + \dots + b + a + b + \dots\dots$$

et, comme on peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des termes d'une somme :

$$P = a + a + \dots + a + a + b + b + \dots\dots + b + c + c + \dots + c + \dots + n + n + \dots + n$$

Ce qui montre que le produit P est la somme de m nombres égaux à a, plus m nombres égaux à b, plus m nombres égaux à c et ainsi de suite, c'est-à-dire qu'il est la somme de $a \times m$, plus $b \times m$, plus $c \times m$, etc.

$$P = a\,m + b\,m + c\,m + \dots + n\,m$$

ce qui démontre le théorème.

Si m était négatif, on prendrait sa valeur absolue m' et on répéterait la démonstration en remplaçant $a, b, c, \dots n$, par leurs symétriques $a', b', c', \dots n'$, on trouverait :

$$P = a'\,m' + b'\,m' + c'\,m' + \dots n'\,m'$$

Or, si dans cette égalité on remplace m' par m, cela revient à changer tous les signes des produits $a'\,m', b'\,m'$, etc. On remarquera que, pour rétablir ces signes, il suffit de changer les signes de $a', b', c' \dots n'$, c'est-à-dire de remplacer ces nombres par leurs symétriques $a, b, c \dots n$. En définitive, on a donc :

$$a'\,m' + b'\,m' + c'\,m' + \dots + n'\,m' = am + bm + cm + \dots + nm$$

d'où :

$$P = am + bm + cm + \dots + nm$$

32. Théorème. — *Pour multiplier un nombre par une somme, il suffit de multiplier le nombre par chacun des termes de la somme et d'ajouter les résultats.*

La démonstration résulte des théorèmes (28) et (31).

33. Théorème. — *Pour multiplier une somme par une somme, il suffit de multiplier tous les termes de la première successivement par tous les termes de la seconde et d'ajouter les résultats.*

Soit à faire le produit de

$$S = a + b + c + d \dots + n$$

par

$$S' = a' + b' + c' + d' + \dots + n'$$

On a :

$$S \times S' = S\,a' + S\,b' + S\,c' + S\,d' + \dots + S\,n'$$

et :

$$\begin{aligned} S\,a' &= a\,a' + b\,a' + \dots + n\,a' \\ S\,b' &= a\,b' + b\,b' + c\,b' + \dots + n\,b' \\ &\dots \\ S\,n' &= a\,n' + b\,n' + c\,n' + \dots + n\,n' \\ \hline S \times S' &= aa' + ba' + \dots + ab' + \dots + an' + bn' + \dots \end{aligned}$$

34. Théorème. — *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

1° La condition est nécessaire ; car, si elle n'était pas réalisée, la valeur absolue du produit ne serait pas nulle.

2° La condition est suffisante ; car, si elle est réalisée, la valeur absolue du produit est nulle et ce produit lui-même est nul.

35. Puissance. — *On appelle puissance d'un nombre algébrique le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.*

Cette définition répond à celle donnée en arithmétique.

Nous remarquons qu'une puissance d'un nombre positif est toujours positive, mais qu'une puissance d'un nombre négatif est positive ou négative suivant que l'exposant de la puissance est pair ou impair (27).

36. Racine. — *On appelle racine d'indice m, ou racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre algébrique, le nombre dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est égale à ce dernier.*

Racine $m^{\text{ième}}$ de a s'écrit : $\sqrt[m]{a}$

ce symbole s'appelle un *radical*.

Nous remarquerons que la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre positif est toujours positive ; donc, *en supposant qu'il existe un nombre arithmétique dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale à la valeur absolue de a*, un nombre positif a toujours une racine $m^{\text{ième}}$ positive. D'autre part, si m est pair, il a aussi une racine $m^{\text{ième}}$ négative, puisqu'une puissance paire d'un nombre négatif est positive,

Par contre, et pour les mêmes raisons, un nombre a négatif n'a de racine $m^{ième}$ que si m est impair, et cette racine est négative.

Définition. — *Diviser un nombre (dividende) par un autre (diviseur), c'est en trouver un troisième (quotient) qui se compose avec l'unité positive comme le dividende avec le diviseur.*

Cette définition s'applique aux nombres arithmétiques quand il s'agit du *quotient exact* de deux nombres. Soient, en effet, deux nombres arithmétiques A et B, nous avons vu que, dans tous les cas (Arithm.), le quotient exact de ces deux nombres était représenté par la fraction $\frac{A}{B}$.

On a :

$$A = B \times \frac{A}{B}$$

Le dividende est égal au produit du quotient exact par le diviseur et, d'après la définition (23) qui s'applique aux nombres arithmétiques, le dividende A (devenu produit) se compose avec le diviseur B (devenu multiplicande), comme le quotient $\frac{A}{B}$ (devenu multiplicateur) avec l'unité.

37. Inverse d'un nombre. — *On appelle inverse d'un nombre algébrique, un nombre algébrique précédé du même signe que le premier et dont la valeur absolue est l'inverse de la valeur absolue du premier (Arithm.).*

Exemple :

$$\text{L'inverse de } -3 \text{ est } -\frac{1}{3}$$

$$\text{L'inverse de } +\frac{4}{5} \text{ est } +\frac{5}{4}$$

38. Théorème. — *Le produit d'un nombre algébrique par son inverse est égale à + 1.*

En effet, la valeur absolue du produit est égale à 1 (Arithm.). Quant au signe, il est nécessairement positif, puisque le nombre et son inverse ont, par définition, le même signe (24).

$$(-3) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +1$$

39. Théorème. — *Pour obtenir le quotient exact de deux nombre algébriques, il suffit de multiplier le dividende par l'inverse du diviseur.*

En effet, soient A et B les deux nombres, Q le produit de A et de l'inverse, on a :

$$A \times \frac{1}{B} = Q$$

et, en multipliant par B les deux membres de cette identité :

$$A \times \frac{1}{B} \times B = Q \times B$$

et comme (38) :

$$\frac{1}{B} \times B = 1$$

on a :

$$A = Q \times B = B \times Q$$

A, produit, se compose avec B, multiplicande, comme Q, multiplicateur, avec l'unité positive ; ou, en appliquant la définition de la division : le quotient Q se compose avec l'unité positive, comme le dividende A avec le diviseur B.

40. Conséquence. — Le quotient exact de deux nombres algébriques est précédé du même signe que le produit de ces deux nombres ; sa valeur absolue est la fraction arithmétique simple ou complexe, ayant pour numérateur la valeur absolue du dividende et, pour dénominateur, la valeur absolue du diviseur.

41. Fractions algébriques. — On convient de représenter le quotient exact de deux nombres algébriques a et b, sous la forme $\frac{a}{b}$ dans laquelle a et b, restent des nombres algébriques affectés de signe. Par définition, le quotient écrit de cette façon est identique au quotient obtenu suivant la règle précédente (40).

Soient les deux nombres algébriques -3 et $+4$, on a identiquement :

$$\frac{-3}{+4} = -\frac{3}{4}$$

42. Théorème. — *Si on multiplie ou si on divise les deux termes d'une fraction algébrique par un même nombre algébrique, la valeur de cette fraction ne change pas.*

Soit la fraction $\frac{a}{b}$, multiplions ses deux termes par par le nombre c, je dis que

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

En effet :

1° La valeur absolue du quotient ne change pas (Arithm.).

2° Le signe du quotient ne change pas, car, de deux choses l'une : ou c est positif et le signe de chacun des termes de la fraction reste le même, ou c est négatif et les deux termes de la fraction changent de signe en même temps. Dans les deux cas, le signe de $a\,c \times b\,c$ est le même que celui de $a \times b$ et, par conséquent, celui de $\frac{a \times c}{b \times c}$ est le même que celui de $\frac{a}{b}$ (40).

43. Conséquences. — De notre définition et du théorème (42), il suit que tous les théorèmes démontrés en arithmétique à propos des fractions simples ou complexes s'étendent aux fractions algébriques.

En particulier, la simplification et la réduction des fractions algébriques se font au signe près, comme celles des fractions arithmétiques. Quant aux signes, les règles que nous avons établies déjà à propos de la multiplication et de la division permettent, dans tous les cas, de les déterminer.

Exemple : Réduire au même dénominateur les fractions : $\frac{-4}{+5}$ $\frac{+2}{-3}$ $\frac{-6}{-7}$

Le plus petit multiple commun des dénominateurs est

$$(+5) \times (-3) \times (-7) = +105$$

Les fractions réduites sont :

$$\frac{(-4) \times (-3) \times (-7)}{+105} \quad \frac{(+2) \times (+5) \times (-7)}{+105}$$

$$\frac{(-6) \times (+5) \times (-3)}{+105}$$

Exercices

1° Effectuer les opérations :

$$\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right)$$

$$\left(+\frac{7}{2}\right) - \left(+\frac{11}{4}\right) + \left(+\frac{9}{5}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right)$$

$$(+1) + \left(-\frac{8}{9}\right) - (-4{,}15) + (0{,}56)$$

2° Calculer $a - b$ pour :

$$a = -8{,}2 \text{ et } b = -5{,}7 \; ; \; a = \frac{3}{4} \text{ et } b = -\frac{3}{4} \; ;$$
$$a = -0{,}56 \text{ et } b = 0{,}25$$

3° Calculer $a - (b - c) - [b - (a + c)]$ pour
$a = (-1)$, $b = (+10)$, $c = (+7)$.
$a = (-4)$, $b = (-6)$, $c = (+9)$.

4° Effectuer les opérations :

$(-7) \times (+13)$, $(+5{,}3) \times (-4{,}25)$, $(-5{,}5) \times (-0{,}051)$.

$$\left(+\frac{13}{17}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right); \; (-9)[(+13)+(-17)-(-18)+(+3)];$$
$$\left[\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{1}{7}\right)\right]^2$$

5° Effectuer les opérations :

$$\left(+\frac{7}{11}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right); \; \left(-\frac{67}{72}\right) : \left(-\frac{7}{15}\right);$$
$$\left(9 + \frac{-5}{7} - 8\right) : \left[\frac{-3}{4} + (9+11) + \left(-\frac{3}{5}\right)\right]$$

6° Calculer :

$$\frac{(a - b + c)c}{\sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2-b^2+\frac{1}{16}}}$$

pour :

$$a = \frac{1}{5}, \; b = \left(-\frac{1}{4}\right), \; c = 3.$$

Expressions algébriques

44. Définition. — *On appelle* expression algébrique *un ensemble de lettres et de nombres réunis entre eux par des signes indiquant une suite d'opérations à effectuer sur les nombres explicitement écrits ou représentés par des lettres.*

Si l'on attribue aux lettres des valeurs numériques explicites, on peut effectuer, d'après les règles établies plus haut, tous les calculs indiqués dans l'expression qui se réduit alors à un nombre algébrique. Ce dernier est la *valeur numérique* de l'expression.

Exemple : Soit l'expression algébrique :

$$3\,ab + 2\,a - b$$

si l'on attribue aux lettres a et b les valeurs :

$$a = -4 \quad b = 2$$

l'expression devient :

$$3 \times (-4) \times 2 + 2 \times (-4) - 2 = -24 - 8 - 2 = -34$$

la *valeur numérique* de l'expression est -34.

45. Equivalence. — *On dit que deux expressions algébriques sont équivalentes, lorsque leurs valeurs numériques sont égales, quel que soit le système de valeurs adopté pour les lettres.*

L'égalité de deux expressions équivalentes s'appelle une *identité*.

Exemple : L'égalité suivante a ses deux membres équivalents ; c'est une identité :

$$5\,a^2 - 3\,a\,b - 3\,b^2 = (a\,.\,b)^2 + (2\,a + 2\,b)(2\,a - 2\,b) - a\,b$$

En effet, si on remplace a et b dans les deux membres par un système de valeurs quelconque, tel que :

$$a = 3 \quad b = -2$$

(ou tout autre), on a :

$$5 \times 3^2 - 3 \times 3 \times (-2) - 3 \times (-2)^2 = [3 - (-2)]^2 + [2 \times 3 + 2 \times (-2)] \times [2 \times 3 - 2 \times (-2)] - 3 \times (-2)$$

ou :

$$5 \times 9 + 9 \times 2 - 3 \times 4 = (3+2)^2 + (6-4) \times (6+4) + 6$$
$$45 + 18 - 12 = 25 + 2 \times 10 + 6$$
$$51 = 51$$

Exercice : Faire la même vérification :

1° pour $a = -1 \quad b = 1$
2° pour $a = 4\,b = -3$
3° pour $a = b = 2$.

46. Monôme. — *On appelle monôme une expression algébrique qui ne renferme que des signes de multiplication.* (Rappelons qu'on se dispense généralement d'écrire ces signes lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.)

Exemple : L'expression

$$3\,a\,b^2\,c$$

est un monôme.

Le *nombre explicite* qui précède souvent le monôme prend le nom de *coefficient*. Il peut être fractionnaire ou soumis à une extraction de racine sans que l'expression cesse d'être un monôme.

Exemple : Les expressions

$$\frac{3}{2}a^2\,b\,c, \quad -\sqrt{4}\,b^3\,c^3 \quad \frac{2}{\sqrt{5}}\,a\,b^4\,c^3$$

sont des monômes.

Deux monômes sont semblables lorsqu'ils ne peuvent ne différer que par leurs coefficients et leurs signes.

Exemple : Les monômes

$$2\,a\,b \qquad -\frac{3}{4}a\,b \qquad \sqrt{5}\,a\,b$$

sont semblables.

47. Degré. — On appelle *degré d'un monôme*, la somme des exposants des lettres qui entrent dans ce monôme.

Exemple : Le monôme

$\frac{3}{2}a^2\,b\,c$ est de degré $2 + 1 + 1 = 4$

$\sqrt{4}\,b^3\,c^2$ est de degré $3 + 2 = 5$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\,a\,b^4\,c^4$ est de degré $1 + 3 + 4 = 8$

On voit qu'une lettre dépourvue d'exposant est considérée comme ayant l'exposant 1.

48. Expressions rationnelles. — *On dit qu'une expression est rationnelle par rapport à une lettre, lorsque parmi les opérations à effectuer sur cette lettre, il ne se trouve pas d'extraction de racine.*

Exemple : L'expression

$$a^2\,b + a\,b^2$$

est rationnelle par rapport à a et par rapport à b.

L'expression

$$a\sqrt{b} + a^2\sqrt[3]{b} - a^3\,c$$

est rationnelle par rapport à a et à c ; elle est irrationnelle par rapport à b.

49. Expressions entières. — *On dit qu'une expression est* entière *par rapport à une lettre, lorsque cette lettre n'entre dans la composition d'aucun diviseur.*

Exemple : $3\,a^4\,b + \frac{7}{2}$ est une expression entière par rapport à a et à b.

$\dfrac{4\,a^5\,b + \frac{3}{2}b^6}{5\,b^2\,c}$ est une expression entière par rapport à a ; elle est fractionnaire par rapport à b et à c

50. Polynôme. — *On appelle* POLYNOME *une somme algébrique de monômes.*

On appelle *termes* du polynôme les divers monômes qui composent ce dernier, avec le signe dont ils sont précédés.

Exemple : L'expression

$$-3a^5b + \frac{4}{5}a^4b^3 - 2a^3b^3 + \frac{5}{4}a^2b^4 - \frac{1}{3}ab^5$$

est un polynôme, dont les termes sont

$$-3a^5b, + \frac{4}{5}a^4b^2, -2a^3b^3, \text{ etc.}$$

Le degré d'un polynôme est celui de son terme de plus haut degré. Lorsque tous les termes ont le même degré, on dit que le polynôme est *homogène.*

Un polynôme composé de deux termes est un *binôme* ; un polynôme composé de trois termes est un *trinôme.*

51. Polynômes ordonnés. — *On dit qu'un polynôme est* ordonné *par rapport à une lettre, lorsque l'exposant de cette lettre va constamment en descendant ou constamment en montant, quand on passe d'un terme au suivant.*

Le polynôme de l'exemple précédent est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a et par rapport aux puissances croissantes de b.

Exercices

7. — Réduire les termes semblables, puis ordonner par rapport aux puissances décroissantes de b :

1° $8a^2b^2 + 7a^4 + 6a^3b - 5a^4 - 3ab^3 - 2b^4 + ab^3$
$+ 2a^4 \quad 12a^2b^2 + 3a^4 + 5ab^3 + 5b^4 - 4ab^3$

2° $\frac{2}{3}a^2b + \frac{4}{5}a^3 - \frac{3}{4}ab^2 - 7b^3 + \frac{1}{5}ab^2 - \frac{1}{3}a^3 +$
$\frac{2}{9}b^3 - \frac{5}{2}a^3 - \frac{6}{7}a^2b + \frac{2}{3}ab^2 + a^3$

et trouver les valeurs numériques de ces polynômes pour a = 1, b = 2.

Opérations sur les expressions algébriques

ADDITION

52. Addition de monômes semblables. — Plusieurs monômes semblables étant donnés, il est facile de les additionner en s'appuyant sur les théorèmes (31) et (32).

Soit à faire la somme des monômes :

$$+3ab^2, \qquad -\frac{2}{3}ab^2, \qquad +5ab^2$$

Cette somme n'est autre que le polynôme

$$3ab^2 - \frac{2}{3}ab^2 + 5ab^2$$

Mais celui-ci peut être considéré comme le produit de la somme $3 - \frac{2}{3} + 5$ par le nombre ab^2 (31).

$$3ab^2 - \frac{2}{3}ab^2 + 5ab^2 = \left(3 - \frac{2}{3} + 5\right)ab^2$$

La somme des coefficients entre parenthèses est facile à effectuer d'après la règle (14).

On voit que *la somme de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable aux termes de la somme.*

Il ne faut pas oublier que, si un monôme n'est précédé d'aucun coefficient, il est censé avoir le coefficient 1.

53. Somme de plusieurs monômes quelconques. — *C'est évidemment le polynôme obtenu en écrivant les uns à la suite des autres les différents termes de la somme avec leurs signes.*

Si le polynôme contient des termes semblables on en fait la somme algébrique d'après la règle précédente. Cette opération s'appelle : Réduction des termes semblables.

54. Somme des polynômes. — *La somme de plusieurs polynômes est le polynôme obtenu en écrivant les uns à la suite des autres les différents polynômes à additionner, sans oublier de faire précéder de son signe le premier terme de chaque polynôme.*

On réduit les termes semblables s'il y en a.

Au cas où les termes de chacun des divers polynômes à additionner sont semblables à certains termes des autres polynômes, il est plus simple d'effectuer l'opération en écrivant les polynômes les uns au-dessous des autres, les termes semblables étant écrits dans une même colonne.

Exemple : Soit à additionner les polynômes :

$$\begin{array}{r}
4a^3b^2 + 3a^2b^3 + 2ab^4 \\
7a^4b + 2a^3b^2 + 6a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\
a^5 - a^3b^2 + ab^4 \\
-3a^4b - 5a^3b^2 + 4a^2b^3 - 7ab^4 + 6b^5
\end{array}$$

Rangeons ces quatre polynômes les uns au-dessous des autres, en plaçant les termes semblables dans les mêmes colonnes, et additionnons les termes de chaque colonne :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 4a^3b^2 + & 3a^2b^3 + & 2ab^4 & \\
 & 7a^4b + & 2a^3b^2 + & 6a^2b^3 - & ab^4 - & b^5 \\
a^5 & & - a^3b^2 & & + ab^4 & \\
 & -3a^4b - & 5a^3b^2 + & 4a^2b^3 - & 7ab^4 + & 6b^5 \\
\hline
a^5 & + 4a^4b & & + 13a^2b^3 - & 5ab^4 + & 5b^5
\end{array}$$

La somme est :

$$a^5 + 4a^4b + 13a^2b^3 - 5ab^4 + 5b^5$$

Exercices

8. — Faire la somme des polynômes :

$$x + x^2 + a\,;\ x^3 - x + 4x^2 - 3\,;\ x - 4.$$

SOUSTRACTION

55. Différence de deux monômes. — *Pour faire la différence de deux monômes il suffit d'ajouter à l'autre le symétrique de celui qu'on veut retrancher* (17 et 19).

Soit, par exemple, à retrancher

$$-2abc \text{ de } 4a^3b$$

La différence est

$$4a^3b + 2abc$$

Si les monômes sont semblables, on les réduit naturellement de la même manière que pour l'addition.

56. Différence de deux polynômes. — *On ajoute au premier polynôme le second polynôme dans lequel on a changé les signes de tous les termes.*

Soit à retrancher du polynôme

$$4a^3b^2 - 3a^2b^3 + 2ab^4 - b^5$$

le polynôme

$$3a^4b - 6a^3b^2 + 3ab^4 + b^5$$

Il suffit de faire la somme des deux polynômes en changeant tous les signes du second :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 4a^3b^2 - & 3a^2b^3 + & 2ab^4 - & b^5 \\
-3a^4b + & 6a^3b^2 & & & -3ab^4 - & b^5 \\
\hline
-3a^4b + & 10a^3b^2 & - 3a^2b^3 - & & ab^4 - & 2b^5
\end{array}$$

57. Suite de sommes et différences. — On peut avoir, dans le cours des calculs, une suite de polynômes dont les uns sont à additionner et les autres à retrancher.

Soit par exemple une suite de polynômes, P, P′, P″, P‴, P⁗, dont les uns, P, P⁗ sont à additionner et

les autres P′, P″. P‴ à retrancher. Par convention, on écrit cette suite d'opérations sous la forme

$$P - P' - P'' + P''' - P''''$$

Les règles précédentes permettent de trouver le résultat par une seule opération en remplaçant P′, P″ et P‴ par leurs symétriques (c'est-à-dire en changeant tous les signes des termes de ces polynômes), et en additionnant l'ensemble ainsi modifié de tous les polynômes.

Exemple :

$$\begin{aligned} P &= a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ P' &= 2a^3 - a^2b + ab^2 - 2b^3 \\ P'' &= 4a^2b - 8ab^2 + 4b^3 \\ P''' &= 8a^3 - ab^2 \\ P'''' &= a^2b - b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P - P' - P'' - P''' - P'''' = {} & (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ & - (2a^3 - a^2b + ab^2 - 2b^3) \\ & - (4a^2b - 8ab^2 + 4b^3) + (8a^3 - ab^2) \\ & - (a^2b - b^3) \end{aligned}$$

La somme est :

$$\begin{aligned} S = {} & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 2a^3 \\ & + a^2b - ab^2 + 2b^3 - 4a^2b + 8ab^2 - 4b^3 + 8a^3 \\ & - a^2b - ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

On peut réduire les termes semblables en les recherchant directement dans le polynôme S, ou, pour éviter les erreurs, en posant l'opération :

$$\begin{array}{rrrrr} a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3 & \\ -2a^3 & + a^2b & - ab^2 & + 2b^3 & \\ & - a^2b & + 8ab^2 & - 4b^3 & \\ +8a^3 & & - ab^2 & & \\ & - a^2b & & + b^3 & \\ \hline 7a^3 & - a^2b & + 9ab^2 & & \\ S = 7a^3 & - a^2b & + 9ab^2 & & \end{array}$$

Exercices

9. Soustraire $2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 7$ de $3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 7x + 5$

10. — Etant donné les polynômes :

$$\begin{aligned} P &= 5x^4 - 3xy - 2x^2y^2 + 7xy^3 + 4y^4 \\ P' &= -28y^4 + 18x^4 + 13xy^3 + 15x^3y - 8x^2y^2 \\ P'' &= 31x^2y^2 + 9x^3y + xy^3 + 45y^4 - 2x^4 \end{aligned}$$

Calculer $P + P' - P''$.

MULTIPLICATION

58. Produit de deux ou de plusieurs monômes. — La règle du produit de plusieurs monômes se déduit immédiatement de la règle de la multplication des nombres algébriques.

Soit à effectuer le produit des monômes

$$+2a^3b \qquad -3abc \qquad +\frac{1}{2}b^2c^3$$

Le produit P est

$$P = (+2a^3b) \times (-3abc) \times \left(+\frac{1}{2}b^2c^3\right)$$

ou, ce qui revient au même, en mettant tous les signes de multiplication en évidence :

$$P = (+2) \times a^3 \times b \times (-3) \times a \times b \times c \times \left(+\frac{1}{2}\right)\left(\times b^2 \times c^3\right)$$

et d'après (28) :

$$P = (+2) \times (-3) \times \left(+\frac{1}{2}\right) \times a^3 \times c \times b \times b \times b^2 \times c \times c^3$$

et (29) :

$$\begin{aligned} P &= (-3) \times a^4 \times b^4 \times c^4 \\ P &= -3a^4b^4c^4 \end{aligned}$$

Cet exemple rend suffisamment évidente la règle suivante :

Règle. — *Le produit de plusieurs monômes est un monôme dont le coefficient est le produit algébrique des coefficients de tous les facteurs et qui contient chacune des lettres faisant partie de l'ensemble des facteurs, avec, pour exposant, la somme des exposants de cette lettre dans tous les facteurs du produit.*

Exemple :

$$3x^2 \times (-2)\,a\,x^3 \times 3a^2 = -18a^3x^5$$

— 18 est le produit des trois coefficients 3, — 2 et 3. Le produit contient chacune des lettres a et x contenues dans l'ensemble des facteurs, a a pour exposant 3, somme des exposants 1 et 2 que cette lettre possède dans les facteurs $-2ax^3$ et $3a^2$; x a pour exposant 5, somme des exposants de cette lettre dans les deux facteurs $3x^2$ et $-2ax^3$.

59. Produit de deux polynômes. — Pour faire le produit de deux polynômes, on applique purement et simplement le théorème (33), en observant la règle précédente.

Pour ne pas oublier de termes du produit, on pose généralement l'opération.

Exemple : Effectuer le produit :

$$P = (3ax^2 + 2a^2x + a^3) \times (2bx - 3b^2)$$

On pose :

$$\begin{array}{l} 3ax^2 + 2a^2x^2 + a^3 \\ \qquad 2bx - 3b^2 \\ \hline 6abx^3 + 4a^2bx^2 + 2a^3bx \\ \qquad\qquad - 9ab^2x^2 - 6a^2b^2x - 3a^3b^2 \\ \hline 6abx^3 + 4a^2bx^2 + 2a^3bx - 9ab^2x^2 - 6a^2b^2x - 3a^3b^2 \end{array}$$

La première ligne au-dessous des deux facteurs est le produit du premier polynôme (*multiplicande*) par le premier terme du second (*multiplicateur*). La seconde ligne est le produit du multiplicande par le second terme du multiplicateur. La dernière ligne est la somme de ces deux produits partiels, c'est le produit cherché.

Il peut arriver que les divers produits partiels contiennent des termes semblables. Dans ce cas on écrit les termes de chaque produit partiel au-dessous des termes semblables du produit précédent.

Remarque. — Pour effectuer la multiplication, il est avantageux d'ordonner les polynômes par rapport à une même lettre.

Exemple : Effectuer le produit :

$$P = (-3x^4y + 6x^5 + 7x^3y^2 - 7y^5 - 6x^2y^3 + 8xy^4) \times (4y^3 + 2x^2y - 3xy^2 - x^3)$$

Commençons par ordonner les deux facteurs par rapport à x, et posons l'opération :

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} 6x^5 & - 3x^4y & + 7x^3y^2 & - 6x^2y^3 & + 8xy^4 & - 7y^5 & & & \\ & & x^3 & + 2x^2y & - 3xy^2 & + 4y^3 & & & \\ \hline -6x^8 & + 3x^7y & - 7x^6y^2 & + 6x^5y^3 & - 8x^4y^4 & + 7x^3y^5 & & & \\ & + 12x^7y & - 6x^6y^2 & + 14x^5y^3 & - 12x^4y^4 & + 16x^3y^5 & - 14x^2y^6 & & \\ & & - 18x^6y^2 & + 9x^5y^3 & - 21x^4y^4 & + 18x^3y^5 & - 24x^2y^6 & + 21xy^7 & \\ & & & + 24x^5y^3 & - 12x^4y^4 & + 28x^3y^5 & - 24x^2y^6 & + 32xy^7 & - 28y^8 \\ \hline -6x^8 & + 15x^7y & - 31x^6y^2 & + 53x^5y^3 & - 53x^4y^4 & + 69x^3y^5 & - 62x^2y^6 & + 53xy^7 & - 28y^8 \end{array}$$

Les quatre lignes placées au-dessous des facteurs sont les produits partiels du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. La dernière ligne est la somme de ces quatre produits partiels, c'est le produit cherché :

$$P = -6x^3 + 15x^4y - 21x^5y^2 + 53x^5y^3 - 53x^4y^4 + 69x^3y^5 - 62x^2y^6 + 53xy^7 - 28y^8.$$

On remarquera que les deux facteurs ayant été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x et croissantes de y, le produit est ordonné de la même façon.

Produit de plusieurs facteurs. — On fait d'abord le produit du premier par le second, puis on multiplie le produit obtenu par le troisième facteur, et ainsi de suite.

60 Produits remarquables. — Voici quelques produits remarquables qu'il est indispensable de retenir par cœur :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

EXERCICE : Effectuer les multiplications qui fournissent les produits ci-dessus.

1° $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

En effet, on a :

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad\quad ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

2° $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

En effet, on a :

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

3° $(a+b)(a-b)$

En effet, on a :

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad - b^2 \end{array}$$

61. Mettre une lettre en facteur. — On a souvent intérêt à mettre en évidence dans les calculs, certaines lettres représentant les quantités algébriques qui font l'objet du problème à l'étude.

Lorsque de telles lettres se trouvent contenues dans plusieurs termes d'un même polynôme, on les met souvent en facteurs. C'est-à-dire qu'en s'appuyant sur les théorèmes (31) et (32), on remplace les termes par le produit d'une somme et de la lettre affectée de son exposant.

Ex. : Mettre en facteur le nombre x^3 dans le polynôme :

$$3a^2x^3 + 2abx^3 + 3b^2x^3 = 4a^2x^2 + ax$$

On remplace les trois premiers termes qui contiennent tous x^3 par l'expression :

$$(3a^2 + 2ab + 3b^2)x^3 - 4a^2x^2 + ax$$

Ex. : Mettre b en facteur dans l'expression :

$$a^2b + 2ab^2 + b^3$$

le calcul donne :

$$(a^2 + 2ab + b^2)b$$

Ces transformations sont très utiles : elles permettent de faire apparaître certaines expressions connues. Ainsi, dans l'exemple précédent, on trouve que l'expression donnée contient le carré de $(a+b)$, (60).

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = (a^2 + 2ab + b^2)b$$
$$= (a+b)^2 \times b$$

Remarque. — On comprendra tout de suite combien de telles transformations permettent de simplifier les calculs en essayant de calculer l'expression sous la forme donnée, puis sous sa nouvelle forme, pour un système de valeurs de a et de b. Faisons par exemple :

$$a = 5 \qquad b = -3$$

On a, en calculant d'après la première forme :

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = 5^2 \times (-3) + 2 \times 5 \times (-3)^2 + (-3)^3$$
$$= 25 \times (-3) + 2 \times 5 \times 9 - 27$$
$$= -75 + 90 - 27 = 90 - 102 = -12$$

et en calculant d'après la dernière :

$$(a+b)^2 \times b = (5-3)^2 \times (-3) =$$
$$2^2 \times (-3) = 4 \times (-3) = -12$$

Faire la transformation inverse de la mise en facteur, c'est DÉVELOPPER *une expression*.

62. Coefficients littéraux. — Quand certaines lettres présentent un intérêt tout particulier, on considère souvent les autres au même titre que des nombres algébriques explicites. Ces dernières peuvent alors devenir de véritables coefficients et on dit que ce sont des *coefficients littéraux*.

On représente généralement par les dernières lettres de l'alphabet les nombres inconnus. On réserve les premières lettres pour les coefficients littéraux. Ainsi dans l'expression :

$$2ax^3 - 3abx^2 + 2bx$$

$2a$, $-3ab$ et $2b$ sont les coefficients littéraux de x^3, x^2 et x.

Les coefficients littéraux peuvent être des polynômes. Par exemple dans l'expression :

$$(a+b)x^2 - (a-b)y^2$$

$(a+b)$ et $(a-b)$ sont les coefficients de x^2 et de y^2. Ils peuvent être enfin des expressions plus ou moins complexes ; par exemple : $(a-b)(a+b)$, $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$, $(2a+b)(a+2b)$, etc.

On a en général avantage à conserver ces coefficients dans les calculs sans essayer de développer les expressions. Les débutants sont constamment tentés de développer et c'est une perte de temps.

Ex. : Soit à effectuer le produit :

$$P = [2(a+b)x^2 - 3(a-b)y^2] \times [3(a-b)x + 2(a+b)y]$$

Posons l'opération sans développer les polynômes :

$$\begin{array}{ll} 2(a+b)x^2 & -3(a-b)y^2 \\ 3(a-b)x & +2(a+b)y \\ \hline 6(a+b)(a-b)x^3 & -9(a-b)^2xy^2 \\ & +4(a+b)^2x^2y - 6(a+b)(a-b)y^3 \\ \hline 6(a+b)(a-b)x^3 & -9(a-b)^2xy^2 + 4(a+b)^2x^2y - 6(a+b)(a-b)y^3 \end{array}$$

Si l'on remarque que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (60), le produit peut aussi s'écrire :

$$P = 6(a^2 - b^2)x^3 - 9(a - b)^2 x y^2 + 4(a + b)^2 x^2 y - 6(a^2 - b^2) y^3$$

On voit que, dans les calculs, les quantités entre parenthèses peuvent toujours être considérées comme un nombre algébrique représenté par une seule lettre.

Exercices

11. — Multiplier $3 a x^4 - 4 a^3 x^2 + 5 a^4 x - 8 a^5$ par $3 a x^3 - 7 a^2 x^2 + 6 a^4$.

12. — Calculer la valeur numérique du polynôme

$$5 x^4 - 3 x^3 + x^2 - 14 x + 9$$

pour $x = 2$.

13. — Effectuer la multiplication de $(a + b) x + (a - b) y$ par $(a - b) x - (a + b) y$.

14. — Effectuer $(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4)(a + b)$.

15. — Démontrer que le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.

16. — Démontrer que la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est plus grande que leur moyenne géométrique.

17. — Elever au carré les polynômes :

1° $a + b + c$ 2° $a + b - c$

3° $a + b + c + d$

DIVISION. — SIMPLIFICATION DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES

63. Définition. — *Par définition le quotient exact de deux expressions algébriques s'écrit sous la forme d'une fraction ayant pour numérateur le dividende, et pour dénominateur le diviseur.* Ex. :

$$(a^2 x^3 + 4 a b x^2 + b^2 x) : (a x^2 + b x) = \frac{a^2 x^3 + 4 a b x^2 + b^2 x}{a x^2 + b x}$$

La fraction algébrique ainsi obtenue pourra se simplifier si ses deux termes contiennent un même facteur. C'est cette simplification que nous allons étudier.

64. Division de deux monômes contenant une seule et même lettre. — Soit à diviser par exemple le monôme $5 a^7$ par le monôme $3 a^3$. Le quotient est, par définition $\frac{5a^7}{3a^3}$. Or, cette fraction algébrique peut se simplifier, car on peut diviser ses deux termes par a (42).

$$\frac{5 a^7}{3 a^3} = \frac{5 a^4}{3} = \frac{5}{3} a^4$$

On voit donc que pour diviser $5 a^7$ par $3 a^3$, *il suffit de diviser les coefficients et de retrancher de l'exposant du dividende l'exposant du diviseur.*

Ex. : Réduire la fraction $\frac{15 a^2}{25 a^5}$ à sa plus simple expression :

$$15 a^2 = 3 \times 5 \times a^2$$
$$25 a^5 = 5 \times 5 \times a^5 = 5 \times 5 \times a^2 \times a^3$$
$$\frac{15 a^2}{25 a^2} = \frac{3 \times 5 \times a^2}{5 \times 5 \times a^2 \times a^3} = \frac{3}{5 a^3}$$

Dans tous les cas, on obtient donc le quotient simplifié en retranchant, à l'exposant des deux termes de la fraction, l'exposant du terme qui a la plus faible puissance.

Suivant les conventions algébriques et arithmétiques, *l'exposant* 0 *doit être considéré comme exprimant le quotient* 1 *de deux termes égaux* :

$$\frac{a^7}{a^7} = a^0 = 1$$

65. — Division de deux monômes quelconques. — La fraction qui exprime le quotient exact des deux monômes pourra se simplifier si ses termes contiennent des facteurs communs

Ex. : Soit à diviser $42 a^2 b^3 c^3 d$ par $18 a b^2 c^3$. Le quotient est

$$\frac{42 a^2 b^3 c^3 d}{18 a b^2 c^2}$$

Chaque terme de cette fraction contient le facteur : $6 a b c$ et on peut écrire :

$$\frac{42 a^2 b^3 c^3 d}{18 a b^2 c^2} = \frac{6 a b^2 c^2 \times 7 a b c d}{3 \times 6 a b^2 c^2}$$

$$\frac{42 a^2 b^3 c^3 d}{18 a b^2 c^2} = \frac{7}{3} a b c d$$

Ex. : $$\frac{8 a^3 b^2 c}{2 a^5 b c^3 d} = \frac{4 b}{a^2 c^2 d}$$

66. Division d'un polynôme par un monôme. — Fraction dont l'un des termes est un monôme et l'autre un polynôme.

Ex. : *Diviser*

$$4 a^2 b^3 x^2 + 8 a^3 b^2 x - 16 a^4 b$$

par

$$2 a^2 b$$

On peut écrire

$$\frac{4 a^2 b^3 x^2 + 8 a^3 b^2 x - 16 a^4 b}{2 a^2 b} = \frac{4 a^2 b^3 x^2}{2 a^2 b} + \frac{8 a^3 b^2 x}{2 a^2 b} - \frac{16 a^4 b}{2 a^2 b}$$
$$= 2 b^2 x^2 + 4 a b x - 8 a^2$$

Ex. : $$\frac{2 a b x^2 + 8 a x^3}{4 a^2 b^6}$$

Ce quotient peut se simplifier. Car on peut écrire :

$$2 a b x^2 + 8 a x^3 = 2 a (b x^2 + 4 x^3)$$

$$\frac{2 a b x^2 + 8 a x^3}{4 a^2 b^6} = \frac{2 a (b x^2 + 4 x^3)}{2 a \times 2 a b^6} = \frac{b x^2 + 4 x^3}{2 a b^6}$$

Remarque. — On procède de la même façon si c'est le numérateur qui est un monôme et le dénominateur qui est un polynôme.

Ex. :

$$\frac{5 a^3 b^6 x^2 y}{10 a^2 b^4 x^3 + 5 a^3 b^5 x^3 + 10 a^4 b^6 x^3}$$

On a :

$$\frac{5 a^3 b^6 x^2 y}{10 a^2 b^4 x^3 + 5 a^3 b^5 x^3 + 10 a^4 b^6 x^3} = \frac{5 a^2 b^4 x^2 \times a b^2 y}{5 a^2 b^4 x^2 (2 x + a b x + 2 a^2 b^2 x)}$$
$$= \frac{a b^2 y}{2 x + a b x + 2 a^2 b^2 x}$$

67. Simplification d'une fraction algébrique ayant pour termes deux polynômes. — La simplification n'est possible que si on peut mettre en facteur une même quantité aux deux termes. On divise alors les deux termes par cette quantité :

Ex : *Simplifier la fraction* :

$$\frac{12 a^6 b^5 x^4 + 6 a^5 b^4 x^3 - 3 a^4 b^3 x^2}{9 a^4 b^4 y^4 - 18 a^3 b^3 y^3 + 27 a^2 b^2 y^2}$$

cette fraction peut s'écrire :

$$\frac{3\,a^2\,b^2\,(4\,a^4\,b^3\,x^4 + 2\,a^3\,b^2\,x^3 - a^2\,b\,x^2)}{3\,a^2\,b^2\,(3\,a^2\,b^2\,y^4 - 6\,a\;b\;y^3 + 9\,y^2)}$$

et on peut diviser ses deux termes par $3\,a^2\,b^2$.

Ex. : *Simplifier la fraction* :

$$\frac{2\,a^2\,x^2 + a\,b\,x^2 + 2\,a\,b\,x + b^2\,x + 2\,a\,c + b\,c}{4\,a^2\,x + 2\,a\,b\,x - 2\,a\,b - b^2}$$

Au numérateur, mettons x^2 en facteur et aussi x. Faisons de même au dénominateur pour x, dans les 2 premiers termes. Il vient :

$$\frac{(2\,a^2 + a\,b)\,x^2 + (2\,a\,b + b^2)\,x + 2\,a\,c + b\,c}{(4\,a^2 + 2\,a\,b)\,x - 2\,a\,b - b^2}$$

Nous remarquons alors que, au numérateur, $(2\,a^2 + a\,b)$ coefficient de x^2 est le produit de $(2\,a + b)$ par a, que $(2\,a\,b + b^2)$ coefficient de x est le produit de $(2\,a + b)$ par b et qu'enfin $(2\,a\,c + b\,c)$ est le produit de $(2\,a + b)$ par c. Au dénominateur, $(4\,a^2 + 2\,a\,b)$ est le produit de $(2\,a + b)$ par $2a$ et $(-\,2\,a\,b - b^2)$ est le produit de $(2\,a + b)$ par $(-\,b)$. Ces observations nous permettent d'écrire la fraction sous la forme :

$$\frac{(2\,a + b)\,a\,x^2 + (2\,a + b)\,b\,x + (2\,a + b)\,c}{(2\,a + b)\,2\,a\,x - (2\,a + b)\,b}$$

et, en mettant $(2\,a + b)$ en facteur, dans les deux termes :

$$\frac{(2\,a + b)\,(a\,x^2 + b\,x + c)}{(2\,a + b)\,(2\,a\,x - b)}$$

La fraction étant mise sous cette forme, on voit qu'elle peut être simplifiée par suppression du facteur $(2\,a + b)$ aux deux termes ; elle devient :

$$\frac{a\,x^2 + b\,x + c}{2\,a\,x - b}$$

68. Division d'un polynôme par un polynôme. — Soient deux polynômes P, P′ ordonnés par rapport aux puissances descendantes d'une même lettre x et tels que le terme de plus haut degré en x du polynôme P soit de degré plus élevé que le terme correspondant du polynôme P′, on peut trouver un polynôme Q tel que l'on ait :

$$P = P' \times Q + R$$

R étant un quatrième polynôme de degré en x inférieur au degré de P′.

Q est appelé QUOTIENT des deux polynômes P (*dividende*) et P′ (*diviseur*) ; R s'appelle RESTE. La recherche du quotient se fait par une *opération* appelée DIVISION.

Le quotient Q que nous venons de définir ici n'est plus nécessairement le quotient exact des deux polynômes et la division dont nous allons parler maintenant n'est plus une simple réduction.

69. Théorème. — *Quand on fait le produit de deux polynômes ordonnés de la même manière par rapport aux puissances montantes ou descendantes d'une même lettre, le premier et le dernier terme du produit proviennent toujours, sans réduction, du produit du premier terme du multiplicande et du premier terme du multiplicateur, et du produit du dernier terme du multiplicande et du dernier terme du multiplicateur.*

Nous allons démontrer le théorème pour les premiers termes, en supposant les polynômes ordonnés par rapport aux puissances descendantes d'une même lettre x. Le raisonnement serait le même pour les derniers termes.

Le premier terme du multiplicande est le terme de plus haut degré en x de ce facteur ; il en est de même pour le premier terme du multiplicateur. Le produit de ces deux termes est un monôme dont le degré en x est la somme des degrés en x de ces termes, c'est-à-dire que son degré est nécessairement celui du terme de plus haut degré du produit des deux polynômes.

Or il ne saurait y avoir dans ce dernier produit d'autre terme de même degré, car ce terme devrait provenir de la multiplication de termes du multiplicande et du multiplicateur dont l'un au moins serait différent du premier terme de l'un de ces polynômes et, par conséquent, de degré en x inférieur à lui.

Cette démonstration sera rendue plus claire par l'exemple suivant :

Faisons le produit de

$$(2\,x^3 - 3\,x^2 + x - 1) \text{ par } (5\,x^2 - x + 1)$$

Posons l'opération :

$$\begin{array}{rrrrrr}
2\,x^3 - & 3\,x^2 + & x & - 1 & & \\
 & 5\,x^2 - & x & + 1 & & \\
\hline
10\,x^5 - & 15\,x^4 + & 5\,x^3 & - 5\,x^2 & & \\
 & - 2\,x^4 + & 3\,x^3 - & x^2 & + x & \\
 & + & 2\,x^3 & - 3\,x^2 & + x & - 1 \\
\hline
10\,x^5 - & 17\,x^4 + & 10\,x^3 & - 9\,x^2 & + 2\,x & - 1
\end{array}$$

Le premier terme $2\,x^3$ du multiplicande et le premier terme $5\,x^2$ du multiplicateur donnent le terme $10\,x^5$ qui ne peut se réduire avec aucun autre ; car c'est le seul qui puisse être de degré 5, somme des degrés de $2\,x^3$ et de $5\,x^2$. En effet le produit d'un terme quelconque du multiplicateur (si l'on ne choisit pas justement en même temps les deux mêmes facteurs $2\,x^3$ et $5\,x^2$) aura pour degré la somme des degrés de ces deux termes qui sera nécessairement inférieure à $3 + 2$ (somme des degrés des termes de degré le plus élevé).

70. Théorème. — *Le terme de plus haut degré du quotient par rapport à une certaine lettre x, provient de la division du terme de plus haut degré du dividende par le terme de plus haut degré du diviseur, par rapport à la même lettre.*

Soit P le dividende, P′ le diviseur, Q le quotient, R le reste :

$$P = P' \times Q + R$$

R étant de degré inférieur au diviseur (68), ne contient pas de terme qui puisse se déduire avec un terme de même degré que le terme de plus haut degré du dividende. Celui-ci est donc nécessairement égal au terme, A, de plus haut degré du produit P′ × Q. Or, nous savons que A provient de la multiplication du terme de plus haut degré de P′ pour le terme du plus haut degré de Q (69). Si nous appelons p' et q ces deux termes, nous avons

$$A = p' \times q$$

d'où on tire

$$q = \frac{A}{p'}$$

q' premier terme du quotient, provient de la division de A, premier terme du produit, par p', premier terme du quotient.

71. Théorème. — *Si on divise par le diviseur la différence du dividende et du produit du diviseur par le premier terme du quotient, on obtient les autres termes du quotient.*

En effet, soient P le dividende, P′ le diviseur, Q le quotient, R le reste, q le premier terme du quotient, Q′ l'ensemble des autres termes du quotient. On a :

$$P = P' \times Q + R$$
$$Q = q + Q'$$

De ces deux égalités on tire :

$$P = P'\,(q + Q') + R$$

ou

$$P = P'\,q + P'\,Q' + R$$

On peut retrancher $P'\,q$ aux deux membres de cette égalité ; on aura encore une égalité :

$$P - P'\,q = P'\,Q' + R$$

Cette égalité montre que Q′ est bien le quotient de $(P - P'\,q)$ par P′.

72. Remarque. — Le théorème ne tombe en défaut que si la différence $P - P' q$ est de degré moindre que P'. Dans ce cas $P - P' q$ est le reste de la division et le quotient se réduit à q.

73. Règle de la division. — Les théorèmes (70) et (71) permettent d'établir la règle de la division des polynômes.

Soient deux polynômes ordonnés par rapport à x :

$$P = 18 x^5 + 10 x^4 - 4 x^3 + 6 x - 1$$
$$P' = 2 x^3 + x^2 + 1$$

On dispose l'opération comme en arithmétique :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
18x^5 & +10x^4 & -4x^3 & & +6x & -1 & 2x^3+x^2+1 \\
\cline{7-7}
-18x^5 & -9x^4 & & -9x^2 & & & 9x^2+\frac{1}{2}x-\frac{9}{4} \\
\cline{1-6}
 & x^4 & -4x^3 & -9x^2 & +6x & -1 & \\
 & -x^4 & -\frac{1}{2}x^3 & & -\frac{1}{2}x & & \\
\cline{2-6}
 & & -\frac{9}{2}x^3 & -9x^2 & +\frac{11}{2}x & -1 & \\
 & & +\frac{9}{2}x^3 & +\frac{9}{4}x^2 & & +\frac{9}{4} & \\
\cline{3-6}
 & & & -\frac{27}{4}x^2 & +\frac{11}{2}x & +\frac{5}{4} &
\end{array}$$

Le premier terme du quotient résulte de la division de $18 x^5$ par $2 x^3$ (70). C'est $9 x^2$. Si nous retranchons du dividende le produit du diviseur par le premier terme du quotient, la différence nous permettra de trouver le reste du quotient (71). Cette différence $x^4 - 4 x^3 - 9 x^2 + 6 x - 1$ prend le nom de premier dividende partiel.

Le premier terme du quotient de $x^4 - 4 x^3 - 9 x^2 + 6 x - 1$ par $2 x^3 + x^2 + 1$ est le quotient de x^4 par $2 x^3$, (70). C'est $\frac{1}{2} x$. Mais, si on retranche du premier dividende partiel le produit du diviseur par $\frac{1}{2} x$, la différence fournira un second dividende partiel qui permettra de trouver le troisième terme du quotient.

On continue ainsi jusqu'à ce que la dernière différence soit un polynôme de degré inférieur au degré du diviseur. Cette différence est le reste de la division.

Dans l'exemple choisi, le quotient est

$$9 x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{9}{4}$$

et le reste,

$$-\frac{27}{4} x^2 + \frac{11}{2} x + \frac{5}{4}$$

On a identiquement :

$$18 x^5 + 10 x^4 - 4 x^3 + 6 x - 1 = \left(2 x^3 + x^2 + 1\right) \left(9 x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{27}{4} x^2 + \frac{11}{2} x + \frac{5}{4}\right)$$

74. Divisibilité. — Nous établirons seulement la règle suivante qui permettra de savoir si un polynôme est divisible exactement par un binôme du premier degré.

Théorème. — *Le reste de la division d'un polynôme en x par un binôme en x du premier degré est égal à l'expression obtenue en remplaçant dans le polynôme, x par la valeur qui annule le binôme.*

En effet, soient P le dividende, P′ le diviseur, Q le quotient, R le reste, on a :

$$P = P' \times Q + R \qquad (1)$$

R doit être de degré moindre que P′.

Comme P′ est du premier degré en x, R est de degré 0 en x, et par conséquent ne contient pas x. Il s'ensuit que la valeur de R reste invariable lorsqu'on fait varier x.

Quelle que soit la valeur qu'on donne à la lettre x, l'égalité (1), étant une identité, est toujours vraie (45). On a toujours aussi :

$$P - P' \times Q = R$$

R étant invariable, la valeur du premier membre est elle-même invariable. En particulier, le premier membre reste égal à R, si on donne à x une valeur telle que P devienne nul. Or à ce moment P′ Q est lui-même nul et l'égalité se réduit à

$$P = R$$

Donc si on remplace, dans le polynôme P, x par la valeur qui annule P′, on obtient le reste de la division de P par P′.

Ex. : I. — *Reste de la division de*

$$P = 3 a^2 x^2 + 2 a x + 1$$

par

$$P' = 3 x + a$$

La valeur d'x qui annule P′, c'est

$$x = -\frac{a}{3}$$

car on a bien

$$-\frac{3a}{3} + a = -a + a = 0$$

Si nous portons cette valeur dans le polynôme P, nous trouvons :

$$3a^2 \times \frac{a^2}{9} - 2a \times \frac{a}{3} + 1 = \frac{3a^4}{9} - \frac{2a^2}{3} + 1 = \frac{a^4}{3} - \frac{2a^2}{3} + 1$$

Ex. : II. — *Cas particulier : Reste de la division de* $x^m - a^m$ par $x - a$.

La valeur d'x qui annule $x - a$, c'est

$$x = a$$

Si on porte cette valeur dans $x^m - a^m$, cette expression devient :

$$a^m - a^m = 0$$

Donc $R = 0$, $x^m - a^m$ *est toujours divisible par* $x - a$.

Ex. : III. — *Cas particulier : Reste de la division de* $x^m - a^m$ *par* $x + a$.

La valeur d'x qui annule $x + a$ est

$$x = -a$$

On trouve que $x^m - a^m$ devient

$$(-a)^m - a^m$$

Or la puissance $m^{\text{ième}}$ de $(-a)$ est positive si m est pair, négative dans le cas contraire.

Si m est pair, on a donc :

$$(-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0$$
$$R = 0$$

$x^m - a^m$ *est divisible par* $x + a$.

Si m est impair on a :

$$(-a)^m - a^m = -a^m - a^m = -2 a^m$$

$x^m - a^m$ *n'est pas divisible par* $x + a$.

Exercices

18. — Diviser le polynôme

$$60 a^3 b^2 - 61 a^4 b - 5 a^2 b^3 + 15 a^5 - 35 ab^4 - 4 b^5$$

par le polynôme

$$4 b^3 - 7 a^2 b + 5 a^3 + 3 ab^2$$

19. — Diviser le polynôme

$$6 x^4 + 19 x^3 - 7 x^2 - 6 x + 9$$

par le polynôme

$$6 x^2 - 5 x + 1$$

20. — Chercher le reste de la division :
1° de $x^m + a^m$ par $x - a$.
2° de $x^m + a^m$ par $x + a$.

21. — Déterminer a pour que le polynôme $2x^3 - 5x^2 + ax - 6$ soit divisible par $x + 3$.

22. — Décomposer en facteurs le polynôme $3x^2 - 21x + 36$.

23. — Décomposer en facteurs le polynôme $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

24. — Simplifier

$$\frac{x^2 - 5ax + 6a^2}{x^2 - 4a^2}$$

25. — Simplifier

$$\frac{(x^8 - 1)(x^3 - 6x^2 - 11x - 6)}{(x^2 - 4x + 4)(x^3 - x^2 - 5x - 3)}$$

26. — Réduire au même dénominateur les fractions :

$$\frac{a}{a+b}, \quad \frac{b^2}{a^2+b^2}, \quad \frac{c^3}{a^3+b^3}$$

27. — Effectuer

$$\frac{2}{(x^8-1)(x-2)} - \frac{6}{x^2-1} + \frac{6}{(x+1)(2-x)}$$

28. — Simplifier

$$\frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4a}}{\dfrac{x(x-2a)}{2(x-3a)}}$$

Équations

75. Définition. — On appelle ÉQUATION une égalité qui devient une identité (45) quand on y remplace certaines lettres, appelées *inconnues*, par des *valeurs qu'il faut déterminer*.

On désigne généralement les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet.

Ex. : L'égalité

$$3x = 15$$

est une équation qui est vérifiée pour

$$x = 5$$

car on a bien

$$3 \times 5 = 15$$

Ex. : L'égalité

$$2ax = 3b$$

est une équation qui est vérifiée pour

$$x = \frac{3b}{2a}$$

car, si on remplace x par cette valeur dans l'égalité donnée, on obtient une identité :

$$2a \times \frac{3b}{2a} = 3b$$

76. Racines ou solutions. — On appelle RACINES, OU SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION, *les valeurs qui, mises à la place des inconnues, transforment l'équation en une égalité numérique ou en une identité. On dit qu'elles vérifient l'équation.*

77. Différentes sortes d'équations. — On classe les équations d'après le nombre de leurs inconnues et d'après leur degré.

Le *degré d'une équation* c'est le degré le plus élevé avec lequel les inconnues, ou l'une des inconnues entrent dans l'équation.

Ex. : L'équation

$$3x + 7 = x - 8$$

est du *premier degre à une inconnue*, parce que x est à la première puissance et que l'équation ne contient que l'inconnue x.

L'équation

$$3x^2 + 7x + 5 = 0$$

est du *second degré à une inconnue*. Le terme $3x$ contient x à la puissance 2.

L'équation

$$7x + 3y = 6$$

est du *premier degré à 2 inconnues*.

L'équation

$$8xy + 7x - 5y = 22$$

est du *second degré à 2 inconnues*. Le terme $8xy$ renferme le produit xy qui est du second degré.

78. Equations équivalentes. — *On dit que* DEUX ÉQUATIONS SONT ÉQUIVALENTES *quand elles admettent mêmes racines égales et en même nombre.*

Ex. : Les deux équations

$$8x - 13 = 3x + 7$$
$$5x = 20$$

sont équivalentes, car elles se vérifient toutes deux pour

$$x = 4$$

Remarque. — La notion des équations équivalentes a une importance considérable, car c'est toujours en transformant les équations en d'autres équations plus simples et équivalentes aux premières qu'on trouve la valeur des inconnues.

79. Système d'équations. — *On appelle* SYSTÈME D'ÉQUATIONS *un ensemble d'équations se rapportant aux mêmes inconnues.*

Lorsque le nombre des équations qui composent le système répond à certaines conditions que nous étudierons plus loin, toutes les équations sont vérifiées en même temps par un système ou un nombre limite de systèmes de racines bien déterminées.

On dit que *deux systèmes d'équations sont équivalents quand ils admettent les mêmes systèmes de racines et le même nombre de ces systèmes.*

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

80. Théorème. — *Si l'on ajoute ou si l'on retranche aux deux membres d'une équation une même quantité, on forme une nouvelle équation équivalente à la première.*

Soit l'équation :

$$8x - \frac{3}{4} = \frac{x}{6} + 30 \qquad (1)$$

Si j'ajoute aux deux membres de cette équation une même quantité, A par exemple, j'obtiens l'équation :

$$8x - \frac{3}{4} + A = \frac{x}{6} + 30 + A \qquad (2)$$

Il suffit de prouver que ces deux équations ont les mêmes solutions.

1° Toute solution de (1) rendant identiques les expressions $8x - \frac{3}{4}$ et $\frac{x}{6} + 30$, rend aussi identiques les expressions $8x - \frac{3}{4} + A$ et $\frac{x}{6} + 30 + A$, c'est donc une solution de (2).

2° Toute solution de (2) rendant identiques les expressions $8x - \frac{3}{4} + A$ et $\frac{x}{6} + 30 + A$, rend identiques ces expressions diminuées de A, c'est-à-dire les deux membres de l'équation (1). C'est donc une solution de l'équation (1).

81. Conséquence. — Etant donné une équation, *on peut faire passer d'un membre dans l'autre les différents termes en changeant leur signe.*

Ex. : Soit l'équation :

$$8x - \frac{3}{4} = \frac{x}{6} + 30 \qquad (1)$$

proposons-nous de faire passer du second membre dans le premier le terme $\frac{x}{6}$.

En vertu du théorème (80), nous pouvons écrire :

$$8x - \frac{3}{4} - \frac{x}{6} = \frac{x}{6} + 30 - \frac{x}{6} \qquad (2)$$

nous avons retranché aux deux membres le terme $\frac{x}{6}$.

L'équation (2) est équivalente à l'équation (1). Mais, dans le second membre de l'équation (2), les termes $\frac{x}{6}$ et $-\frac{x}{6}$ peuvent se réduire ; la réduction donne un résultat nul ; l'équation (2) se réduit donc à la forme :

$$8x - \frac{3}{4} - \frac{x}{6} = 30 \qquad (3)$$

On voit que l'opération revient à faire passer $\frac{x}{6}$ dans le premier membre en changeant son signe.

On pourrait de la même manière faire passer $\frac{3}{4}$ dans le second membre. L'équation deviendrait :

$$8x - \frac{x}{6} = 30 + \frac{3}{4} \qquad (4)$$

Mais on peut aussi faire passer tous les termes dans le premier membre. Le second se réduit alors à 0 :

$$8x - \frac{3}{4} - \frac{x}{6} - 30 = 0 \qquad (5)$$

Enfin on peut changer tous les signes de l'équation. Car on peut faire tous les termes du premier membre dans le second en changeant leurs signes, tous les termes du second membre dans le premier en changeant leurs signes et enfin intervertir l'ordre de deux membres :

$$-\frac{x}{6} - 30 = -8x + \frac{3}{4}$$

ou

$$-8x + \frac{3}{4} = -\frac{x}{6} - 30$$

82. Théorème. — *Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une équation par une même quantité* non nulle et cependant non infinie, *on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.*

Soit l'équation

$$8x - \frac{3}{4} = \frac{x}{6} + 30 \qquad (1)$$

multiplions les deux membres par A, quantité différente de 0 :

$$\left(8x - \frac{3}{4}\right) A = \left(\frac{x}{6} + 30\right) A \qquad (2)$$

1° Toute solution de l'équation (1) rendant identiques $8x - \frac{3}{4}$ et $\frac{x}{6} + 30$, rend identiques $\left(8x - \frac{3}{4}\right)$ A et $\left(\frac{x}{6} + 30\right)$ A et par conséquent vérifie l'équation (2).

2° Puisque A n'est pas nul, les deux membres de l'équation (2) ne peuvent devenir équivalents que si $\left(8x - \frac{3}{4}\right)$ et $\left(\frac{x}{6} + 30\right)$ deviennent identiques, ce qui ne saurait avoir lieu que si on donne à x une valeur qui vérifie l'équation (1) ; donc les solutions de l'équation (2) vérifient nécessairement l'équation (1).

Les deux équations sont équivalentes.

83. Conséquences. — *On peut faire disparaître les dénominateurs des termes d'une équation en multipliant les deux membres par le dénominateur commun, à condition que la solution de la nouvelle équation n'annule pas le dénominateur commun.*

Par exemple, on peut multiplier les deux membres de l'équation (1) par 12.

$$12 \times 8x - \frac{3 \times 12}{4} = \frac{12x}{6} + 30 \times 12$$

d'où

$$96x - 9 = 2x + 360$$

Le théorème (80) nous permet de mettre cette équation sous la forme

$$96x - 2x = 360 +$$

ou

$$94x = 369$$

Mais, en vertu du théorème (82) :

On peut diviser les deux membres d'une équation par le coefficient de l'inconnue.

Par suite l'équation (4) peut se mettre sous la forme :

$$x = \frac{379}{94} \qquad (5)$$

On voit que l'équation (5) nous fournit justement la valeur d'x, c'est-à-dire la solution de l'équation (1).

ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

84. Forme normale de l'équation. — En appliquant les théorèmes précédents, on peut toujours ramener une équation du premier degré à une inconnue à la *forme normale* :

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

dans laquelle x représente l'inconnue, a le coefficient de l'inconnue et b un nombre algébrique.

La solution résulte de la transformation suivante :

$$x = -\frac{b}{a} \qquad (2)$$

On a fait passer b dans le second membre et on a divisé les deux membres par a.

Cette transformation n'est possible que si a n'est pas nul, c'est-à-dire si l'on a véritablement affaire à une équation.

Applications. — 1° *Résoudre* :

$$\frac{4x}{5} - \frac{x}{3} + 25 = 2(x + 1) \qquad (1)$$

Ramenons cette équation à la forme normale :

$$\frac{4x}{5} - \frac{x}{3} + 25 = 2x + 2$$

$$\frac{4x}{5} - \frac{x}{3} - 2x + 25 - 2 = 0$$

multiplions tous les termes par 15:

$$12x - 5x - 30x + 23 + 15 = 0$$
$$-23x + 23 \times 15 = 0$$

divisons tout par 23 et changeons les signes :

$$x - 15 = 0$$

ou enfin

$$x = 15$$

2° *Résoudre* :

$$\frac{2}{x+1} = \frac{12}{19 - x}$$

On multiplie les deux membres par $(x + 1)(19 - x)$:

$$4(19 - x) = 12(x + 1)$$
$$76 - 4x = 12x + 12$$

ramenons à la forme normale :

$$-4x - 12x + 76 - 12 = 0$$
$$-16x + 64 = 0$$
$$16x - 64 = 0$$
$$x - 4 = 0$$

la solution est :

$$x = 4$$

Comme nous avons multiplié les deux membres de l'équation par $(x + 1)(19 - x)$, cette solution n'est acceptable que si elle n'annule pas l'expression

$$(x + 1)(19 - x)$$

Or, si on remplace x par 4 dans cette expression, elle devient :

$$(4 + 1)(19 - 4) = 5 \times 15$$

elle ne s'annule pas, $x = 4$ est bien la solution de l'équation (1).

Exercices

29. — Résoudre l'équation :

$$\frac{3}{2}x + 7 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}x - 9$$

30. — Résoudre l'équation :

$$3ax + b = cx + 4$$

31. — Résoudre l'équation :

$$\frac{x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{2a}{b}$$

32. — Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x + \dfrac{1}{1 + \dfrac{x+1}{x-1}}} = \frac{9}{9x - 14}$$

Problèmes dont la solution résulte de la résolution d'une équation du premier degré a une inconnue

85. Généralités. — La solution d'un problème résulte de trois opérations :

1° La mise en équations ;

2° la résolution des équations ;

3° la discussion des solutions.

86. Mise en équations. — La première opération a pour but d'exprimer, au moyen d'une ou de plusieurs équations, les conditions imposées aux inconnues par l'énoncé du problème.

Pour établir ces équations, on raisonne comme si les quantités cherchées étaient connues.

Ex. : *La somme d'un nombre et de 12 est égale à la différence de 22 et de ce nombre. Trouver le nombre.*

Réprésentons par x le nombre cherché. La somme de ce nombre et de 12 peut s'écrire, en vertu de cette convention :

$$x + 12$$

la différence de 22 et de ce nombre peut s'écrire

$$22 - x$$

D'après l'énoncé du problème, ces deux expressions sont égales ; on a donc l'équation :

$$x + 12 = 22 - x$$

87. Discussion des solutions. — Il se peut qu'en mettant le problème en équations, on ait été forcé de négliger certaines des conditions du problème, ou, au contraire, d'imposer aux inconnues certaines conditions qui n'existent pas dans l'énoncé.

Dans le premier cas, les racines de l'équation peuvent ne pas satisfaire aux conditions négligées. Dans le second cas, les racines de l'équation ne sont pas nécessairement les seules solutions du problème ; car il peut exister d'autres quantités qui, sans satisfaire aux conditions supplémentaires imposées aux inconnues des équations, satisfassent aux conditions de l'énoncé.

Il est donc nécessaire de discuter les racines des équations et la mise en équation elle-même pour s'assurer :

1° Que toutes les conditions du problème ont été exprimées ;

2° qu'on n'a pas imposé aux racines des conditions étrangères à la solution du problème.

Et, au cas où l'une ou l'autre de ces deux exigences ne serait pas satisfaite, pour rechercher l'influence que ces conditions, négligées ou imposées par surcroît, peuvent avoir sur le nombre et la généralité des racines.

88. Applications. — Problème I. — *Un bassin est rempli par deux fontaines d'où l'eau s'échappe avec des vitesses inégales, de sorte que l'une des fontaines mettrait, pour remplir le bassin à elle seule, 2 heures de plus que l'autre. En laissant les deux fontaines couler ensemble, on remplit le bassin dans les $\frac{3}{4}$ du temps que met à le remplir la fontaine qui fournit le plus d'eau.*

Combien faut-il de temps à chacune des fontaines, coulant seule, ou aux deux fontaines, coulant ensemble, pour remplir le bassin, sachant que celui-ci a une capacité de 700 mètres cubes ?

1° Mise en équation. — Nous remarquerons qu'il suffit de connaître le temps que met l'une des fontaines, par exemple celle qui fournit le plus d'eau, à remplir le bassin, pour en déduire le temps que met l'autre fontaine ou les deux fontaines coulant ensemble à remplir celui-ci.

Si nous appelons x le temps en heures que met, à remplir le bassin, la fontaine qui fournit le plus d'eau, l'autre fontaine met $x + 2$ et les deux fontaines coulant ensemble, $\frac{3}{4}x$.

1re fontaine ;	2e fontaine;	les 2 fontaines ensemble.
x	$x + 2$	$\frac{3}{4}x$.

En écrivant sous cette forme les trois quantités dont la recherche fait l'objet du problème, nous avons exprimé deux des conditions du problème, à savoir :

1° Que la 2e fontaine met 2 heures de plus que l'autre à remplir le bassin ;

2° Que les deux fontaines coulant ensemble mettent à remplir le bassin les $\frac{3}{4}$ du temps que met la première coulant seule.

Il reste une troisième condition : c'est que le bassin a 700 mètres cubes de capacité.

La quantité d'eau que les deux fontaines déversent en une heure en coulant ensemble est évidemment égale à la somme des quantités déversées par chacune des deux fontaines pendant le même laps de temps.

Or, puisque la première fontaine déverse 700 mètres cubes en x heures, elle déverse en une heure $\frac{700}{x}$; la seconde fontaine déverse en une heure $\frac{700}{x+2}$; et enfin les deux, coulant ensemble, fournissent en une heure $\frac{700}{\frac{3}{4}x}$

On a donc :

$$\frac{700}{x} + \frac{700}{x+2} = \frac{700}{\frac{3}{4}x} \qquad (1)$$

2° Résolution de l'équation. — On peut diviser par 700 les deux membres de l'équation (1)

(1) (t 82) : $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{\frac{3}{4}x}$$

ou, en simplifiant $\frac{1}{\frac{3}{4}x}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{3x} \qquad (2)$$

Multiplions (82) les deux membres de l'équation (2) par le plus petit multiple commun des dénominateurs, c'est-à-dire par

$$3x(x+2)$$

il vient $3(x+2) + 3x = 4(x+2)$ (3)

ou (81) :

$$3(x+2) - 4(x+2) + 3x = 0$$
$$-(x+2) + 3x = 0$$
$$3x - x - 2 = 0$$
$$2x - 2 = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1 \qquad (4)$$

3° Discussion. — Nous avons exprimé, dans l'équation (1), toutes les conditions du problème ; donc la solution (4) de l'équation doit nous donner la solution du problème. Mais nous avons multiplié les deux membres de l'équation (2) par une expression $3x(x+2)$ contenant l'inconnue x. Cette multiplication n'est légitime que si la solution de la nouvelle équation (3) obtenue n'annule pas l'expression $3x(x+2)$. Or, si on y fait $x = 1$, cette expression devient $3 \times 3 = 9$. Elle ne s'annule pas et la multiplication est légitime.

La solution $x = 1$ convient au problème et la réponse complète est fournie par le système :

$$x = 1 \qquad x + 2 = 3 \qquad \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$$

Réponse. — La première fontaine met une heure à remplir le bassin ; la seconde met trois heures ; et les deux fontaines coulant ensemble mettent trois quarts d'heure.

Remarque. — La capacité du bassin n'influe pas sur la solution ; on pourrait la représenter simplement par c, cette lettre disparaîtrait comme 700 dans la suite du calcul.

Toutefois la capacité du bassin permettrait de calculer la quantité d'eau débitée à l'heure par chaque fontaine.

Problème II. — *Dites à quelqu'un de penser un nombre ; faites le multiplier par 7, ajoutez 3 au produit, divisez le résultat par 2 et retranchez 4 du quotient ; si l'on vous répond que la différence est 15, quel est le nombre pensé?*

1° Mise en équation. — Soit x le nombre. On lui fait subir quatre opérations qu'on peut représenter de la manière suivante :

$$\frac{x+7+3}{2} - 4$$

le résultat de ces quatre opérations est égal à 15 ; on a donc l'équation :

$$\frac{x \times 7 + 3}{2} - 4 = 15 \qquad (1)$$

2° Résolution de l'équation :

$$x \times 7 + 3 - 8 = 30 \qquad (2)$$
$$7x + 3 - 8 - 30 = 0$$
$$7x - 35 = 0 \qquad (3)$$
$$7x = 35$$
$$x = \frac{35}{7}$$
$$x = 5 \qquad (4)$$

3° Discussion. — La solution $x = 5$ répond à la question puisqu'on a exprimé dans l'équation (1) toutes les conditions du problème et pas d'autre.

Problème III. — *Les deux aiguilles d'une montre marquent midi ; à quelle heure se rencontreront-elles de nouveau pour la première fois?*

1° Mise en équation. — Soit x le nombre de divisions (minutes) du cadran que la petite aiguille aura parcouru au moment de la première rencontre. L'aiguille des minutes ayant dû faire un tour de cadran en plus aura parcouru $x + 60$ divisions. Mais, d'un autre côté, l'aiguille des minutes marche 12 fois plus vite que l'aiguille des heures, celle-ci faisant un seul tour de cadran pendant que l'aiguille des minutes en fait 12. Il s'en suit que les nombres de divisions x et $x + 60$ parcourus dans le même temps par l'aiguille des heures et par celle des minutes sont entre eux comme 1 et 12 (Arithm. 240).

$$\frac{x}{x+60} = \frac{1}{12} \qquad (1)$$

2° Résolution de l'équation. — Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens :

$$12x = x + 60$$
$$12x - x = 60$$
$$11x = 60$$
$$x = \frac{60}{11}$$
$$x = 5 + \frac{5}{11}$$

3° Discussion. — D'après la racine de l'équation (1), l'aiguille des heures aura parcouru $5\frac{5}{11}$ divisions. Or, nous savons que l'aiguille des heures parcourt une division en 12 minutes ou 5 divisions en une heure. C'est-à-dire que les aiguilles se rencontreront à 1 heure $\frac{1}{11}$ ou ce qui revient au même à 1 heure 5 minutes $\frac{5}{11}$.

Nous avons exprimé dans l'équation (1) toutes les conditions du problème et pas d'autres; donc la solution est acceptable.

Remarque. — La deuxième rencontre aura lieu évidemment 1 h. 5 m. $\frac{5}{11}$ plus tard. On pourrait en calculer l'heure directement, en remarquant que l'aiguille des minutes aurait fait deux tours de cadran en plus de ce qu'aurait parcouru l'aiguille des heures, c'est-à-dire aurait parcouru 120 divisions de plus. L'équation deviendrait dans ce cas $\frac{x}{x+120} = \frac{1}{12}$

Problème IV. — *Combien faut-il allier d'or au titre de 0,780 à 3 kg. 20 d'or au titre de 0,640 pour que l'alliage, soit au titre de 0,720?*

1° Mise en équation. — Soit x le poids de l'or au titre de 0,780 qu'il faut ajouter aux 3 kg. 20 d'or à 0,640. On se base sur ce que le poids de l'or pur contenu dans l'alliage à 0,720 est évidemment la somme des poids d'or pur contenu dans chacun des deux lingots à allier.

Les poids des lingots sont respectivement :

Or à 0,640	Or à 0,780 ;	Alliage à 0,720.
x	3,20	$3{,}20 + x$

Les poids d'or pur sont :

Or à 0,780 ;	Or à 0,640 ;	Alliage à 0,720
$x \times 0{,}780$;	$3{,}20 \times 0{,}40$;	$(3{,}20 + x) \times 0{,}720$

On a donc l'équation :

$$x \times 0{,}780 + 3{,}20 \times 0{,}640 = (3{,}20 + x) \times 0{,}720 \qquad 1)$$

2° Résolution de l'équation :

$$78\,x + 3{,}2 \times 64 = (3{,}2 + x) \times 72$$
$$78\,x + 3{,}2 \times 64 = 3{,}2 \times 72 + 72\,x$$
$$78\,x - 72\,x = 3{,}2 \times 72 - 3{,}2 \times 64$$
$$(78 - 72)\,x = (72 - 64)\,3{,}2$$
$$6\,x = 8 \times 3{,}2$$
$$3\,x = 4 \times 3{,}2$$
$$x = \frac{12.8}{3}$$

3° Discussion. — L'équation (1) exprime toutes les conditions du problème et pas d'autres. La solution est donc bien donnée par la racine de cette équation. En effectuant la division on trouve le quotient approché à moins de $\frac{1}{1000}$

$$x = 4 \text{ kg } 266$$

Problème V. — *Deux nombres a et b étant donnés, trouver le nombre dont le produit par a, diminué de b, est égal à a + b.*

1° mise en équation. — Soit x le nombre. On a immédiatement :

$$ax - b = a + b \qquad (1)$$

2° Résolution :

$$ax = a + b + b \qquad (2)$$
$$x = \frac{a + 2b}{a} \qquad (2)$$

3° discussion. — Cette solution n'a de sens que si a n'est pas nul. A part ce cas particulier, elle est toujours acceptable et c'est la seule solution du problème.

Problème VI . — *Prenez le tiers d'un nombre, puis le quart du quotient, multipliez enfin la quantité obtenue par 15. Combien faut-il ajouter au produit pour reformer le nombre donné?*

1° Mise en équation. — Soient a le nombre donné et x le nombre cherché. Les opérations effectuées sur a sont représentées par l'expression

$$\frac{\frac{a}{3}}{4} \times 15 \qquad (1')$$

L'équation du problème est donc :

$$\frac{\frac{a}{3}}{4} \times 15 + x = a \qquad (1)$$

2° Résolution :

$$\frac{a}{12} \times 15 + x = a$$
$$\frac{15}{12}\,a + x = a$$
$$x = a - \frac{15}{12}\,a$$
$$x = -\frac{3}{12}\,a \qquad (2)$$

3° Discussion. — Si a est un nombre arithmétique la solution (2) est négative. Elle ne convient donc pas au problème, puisqu'on demande quel nombre il faut *ajouter* au résultat des opérations pour reproduire a.

Néanmoins on peut interpréter cette solution négative en admettant que la question du problème était mal posée et qu'il fallait dire : combien faut-il *retrancher* au produit pour reformer le nombre donné?

La question étant ainsi posée, nous aurions écrit l'équation sous la forme :

$$\frac{\frac{a}{3}}{4} \times 15 - x = a \qquad (1')$$

dont la solution est

$$x = \frac{3}{12}\,a \qquad (2')$$

On voit que, cette fois-ci, x est positif et répond à la question.

Exercices

33. — Un père a 38 ans, son enfant a 11 ans ; on demande dans combien d'années l'âge du père sera double de l'âge de son enfant.

34. — Trouver un nombre dont le quintuple, diminué de 17, soit égal au triple, augmenté de 41.

35. — Un marchand de vin désire obtenir 100 litres de vin lui revenant à 0 fr. 50 le litre en mélangeant du vin qui lui coûte 0 fr. 35 le litre avec du vin qui lui coûte 0 fr. 95 le litre. Combien doit-il prendre de vin de chaque espèce?

36. — Deux courriers partent en même temps de deux points A et B distants de 553 kilomètres et vont à la rencontre l'un de l'autre. Le premier fait 42 kilomètres par jour et le second 37. A quelle distance de leur point de départ se rencontreront-ils?

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

89. Généralités. — Une équation du premier degré à plusieurs inconnues admet une infinité de solutions. En effet, soit une équation :

$$16\,x + 3\,y = 35 \qquad (1)$$

on peut se donner arbitrairement la valeur de l'une des inconnues, x par exemple et calculer alors l'autre inconnue au moyen de l'équation *à une seule inconnue* ainsi formée.

Pour $x = 2$ l'équation devient

$$16 \times 2 + 3\,y = 35$$

ce qui donne

$$y = \frac{35 - 32}{3} = 1$$

De même à toute autre valeur d'x correspond une valeur d'y et réciproquement.

90. Systèmes d'équations simultanées. — Il n'en est plus de même si, au lieu d'une seule équation entre deux inconnues, on donne deux équations qui doivent être vérifiées en même temps par les mêmes solutions. Dans ce cas, en général, les inconnues sont parfaitement déterminées et, pour un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, il n'y a qu'une seule solution.

91. Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. — Il y a deux méthodes générales pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

1° *La méthode d'élimination par substitution ;*

2° *La méthode d'élimination par addition ou par soustraction.*

L'application de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes suppose qu'on a ramené les équations à la forme générale :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{cases}$$

x et y représentent les inconnues, a, b, c, a', b', c', des nombres positifs négatifs ou nuls.

On peut toujours ramener le système à cette forme. Nous allons en donner un exemple :

$$\begin{cases} (x \times 5)\,(y + 7) = (x + 1)\,(y - 9) + 112 & (1) \\ 2\,x + 10 = 3\,y + 1 & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) se ramène à la forme normale au moyen des transformations suivantes :

$$xy + 5y + 7x \times 35 = xy + y - 9x - 9 + 112$$
$$xy - xy + 7x + 9x + 5x - y = -35 - 9 + 112$$
$$16\,x + 4\,y = 68$$

L'équation (2) se transforme ainsi :

$$2\,x - 3\,y = -10 + 1$$

et le système devient :

$$\begin{cases} 16\,x + 4\,y = 68 & (1') \\ 2x - 3\,y = -9 & (2') \end{cases}$$

92. Méthode d'élimination par substitution. — Elle consiste à calculer la valeur de l'une des inconnues dans l'une des équations en opérant comme si la seconde inconnue était une quantité algébrique ordinaire connue. Puis à porter la valeur trouvée dans la seconde équation en la substituant à l'inconnue qu'elle représente.

On obtient ainsi une équation à une inconnue

Ex. : $$\begin{cases} 16\,x + 4\,y = 68 & (1) \\ 2x - 3\,y = -9 & (2) \end{cases}$$

Calculons la valeur d'x en nous servant de la première équation :

$$16\,x = 68 - 4\,y$$
$$4\,x = 17 - y$$
$$x = \frac{17 - y}{4} \qquad (1')$$

Le système d'équations (1) (2) peut être remplacé par le système (1') (2).

$$\begin{cases} x = \dfrac{17 - y}{4} & (1') \\ 2\,x - 3\,y = -9 & (2) \end{cases}$$

Portons la valeur trouvée pour x dans l'équation (2) :

$$2 \times \frac{17 - y}{4} - 3\,y = -9 \qquad (3)$$

nous obtenons ainsi une équation à une seule inconnue y, que nous savons résoudre :

$$\frac{17 - y}{2} - 3\,y = -9$$
$$17 - y - 6\,y = -18$$
$$-7\,y = -18 - 17$$
$$7\,y = 35$$
$$y = \frac{35}{7}$$
$$y = 5$$

Une fois la valeur d'y obtenue, il suffit de la porter dans l'équation (1') pour avoir immédiatement la valeur d'x :

$$x = \frac{17 - 5}{4}$$
$$x = 3$$

La solution du système est

$$x = 3 \qquad y = 5$$

Il est facile de démontrer que le système (1) (2) ou, ce qui revient au même, (1') (2'), car (1') est équivalent à (1), est équivalent au système (1') (3).

En effet, toute solution de (1') (2) vérifie le système (1') (3), car cette solution fait prendre à l'expression $\frac{17 - y}{4}$ la même valeur numérique qu'à x et par conséquent le premier membre de l'équation (2) devient identique au premier membre de l'équation (3). Les autres termes des équations de l'un et de l'autre systèmes sont d'ailleurs identiques.

Réciproquement toute solution de (1') (3) vérifie (1') (2), car elle donne à $\frac{17 - y}{4}$ dans l'équation (1') la même valeur qu'à x et par suite le premier membre de l'équation (3) devient identique au premier membre de l'équation (2).

Cette démonstration est générale.

93. Méthode d'élimination par addition ou soustraction.

Théorème. — *Etant donné un système d'équations simultanées, on forme un système équivalent à ce système en remplaçant l'une des équations par l'équation obtenue en additionnant membre à membre l'équation considérée à une ou plusieurs autres équations du système.*

Nous ferons la démonstration pour un système de deux équations :

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 118 & (1) \\ x + 5\,y = 191 & (2) \end{cases}$$

additionnons membre à membre les équations :

$$(3\,x + 2\,y) + (x + 5\,y) = 118 + 191 \qquad (3)$$

le système (1) (3) est équivalent au système (1) (2). En effet :

1° Toute solution de (1) (2) vérifie (1) (3), car cette solution donne aux expressions $(3\,x + 2\,y)$ et $(x + 5\,y)$ les mêmes valeurs numériques dans les équations (1) (2) que dans le premier membre de l'équation (3) ; et la somme de ces valeurs numériques est bien évidemment celle des seconds membres de (1) et (2).

2° Toute solution de (1) (3) vérifie (1) (2), car la valeur numérique du premier membre de (1) étant égale à 118 et la valeur numérique du premier membre de (3) à 118 + 191, comme $3\,x + 2\,y$ a la même valeur numérique dans (3) que dans (1), $(x + 5\,y)$ a nécessairement pour valeur numérique 191, c'est-à-dire que cette expression est identique au premier membre de (2).

94. — Exposé de la méthode. — On rend égaux en valeur absolue, s'ils ne le sont déjà, au moyen de multiplications ou de divisions de tous les termes de l'une des équations ou des deux, les coefficients de l'une des inconnues dans les deux équations.

On additionne ou on retranche membre à membre les équations du système ainsi obtenu, de manière à faire disparaître l'inconnue dont on a égalisé les coefficients. On obtient une équation à une seule inconnue qui, jointe à l'une des équations données, fournit un système équivalent au système proposé.

Ex. : Appliquons cette méthode au système

$$\begin{cases} 16\,x + 4\,y = 68 & (1) \\ 2\,x - 3\,y = -9 & (2) \end{cases}$$

que nous avons déjà résolu par la méthode de substitution.

Divisons les deux membres de l'équation (1) par 4 et multiplions les deux membres de l'équation (2) par 2.

$$4\,x + y = 17 \qquad (1')$$
$$4\,x - 6\,y = -18 \qquad (2')$$

Retranchons ces deux équations membre à membre, en retranchant la seconde de la première :

$$y + 6\,y = 17 + 18 \qquad (3)$$

L'équation (3) jointe à l'une des équations (1') ou (2') forme un système équivalent au système proposé.

De (3) on tire :

$$7y = 35$$
$$y = \frac{35}{7}$$
$$y = 5$$

On peut achever la résolution, soit en portant cette valeur de y dans l'une des équations (1), (2), (1') ou (2') d'après la méthode de substitution, soit en répétant pour y ce qu'on a fait pour x. Appliquons cette dernière méthode.

Dans le système (1') (2)

$$\begin{cases} 4x + y = 17 & (1') \\ 2x - 3y = -9 & (2) \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1') par 3 :

$$\begin{cases} 12x + 3y = 51 & (1'') \\ 2x - 3y = -9 & (2) \end{cases}$$

Additionnons membre à membre (1'') et (2). On obtient :

$$14x = 42$$
$$x = \frac{42}{14}$$
$$x = 3$$

On emploie l'une ou l'autre de ces deux méthodes, suivant que le système se prête mieux à l'une ou à l'autre.

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

95. Généralités. — *Un système d'équations simultanées du premier degré à plusieurs inconnues est en général déterminé et admet une solution unique, si le nombre des équations non équivalentes est égal au nombre des inconnues.*

Cependant, si deux ou plusieurs équations sont équivalentes, le système est indéterminé et admet une infinité de solutions, si deux ou plusieurs équations sont incompatibles, le système est impossible, il n'admet pas de solutions.

Lorsque le nombre des équations est inférieur au nombre des inconnues le système est indéterminé, à moins qu'il ne contienne des équations incompatibles, auquel cas il est impossible.

Lorsque le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, le système est impossible, à moins qu'il ne contienne des équations équivalentes.

96. Résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. — Cette résolution n'est qu'une généralisation des méthodes employées pour les équations à deux inconnues. Quelques exemples feront comprendre immédiatement la marche à suivre.

Ex. : *Résoudre le système.*

$$\begin{cases} 4x - 4y - z = 13 & (1) \\ 2x + 3y + 5z = 20 & (2) \\ -4x + 7y + 2z = -18 & (3) \end{cases}$$

1° Méthode de substitution. — Calculons x dan l'équation (1) :

$$3x = 13 + 4y + z$$
$$x = \frac{13 + 4y + z}{3} \qquad (4)$$

portons cette valeur dans les deux autres équations :

$$2\,\frac{13 + 4y + z}{3} + 3y + 5z = 20 \qquad (2')$$

$$-4\,\frac{13 + 4y + z}{3} + 7y + 2z = -18 \qquad (3')$$

Le système (4) (2') (3') est équivalent au système proposé. Mais les deux équations (2') (3') constituent un système de deux équations à deux inconnues que nous savons résoudre.

Ramenons les à la forme normale :

$$\begin{cases} 2(13 + 4y + z) + 9y + 15z = -60 & (2') \\ -4(13 + 4y + z) + 21y = 6z = -54 & (3') \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26 + 8y + 2z + 9y + 15z = 60 & (2') \\ -52 - 16y - 4z + 21y + 6z = -54 & (3') \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17y + 17z = 60 - 26 & (2') \\ 5y + 2z = -54 + 52 & (3') \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17y + 17z = 34 & (2'') \\ 5y + 2z = -2 & (3'') \end{cases}$$

C'est maintenant le système (2'') (3'') que nous allons résoudre. Il se ramène à

$$\begin{cases} y + z = 2 & (2'') \\ 5y + 2z = -2 & (3'') \end{cases}$$

de (2''') on tire

$$y = 2 - z \qquad (2'')$$

et en portant cette valeur dans (3'') on obtient :

$$5(2 - z) + 2z = -2$$
$$10 - 5z + 2z = -2$$
$$-3z - 12$$
$$z = 4$$

Maintenant que nous avons la valeur de z, il nous est facile de trouver la valeur des autres inconnues. Remplaçons z par sa valeur dans (2'''') :

$$y = 2 - 4$$
$$y = -2$$

et remplaçons y et z par leur valeur dans l'équation (4)

$$x = \frac{13 + 4 \times (-2 + 4)}{3}$$
$$x = \frac{13 - 8 + 4}{3}$$
$$x = 3$$

La solution du système d'équations est

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

2° Méthode d'élimination par addition ou soustraction. — On peut faire disparaître x entre les équations (1) et (2) en multipliant les deux membres de la première par 2 et les deux membres de la seconde par 3, et en retranchant les deux équations membre à membre ; on soustrait la première de la seconde :

$$\begin{array}{rl} 6x - 8y - 2z = 26 & (1) \\ 6x + 9y + 15z = 60 & (2) \\ \hline 17y + 17z = 34 & \end{array}$$

cette nouvelle équation se réduit, en divisant tous ses termes par 17, à

$$y + z = 2 \qquad (4)$$

On peut faire disparaître x entre les équations (2) et (3) en multipliant les deux membres de la première par 2 et en additionnant membre à membre les deux équations :

$$\begin{array}{rl} 4x + 6y + 10z = 40 & (2) \\ -4x + 7y + 2z = -18 & (3) \\ \hline 13y + 12z = 22 & (5) \end{array}$$

Les équations (4) et (5) jointes à l'une des équations données forment un système équivalent au système proposé ; mais les équations (4) et (5) considérées en elles seules forment un système de deux équations à deux inconnues que nous savons résoudre

$$\begin{cases} y + x = 2 & (4) \\ 13y + 12z = 22 & (5) \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4) par 13 et retranchons (5) de (4).

$$\begin{array}{l} 13y + 13z = 26 \\ 13y + 12z = 22 \\ \hline z = 4 \end{array}$$

Nous avons la valeur de z.

On pourrait continuer l'application de la méthode et éliminer successivement y et x entre les trois équations. Mais on a fréquemment avantage à terminer la résolution en appliquant la méthode de substitution. L'application de l'une ou de l'autre méthode est laissée à l'appréciation du calculateur qui juge, selon les cas, quelle est celle dont il a le plus avantage à se servir.

97. Artifice de calcul. — Dans beaucoup de cas, on peut faire subir aux équations données des transformations qui ne résultent pas de l'application des méthodes exposées ci-dessus, mais qui simplifient les calculs. On ne peut poser de règle fixe à cet égard ; c'est affaire d'intelligence et d'habileté.

Toutefois on peut remarquer qu'on *a presque toujours intérêt à conserver la symétrie* lorsqu'elle existe dans les équations, ou à la faire apparaître si c'est possible.

Nous allons donner quelques exemples.

I. *Résoudre le système* :

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ x + z = 19 & (2) \\ y + z = 23 & (3) \end{cases}$$

Nous remarquons que dans l'ensemble de ces trois équations, il y a $2x$, $2y$, $2z$, et que chacune contient la somme de deux des inconnues et cela de trois manières différentes pour les trois.

Additionnons membre à membre les trois équations du système. On trouve :

$$2x + 2y + 2z = 52$$

ou

$$x + y + z = 26 \qquad (4)$$

L'équation (4) et deux des équations données constituent un système équivalent au système proposé.

Mais de l'équation (4) nous pouvons retrancher membre à membre successivement chacune des trois équations proposées :

$$\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 26 \\ x + y &=& 10 \\ \hline z &=& 16 \\ x + y + z &=& 26 \\ x + z &=& 19 \\ \hline y &=& 7 \\ x + y + z &=& 26 \\ y + z &=& 23 \\ \hline x &=& 3 \end{array}$$

ce qui nous donne le système de solutions :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 16 \end{cases}$$

Les méthodes ordinaires auraient été d'une application beaucoup plus longue.

II. — *Résoudre* :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a & (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = b & (2) \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = c & (3) \end{cases}$$

Au lieu de ramener ces équations à la forme normale, ce qui nous donnerait du reste des équations du second degré, calculons $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$ et $\dfrac{1}{z}$.

Additionnons membre à membre les trois équations :

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = a + b + c$$

d'où

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a+b+c}{2} \qquad (4)$$

Retranchons successivement de (4) chacune des équations données ; nous obtenons :

$$\frac{1}{z} = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{a+b+c-2a}{2}$$

ou

$$\frac{1}{z} = \frac{b+c-a}{2} \qquad (5)$$

puis

$$\frac{1}{y} = \frac{a+c-b}{2} \qquad (6)$$

et

$$\frac{1}{x} = \frac{a+b-c}{2} \qquad (7)$$

De ces trois valeurs, on tire immédiatement, en prenant les inverses :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{a+b-c} \\ y = \dfrac{2}{a+c-b} \\ z = \dfrac{2}{b+c-a} \end{cases}$$

III. — *Résoudre* :

$$\begin{cases} -x + y + z = 5 & (1) \\ x - y + z = 3 & (2) \\ x + y - z = 1 & (3) \end{cases}$$

Additionnons successivement (1) et (2), (2) et (3), (1) et (3) :

$$\begin{array}{rcl} -x + y + z &=& 5 \\ x - y + z &=& 5 \\ \hline 2z &=& 8 \\ x - y + z &=& 3 \\ x + y - z &=& 1 \\ \hline 2x &=& 4 \\ -x + y + z &=& 5 \\ x + y - z &=& 1 \\ \hline 2y &=& 6 \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Exercices

37. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$$

38. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 5x + 4y = 28 \end{cases}$$

39. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{array}{l} 3x - 10y = 5x - 26 \\ x + y = 2x - y + 2 \end{array}$$

40. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

41. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ 3x + 4y + 2z = 17 \\ 4x + 2y + 3z = 17 \end{cases}$$

42. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

43. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \\ x + y = c \end{cases}$$

44. — Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \end{cases}$$

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

98. Applications. — I. — *Il y a 300 francs dans ces deux bourses. Si vous preniez 30 francs dans la première pour les mettre dans la deuxième, il y aurait la même somme dans les deux : combien y a-t-il dans chaque bourse ?*

1° Mise en équation. — Soient x la somme contenue dans la première bourse et y la somme contenue dans la seconde. On a tout d'abord :

$$x + y = 300$$

Si on prend 30 francs dans la première bourse, il y reste $x - 30$; et, si on met les 30 francs dans la seconde bourse, il y a dans celle-ci $y + 30$. D'après l'énoncé du problème on a :

$$x - 30 = y + 30$$

2° Résolution des équations. — On a à résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = 300 & (1) \\ x - 30 = y + 30 & (2) \end{cases}$$

Il ne présente aucune difficulté. On achèvera la solution du problème.

II. — *Il y a six ans, disait un homme à son fils, mon âge dépassait du tiers le triple du tien. Dans trois ans, il faudra multiplier ton âge par $2\frac{1}{6}$ pour faire le mien. Quel est l'âge du père et celui du fils ?*

1° Mise en équation. — Soit x l'âge du père et y celui du fils. Il y a six ans, le père avait $x - 6$, et le fils $y - 6$, l'âge du père valait les $\frac{4}{3}$ du triple de l'âge du fils, c'est-à-dire qu'il valait 4 fois l'âge du fils

$$x - 6 = 4\,(y - 6)$$

Dans trois ans le père et le fils auront respectivement $x + 3$ et $y + 3$, et, d'après l'énoncé du problème, on doit avoir :

$$x + 3 = 2\frac{1}{6}(y + 3)$$

2° Résolution des équations. — Le système à résoudre est donc

$$\begin{cases} x - 6 = 4\,(y - 6) & (1) \\ x + 3 = 2\frac{1}{6}(y + 3) & (2) \end{cases}$$

On achèvera la solution du problème.

III. — *Partager le nombre 83 en trois parties telles que, si l'on retranche 7 de la première et de la deuxième, le rapport des restes soit égal à $\frac{5}{3}$; et que, si l'on retranche 3 de la deuxième et de la troisième, les deux restes soient entre eux comme les nombres 11 et 9.*

Mise en équation. — Soient x, y et z les trois parties. On a tout d'abord :

$$x + y + z = 83 \qquad (1)$$

puis

$$\frac{x - 7}{y - 7} = \frac{5}{3} \qquad (2)$$

et enfin

$$\frac{y - 3}{z - 3} = \frac{14}{9} \qquad (3)$$

La résolution du système (1), (2), (3) donnera la solution du problème.

IV. — *Trouver un nombre de trois chiffres, tel que la somme de ses chiffres soit égale à 15, que le quotient par son dernier chiffre du nombre formé par les deux premiers soit égal à 15, et enfin que, si on retourne ce nombre, en mettant son dernier chiffre le premier et inversement, il augmente de 396.*

Les conditions du problème sont exprimées par les trois équations suivantes, dans lesquelles x, y et z représentent les trois chiffres du nombre :

$$\begin{cases} x + y + z = 15 & (1) \\ \dfrac{10x + y}{z} = 15 & (2) \\ 100z + 10y + x - (100x + 10y + z) = 396 & (3) \end{cases}$$

Exercices

45. — On a payé une somme de 159 fr. avec 51 pièces, les unes de 5 fr., les autres de 2 fr. Combien y a-t-il de pièces de chaque espèce ?

46. — Trouver deux nombres dont la différence et le quotient soient tous deux égaux à 5. — Généraliser.

47. — Partager 232 en trois parties telles que si on ajoute à la première la demi-somme des deux autres, qu'on ajoute à la seconde le tiers de la somme des deux autres, et qu'on ajoute à la troisième le quart de la somme des deux autres, les trois sommes ainsi obtenues soient égales.

48. — Trois robinets A, B, C peuvent remplir un bassin. Les robinets A et B coulant ensemble le remplissent en 10 minutes ; B et C coulant ensemble le remplissent en 20 minutes ; enfin C et A coulant ensemble le remplissent en 12 minutes. Combien chaque robinet coulant seul mettrait-il de temps pour remplir le bassin ?

Equation du second degré à une inconnue

99. Forme normale. — L'équation du second degré à une inconnue peut toujours se ramener à la forme.

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

dans laquelle x représente l'inconnue, a, b, et c des nombres connus positifs ou négatifs. a s'appelle *coefficient d'x^2*, b s'appelle *coefficient d'x*, c est le *terme tout connu*.

a peut être positif ou négatif ; mais s'il est négatif, on peut le ramener à être positif en changeant tous les signes de l'équation. Nous supposerons donc que, dans l'équation remenée à la forme normale, le coefficient d'x^2 est toujours positif. D'un autre côté, a ne peut être nul, sans quoi l'équation se serait plus du second degré ; elle se réduirait à

$$bx + c = 0$$

équation du premier degré en x.

100. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. — Les nombres b et c peuvent être nuls, soit simultanément, soit séparément.

1° *b et c sont nuls en même temps.*

L'équation se réduit à

$$a\,x^2 = 0$$

d'où on tire

$$x^2 = 0 \qquad x = 0$$

2° *b est nul, seul.*

L'équation se réduit à

$$ax^2 + c = 0$$

d'où on tire

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$(2) \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

On affecte un radical carré du double signe (±) car le carré de la racine positive ou celui de la racine négative reproduit le nombre. Ainsi, en algèbre et non en arithmétique, la racine carrée de 9 est ± 3, car $(+3)^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$.

La formule (2) indique deux valeurs pour x à condition que $\frac{-c}{a}$ soit un nombre positif. Si $\frac{-c}{a}$ est négatif, on ne peut en extraire la racine carrée ; l'équation ne peut être résolue ; on dit qu'x est *imaginaire.*

Si $\frac{-c}{a}$ est positif, il y a deux racines carrées (36). Pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que $-c$ soit positif, puisque a est lui-même positif (99), c'est-à-dire que c doit être négatif.

3° *c est nul, seul.*

L'équation se réduit à :

$$ax^2 + bx = 0$$

On peut l'écrire :

$$(3) \qquad x\,(a\,x + b) = 0$$

Pour qu'un produit de deux facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul (34). L'équation (3) est donc équivalente aux deux équations.

$$x = 0$$
$$ax + b = 0$$

qui donnent deux valeurs pour x :

$$(4) \qquad x = 0 \qquad x = \frac{-b}{a}$$

Les deux racines (4) vérifient l'équation donnée.

4° *b et c sont différents de* 0.

L'équation est complète.

$$(1) \qquad ax^2 + b\,x + c = 0$$

Divisons tous les termes par a :

$$(5) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Nous remarquons que l'expression $x^2 + \frac{b}{a}x$ se compose des deux premiers termes du carré de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

On a donc identiquement :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

Portons cette valeur dans l'équation (5) :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

ou

$$(6) \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Le premier membre de l'équation (6) est composé d'un terme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ qui est un carré parfait et qui, par conséquent, est toujours positif ou nul, et d'un autre terme $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ qui peut être positif, négatif ou nul. Le signe de ce dernier terme ne dépend d'ailleurs que de son numérateur $b^2 - 4ac$, car le dénominateur $4a^2$ est toujours positif.

On peut donc envisager trois cas.

1° $\qquad b^2 - 4ac < 0$

Dans ce cas, $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est positif et le premier membre de l'équation (6) étant une somme de deux quantités positives ne peut pas s'annuler.

L'équation n'a pas de solution. On dit que ses racines sont *imaginaires.*

2° $\qquad b^2 - 4ac = 0$

L'équation se réduit à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$$

et d'après (34), cette équation est équivalente aux deux équations identiques.

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} = 0 \\ x + \dfrac{b}{2a} = 0 \end{cases}$$

qui fournissent deux solutions égales :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

3° $\qquad b^2 - 4ac > 0$

L'équation peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ou, en extrayant la racine carrée des deux membres :

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(7) \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La formule (7) donne deux valeurs pour x quand on prend tour à tour le signe + et le signe — du radical.

101. — Remarque. — On peut procéder par une méthode plus rigoureuse en considérant le premier membre de l'équation (6) comme la différence de deux carrés (60), à savoir du carré $x + \frac{b}{2a}$ et du carré de $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. On peut alors l'écrire sous la forme d'un produit :

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

Cette équation équivaut aux deux équations :

$$\begin{cases} x + \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \\ x + \dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \end{cases}$$

d'où on tire les racines

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Ainsi lorsque $b^2 - 4\,a\,c > 0$ l'équation a deux racines distinctes données par la formule (7) ou les formules (8).

102. — Applications. I. — *Résoudre l'équation :*

(1) $$5\,x\,(x - 1) = 48 - 2\,x^2$$

Ramenons d'abord cette équation à la forme normale :

$$5\,x^2 - 5\,x + 2\,x^2 - 48 = 0$$

Nous avons respectivement :

(2) $$7\,x^2 - 5\,x - 48 = 0$$

$$a = 7 \qquad b = -5 \qquad c = -48$$

Formons

$$b^2 - 4\,a\,c$$

$$b^2 - 4\,a\,c = 25 + 4 \times 7 \times 48$$

$$b^2 - 4\,a\,c = 1369$$

cette quantité étant positive, l'équation a deux racines qu'on déduit des formules (8).

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5 - \sqrt{1\,369}}{14} \\ x'' = \dfrac{5 + \sqrt{1\,360}}{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5 - 37}{14} = \dfrac{-32}{14} = -\dfrac{16}{7} \\ x'' = \dfrac{5 + 37}{14} = \dfrac{42}{14} = 3 \end{cases}$$

$$x' = -\frac{16}{17} \qquad x'' = 3$$

II. *Résoudre l'équation :*

$$\frac{x + 3}{2} = \frac{15}{x - 2}$$

Ramenons à la forme normale :

$$(x + 3)\,(x - 2) = 30$$

$$x^2 + x - 6 = 30$$

$$x^2 + x - 36 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = -36$$

Formons

$$b^2 - 4\,a\,c$$

$$b^2 - 4\,a\,c = 1 + 144 = 145$$

Il y a deux racines distinctes puisque $b^2 - 4\,a\,c$ est positif :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-1 - \sqrt{145}}{2} \\ x'' = \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{2} \end{cases}$$

III. — *Résoudre :*

$$-13\,x^2 + 2\,x - 21 = 0$$

Pour ramener cette équation à la forme normale il suffit d'en changer tous les signes.

$$13\,x^2 - 2\,x + 21 = 0$$

$$a = 13 \qquad b = -2 \qquad c = 21$$

$$b^2 - 4\,a\,c = 4 - 4 + 13 \times 21$$

$b^2 - 4\,a\,c$ est négatif ; il n'y a donc pas de racines.

IV. — Résoudre :

$$4\,x\,(x - 1) + 1 = 0$$

Ramenons à la forme normale :

$$4\,x^2 - 4\,x + 1 = 0$$

$$a = 4 \quad b = -4 \quad c = 1$$

$$b^2 - 4\,a\,c = 16 - 4 \times 4$$

$$b^2 - 4\,a\,c = 0$$

Il y a deux racines égales :

$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Remarque. — La formule et la règle de résolution de l'équation du second degré se simplifie lorsque le coefficient du terme en x est pair. En effet posons $b = 2\,b'$, la formule générale.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

devient

$$x = \frac{-2\,b' \pm \sqrt{4\,b'^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

d'où l'on tire, en faisant sortir le facteur 4 de sous le radical et en simplifiant

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - a\,c}}{a}$$

Relations entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré

103. Somme des racines. — Faisons la somme des racines de l'équation dans le cas où $b^2 - 4\,a\,c$ est positif.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \end{cases}$$

$$x' + x'' = \frac{-2\,b}{2\,a}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

104. Produit des racines. — Pour former le produit on peut remarquer que les deux numérateurs sont l'un la somme et l'autre la différence des deux quantités $-b$ et $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$; on a donc :

$$x'\,x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4\,a\,c}{4\,a^2}$$

$$x'\,x'' = \frac{c}{a}$$

Retenons ces deux relations importantes :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x'\,x'' = \frac{c}{a}$$

105. Signe des racines. — Remarquons d'abord que si $a\,c$ est négatif, la quantité $b^2 - 4\,a\,c$ est positive, car elle est formée de deux termes positifs, il y a deux racines réelles.

Quoi qu'il en soit, supposons que $b^2 - 4\,a\,c$ soit positif.

1° $$\frac{c}{a} < 0$$

Les racines sont de signe contraire : l'une est positive, l'autre négative, puisque leur produit est négatif

Si la somme des racines $-\dfrac{b}{a}$ est positive, cela signifie que la racine positive est la plus grande en valeur absolue. Si $-\dfrac{a}{b}$ est négatif, c'est la racine négative qui est la plus grande en valeur absolue.

2° $$\frac{c}{a} > 0$$

Les racines sont de même signe. Si leur somme $-\dfrac{b}{a}$ est positive, elles sont toutes deux positives. Si

leur somme $-\frac{b}{a}$ est négative, elles sont toutes deux négatives.

106. Application. — *Trouver le signe des racines de l'équation :*

$$7x^2 - 5x - 48 = 0$$

sans résoudre l'équation.

$c = -48$ étant négatif, la quantité $b^2 - 4ac$ est positive ; il y a deux racines.

$$x'x'' = \frac{-48}{7}$$

Les racines sont de signe contraire.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{5}{7}$$

La racine positive est la plus grande en valeur absolue.

107. — Problème. — *Trouver deux nombre connaissant leur somme* p *et leur produit* q.

L'équation du second degré

$$x^2 - px + q = 0$$

a justement pour racines deux nombres dont la somme est p et le produit q.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \dfrac{p}{2} - \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \\ x'' = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \dfrac{p}{2} + \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \end{cases}$$

Application. — *Trouver deux nombres connaissant leur somme* 9 *et leur produit* 20.

Ce sont les racines de l'équation.

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x' = \frac{9 - \sqrt{81 - 80}}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{9 + \sqrt{81 - 80}}{2} = 5$$

Exercices

49. — Résoudre l'équation

$$3x^2 - 17x + 10 = 0.$$

50. — Résoudre l'équation $4x^2 - 12x - 7 = 0$.

51. — Résoudre l'équation $9x^2 - 12x + 4 = 0$

52. — Résoudre l'équation $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x(x - 1)(x - 2)$.

53. — Résoudre l'équation

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

54. — Former une équation ayant pour racines 5 et — 7.

55. — Trouver les côtés d'un rectangle de surface 65 m² et de périmètre 36 m.

56. — Reconnaître *à prior.* la nature des racines des équations.

1. $45x^2 - 83x + 15 = 0$
2. $45x^2 + 83x + 15 = 0$
3. $4x^2 - 28x + 49 = 0$
4. $15x^2 - 18x - 27 = 0$

108. Equations dont la résolution se ramène à celle d'une équation du second degré.

1° Equation bicarrée.

On entend par équation bicarrée une équation qui contient l'inconnue x au quatrième et au second degré, mais ne la contient ni au troisième ni au premier degré.

La forme normale de cette équation est

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Si, dans cette équation, on fait

$$x^2 = y$$

on obtient une équation du second degré en y

$$ay^2 + by + c = 0$$

dont les solutions sont :

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et comme :

$$x = \pm\sqrt{y}$$

les solutions de l'équation bicarrée sont :

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Pour qu'il y ait des solutions, il faut d'abord que l'équation en y en ait, c'est-à-dire que l'on ait $b^2 - 4ac \geqq 0$, puis que l'on puisse extraire la racine carréedes valeurs d'y, c'est-à-dire que celles-ci soient positives. Le nombre des solutions est indiqué dans le tableau suivant :

$b^2 - 4ac < 0$ — 0 solution

$b^2 - 4ac = 0$ — $y = \dfrac{-b}{2a}$:
- positif : $x' = +\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}$, $x'' = -\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}$
- négatif — 0 solution

$b^2 - 4ac > 0$ — $y = \begin{cases} y' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\ y'' = \dfrac{b - + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$

y' :
- positif : $x'^2 = +\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, $x'^2 = -\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}}$
- négatif — 0 solution

y'' :
- positif : $x''^1 = -\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, $x''^2 = +\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$
- négatif — 0 solution

(Ainsi il peut y avoir 0, deux ou quatre solutions).

Application. — Résoudre l'équation bicarrée.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

La résolvante est

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

dont les racines sont :

$$y' = \frac{5 + \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$y'' = \frac{5 - \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

ces deux racines sont positives, l'équation proposée a donc quatre racines qui sont :

$$+\sqrt{4} = 2, \quad -\sqrt{4} = -2$$
$$+\sqrt{1} = 1, \quad -\sqrt{1} = -1$$

2° Equation réciproque du quatrième degré. Cette équation est de la forme :

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a = 0$$

Divisons tous les termes par x^2, il vient :

$$a x^2 + b x + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

ce qui peut s'écrire :

(1) $$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Posons :

(2) $$x + \frac{1}{x} = y$$

On a

$$x^2 + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

car

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

par conséquent

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

et l'équation (1) devient

$$a\left(y^2 - 2\right) + by + c = 0$$
$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

(3) $$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2b}$$

Supposant y connu résolvons l'équation (2). Si x n'est pas nul nous pouvons multiplier les deux membres par x.

$$x^2 + 1 = yx$$
$$x^2 - yx + 1 = 0$$

d'où on tire

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Par une discussion analogue à la précédente, on démontrera qu'il peut y avoir 0, 2 ou 4 solutions. La solution $x = 0$ ne devra être acceptée qu'après vérification, car la division des termes de l'équation réciproque par x^2 et de l'équation (2) par x a été faite en supposant x différent de 0.

Application. — *Résoudre.*

$$8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8 = 0$$

Divisons par x^2 et groupons :

$$8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 69 = 0$$

Posons $x + \frac{1}{x} = y$;

l'équation précédente devient :

$$8(y^2 - 2) + 14y - 69 = 0$$

ou

$$8y^2 + 14y - 85 = 0$$

D'où

$$y' = 2\frac{1}{2} \qquad y'' = -4\frac{1}{4}$$

Résolvons

$$x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2} \text{ ou } 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

puis

$$x + \frac{1}{x} = -4\frac{1}{2} \text{ ou } 4x^2 + 17x + 4 = 0$$

On obtient les quatre racines

$$x_1 = 2, \; x_2 = \frac{1}{2}, \; x_3 = -4, \; x_4 = -\frac{1}{4}$$

3° Equations irrationnelles.

L'inconnue peut se trouver engagée sous un radical, comme par exemple dans l'équation :

(1) $$\sqrt{6 - x} + 4 = 7x - 8$$

Dans ce cas, on peut souvent faire disparaître le radical par une élévation au carré. Ainsi isolons dans le premier membre le radical de l'équation (1) :

(2) $$\sqrt{6 - x} = 7x - 12$$

Elevons les deux membres au carré :

$$6 - x = 49x^2 - 168x + 144$$

que nous ramenons à la forme normale de l'équation du second degré :

$$49x^2 - 167x + 138 = 0$$

$$x = \frac{167 \pm \sqrt{167^2 - 4 \times 49 \times 138}}{2 \times 49}$$

$$x = \frac{167 \pm 29}{98}$$

$$x' = \frac{69}{49}$$

$$x'' = 2$$

La solution $x'' = 2$ vérifie l'équation (2), elle est acceptable. Par contre la solution $x' = \frac{69}{49}$ donne :

$$\sqrt{6 - \frac{69}{48}} = \frac{60}{7} - 12$$

$$\frac{15}{7} = \frac{-15}{7}$$

ce qui est absurde. La solution x' n'est donc pas acceptable. C'est une *solution étrangère* introduite par l'élévation au carré.

109. Systèmes d'équations du second degré.

I. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x + y = 12 & (1) \\ xy = 27 & (2) \end{cases}$$

Nous avons déjà vu (107) que, la somme et le produit de deux nombres étant connus, on peut construire une équation du second degré dont les racines sont ces deux nombres. Mais on peut aussi résoudre le problème au moyen de deux équations en opérant par substitution :

Tirons de (1) la valeur d'y :

(3) $$y = 12 - x$$

portons cette valeur dans la seconde équation :

$$x(12 - x) = 27$$
$$-x^2 + 12x - 27 = 0$$
$$(4) \qquad x^2 - 12x + 27 = 0$$
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2}$$
$$x = \frac{12 \pm 6}{2}$$
$$x' = 3 \qquad x'' = 9$$

en portant successivement ces deux valeurs d'x dans l'équation (3), on trouvera deux valeurs d'y qui seront justement aussi 3 et 9 ; on aura en définitive les deux systèmes identiques de solutions :

$$\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = 9 \\ y'' = 3 \end{cases}$$

On voit du reste que l'équation (4) n'est autre que celle qu'ont aurait obtenue par application de la règle (107).

II. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ xy = -27 \end{cases}$$

Ce système se résout comme le précédent ; il suffit de poser

$$y = -y'$$

et le système devient :

$$\begin{cases} x + y' = 6 \\ xy' = -27 \end{cases}$$

x et y' étant connus, on en déduit y.

III. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 & (1) \\ x^2 + 2xy = 45 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (2) on tire :

$$y = \frac{45 - x^2}{2x}$$

et, en portant cette valeur dans (1) :

$$x^2 + \left(\frac{45 - x^2}{2x}\right) = 29$$
$$x^2 + \frac{(45 - x^2)^2}{4x^2} = 29$$

En supposant $x \neq 0$, on peut multiplier les termes par $4x^2$

$$4x^4 + 2025 - 90x^2 + x^4 = 116x^2$$
$$5x^4 - 200x^2 + 2025 = 0$$
$$x = \mp\sqrt{\frac{206 \pm \sqrt{206^2 - 4 \times 5 \times 2025}}{2 \times 5}}$$
$$x = \mp\sqrt{\frac{103 + \sqrt{103^2 - 5 \times 2025}}{5}}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{103 \pm 22}{5}}$$
$$x'_1 = -\frac{9}{\sqrt{5}} \qquad x'_2 = +\frac{9}{\sqrt{5}} \qquad x''_1 = 5 \qquad x''_2 = +5$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1) on trouve pour y les valeurs :

$$y' = \pm\frac{8}{\sqrt{5}} \qquad y'' = \pm 2$$

ce qui fait en tout huit systèmes de solutions :

$$1 \begin{cases} x'_1 = -\dfrac{9}{\sqrt{5}} \\ y'_1 = -\dfrac{8}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad 2 \begin{cases} x'_1 = -\dfrac{9}{\sqrt{5}} \\ y'_2 = +\dfrac{8}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad 3 \begin{cases} x'_2 = +\dfrac{9}{\sqrt{5}} \\ y'_1 = -\dfrac{8}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad 4 \begin{cases} x'_2 = +\dfrac{9}{\sqrt{5}} \\ y'_2 = +\dfrac{8}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x''_1 = -5 \\ y''_1 = -2 \end{cases} \qquad 6 \begin{cases} x''_1 = -5 \\ y''_2 = +2 \end{cases} \qquad 7 \begin{cases} x''_2 = +5 \\ y''_1 = -2 \end{cases} \qquad 8 \begin{cases} x''_2 = +5 \\ y''_2 = +2 \end{cases}$$

Les quatre premiers systèmes de solutions sont à rejeter, car ils ne satisfont pas à l'équation (2) ; ils donnent effet pour la valeur du premier membre de celle-ci :

$$\frac{81}{5} \pm \frac{9 \times 8}{5}$$

c'est-à-dire deux expressions inférieures à 45.

Les quatre derniers systèmes donnent pour la seconde équation les valeurs :

$$25 \pm 20$$

Seule la valeur

$$25 + 20$$

est acceptable. Or, pour que $2xy$ donne une valeur positive $+20$, il faut que x et y aient le même signe ; c'est-à-dire que seules les solutions 5 et 8 sont acceptables.

Ainsi les solutions du système sont :

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +5 \\ y = +2 \end{cases}$$

Ces exemples indiquent suffisamment comment on devra procéder dans les différents cas et discuter les solutions obtenues.

Exercices

57. — Résoudre les équations bicarrées :

1. $x^4 - 29x + 100 = 0$
2. $4x^4 + 35x^2 - 9 = 0$

58. — Résoudre l'équation :

$$\sqrt{4x - 3} = \sqrt{2x + 3}$$

59. — Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x + 11} - \sqrt{x^2 + 5x - 25} = 1$$

60. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ x^2 + y^2 = b^2 & (2) \end{cases}$$

61. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ x^3 + y^3 = b^3 & (2) \end{cases}$$

62. — Par quel nombre faut-il diviser 24 pour que le diviseur, augmenté du quotient, donne 10 ?

63. — Une fraction est telle que sa différence avec 1, multipliée par l'unité augmentée de 10 fois la fraction inconnue, donne 3 pour produit. Quelle est cette fraction ?

64. — L'achat d'un certain nombre d'exemplaires d'un ouvrage s'élève à 100 fr. Si le prix avait été de 1 fr. de moins par exemplaire, on aurait eu 5 exemplaires de plus pour la même somme. Combien d'exemplaires de l'ouvrage a-t-on achetés et à quel prix ?

65. — Trouver les côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est 12 mètres, sachant en outre que la hauteur correspondant à l'hypoténuse mesure 2 m. 40.

Progressions et Logarithmes

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

110. Définition. — *On appelle progression arithmétique une suite de nombres tels que l'un quelconque de ces nombres soit égal au précédent augmenté d'un nombre constant qu'on appelle la* RAISON.

On écrit que des nombres a, b, c, d, etc. forment une progression arithmétique de la manière suivante.

$$\div\, a.\ b.\ c.\ d\ \ldots\ h.\ k.\ l$$

La raison de la progression peut être positive ou négative. Si elle est positive, la progression est dite *croissante*, si elle est négative la progression est dite *décroissante*.

Le premier terme de la progression peut être négatif, nul ou positif. La progression peut aussi être illimitée dans les deux sens.

111. Problème. — *Calculer un terme de la progression connaissant son rang dans la progression, le premier terme et la raison.*

Soit la progression

$$\div\, a.\ b.\ c.\ d\ \ldots\ e.\ f.\ h.\ k.\ l$$

nous nous proposons de calculer le terme h de rang p connaissant le premier terme a et la raison r.

Par définition, on a successivement :

$$b = a + r\,;\ c = b + r\,;\ d = c + r$$
$$\ldots\ldots f = e + r\,;\ h = f + r.$$

en additionnant membre à membre et en réduisant les termes semblables, on trouve

$$h = a + (p - 1)\, r$$

en effet h étant le terme de rang p, on a écrit $(p - 1)$ égalités.

112. Problème. — *Calculer un terme de la progression connaissant son rang à partir du dernier terme, la valeur du dernier terme et la raison.*

Soit la progression

$$\div\, a.\ b.\ c.\ d.\ldots.\ e.\ f.\ g.\ h.\ i.\ k.\ l$$

nous nous proposons de calculer le terme c qui occupe le rang p, à compter du dernier terme l. La raison étant r, on a comme précédemment :

$$k = l - r\,;\ h = k - r\,;\ f = h - r$$
$$c = d - r$$

d'où

$$c = l - (p - 1)\, r$$

113. Théorème. — *Dans une progression arithmétique, la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante et égale à la somme des extrêmes.*

Soient le terme h de rang p, à compter du premier terme, et le terme c de rang p à compter du dernier terme. On a (111 et 112) :

$$h = a + (p - 1)\, r$$
$$c = l - (p - 1)\, r$$
$$c + h = a + l$$

114. Problème. — *Faire la somme des termes d'une progression arithmétique limitée.*

Soit la progression :

$$-\ a.\ b.\ c.\ d.\ \ldots\ f.\ h.\ k.\ l$$

écrivons deux fois la somme des termes, en commençant d'abord par a, puis par l :

$$S = a + b + c + d + \ldots + d + h + k + l$$
$$S = l + k + h + f + \ldots + f + c + b + a$$

Les termes placés les uns sous les autres dans une même colonne verticale sont équidistants des extrêmes. Additionnons les deux lignes en groupant ces termes équidistants des extrêmes :

$$2\,S = (a + l) + (b + k) + (c + k) + (d + f) + \ldots$$
$$+ (f + d) + (h + c) + (k + b + (k + b) + (l + a)$$

Toutes les sommes entre parenthèses sont égales (113). Si donc on appelle n le nombre des termes de la progression, l'expression précédente peut s'écrire :

$$2\,S = n\,(a + l)$$

d'où

$$(1) \qquad S = \frac{n\,(a + l)}{2}$$

Cette formule suppose qu'on connaît le premier et le dernier terme de la progression et le nombre des termes. Il arrive souvent qu'on ne connaisse que le premier terme a et le nombre des termes n ; mais, par contre, qu'on connaisse aussi la raison r. Dans ce cas, on remplace l par sa valeur en fonction de a, n et r. En effet, l étant $n^{\text{ième}}$ terme de la progression, on a (111) :

$$l = a + (n - 1)\, r$$

La formule (1) devient alors :

$$(2) \qquad S = \frac{2\,a + (n - 1)\, r}{2} \times n$$

115. Application. — *Somme des* n *premiers nombres entiers.*

On a :

$$a = 1 \qquad\qquad r = 1\,.$$

La formule devient :

$$S = \frac{2 + (n - 1)}{2} \times n$$

$$S = \frac{(2 + n - 1)\, n}{2} = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

$$S = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

Exemple : $n = 27$

$$S = \frac{27 \times 28}{2} = 27 \times 14$$

$$S = 378$$

116. Application. — *Somme des* n *premiers nombres impairs.*

On a :

$$a = 1 \qquad\qquad r = 2$$

$$S = \frac{2 + (n - 1)\, 2}{2}\, n$$

$$S = \frac{2 + 2n - 2}{2}\, n = n^2$$

$$S = n^2$$

117. Insertion des moyens arithmétiques. — *Insérer* p *moyens arithmétiques entre deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, c'est former une nouvelle progression arithmétique de* (p + 2) *termes, ayant pour premier et pour dernier termes, les termes entre lesquels on a effectué l'insertion.*

Soit une progression arithmétique.

$$\div\, a.\ b.\ c.\ d.\ldots.\ f.\ g.\ h.\ k.\ l.$$

de raison r. Nous voulons insérer p moyens arithmétiques entre c et d. Le problème revient à trouver

la raison de la nouvelle progression. Or le terme d étant le $(p + 2)^{\text{ième}}$ de la nouvelle progression commençant par c, si nous appelons x la raison cherchée, nous avons (111) :

$$d = c + (p + 1)\,x$$

cette équation permet de calculer x :

$$x = \frac{d - c}{p + 1} = \frac{r}{p + 1}$$

Ce résultat nous montre que la raison x ne dépend que de p et de r et qu'elle est toujours la même quels que soient les termes entre lesquels on effectue l'insertion. Il s'ensuit que, si l'on effectue l'insertion de p moyens arithmétiques entre tous les termes consécutifs de la progression donnée, les nouvelles progressions que l'on obtient, font toutes partie d'une même progression.

Exercices

66. — Trouver la somme des 30 premiers termes de la progression arithmétique commençant par 3 et ayant pour raison 5.

67. — Trouver la somme des n premiers nombres pairs.

68. — Trouver trois nombres en progression arithmétique connaissant leur somme 15 et leur produit 105.

69. — Dans une progression arithmétique, on donne le nombre des termes 17, la somme des termes 595, et le produit des termes extrêmes 201. Trouver le premier et le dernier termes, ainsi que la raison.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

Définition. — *Une progression géométrique est une suite de nombres tels que l'un quelconque de ces nombres est égal au précédent multiplié par un nombre constant différent de* 0 *et de* 1, *qu'on appelle la* RAISON.

Une progression géométrique entre des nombres $a, b, c, d, \ldots h, k, l$, s'écrit de la manière suivante :

$$\div\!\div\; a : b : c : d : h : \quad . \quad : k : l$$

Nous admettrons que la raison q de la progression est toujours positive. La progression est *croissante* si la raison est plus grande que l'unité ; elle est *décroissante* si la raison est plus petite que l'unité.

118. — Problème. — *Calculer un terme de la progression connaissant son rang dans la progression, le premier terme et la raison.*

Soit à calculer le terme h de rang p, connaissant le premier terme a et la raison q.

Par définition, nous avons :

$$b = aq\,;\quad c = bq\,;\quad d = cq\,;\ldots g = fq\,;\quad h = gq.$$

en multipliant membre à membre et en réduisant les termes semblables :

$$h = a\,q^{p-1}$$

119. Problème. — *Calculer un terme de la progression connaissant son rang à compter du dernier terme, le dernier terme et la raison.*

Soit à calculer le terme c de rang p à compter du dernier terme, connaissant le dernier terme 1 et la raison q.

$$k = \frac{l}{c}\,;\quad h = \frac{k}{q}\,;\quad \ldots\ldots c = \frac{d}{q}$$

d'où

$$c = \frac{l}{q^{p-1}}$$

120. Théorème. — *Dans une progression géométrique limitée, le produit de deux termes équidistants des extrêmes est constant et égal au produit des extrêmes.*

Soient le terme h de rang p à partir du premier terme et le terme c de rang p à partir du dernier terme. On a (118 et 119).

$$h = a\,q^{p-1}$$
$$c = \frac{l}{q^{p-1}}$$

En multipliant membre à membre :

$$c\,h = \frac{a\,l\,q^{p-1}}{q^{p-1}}$$

ou :

$$c\,h = a\,l$$

121. — Problème. — *Calculer le produit des termes d'une progression géométrique.*

Ecrivons ce produit d'abord dans un sens, puis dans l'autre :

$$P = a \times b \times c \times d \times \ldots \times g \times h \times k \times l$$
$$P = l \times k \times h \times g \times \ldots \times d \times c \times b \times a$$

multiplions membre à membre, en mettant en évidence les produits $a\,l$; $b\,k$, $c\,h$, etc. qui sont des produits de termes équidistants des extrêmes :

$$P^2 = a\,l \times b\,k \times c\,h \times d\,g \times \ldots g\,d \times h\,c \times kb \times l\,a$$

Tous ces produits étant égaux, si on appelle n le nombre des termes de la progression on a :

$$P^2 = (al)^n$$

et

$$P = \sqrt{(al)^n}$$

122. Problème. — *Calculer la somme des termes d'une progression géométrique limitée.*

Soit :

$$\div\!\div\; a : b : c : d : \ldots : e : h : k : l$$

une progression géométrique. Soient S la somme de ses termes et q sa raison. On peut écrire :

$$S = a + b + c + d + \ldots + e + h + k + l$$
$$Sq = a\,q + b\,q + c\,q + d\,q + \ldots$$
$$+\ e\,q + h\,q + k\,q + l\,q$$

Mais

$$a\,q = b \qquad b\,q = c \qquad c\,q = d \ldots h\,q = k \qquad k\,q = l$$

Si donc on retranche S de Sq on obtient :

$$Sq = S = l\,q - a$$

d'où

$$S\,(q - 1) = l\,q - a$$

(1)

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

Il arrive souvent qu'on ne donne pas le dernier terme l, mais qu'en revanche on donne le nombre des termes n. Dans ce cas, l étant le $n^{\text{ième}}$ terme on a (120) :

$$l = a\,q^{n-1}$$

En portant cette valeur dans la relation (1), on obtient :

$$S = \frac{a\,q^n - a}{q - 1}$$

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

123. Insertion de moyens géométriques. — *Insérer* p *moyens géométriques entre deux termes consécutifs d'une progression géométrique, c'est former une nouvelle progression géométrique de* (p + 2) *termes, ayant pour premier et pour dernier termes les termes entre lesquels on a effectué l'insertion.*

Soit une progression géométrique

$$\div\!\div\; a : b : c : d : \ldots : f\,g : h : k : l$$

de raison q. Nous voulons insérer p moyens géométriques entre c et d. Le problème revient à trouver la raison de la nouvelle progression. Or le terme d étant le $(p + 2)$ terme de la nouvelle progression commençant

par c, si nous appelons x la raison cherchée, nous avons (120) :

$$d = c\,x^{p+1}$$

d'où on tire $$x = \sqrt[p+1]{\frac{d}{c}} = \sqrt[p+1]{q}$$

La raison x ne dépend que de p et de q ; elle est toujours la même quels que soient les termes entre lesquels on a effectué l'insertion. Il s'ensuit que si l'on effectue l'insertion de y moyens géométriques entre tous les termes consécutifs de la progression donnée, les nouvelles progressions que l'on obtient font toutes partie d'une même progression.

124. Comparaison des résultats obtenus pour les progressions arithmétiques et des résultats obtenus pour les progressions géométriques. — On a remarqué que les problèmes concernant les progressions géométriques sont tout à fait comparables à ceux qui concernent les progressions arithmétiques ; en rapprochant les résultats, on peut constater que les opérations algébriques se correspondent de la manière suivante :

Progressions arithmétiques	Progressions géométriques
Addition.	Multiplication.
Soustraction.	Division.
Multiplication.	Elévation à une puissance.
Division.	Extraction de racine.

Le tableau suivant permet de mieux se rendre compte de cette correspondance :

Progressions arithmétiques :	Progressions géométriques
$b = a \times r$	$b = a\,q$
$h = a + (p - 1)\,r$	$h = a\,q^{p-1}$
$c = l - (p - 1)\,r$	$c = \dfrac{l}{q^{p-1}}$
$c + h = a + l$	$c\,h = a\,l$
$S = \dfrac{n(a + l)}{2}$	$P = \sqrt{(a\,l)^n}$
$x = \dfrac{r}{p+1}$	$x = \sqrt[p+1]{q}$

Exercices

70. — Calculer le sixième terme de la progression géométrique qui commence par 3 et dont la raison est $\frac{1}{5}$

71. — Trouver la somme des dix premiers termes de la progression

$$\because 2 : 4 : 8 : 16 \ldots\ldots$$

72. — Trouver la limite de la somme des termes de la progression indéfiniment prolongée.

$$\because 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots\ldots$$

73. — Trouver la fraction génératrice de la fraction décimale simple 0,526526...

LOGARITHMES

125. — Définition. — C'est sur cette correspondance des progressions arithmétiques et géométriques que le calcul des logarithmes est fondé.

Considérons deux progressions illimitées, l'une géométrique ayant pour raison q et pour termes des nombres de la forme :

$$\ldots \frac{1}{q^n} : \frac{1}{q^{n-1}} : \frac{1}{q^{n-2}} : \ldots\ldots : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots q^{n-2} : q^{n-3} \ldots\ldots q^n$$

l'autre arithmétique ayant pour raison r et pour termes des nombres de la forme :

$$\ldots - n\,r. - (n - 1)\,r \ldots\ldots - 2\,r. - 0.\ r.\ 2\,r \ldots\ldots (n - 1)\,r.\ n\,r \ldots\ldots$$

comme on le voit, la progression géométrique contient le terme 1 et la progression arithmétique le terme 0. En outre q et r sont supposés positifs et q est plus grand que 1. On fait correspondre les deux progressions terme à terme et de façon que le terme 1 de la progression géométrique corresponde au terme 0 de la progression arithmétique.

$$\ldots : \frac{1}{q^n} \ldots : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots : q^{n-1} : q^n$$

$$\ldots - nr - 2\,r. - r.\ 0.\ r.\ 2\,r \ldots (n - 1)\,r.\ n\,r$$

et l'on dit qu'un terme quelconque de la progression géométrique a pour *logarithme* le terme correspondant de la progression arithmétique.

Ainsi le logarithme de $\frac{1}{q^2}$ est $-2\,r$, le logarithme de q^{n-1} *est* $(n - 1)\,r$.

Dans un *système de logarithmes* ainsi défini, seuls ont des logarithmes les nombres qui se trouvent parmi les termes de la progression géométrique. Mais on comprend qu'il soit possible de définir le logarithme d'un nombre quelconque N, ou du moins d'un nombre aussi approché que l'on voudra de N, en insérant des moyens géométriques et des moyens arithmétiques entre les termes de deux progressions. Nous admettrons donc dans ce qui va suivre que tous les nombres *positifs* ont des logarithmes.

126. Théorème. — *Le logarithme d'un produit de facteurs est égal à la somme algébrique des logarithmes des facteurs.*

Soit le produit des nombres :

$$\frac{1}{q^p} \times q^m \times q^n$$

Il s'agit de trouver le logarithme de ce produit:

$$\log \frac{1}{q^p} \times q^m \times q^n = \log \frac{q^{m+n}}{q^p}$$

$$\log \frac{q^{m+n}}{q^n} = \log q^{m+n-p}$$

Or les logarithmes de chacun des facteurs sont respectivement :

$$\log \frac{1}{q^p} = -\,p\,r \quad \log q^m = mr \quad \log q^n = n\,r$$

leur somme algébrique est

$$\log q^m + \log q^n + \log \frac{1}{q^p} = m\,r + n\,r - p\,r$$

$$= (m + n - p)\,r$$

or ce dernier nombre est justement le logarithme du nombre q^{m+n-p}. Ainsi :

$$\log \frac{1}{q_p} \times q^m \times q^n = \log \frac{1}{q_n} + \log q^m + \log q^n$$

127. Corollaire. — *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.*

Soit à trouver le logarithme de A^p. A est égal à un terme de la progression géométrique.

$$A = q^n$$

dont le logarithme est :

$$\log q^n = n\,r$$

Or, la puissance p^{eme} de A n'est pas autre que le produit de p facteurs égaux à A. Le logarithme de ce produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs, c'est-à-dire à p fois le logarithme de A :

$$\log A^p = p \log A$$

On voit du reste directement que :

$$\log q^{pn} = p\, n\, r$$

128. Corollaire. — *Le logarithme de la racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de la racine.*

En effet on a :

et d'après (127) $A = \sqrt[p]{A^p}$

$$\log A = p \log \sqrt[p]{A}$$

$$\frac{\log A}{p} = \log \sqrt[p]{A}$$

129. Théorème. — *Le logarithme d'un quotient est égal à la soustraction algébrique du logarithme du dividende et du logarithme du diviseur.*

Soit le quotient

$$A : B$$

et supposons qu'on ait

$$A = q^p \qquad B = q^n$$

Le quotient de A par B peut s'écrire :

$$\frac{A}{B} = \frac{q^p}{q^n} = q^{p-n}$$

et on a :

$$\log q^p = p\, r \quad \log q^n = n\, r \quad \log q^{p-n} = (p-n)\, r$$

$$\log q^{p-n} = \log q^p - \log q^n$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

130. Tables de logarithmes. — On a construit des tables donnant tous les nombres avec leurs logarithmes. On voit qu'au moyen de ces tables, on pourra simplifier beaucoup les opérations en remplaçant une multiplication par une addition, une division par une soustraction, une élévation à une puissance par une multiplication, une extraction de racine par une division.

Dans les tables de logarithmes usuelles, on prend $q = 10$ et $r = 1$. Les seuls nombres dont les logarithmes puissent être calculés exactement sont les puissances successives de 10 ou de $\frac{1}{10}$. Les logarithmes des autres nombres sont obtenus par insertion de moyens, mais on ne peut les calculer exactement. On les calcule avec une approximation donnée avec 5, 7 ou 9 décimales.

131. Caractéristique. — *On appelle caractéristique d'un logarithme la partie entière de ce logarithme.*

La caractéristique n'est généralement pas contenue dans les tables où l'on n'indique que la partie décimale des logarithmes, c'est-à-dire la *mantisse*.

Il est facile de calculer cette caractéristique. En effet, un nombre quelconque A étant donné, il est compris entre deux puissances successives de 10 ou de $\frac{1}{10}$. Supposons qu'il soit compris entre 10^n et 10^{n+1}, son logarithme est compris entre n et $n + 1$ et par conséquent sa caractéristique est n.

D'un autre côté, la valeur de la mantisse est indépendante de la position de la virgule dans le nombre dont on cherche le logarithme. Ainsi 1,028; 10,28; 0,1028; 0,001028; ont la même mantisse 01199 pour leur logarithme.

$$\log 1028 = 3{,}01199$$
$$\log 10{,}28 = 1{,}01199$$

Pour log 0,1028 et pour log 0,001028, il se présente une petite difficulté ; c'est que la mantisse inscrite dans la table est *positive* ; or les logarithmes de ces deux nombres inférieurs à 1 doivent être négatifs. D'après ce que nous venons de dire leurs caratéristiques devraient être :

pour log 0,1028 — 0
et pour log 0,001028 — 2

La mantisse de ces logarithmes est la somme algébrique de — 1 et de la mantisse positive trouvée dans la table

$$-1 + 0{,}1199$$

les logarithmes des deux nombres sont donc :

$$\log 0{,}1028 = -1 + 0{,}01199$$
$$\log 0{,}001028 = -2 - 1 + 0{,}01199$$

Pour simplifier les calculs, au lieu de faire la somme algébrique, on se contente d'ajouter — 1 à la caractéristique et d'écrire la mantisse positive à la suite de la caractéristique en l'en séparant simplement par une virgule. On place alors le signe — de la caractéristique au-dessus de cette dernière et non devant :

$$\log 0{,}1028 = \bar{1},01199$$
$$\log 0{,}001028 = \bar{3}.01199$$

Mais il faut bien se rappeler que cette façon d'écrire équivaut par convention à

$$-1 + 0{,}01199 \text{ et } -3 + 0{,}01199$$

132. Règle. — *Si le nombre est plus grand que 1, la caractéristique de son logarithme est égale au nombre de chiffres qui précèdent la virgule diminué de 1. Si le nombre est plus petit que 1, la caractéristique de son logarithme* (à caractéristique seule négative) *est négative et égale en valeur absolue au rang du premier chiffre significatif qui suit la virgule.* Exemple :

13645,17	a pour caractéristique	5 — 1 = 4
328,031		3 — 1 = 2
2,42		1 — 1 = 0
0,3147		$\bar{1}$
0,0492,		$\bar{2}$

133. Usages des tables. — Les tables de logarithmes les plus usitées sont celles de Lalande, Houel et Dupuis. Nous donnons ci-dessous, d'après ces auteurs, la table des logarithmes de 1 à 1.000 avec 5 décimales. Le nombre est indiqué dans la colonne marquée N, le logarithme dans la colonne marquée L. Lorsque les deux premiers chiffres d'un nombre ou d'un logarithme sont les mêmes que ceux des nombres ou des logarithmes suivants, ils ne sont pas répétés. Ainsi les deux premiers chiffres du nombre 130 sont valables pour les neuf lignes suivantes et il faut lire 130, 131, 132, etc. De même le logarithme de 130 est 11 394. Les deux premiers chiffres 11 comptent pour la ligne suivante et il faut lire 11727 pour le logarithme de 131.

Cette table de logarithmes permettra de calculer avec une exactitude suffisante sur des nombres de 5 chiffres significatifs.

Les différents problèmes à résoudre sont les suivants :

134. Problème 1. — *Trouver le logarithme d'un nombre donné.*

1° Le nombre est dans la table.

Il suffit de calculer la caractéristique d'après la règle ci-dessus et de lire la mantisse dans la table.

Exemple log. 15,6 = 1,19312

2° Le nombre n'est pas dans la table.

Soit à calculer le logarithme du nombre.

$$216{,}73$$

On cherche dans la table le logarithme de 216, on trouve la mantisse 33455 ; on calcule la différence avec la mantisse du logarithme de 217, c'est-à-dire avec 33646, on trouve $d = 201$. On raisonne de la manière suivante : en admettant que, dans le faible intervalle de 216 à 217, le logarithme croisse proportionnellement au nombre, on peut dire que si le logarithme croît de 201 unités du cinquième ordre décimal quand le nombre croît de 1, il croît de $\frac{201}{100}$ quand le nombre croît de $\frac{1}{100}$ et de $\frac{201 \times 73}{100}$ quand le nombre croît de $\frac{73}{100}$. Il faut donc ajouter à la mantisse

$$\frac{201 \times 73}{100} = 146{,}73$$

ou sensiblement 147. Ainsi la mantisse du logarithme cherché est

$$33445 + 147 = 33592$$

On dispose le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{lrrl} \text{log.} & 216 & 33445 & d = 201 \\ \text{pour} & \underline{73} & \underline{147} & x = \dfrac{201 \times 73}{100} = 146{,}73 \\ \text{log.} & 216{,}73 = & 2{,}33592 & \end{array}$$

135. Problème II. — *Le logarithme d'un nombre étant donné, trouver le nombre.*

1° La mantisse du logarithme se trouve dans la table.

On lit le nombre en face de la mantisse et on place la virgule en se guidant sur la caractéristique du logarithme.

Exemple : Trouver le nombre qui a pour logarithme $\overline{2}.59218$.

Pour 59218, on trouve dans la table le nombre 391. Puisque la caractéristique est $\overline{2}$, le premier chiffre significatif du nombre est au 2e rang après la virgule :

$$\overline{2}{,}59218 = \log 0{,}0391$$

2° La mantisse du logarithme ne se trouve pas dans la table.

Soit à trouver le nombre correspondant au logarithme 3,63772.

On cherche la mantisse la plus rapprochée de 63772 en moins. On trouve 63749; on lit le nombre en face : 434; et on calcule la différence avec le logarithme donné 72 — 49 = 23. On prend la différence avec le logarithme, soit avec 63849, on trouve $d = 100$. On raisonne ainsi : Quand le logarithme augmente de 100 unités du cinquième ordre décimal, le nombre augmente de 1 ; quand le logarithme augmente de 1 unité du cinquième ordre décimal, le nombre augmente de $\frac{1}{100}$; quand le logarithme augmente de 23 unités du cinquième ordre décimal, le nombre augmente de $\frac{23}{100} = 0{,}23$. Le nombre est donc 43423 et, en tenant compte de la caractéristique, 4342,3.

On dispose le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{lrrl} & 63749 & \text{log. } 434 & n = 100 \\ & & & \triangle = 23 \\ \text{pour} & \underline{23} & \underline{23} & d = \dfrac{23}{100} = 0{,}23 \\ & 3{,}63772 & \text{log. } 4342{,}3 & \end{array}$$

Autre exemple : Trouver le nombre correspondant au logarithme $\overline{1}{,}50\,193$.

$$\begin{array}{lrrl} & 50\,106 & \text{log. } 317 & d = 100 \\ & & & \triangle = 87 \\ \text{pour} & \underline{87} & \underline{64} & n = \dfrac{87}{137} = 0{,}635 \\ & 1{,}50193 & \text{log. } 0{,}31764 & \end{array}$$

136. Addition et soustraction des logarithmes. — Etant donné que les tables ne contiennent que des mantisses positives, on doit toujours chercher à obtenir des mantisses positives dans les calculs. Dans ce but, quand on a une addition à faire, on additionne d'abord les mantisses et on tient compte de la retenue pour faire ensuite l'addition *algébrique* des caractéristiques.

Soit, par exemple, à additionner :

$$\begin{array}{r} \overline{2}{,}53413 \\ \overline{1}{,}61212 \\ 3{,}47519 \\ \overline{0}{,}32457 \\ \hline \overline{2}{,}45182 \end{array}$$

L'addition des mantisses donne :

$$s = 2{,}39783,$$

pour former la caractéristique de la somme, il suffit d'additionner algébriquement le 2 qui précède la virgule de ce nombre s avec les caractéristiques des logarithmes. On trouve 4. La somme cherchée est donc

$$4{,}39783$$

Quand on a une soustraction à faire, *on la remplace toujours par une addition*, en mettant en lieu et place du logarithme à retrancher son *cologarithme*. Le cologarithme s'obtient en ajoutant $\overline{1}$, à la caractéristique changée de signe et en retranchant la mantisse de + 1.

Soit à trouver le cologarithme de — 3,45782. On peut écrire :

$$-3{,}45782 = -3 - 1 + 1 - 0{,}45782$$
$$3{,}45782 = 4 + 0{,}54218$$
$$-3{,}45782 = 4{,}54218$$

Pour calculer la mantisse on remarque qu'il suffit de retrancher de 9 tous les chiffres décimaux, sauf le dernier qu'on retranche de 10.

Exemple : Faire le calcul :

$$3{,}48589 - 5{,}42673 + 0{,}69145 - \overline{1}{,}95824$$

Remplaçons les deux logarithmes à soustraire par leurs cologarithmes :

$$\text{colog. } 5{,}42673 = 6{,}57327$$
$$\text{colog. } \overline{1}{,}95824 = 0{,}04176$$

On a donc à effectuer l'addition :

$$3{,}48589 + \overline{6}{,}57327 + 0{,}69145 + 0{,}04176 = \overline{2}{,}79237$$

137. Multiplication et division des logarithmes. — La multiplication d'un logarithme par un nombre donné n'offre pas de difficulté ; on multiplie séparément la mantisse et la caractéristique si cette dernière est négative et on tient compte de la retenue de la mantisse.

Pour la division d'un logarithme à caractéristique négative par un nombre entier, on ajoute à la caractéristique assez d'unités négatives pour la rendre exactement divisible par le nombre, puis on ajoute autant d'unités positives à la mantisse.

Exemple : diviser par 5 le logarithme $\overline{2}{,}57391$.

$$\frac{1}{5} \times \overline{2}{,}57391 = \frac{1}{5}\left(\overline{5} + 3{,}57391\right) = \overline{1} + 0{,}71478$$

$$\frac{1}{5} \times \overline{2}{,}57391 = \overline{1}{,}71478$$

Table de logarithmes de 1 à 1.000

N	L	N	L	N	L	N	L	N	L
100	00 000	170	23 045	240	38 021	310	49 136	380	57 978
1	432	1	300	1	202	1	276	1	58 092
2	860	2	553	2	382	2	415	2	206
3	01 284	3	805	3	561	3	554	3	320
4	703	4	24 055	4	739	4	693	4	433
5	02 119	5	304	5	917	5	831	5	546
6	531	6	551	6	39 094	6	969	6	659
7	938	7	797	7	270	7	50 106	7	771
8	03 342	8	25 042	8	445	8	243	8	883
9	743	9	285	9	620	9	379	9	995
110	04 139	180	527	250	794	320	515	390	59 106
1	532	1	768	1	967	1	651	1	218
2	922	2	26 007	2	40 140	2	786	2	329
3	05 308	3	245	3	312	3	920	3	439
4	690	4	482	4	483	4	51 055	4	550
5	06 070	5	717	5	654	5	188	5	660
6	446	6	951	6	824	6	322	6	770
7	819	7	27 184	7	993	7	455	7	879
8	07 188	8	416	8	41 162	8	587	8	988
9	555	9	646	9	330	9	720	9	60 097
120	918	190	875	260	497	330	851	400	206
1	08 279	1	28 103	1	664	1	983	1	314
2	636	2	330	2	830	2	52 114	2	423
3	991	3	556	3	996	3	244	3	531
4	09 342	4	780	4	42 160	4	375	4	638
5	691	5	29 003	5	325	5	504	5	746
6	10 037	6	226	6	488	6	634	6	853
7	380	7	447	7	651	7	763	7	959
8	721	8	667	8	813	8	892	8	61 066
9	11 059	9	885	9	975	9	53 020	9	172
130	394	200	30 103	270	43 136	340	148	410	278
1	727	1	320	1	297	1	275	1	384
2	12 057	2	535	2	457	2	403	2	490
3	385	3	750	3	616	3	529	3	595
4	710	4	963	4	775	4	656	4	700
5	13 033	5	31 175	5	933	5	782	5	805
6	354	6	287	6	44 091	6	908	6	909
7	672	7	597	7	248	7	54 033	7	62 014
8	988	8	806	8	404	8	158	8	118
9	14 301	9	32 015	9	560	9	283	9	221
140	613	210	222	280	716	350	407	420	325
1	922	1	428	1	871	1	531	1	428
2	15 229	2	634	2	45 025	2	654	2	531
3	534	3	838	3	179	3	777	3	634
4	836	4	33 041	4	332	4	900	4	737
5	16 137	5	244	5	484	5	55 023	5	839
6	435	6	445	6	637	6	145	6	941
7	732	7	646	7	788	7	267	7	63 043
8	17 026	8	846	8	939	8	388	8	144
9	319	9	34 044	9	46 090	9	509	9	246
150	609	220	242	290	240	360	630	430	347
1	898	1	439	1	389	1	751	1	448
2	18 184	2	635	2	538	2	871	2	548
3	469	3	830	3	687	3	991	3	649
4	752	4	35 025	4	835	4	56 110	4	749
5	19 033	5	218	5	982	5	229	5	849
6	312	6	411	6	47 129	6	348	6	949
7	590	7	603	7	276	7	467	7	64 048
8	866	8	793	8	422	8	585	8	147
9	20 140	9	984	9	567	9	703	9	246
160	412	230	36 173	300	712	370	820	440	345
1	683	1	361	1	857	1	937	1	444
2	952	2	549	2	48 001	2	57 054	2	542
3	21 219	3	736	3	144	3	171	3	640
4	484	4	922	4	287	4	287	4	738
5	748	5	37 107	5	430	5	403	5	836
6	22 011	6	291	6	572	6	519	6	933
7	272	7	475	7	714	7	634	7	65 031
8	531	8	658	8	855	8	749	8	128
9	789	9	840	9	996	9	864	9	225

N	L	N	L	N	L	N	L	N	L
450	65 321	520	71 600	590	77 085	660	81 954	730	86 332
1	418	1	684	1	159	1	82 020	1	392
2	514	2	767	2	232	2	086	2	451
3	610	3	850	3	305	3	151	3	510
4	706	4	933	4	379	4	217	4	570
5	801	5	72 016	5	452	5	282	5	629
6	896	6	099	6	525	6	347	6	688
7	992	7	181	7	597	7	413	7	747
8	66 087	8	263	8	670	8	478	8	806
9	181	9	346	9	743	9	543	9	864
460	276	530	428	600	815	670	607	740	923
1	370	1	509	1	887	1	672	1	982
2	464	2	591	2	960	2	737	2	87 040
3	558	3	673	3	78 032	3	802	3	099
4	652	4	754	4	104	4	866	4	157
5	745	5	835	5	176	5	930	5	216
6	839	6	916	6	247	6	995	6	274
7	932	7	997	7	319	7	83 059	7	332
8	67 025	8	73 078	8	390	8	123	8	390
9	117	9	159	9	462	9	187	9	448
470	210	540	239	610	533	680	251	750	506
1	302	1	320	1	604	1	315	1	564
2	394	2	400	2	675	2	378	2	622
3	486	3	480	3	746	3	442	3	679
4	578	4	560	4	817	4	506	4	737
5	669	5	640	5	888	5	569	5	795
6	761	6	719	6	958	6	632	6	852
7	852	7	799	7	79 029	7	696	7	910
8	943	8	878	8	099	8	759	8	967
9	68 034	9	957	9	169	9	822	9	88 024
480	124	550	74 036	620	239	690	885	760	081
1	215	1	115	1	309	1	948	1	138
2	305	2	194	2	379	2	84 011	2	195
3	395	3	273	3	449	3	073	3	252
4	485	4	351	4	518	4	136	4	309
5	574	5	429	5	588	5	198	5	366
6	664	6	507	6	657	6	261	6	423
7	753	7	586	7	727	7	323	7	480
8	842	8	663	8	796	8	386	8	536
9	931	9	741	9	865	9	448	9	593
490	69 020	560	819	630	934	700	510	770	649
1	108	1	896	1	80 003	1	572	1	705
2	197	2	974	2	072	2	634	2	762
3	285	3	75 051	3	140	3	696	3	818
4	373	4	128	4	209	4	757	4	874
5	461	5	205	5	277	5	819	5	930
6	548	6	282	6	346	6	880	6	986
7	636	7	358	7	414	7	942	7	89 042
8	723	8	435	8	482	8	85 003	8	098
9	810	9	511	9	550	9	065	9	154
500	897	570	587	640	618	710	126	780	209
1	984	1	664	1	686	1	187	1	265
2	70 070	2	740	2	754	2	248	2	321
3	157	3	815	3	821	3	309	3	376
4	243	4	891	4	889	4	370	4	432
5	329	5	967	5	956	5	431	5	487
6	415	6	76 042	6	81 023	6	491	6	542
7	501	7	118	7	090	7	552	7	597
8	586	8	193	8	158	8	612	8	653
9	672	9	268	9	224	9	673	9	708
510	757	580	343	650	291	720	733	790	763
1	842	1	418	1	358	1	794	1	818
2	927	2	492	2	425	2	854	2	873
3	71 012	3	567	3	491	3	914	3	927
4	096	4	641	4	558	4	974	4	982
5	181	5	716	5	624	5	86 014	5	90 037
6	265	6	790	6	690	6	094	6	091
7	349	7	864	7	757	7	153	7	146
8	433	8	938	8	823	8	213	8	200
9	517	9	77 012	9	889	9	273	9	255

N	L	N	L	N	L	N	L	N	L
800	90 309	840	92 428	880	94 448	920	96 379	960	98 227
1	363	1	480	1	498	1	426	1	272
2	417	2	531	2	547	2	473	2	318
3	472	3	583	3	596	3	520	3	363
4	526	4	634	4	645	4	567	4	408
5	580	5	686	5	694	5	614	5	453
6	634	6	737	6	743	6	661	6	498
7	687	7	788	7	792	7	708	7	543
8	741	8	840	8	841	8	755	8	588
9	795	9	891	9	890	9	802	9	632
810	849	850	942	890	939	930	848	970	677
1	902	1	993	1	988	1	895	1	722
2	956	2	93 044	2	95 036	2	942	2	767
3	91 009	3	095	3	085	3	988	3	811
4	062	4	146	4	134	4	97 035	4	856
5	116	5	197	5	182	5	081	5	900
6	169	6	247	6	231	6	128	6	945
7	222	7	298	7	279	7	174	7	989
8	275	8	349	8	328	8	220	8	99 034
9	328	9	399	9	376	9	267	9	078
820	381	860	450	900	424	940	313	980	123
1	434	1	500	1	472	1	359	1	167
2	487	2	551	2	521	2	405	2	211
3	540	3	601	3	569	3	451	3	255
4	593	4	651	4	617	4	497	4	300
5	645	5	702	5	665	5	543	5	344
6	698	6	752	6	713	6	589	6	388
7	751	7	802	7	761	7	635	7	432
8	803	8	852	8	809	8	681	8	476
9	855	9	902	9	856	9	727	9	520
830	908	870	952	910	904	950	772	990	564
1	960	1	94 002	1	952	1	818	1	607
2	92 012	2	052	2	999	2	864	2	651
3	065	3	101	3	96 047	3	909	3	695
4	117	4	151	4	095	4	955	4	739
5	169	5	201	5	142	5	98 000	5	782
6	221	6	250	6	190	6	046	6	826
7	273	7	300	7	237	7	091	7	870
8	324	8	349	8	284	8	137	8	913
9	376	9	399	9	332	9	182	9	957

Exercices

74. — La surface d'un triangle est 648^{m^2} 58, la hauteur 37 m 60. Quelle est la base?

75. — Trouver le diamètre d'une sphère dont le volume est de 1^{m^3}, sachant que le volume d'une sphère en fonction de son diamètre D est donné par la formule $V = \frac{1}{6}\pi D^3$.

76. — Calculer la valeur de x donnée par la formule

$$x = \frac{(34{,}2)^2 \times \sqrt[3]{3{,}5472}}{\sqrt[4]{3{,}45 \times 872}}$$

Intérêts composés

138. — Définition. — On dit qu'on *compose* ou qu'on *capitalise* les intérêts d'un capital quand, au bout de chaque année, on ajoute à ce capital les intérêts qu'il a produits pendant l'année écoulée, pour former ainsi un nouveau capital qui porte intérêt pendant l'année suivante au même taux que le premier.

La somme placée dans ces conditions est dite PLACÉE A INTÉRÊTS COMPOSÉS.

139. Problème. — *Un capital c étant placé à intérêts composés pendant* n *années, au taux* r, *pour un franc ; trouver la valeur* C *qu'il a acquise à la fin de la durée du placement.*

Cherchons ce que devient au bout de n années la somme de c francs placée à intérêts composés, au taux r.

r étant l'intérêt de 1 franc pour un an; au bout d'un an, le capital de 1 franc a acquis la valeur

$$1 + r$$

et le capital c a acquis la valeur :

$$c' = c\,(1 + r)$$

Au bout d'une autre année, la somme sera devenue évidemment

$$c'' = c'\,(1 + r) = c\,(1 + r)^2$$

au bout d'une troisième année

$$c''' = c''\,(1 + r) = c'\,(1 + r)^2 = c\,(1 + r)^3$$

Et au bout de n années

$$(1) \qquad C = c\,(1 + r)^n$$

140. Remarque. — Nous avons établi la formule (1) en supposant n entier. Mais il peut arriver que la somme reste placée pendant un certain nombre d'années, n, plus une fraction d'année f.

Dans ce cas, on peut considérer que le capital est placé à intérêts composés pendant n années, et à intérêts simples pendant la fraction d'année. Au bout de n années le capital c sera devenu, d'après ce qui précède

$$C' = c\,(1 + r)^n$$

Voyons maintenant ce que deviendra C', si on lui ajoute ses intérêts simples durant la fraction f d'an-

née. 1 franc rapporte pendant cette période un intérêt simple égal à $f\,r$; la somme de 1 fr. devient donc :

$$1 + f\,r$$

et le capital C'

$$C = C'\,(1 + f\,r)\,\cdot$$

$$(2) \qquad C = c\,(1 + r)^n\,(1 + f\,r)$$

Les deux formules (1) et (2) permettent de résoudre tous les problèmes concernant les intérêts composés. Elle sont calculables par logarithmes. En remplaçant les facteurs par leurs logarithmes on trouve, pour la formule (1) :

$$(1) \qquad \log C = \log c + n \log (1 + r)$$

pour la formule (2) :

$$(2') \quad \log C = \log c + n \log (1 + r) + \log (1 + f\,r)$$

141. Applications. — *I. — Qu'est devenue, au bout de 20 ans, la valeur d'un capital de 1500 francs placé à intérêts composés, à 3 p. 100?*

$$c = 1500 \qquad n = 20 \qquad r = 0{,}03$$

La formule donne :

$$C = 1500 \times 1{,}03^{20},$$
$$\log C = \log 1500 + 20 \log 1{,}03$$
$$\log 1500 = 3{,}17609$$
$$\log 1{,}03 = 0{,}01284$$
$$\log C = 3{,}17609 + 20 \times 0{,}01284$$
$$\log C = 3{,}43289$$

$$\Delta = 161$$

pour 43 136 270 $\quad \alpha = 153$

153 0,95 153

pour 3, 43 289 2709,5 $\quad n = 161 = 0{,}95$

$$C = 2709 \text{ fr. } 50$$

Réponse : Le capital est devenu 2709 fr. 50.

II. — Combien de temps faut-il placer à intérêts composés, à 4 p. 100, une somme de 2500 francs pour obtenir un capital de 3700 francs?

$$C = 3700 \qquad c = 2500 \qquad r = 0{,}04\,\cdot$$
$$3700 = 2500 \times 1{,}04^n$$
$$\log 3700 = 2500 + n \log 1{,}04$$
$$n = \frac{\log 3700 - \log 2500}{\log 1{,}04}$$

$$\log 3700 = 3{,}56820$$
$$\log 2500 = 3{,}39794 \qquad \text{colog } 2500 = \bar{4}{,}60206\,\cdot$$
$$\log 1{,}04 = 0{,}01703$$

$$n = \frac{3{,}56820 + \bar{4}{,}60203}{0{,}01703}$$
$$n = 10$$

Réponse. — Il faudra placer la somme pendant 10 ans.

III. — Quelle somme faut-il placer à intérêts composés, au taux de 4 p. 100, à la naissance d'un enfant, pour lui constituer à 20 ans révolus, une dot de 10000 francs ?

$$C = 10000 \quad n = 20 \quad r = 0{,}04$$
$$10000 = c \times 1{,}04^{20}$$
$$\log 10000 = \log c + 20 \log 1{,}04$$
$$\log c = 4{,}00000 - 20 \times 0{,}001703$$
$$\log c = 4{,}00000 - 0{,}34060$$
$$\log c = 4{,}00000 + \bar{1}{,}65940$$
$$\log c = 3{,}65940$$

$$\Delta = 96$$

pour 65 896 456 $\quad \alpha = 44$

44 0 46

3, 65 940 456 4,6 $\quad n = \frac{44}{96} = 0{,}46$

Réponse. — Il faut placer 4564 fr. 60.

IV. — A quel taux faut-il placer pendant 10 ans, à intérêts composés, une somme de 3000 francs pour obtenir 4500 francs ?

$$C = 4500 \qquad c = 3000 \qquad n = 10$$
$$4500 = 3000 \times (1 + r)^{10}$$
$$\log 4500 = \log 3000 + 10 \log (1 + r)$$
$$\log (1 + r) = \frac{\log 4500 - \log 3000}{10}$$
$$\log (1 + r) = \frac{3{,}65321 - 3{,}47712}{10}$$
$$\log (1 + r) = \frac{3{,}65321 + \bar{4}{,}25228}{10}$$
$$\log (1 + r) = \frac{0{,}17609}{10} = 0{,}01761$$

$$\Delta = 416$$

pour 01703 104 $\quad \alpha = 58$

58 014 $\quad n = \frac{58}{416} = 0{,}14$

0,01761 1,0414

$$1 + r = 1{,}0414$$
$$r = 0{,}0414$$

Réponse. — Au taux de 0,0414 pour 1 franc, soit environ 4 p. 100.

142. Emploi de la formule (2). — Lorsque le problème nécessite l'emploi de la formule (2), le calcul est un peu plus compliqué, mais il ne présente de sérieuses difficultés que s'il s'agit de rechercher le taux. Ce cas se présente si rarement qu'il est inutile d'y insister ici.

Si l'on veut calculer le temps, au cas où il est fractionnaire, on se base sur la remarque suivante :

La formule

$$C = c\,(1 + r)^n\,(1 + fr)$$

ou

$$\log C = \log c + n \log (1 + r) + \log (1 + f\,r)$$

donne

$$\log C - \log c = n \log (1 + r) + \log (1 + f\,r)$$

Or on a :

$$1 + r > 1 + f\,r$$
$$\log (1 + r) > \log (1 + f\,r)$$

Si, par conséquent, on divise la différence log C — log c par log $(1 + r)$, le quotient *entier* est n, et le reste log $(1 + fr)$. Une fois que l'on a n et log $(1 + fr)$, l est facile de remonter de $1 + fr$ à fr et à f.

Annuités

143. Définition. — *L'annuité est une somme constante qu'on verse tous les ans pour constituer un capital ou pour amortir une dette.*

Dans le premier cas, l'annuité s'appelle *annuité de placement.*

Dans le second cas, *annuité de remboursement ou de paiement.*

L'annuité est ou est censée rester placée à intérêts composés jusqu'à la fin des versements. Il s'ensuit que lorsque, au bout de n années, on verse la dernière annuité, la première est placée à intérêts composés depuis $(n - 1)$ années ; la seconde, depuis $(n - 2)$ années ; etc.

144. Annuités de placement. — Soient a l'annuité, n le nombre des versements, A le capital constitué immédiatement après le versement de la $n^{\text{ième}}$ annuité, soit enfin r le taux pour un franc.

D'après ce que nous venons de dire, on a :

$$A = a\,(1 + r)^{n-1} + a\,(1 + r)^{n-2} + \ldots + a\,(1 + r) + a$$

La suite des termes a, $a(1+r)$, $a(1+r)^2$, etc., est celle des termes d'une progression géométrique, dont le premier terme est a et la raison $(1+r)$. En appliquant la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique, on trouve :

$$(3) \qquad A = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$$

145. Remarque. — Si l'on calcule le capital A constitué *un an après* le versement de la dernière annuité, on a :

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \ldots + a(1+r)^2 + a(+r)$$

d'où

$$(3') \qquad A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}$$

146. Applications. — I. *Quelle annuité faut-il verser pendant 10 ans, au taux de 4 p. 100, pour constituer un capital de 10000 francs ?*

$$A = 10000 \qquad n = 10 \qquad r = 0{,}04$$

$$10\,000 = \frac{a \times (1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04}$$

$$\log 1000 = \log a + \log(1{,}04^{10} - 1) - \log 0{,}04$$
$$\log a = \log 10000 - \log(1{,}04^{10} - 1) + \log 0{,}04$$

Il faut commencer par calculer $1{,}04^{10} - 1$

$$\log 1{,}04^{10} = 10 \,;\, \log 1{,}04 = 0{,}17030$$
$$\Delta = 293$$

pour 01706 148 $a = 4$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 0{,}17030 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 001 \\ \hline 1{,}4801 \end{array} \qquad n = \frac{4}{293} = 0{,}01$$

$$1{,}04^{10} = 1{,}4801$$
$$1{,}4801 - 1 = 0{,}4801$$
$$\log a = \log 1000 - \log 0{,}4801 + \log 0{,}04$$
$$\log a = 4{,}00000 - \bar{1}.68133 + \bar{2}{,}60206$$
$$\log a = 4{,}00000 + 0{,}31867 + \bar{2}{,}60206$$
$$\log a = 2{,}92073$$

$$\Delta = 52$$

pour 92065 883 $a = 8$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 2{,}92073 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 015 \\ \hline 833{,}15 \end{array} \qquad n = \frac{8}{52} = 0{,}15$$

$$a = 833{,}15$$

RÉPONSE. — Il faut verser une annuité de 833 fr. 15.

II. — *Pendant combien de temps faut-il verser une annuité de 500 fr., au taux de 3,5 %, pour constituer un capital de 10000 francs ?*

$$a = 500 \qquad A = 10000 \quad r = 0{,}035$$

De la formule (3), on tire

$$rA = a[(1+r)^n - 1]$$
$$rA + a = a(1+r)^n$$
$$\frac{Ar + a}{a} = (1+r)^n$$
$$\frac{Ar}{a} + 1 = (1+r)^n$$
$$\frac{10\,000 \times 0{,}035}{500} + 1 = 1{,}035^n$$
$$\frac{350}{500} + 1 = 1{,}035^n$$
$$1{,}7 = 1{,}035^n$$
$$\log 1{,}7 = n \log 1{,}035$$
$$n = \frac{\log 1{,}7}{\log 1{,}035}$$
$$n = \frac{0{,}23045}{0{,}01494}$$

Le quotient est compris entre 15 et 16, ce qui veut dire qu'il faudra faire 16 versements pour avoir un peu plus de 10000 fr. Si on ne fait que 15 versements, le capital sera un peu moindre que 10000 fr. ; on pourra le compléter par un dernier versement inférieur à 500 fr.

147. Annuités de remboursement. — Amortissement. — Soit A la dette, si on ne versait pas d'annuités, elle s'augmenterait chaque année de ses intérêts au taux r, de sorte qu'au bout de n années, elle vaudrait :

$$A(1+r)^n$$

Soit a l'annuité qu'il faut verser pendant n années pour amortir la dette ; d'après ce qui précède, le versement de ces annuités aura constitué au bout de n années :

$$\frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$$

Cette somme doit être égale à la dette au bout de n années. On doit donc avoir

$$A(1+r) = \frac{a[(1+r) - 1]}{r}$$

$$(4) \qquad A = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

De la formule précédente on tire

$$a = \frac{Ar(1+)r^n}{(1+r)^n - 1}$$

Cette formule n'étant pas avantageuse pour le calcul numérique, on la transforme ainsi :

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{Ar = [(1+r)^n - 1 + 1]}{(1+r)^n - 1}$$
$$\frac{Ar[(1+r)^n -]1 + Ar}{(1+r)^n - 1} = Ar + \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$$

Sous cette forme on voit que des deux parties dont se composent l'annuité, la première est l'intérêt de la dette pour la première année, et la seconde représente l'amortissement à la fin de la première année.

148. Applications. — I. *On veut amortir en 10 ans une dette de 40000 fr. par des versements annuels, au taux de 5% ; de combien doit être l'annuité ?*

$$A = 40000 \qquad n = 10 \qquad r = 0{,}05$$
$$(1+r)^n = 1{,}05^{10}$$
$$\log 1{,}05 = 0{,}02119$$
$$10 \log 1{,}05 = 0{,}21190$$
$$\log^{10} 1{,}05 = 1{,}6289$$

Appliquons la formule (4) :

$$40000 = \frac{a}{0{,}05}\left[1 - \frac{1}{1{,}6289}\right]$$

$$40000 = \frac{a \times 0{,}387}{0{,}05} \quad a = \frac{40000 \times 0{,}05}{0{,}387} = 5167{,}96$$

RÉPONSE. — Il faudra verser une annuité de 5168 francs.

II. — *Combien faut-il verser d'annuités de 1000 fr. pour amortir une dette de 8000 fr., au taux de 3% ?*

$$A = 8000 \qquad a = 1000 \qquad r = 0{,}03$$

De la formule (4), on tire :

$$A(1+r)^n = \frac{a(1+r)^n}{r} - \frac{a}{r}$$

$$\left[A - \left(\frac{a}{r}\right)\right](1+r)^n = -\frac{a}{r}$$

$$(1+r)^n = \frac{-\frac{a}{r}}{A - \frac{a}{r}} = \frac{-a}{Ar - a} = \frac{a}{a - Ar}$$

$$(5) \qquad (1+r)^n = \frac{a}{a - Ar}$$

$$n \log (1+r) = \log a - \log (a - Ar)$$

$$n = \frac{\log a - \log (a - Ar)}{\log (1+r)}$$

$$n = \frac{\log 1.000 + \operatorname{colog} 760}{\log 1{,}03}$$

$$n = \frac{3{,}00000 + \overline{3}{,}11919}{0{,}01284}$$

On trouve pour n un nombre compris entre 9 et 10. Il faudra verser 9 annuités de 1000 fr. et il restera à verser une dixième annuité inférieure à 1000 fr., qu'il est facile de calculer.

Exercices

77. — Qu'est devenu, au bout de 6 ans, un capital de 4958 fr. 60, placé à intérêts composés à 4% ?

78. — Quel est le capital qui, placé à intérêts composés au taux de 4% est devenu 7113 francs au bout de 15 ans ?

79. — En combien d'années un capital de 3200 francs placé à 3 % à intérêts composés est-il devenu 3400 francs ?

80. — A quel taux un capital de 12600 francs placé pendant 12 ans en capitalisant chaque année, est-il devenu 17970 francs ?

81. — On verse au commencement de chaque année une somme de 1250 francs. Quel sera le capital constitué à intérêts composés au bout de la 20e année, le taux étant 4 %.

82. — Quelle est l'annuité nécessaire pour constituer un capital de 50000 francs en 18 ans, à 5% ?

83. — Une commune emprunte 150000 francs qu'elle veut rembourser en 20 annuités égales. Quel sera le montant de chaque annuité, les intérêts composés étant comptés au taux de 5% l'an ?

84. — Une commune a fait construire un groupe scolaire qui est achevé le 1es janvier 1917. Elle peut s'acquitter envers l'entrepreneur soit en lui payant 28480 fr. le 1er janvier 1920, soit en lui versant 30 annuités dont la première est exigible le 1er janvier 1918. Elle décide en faveur de ce dernier mode de paiement. Quel sera le montant de l'annuité si l'on tient compte des intérêts composés à 4 pour 100 ?

Corrigé des exercices d'Algèbre

ADDITION ET SOUSTRACTION

1° *Effectuer les opérations :*

$$\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right); \left(+\frac{7}{2}\right) - \left(+\frac{11}{4}\right) + \left(+\frac{9}{5}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right);$$

$$(+1) + \left(-\frac{8}{9}\right) - (-4{,}15) + (+0{,}56).$$

Solution. — On a

$$\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right) = +\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7}$$

Car dans une somme de nombres algébriques on peut écrire les termes de la somme les uns à la suite des autres sans parenthèses, avec leurs signes respectifs.

Et, en groupant les termes positifs et les termes négatifs, on a :

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{6}{7} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3} + \frac{6}{7}\right)$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{10}{12} - \left(\frac{14}{21} + \frac{18}{21}\right) = \frac{13}{12} - \frac{32}{21}$$

$$= \frac{91}{84} - \frac{128}{84} = -\frac{37}{84}$$

Solution. — On a successivement, en observant que deux signes identiques superposés équivalent à un signe +, deux signes contraires à un signe —

$$\left(+\frac{7}{2}\right) - \left(+\frac{11}{4}\right) + \left(+\frac{9}{5}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{7}{2} - \frac{11}{4} + \frac{9}{5} + \frac{3}{7} = \frac{7}{2} + \frac{9}{5} + \frac{3}{7} - \frac{11}{4}$$

$$= \frac{245}{70} + \frac{126}{70} + \frac{30}{70} - \frac{11}{4} = \frac{401}{70} - \frac{11}{4}$$

$$= \frac{802}{140} - \frac{385}{140} = \frac{417}{140} \text{ ou } 2\,\frac{137}{140}$$

Solution. — Opérant comme ci-dessus, il vient :

$$(+1) + \left(-\frac{8}{9}\right) - (-4{,}15) + (+0{,}56) = 1 - \frac{8}{9} + 4{,}15 + 0{,}56 = 1 + 4{,}15 + 0{,}56 - \frac{8}{9}$$

$$= 5{,}71 - \frac{8}{9} = \frac{571}{100} - \frac{8}{9} = \frac{5139}{900} - \frac{800}{900} = \frac{4339}{900}$$

$$= 4\,\frac{739}{900}$$

2. — *Calculer : $a - b$ pour*

$$a = -8{,}2 \text{ et } b = -5{,}7 ; \; a = \frac{3}{2} \text{ et } b = -\frac{3}{4} ; \; a = -0{,}56 \text{ et } b = 0{,}25$$

SOLUTION :

$$a - b = (-8{,}2) - (-5{,}7) = -8{,}2 + 5{,}7 = -2{,}5$$
$$a - b = \left(+\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2\,\frac{1}{4}$$
$$a - b = (-0{,}56) - (+0{,}25) = -0{,}56 - 0{,}25 = -0{,}81$$

3. — *Calculer $a - (b - c) - [(b - (a + c)]$ pour :*

$$a = (-1),\ b = (+10),\ c = (+7,\ a = (-4,)\ b = (-6),\ c = (+9).$$

SOLUTION :

$$a - (b - c) - [b - (a+c)] = (-1) - [(+10) - (+7)] - \{(+10) - [(-1) + (+7)]\}$$
$$= (-1) - [(+3)] - \{(+10) - [(+6)]\} = (-1) - (+3) - \{(+10) - (+6)\}$$
$$= -1 - 3 - 4 = -8.$$

SOLUTION :

$$a - (b - c) - [b - (a + c)] = (-4) - [(-6) - (+9)] - \{(-6) - [(-4) + 9)]\}$$
$$= (-4) - (-15) - \{(-6) - (+5)\} = -4 + 15 + 11 = 22.$$

4. — *Effectuer les opérations :*

$$(-7).\ (+13),\ +.(5{,}3).\ (-4{,}25),\ (-5{,}5).\ (-0{,}051),\ \left(+\frac{13}{17}\right).\left(-\frac{5}{3}\right)$$
$$(-9)\ [(+13) + (-17) - (-18) + (+3)],\ \left[\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{1}{7}\right)\right]^2$$

SOLUTION :

$$(-7).\ (+13) = (-7) \times 13 = -91.$$

SOLUTION :

$$(+5{,}3).\ (-4{,}25) = 5{,}3 \times (-4{,}25) = -22{,}525.$$

SOLUTION :

$$(-5{,}5),\ (-0{,}051) = 5{,}5 \times 0{,}051 = 0{,}2805.$$

SOLUTION :

$$\left(+\frac{13}{17}\right)\ \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{13}{17} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{13 \times 5}{17 \times 3} = -\frac{65}{51}$$

SOLUTION :

$$(-9)\ [(+13) + (-17) - (-18) + (+3)] = (-9) \times 17 = -153.$$

SOLUTION :

$$\left[\left(-\frac{4}{5} + \left(+\frac{1}{7}\right)\right]^2 = \left[\left(-\frac{28}{35}\right) + \left(\frac{5}{35}\right)\right]^2 = \left(-\frac{23}{35}\right)^2 = \frac{23^2}{35^2} = \frac{529}{1225}$$

5. — *Effectuer les opérations :*

$$\left(+\frac{7}{11}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right),\ \left(-\frac{67}{72}\right) : \left(-\frac{7}{15}\right),\ \left(9 + \frac{-5}{7} - 8\right) : \left[-\frac{3}{4} + (9 + 11) + \left(-\frac{3}{5}\right)\right]$$

SOLUTION :

$$\left(+\frac{7}{11}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{11} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{7 \times 4}{11 \times 3} = -\frac{28}{33}$$

SOLUTION :

$$\left(-\frac{67}{72}\right) : \left(-\frac{7}{15}\right) = \left(-\frac{67}{72}\right) \times \left(-\frac{15}{7}\right) = \frac{67 \times 15}{72 \times 7} = \frac{67 \times 5}{24 \times 7} = \frac{335}{168}$$

SOLUTION :

$$\left(9 + \frac{-5}{7} - 8\right) : \left[-\frac{3}{4} + (9 + 11) + \left(-\frac{3}{5}\right)\right] = \left(1 - \frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{3}{4} + 20 - \frac{3}{5}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{7}\right) : \left(20 - \frac{15}{20} - \frac{12}{20}\right) = \frac{2}{7} : \frac{373}{20} = \frac{2}{7} \times \frac{20}{373} = \frac{40}{2611}$$

6. — *Calculer :*

$$\frac{(a-b+c)\,c}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2-b^2+\frac{1}{16}}} \text{ pour } a=\frac{1}{5},\ b=\left(-\frac{1}{4}\right) \text{ et } c=3.$$

$$\frac{(a-b+c)c}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2-b^2+\frac{1}{16}}}=\frac{\left[\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{4}\right)+3\right]3}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}\times\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+3\right)3}{\sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}}\times\sqrt{\frac{1}{5^2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}}=\frac{\left(\frac{4}{20}+\frac{5}{20}+\frac{60}{20}\right)3}{\sqrt{\frac{4^2+5^2}{5^2+4^2}}+\sqrt{\frac{1}{5^2}}}=\frac{\frac{69\times 3}{20}}{\frac{\sqrt{16+25}}{5\times 4}\times\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{\frac{207}{20}}{\frac{\sqrt{41}}{20\times 5}}=\frac{207}{\frac{\sqrt{41}}{5}}=\frac{207\times 5}{\sqrt{41}}=\frac{1035}{\sqrt{41}}=\frac{1035\times\sqrt{41}}{41}$$

7. — *Réduire les termes semblables puis ordonner par rapport aux puissances décroissantes de* b.

1° $8a^2b^2+7a^4+6a^3b-5a^4-3ab^3$
$-2b^4+ab^3+2a^4-12a^2b^2+3a^4$
$+5ab^3+5b^4-4ab^3$

2° $\frac{2}{3}a^2b+\frac{4}{5}a^3-\frac{3}{4}ab^2-7b^3+\frac{1}{5}ab^2-\frac{1}{3}a^3$
$+\frac{2}{9}b^3-\frac{5}{2}a^3-\frac{6}{7}a^2b+\frac{2}{3}ab^2+a^3$

et trouver les valeurs numériques de ces polynômes pour $a=1$, $b=2$.

Solution. — Le premier polynôme devient, après réduction des termes semblables :

$$3b^4-ab^3-4a^2b^2+6a^3b+7a^4$$

Sa valeur numérique pour $a=1$ et $b=2$ est :

$$3\times 2^4-1\times 2^3-4\times 1^2\times 2^2+6\times 1^3\times 2+7\times 1^4$$

ou $3\times 16-8-16+12+7$

ou $48+12+7-(8+16)=67-24=43$

Réponse : 43.

Solution. — Le second polynôme devient, après réduction des termes semblables :

$$-\frac{61}{9}b^3+\frac{7}{60}ab^2-\frac{4}{21}a^2b-\frac{31}{30}a^3$$

Sa valeur numérique pour $a=1$ et $b=2$ est :

$$-\frac{61}{6}\times 2^3+\frac{7}{60}\times 1\times 2^2\ \frac{4}{21}\times 1^2\times 2-\frac{31}{30}1^3$$

ou $-\frac{61\times 8}{9}+\frac{7\times 4}{60}-\frac{8}{21}-\frac{31}{30}$

$-\frac{488}{9}+\frac{28}{60}-\frac{8}{21}-\frac{31}{30}$

ou $-54-\frac{2}{9}+\frac{28}{60}-\frac{8}{21}-1-\frac{1}{30}$

ou $-55-\frac{2}{9}+\frac{28}{60}-\frac{1}{30}-\frac{8}{21}$

$-55+\frac{-280+588-42-480}{1260}$ ou $-55-\frac{214}{1260}$

ou $-55\frac{107}{630}$

Réponse : $-55\frac{107}{630}$

8. — *Faire la somme des polynômes :*

$x+x^2-1,\quad x^3-x+4x^2-3,\quad x-4$

Solution. — Disposons les polynômes les uns sous les autres, en faisant correspondre les termes semblables, on a

$$\begin{array}{r} x^2+x-1 \\ x^3+4x^2-x-3 \\ x-4 \\ \hline x^3+5x^2+x-8 \end{array}$$

9. — *Soustraire* $2x^4-2x^2+5x^2-6x-7$ de $3x^4+5x^3-6x^2-7x+5$.

Solution. — D'après la règle de la soustraction, cette soustraction est remplacée par l'addition :

$$\begin{array}{r} 3x^4+5x^3-6x^2-7x+5 \\ -2x^4+2x^3-5x^2+6x+7 \\ \hline x^4+7x^3-11x^2-x+12 \end{array}$$

10. — *Etant donné les polynômes :*

$P=5x^4-3x^3y-2x^2y^2+7xy^3+4y^4$
$P'=28y^4+18x^4+13xy^3+15x^3y-8x^2y^2$
$P''=31x^2y^2+9x^3y+xy^3+45y^4-2x^4$

Calculer $P+P'-P''$.

Solution. — Ordonnons les 3 polynômes par rapport aux puissances décroissantes de x, puis changeons les signes des termes de P''.

On a :

$$\begin{array}{rl} P & =5x^4-13x^3y-2x^2y^2+7xy^3+4y^4 \\ P' & =18x^4+15x^3y-8x^2y^2+13xy^3-28y^4 \\ -P'' & =2x^4-9x^3y-31x^2y^2-xy^3-45y^4 \\ \hline P+P'-P'' & =25x^4+3x^3y-41x^2y^2+19xy^3-13y \end{array}$$

MULTIPLICATION

11. — *Multiplier* $3ax^4-4a^3x^2-5a^4x-8a^5$ par $3ax^3-7a^2x^2+6a^4$.

Solution. — Appliquons la règle de la multiplication des polynômes. On a :

$$\begin{array}{lllllll}
3ax^4-4a^3x^2+5a^4x-8a^5 & & & & & & \\
3ax^3-7a^2x^2+6a^4 & & & & & & \\
\hline
9a^2x^7 & & -12a^4x^5 & +15a^5x^4 & -24a^6x^3 & & \\
 & -21a^3x^6 & & +28a^5x^4 & -35a^6x^3 & +56a^7x^2 & \\
 & & & +18a^5x^4 & & -24a^7x^2 & +30a^8x-48a^9 \\
\hline
9a^2x^7 & -21a^3x^6 & -12a^4x^5 & +61a^5x^4 & -59a^6x^3 & +32a^7x^2 & +30a^8x-48a^9
\end{array}$$

12. — *Calculer la valeur numérique du polynôme*

$$5x^4 - 3x^3 + x^2 - 14x + 9$$

pour $x = 2$.

Solution. — Mettons dans le polynôme :

$$5x^4 - 3x^3 + x^2 - 14x + 9$$

x^3 en facteur dans les deux premiers termes, on a :

$$(5x - 3)x^3 + x^2 - 14x + 9$$

et en mettant x^2 en facteur :

$$[(5x - 3)x + 1]x^2 - 14x + 9$$

et enfin, mettant x en facteur ;

$$\{[(5x - 3)x + 1]x - 14x\} + 9$$

Remplaçons x par 2 on obtient :

$5 \times 2 - 3 = 7$ pour la parenthèse.
$7 \times 2 + 1 = 15$ pour le crochet.
$15 \times 2 - 14 = 16$ pour l'accolade.
$16 \times 2 + 9 = 41$ pour le polynôme.

Réponse : 41.

13. — *Effectuer la multiplication de* $(a + b)x + (a - b)y$ par $(a - b)x - (a + b)y$.

Solution. — On a, en remarquant que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, *que* $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{array}{l}
(a + b)x + (a - b)y \\
(a - b)x - (a + b)y \\
\hline
(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - 2ab + b^2)xy \\
\quad - (a^2 + 2ab + b^2)xy - (a^2 - b^2)y^2 \\
\hline
(a^2 - b^2)x^2 - 4abxy - (a^2 - b^2)y^2
\end{array}$$

car $(a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) = a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = -4ab$.

14. — *Effectuer* $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$.

Solution. — On a :

$$\begin{array}{l}
a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
a + b \\
\hline
a^4 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 \\
\quad + a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5 \\
\hline
a^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b^5.
\end{array}$$

15. — *Démontrer que le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.*

Solution. — Soit le produit $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Effectuons le :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$$

Ajoutons et retranchons $2abcd$ au deuxième membre, nous ne changeons pas sa valeur.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd$$

Associons le premier, le quatrième et le cinquième termes, on a un carré parfait ; de même pour l'ensemble des autres termes.

$$a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd = (ac + bd)^2$$
$$b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd = (bc - ab)^2$$

d'où

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$

Rémarque. — On aurait pu associer le premier, le quatrième et le sixième termes. On aurait eu :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$$

Généralisation. — Le produit de n sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.

16. — *Démontrer que la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est plus grande que leur moyenne géométrique.*

Solution. — On veut prouver que

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$$

Ou encore, en élevant les deux membres au carré, que

$$\frac{(a + b)^2}{4} > ab$$

D'où $(a + b)^2 > 4ab$
ou $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$
et $a^2 - 2ab + b^2 > 0$
c'est $(a - b)^2 > 0$
ce qui est évident.

On peut dire encore :

Pour qu'on ait

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$$

il faut que la différence

$$\frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2}$$

soit un nombre positif.

or $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ d'où

$$\frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$

La fraction $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$ est positive puisque ses deux termes le sont.

Le minimum de cette fraction est zéro pour $a = b$, et alors, les deux moyennes sont égales.

17. — *Elever au carré les polynômes :* 1° $a + b + c$; 2° $a + b - c$; 3° $a + b + c + d$.

Solution. — Posons $a + b = m$ il vient alors $(a + b + c)^2 = (m + c)^2 = m^2 + 2mc + c^2$.

Remplaçons m par sa valeur, on a :

$(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$
ou $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

ou en rapprochant les termes analogues

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Changeons $+ c$ en $- c$, il vient :

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

Remarque. — On trouverait de même :

$$(a + b + c + d)^2 + a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Règle. — *Pour faire le carré d'un polynôme, on fait la somme des carrés de tous les termes, et on y ajoute les doubles produits des termes pris deux à deux avec leurs signes respectifs et de toutes les manières possibles.*

DIVISION

18. — *Diviser le polynôme* $60a^3b^2 - 61a^4b - 5a^2b^3 + 15a^5 - 35ab^4 - 4b^5$ *par le polynôme* $4b^3 - 7a^2b + 5a^3 + 3ab^2$.

Solution. — Ordonnons les deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de a et appliquons la règle donnée :

$$\begin{array}{l|l}
15a^5 - 61a^4b + 60a^3b^2 - 5a^2b^3 - 35ab^4 - 4b^5 & 5a^3 - 7a^2b + 3ab^2 + 4b^3 \\
\cline{2-2}
\quad - 15a^5 + 21a^4b - 9a^3b^2 - 12a^2b^3 & 3a^2 - 8ab - b^2 \\
\hline
\qquad - 40a^4b + 51a^3a^2 - 17a^2b^3 - 35ab^4 - 4b^5 & \\
\qquad + 40a^4b - 56a^3a^2 + 54a^2b^3 + 32ab^4 & \\
\hline
\qquad\qquad - 5a^3b^2 + 7a^2b^3 - 3ab^4 - 4b^5 & \\
\qquad\qquad + 5a^3b^2 - 7a^2b^3 + 3ab^4 - 4b^5 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Le quotient de la division est exactement $3a^2 - 8ab - b^2$.

19. — *Diviser le polynôme*

$$6x^4 + 19^3 - 7x^2 + 6x + 9$$

par le polynôme $6x^2 - 5x + 1$.

Solution. — On a :

$$\begin{array}{r|l}
6x^4 + 19x^3 - 7x^2 + x6 + 9 & 6x^2 - 5x + 1 \\ \cline{2-2}
-6x^4 + 5x^3 - x^2 \qquad\qquad & x^2 + 3x + 2 \\ \cline{1-1}
+24x^3 - 8x^2 + 6x + 9 & \\
-24x^3 + 20x^2 - 4x \qquad & \\ \cline{1-1}
+12x^2 + 2x + 9 & \\
-12x^2 + 10x - 2 & \\ \cline{1-1}
12x + 7 &
\end{array}$$

Réponse : Le quotient de la division est $x^2 + 4x + 2$ et le reste $12x + 7$.

20. — *Chercher le reste de la division de*
1° $x^m + a^m$ par $x - a$.
2° $x^m + a^m$ par $x + a$.

Solution. — I. — Pour trouver le reste de la division de $x^m + a^m$ par $x - a$ remplaçons dans le dividende x par a ; il vient :

$$R = a^m + a^m = 2a^m.$$

$x^m + a^m$ n'est jamais divisible exactement par $x - a$.

II. — Remplaçons dans le dividende x par $(-a)$, il vient $R = (-a)^m + a^m$.

Si m est *pair* $(-a)^m = a^m$ et $R = a^m + a^m = 2a^m$.

$x^m + a^m$ n'est pas divisible par $x + a$ quand m est pair.

Si m est *impair* $(-a)^m = -a^m$ et $R = -a^m + a^m = 0$.

$x^m + a^m$ est divisible par $x + a$ quand m est impair.

21. — *Déterminer a pour que le polynôme*

$$2x^3 - 5x^2 + ax - 6$$

soit divisible par $x + 3$.

Solution. — Il faut et il suffit que le polynôme s'annule quand on remplace x par -3, c'est-à-dire que l'on ait

$$2(-3)^3 - 5 \times (-3)^2 + a(-3) - 6 = 0$$

ou

$$2 \times (-27) - 45 - 3a - 6 = 0$$

ou

$$-54 - 45 - 3a - 6 = 0$$

d'où $-3a = 105$ et $a = -\dfrac{105}{3} = -35$

Réponse : $a = -35$.

22. — *Décomposer en facteurs le polynôme* $3x^2 - 21x + 36$.

Solution. — On a : $3x^2 - 21x + 36 = 3(x^2 - 7x + 12)$.

Remarquons que $x^2 - 7x + 12$ s'annule pour $x = 3$; il est donc divisible par $x - 3$.

Comme $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.

Il vient :

$$3x^2 - 21x\ 36 = 3(x - 3)(x - 4)$$

23. — *Décomposer en facteurs le polynôme* $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

Solution. — Les nombres $+1$ et -1 n'annulent pas le polynôme ; mais si on fait $x = 2$ le polynôme s'annule, il est donc divisible par $x - 2$. Effectuant la division, on obtient :

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x - 2)(x^2 - 8x + 15)$$

Le polynôme $x^2 - 8x + 15$ s'annule pour $x = 3$; il est divisible par $x - 3$.

On a en effet $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$.

Donc :

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$$

24. — *Simplifier*

$$\frac{x^2 - 5ax + 6a^2}{x^2 - 4a^2}$$

Solution. — Le dénominateur peut s'écrire $(x - 2a)(x + 2a)$.

Cherchons si l'un des facteurs $(x - 2a)$ ou $(x + 2a)$ divise le numérateur.

En faisant $x = 2a$, le numérateur s'annule ; il est donc divisible par $(x - 2a)$. On a :

$$\frac{x^2 - 5ax + 6a^2}{x^2 - 4a^2} = \frac{(x - 2a)(x - 3a)}{(x - 2a)(x + 2a)} = \frac{x - 3a}{x + 2a}$$

25. — *Simplifier*

$$\frac{(x^8 - 1)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)}{(x^2 - 4x + 4)(x^3 - x^2 - 5x - 3)}$$

On voit que $x^3 - 1 = (x^4 + 1)(x^4 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ et que $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ est divisible par $x - 2$; la fraction peut donc s'écrire :

$$\frac{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x - 2)(x^2 - 4x + 3}{(x - 2)(x - 2)(x^3 - x^2 - 5x - 3)}$$

ou après simplification par $(x - 2)$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)(x^3 - x^2 - 5x - 3)}$$

Mais $x^3 - x^2 - 5x - 3$ est divisible par $x + 1$, d'où on tire.

$$\frac{(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)(x^2 - 2x - 3)}$$

Or $x^2 - 2x - 3$ est divisible par $x - 1$ et $x^2 - 2x - 3$ par $x + 1$.

On a donc :

$$\frac{(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)(X - 1)(x - 3)}$$

et enfin :

$$\frac{(x - 1)^2(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{(x - 2)(x + 1)}$$

26. — *Réduire au même dénominateur les fractions*

$$\frac{a}{a + b} \qquad \frac{b^2}{a^2 + b^3} \qquad \frac{c^3}{a^3 + b^3}$$

Solution. — Comme $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Le plus petit commun dénominateur est

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

On multipliera les deux termes de la première fraction par $(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)$, ceux de la deuxième par $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ et ceux de la troisième par $(a + b)(a^2 + b^2)$.

Les fractions deviennent :

$$\frac{a(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{(a + b)(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\frac{b^2(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{(a + b)(a^2 + b^2)(a - ab + b^2)}$$

$$\frac{c^3(a^2 + b^2)}{(a + b)(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)}$$

27. — *Effectuer*

$$\frac{2}{(x - 1)(x - 2)} - \frac{6}{x^2 - 1} - \frac{6}{(x + 1)(2 - x)}$$

La troisième fraction $\dfrac{6}{(x + 1)(2 - x)}$ peut s'écrire $-\dfrac{6}{(x + 1)(x - 2)}$ et l'expression donnée devient

$$\frac{2}{(x - 1)(x - 2)} - \frac{6}{x^2 - 1} - \frac{6}{(x + 1)(x - 2)}$$

Le dénominateur commun est $(x - 1)(x - 2)(x + 1)$.

En réduisant les fractions au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{2(x+1)-6(x-2)-6(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+1)}$$

ou après réduction

$$\frac{10(2-x)}{(x-1)(x+2)(x+1)}=\frac{10(x-2)}{(1-x)(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{10}{(1-x)(x+1)}$$

28. *Simplifier*

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}}{\frac{x(x-2a)}{2(x-3a)}}$$

Considérons le numérateur on a :

$$\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}=\frac{2a-x}{4a}$$

et en divisant par le dénominateur

$$\frac{2a-x}{4a}:\frac{x(x-2a)}{2(x-3a)}=\frac{(2a-x)\times 2(x-3a)}{4ax(x-2a)}$$

Mais $2a-x=-(x-2a)$; d'où en simplifiant par $2(x-2a)$.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}}{\frac{x(x-2a)}{2(x-3a)}}=\frac{-(x-2a)\times 2(x-3a)}{4ax(x-2a)}=\frac{(x--3a}{2ax}$$

$$=\frac{3a-x}{2ax}$$

ÉQUATIONS

29. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{3}{2}x+7-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}x+9$$

Solution. — On peut retrancher 7 des deux membres, ce qui donne

$$\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}x-16$$

On a successivement :

$$\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}x=-16+\frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{4}x=-\frac{57}{4}$$

$$x=-57$$

Réponse : $x=-57$.

30. — *Résoudre l'équation :*

$$3ax+b=cx+4$$

Solution. — On a : $3ax-cx=4-b$

ou $(3a-c)x=4-b$

et $x=\dfrac{4-b}{3a-c}$

31. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{x+a}{b}-\frac{x+b}{a}=\frac{2a}{b}$$

On a :

$$ax+a^2-bx+b^2=2a^2$$

ou $ax-bx=a^2-b^2$

ou $(a-b)x=a^2-b^2$

et $x=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$

ou enfin : $x=a+b$

Réponse : $x=a+b$.

32. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}}=\frac{9}{9x-14}$$

Transformons le premier membre. On a successivement :

$$1+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+x+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1};$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{\dfrac{2x}{x-1}}=\frac{x-1}{2x};$$

$$x+\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}=x+\frac{x-1}{2x}=\frac{2x^2+x-1}{2x}$$

$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}}=\frac{1}{\dfrac{2x^2+x-1}{2x}}=\frac{2x}{2x^2+x-1}$$

L'équation proposée devient

$$\frac{2x}{2x^2+x-1}=\frac{9}{9x-14}$$

Chassons les dénominateurs, on a :

$$18x^2-28x=18x^2+9x-9$$

ou

$$-37x=-9$$

ou

$$37x=9$$

et enfin $x=\dfrac{9}{37}$

Cette valeur portée dans l'équation la vérifie.

Réponse : $x=\dfrac{9}{37}$.

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

33. — *Un père a 38 ans, son enfant a 11 ans ; on demande dans combien d'années l'âge du père sera double de l'âge de son enfant.*

Solution.— Soit x le nombre d'années au bout desquelles le fait aura lieu. A ce moment l'âge du père sera $38+x$, l'âge de l'enfant sera $11+x$. Comme alors l'âge du père sera double de l'âge de l'enfant, on aura :

$$38+x=2(11+x)$$

ou

$$38+x=22+2x$$

ou

$$38-22=2x-x \text{ et } 16=x$$

Le fait aura lieu dans 16 ans. Le père aura alors $38+16=54$ ans ;

l'enfant aura $11+16=27$ ans.

Vérification : $54 = 27 \times 2$.

Réponse : 16 ans.

34. — *Trouver un nombre dont le quintuple, diminué de 17, soit égal au triple, augmenté de 41.*

Solution. — Si x est le nombre cherché, son quintuple est $5x$ et son quintuple moins 17 est $5x - 17$. De même, son triple augmenté de 41 est $3x + 41$. L'équation du problème est donc

$$5x - 17 = 3x + 41$$

ou

$$5x - 3x = 41 + 17$$

ou

$$2x = 58$$

et

$$x = 29$$

Vérification : $5 \times 29 - 17 = 128$; $3 \times 29 + 41 = 128$.

Réponse : 29.

35. — *Un marchand de vin désire obtenir 100 litres de vin lui revenant à 0 fr. 50 le litre en mélangeant du vin qui lui coûte 0 fr. 35 le litre avec du vin qui lui coûte 0 fr. 95 le litre. Combien doit-il prendre de vin de chaque espèce ?*

Solution. — Soit x le nombre de litres de vin à 0 fr. 35 ; le nombre de litres de vin à 0 fr. 95 est de $100 - x$: Le prix total de revient des deux vins doit être égal au prix de 100 litres à 0 fr. 50, c'est-à-dire à 50 fr. On a donc l'équation :

$$0{,}35\,x + 0{,}95\,(100 - x) = 50$$

dans laquelle on a exprimé toutes les valeurs en francs. En réduisant, on obtient :

$$-0{,}60\,x = 50 - 95 = -45$$

d'où

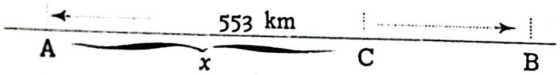
$$x = \frac{-45}{-0{,}60} = \frac{450}{6} = 75$$

Il faut donc prendre 75 litres à 0 fr. 35 et, par suite 25 litres à 0 fr. 95.

Vérification : $0{,}35 \times 75 + 0{,}95 \times 25 = 50$ fr.

Réponse : 75 litres à 0,35, 25 litres à 0,95.

36. — *Deux ouvriers partent en même temps de deux points A et B distants de 553 kilomètres et vont à la rencontre l'un de l'autre. Le premier fait 46 kilomètres par jour et le second 37. A quelle distance de leur point de départ se rencontreront-ils ?*



Solution. — Soit x kilomètres la distance A C entre A et le point de rencontre C. La distance B C est de $553 - x$ kilomètres. Les courriers ont mis respectivement $\frac{x}{42}$ et $\frac{533 - x}{37}$ jours pour parcourir les distances A C et B C ; or ces temps sont égaux, donc l'équation du problème est :

$$\frac{x}{42} = \frac{553 - x}{37}$$

Nous obtenons successivement, d'abord en multipliant les deux membres par 42×37 pour chasser les dénominateurs.

$$37\,x = 42\,(553 - x)$$

puis en effectuant la parenthèse

$$37\,x = 23226 - 42\,x$$

et

$$37\,x + 42\,x = 23226$$

d'où

$$79\,x = 23226$$

et enfin

$$x = \frac{23226}{79} = 294$$

A C = 294 km. B C = 553 — 294 = 259 km.

Réponses : 294 km. et 259 km.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

37. — *Résoudre le système d'équations* :

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} 2x + 3y = 24 & (1) \\ 5x - 3y = 7 & (2) \end{cases}$$

Solution. — Calculons x à l'aide de l'équation (1) on a le système équivalent.

$$(\mathrm{I}')\ \begin{cases} x = \dfrac{25 - 3y}{2} \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (2) x par la valeur trouvée on a le nouveau système équivalent au système (1).

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} x = \dfrac{24 - 3y}{2} & (1) \\ 5\left(\dfrac{24 - 3y}{2}\right) - 2y = 7 & (2) \end{cases}$$

De (2), on tire :

$$120 - 15\,y - 4\,y = 14$$

ou

$$19\,y = 106$$

et

$$x = \frac{106}{19}.$$

Par suite, il vient

$$x = \frac{24 - 3 \times \frac{106}{19}}{2} = \frac{69}{19}$$

Réponse: $x = \frac{69}{19}$; $y = \frac{106}{19}$.

Nota. — On vérifiera si ces nombres satisfont aux équations données.

Remarque. — Nous avons employé la méthode d'élimination par substitution. Employons maintenant la méthode d'élimination par réduction. Multipliant l'équation (1) par 2 et l'équation (2) par 3, il vient :

$$4\,x + 6\,y = 48$$
$$15\,x - 6\,y = 21$$

d'où en additionnant les deux équations membre à membre

$$19\,x = 69 \qquad \text{et } x = \frac{69}{19}$$

Par suite :

$$2 \times \frac{69}{19} + 3\,y = 24 \text{ d'où } 3\,y = 24 - \frac{69 \times 2}{19}$$

et

$$y = 8 - \frac{23 \times 2}{19} = \frac{106}{19}.$$

38. — *Résoudre le système* :

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} 2x - 3y = 2 & (1) \\ 5x + 4y = 28 & (2) \end{cases}$$

Solution. — Réduisant y au même coefficient absolu dans les deux équations, en multipliant les deux membres de l'équation (1) par 4 et ceux de l'équation (2) par 3 ; on obtient le système équivalent

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} 8x - 12y = 8 \\ 15x + 12y = 84 \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre ces deux équations, il vient :

$$23\,x = 92 \qquad \text{d'où } x = \frac{92}{23} = 4$$

Par suite $8 - 3y = 2$

d'où $3y = 8 - 2 = 6$ et $y = \frac{6}{3} = 2$

Réponses : $x = 4$; $y = 2$.

Remarque. — Nous avons employé la méthode d'élimination par réduction. Appliquons maintenant la méthode d'élimination par substitution au même système. On a, tirant x de l'équation (1) et portant cette valeur dans l'équation (2).

$$x = \frac{2 + 3y}{2}$$

$$5 \times \frac{2 + 3y}{2} + 4y = 28$$

Résolvons cette dernière équation en y, on a successivement

$$10 + 15y + 8y = 56$$
$$23y = 46$$
$$y = \frac{46}{23} = 2$$

Par suite

$$x = \frac{2 + 3 \times 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Nota. — On vérifiera si ces nombres satisfont aux équations données.

39. — *Résoudre le système d'équations* :

$$3x - 10y = 5x - 26$$
$$x + y = 2x - y + 2$$

Solution. — Réduisant les deux équations on obtient successivement

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x - 5x - 10y = -26 \\ x + y - 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} -2x - 10 = -26 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} x + 5y = 13 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Méthode de substitution. — La valeur de x tirée de la deuxième équation et portée dans la seconde donne le système équivalent :

$$\text{(IV)} \begin{cases} 2y - 2 + 5y = 13 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

Or $2y - 2 + 5y = 13$ donne successivement

$$7y = 15 \text{ et } y = \frac{15}{7} \text{ ou } 2\frac{1}{7}.$$

$$\text{et } x = \frac{2 \times 15}{7} - 2 = \frac{30 - 14}{7} = \frac{16}{7} \text{ ou } 2\frac{2}{7}.$$

Réponses : $x = 2\frac{1}{7}$ *et* $y = 2\frac{2}{7}$.

Méthode de réduction. — Additionnant membre à membre les deux équations du système

$$\begin{cases} x + 5y = 13 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

on obtient $7y = 15$ d'où $y = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

On tire la valeur de x, comme ci-dessus.

Nota. — On vérifiera si ces nombres satisfont aux équations données.

40. — *Résoudre le système d'équations* :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 & (1) \\ 3x + 2y = 12 & (2) \end{cases}$$

Méthode de substitution.

L'équation (1) donne $2x = 13 - 3y$, d'où

$$x = \frac{13 - 3y}{2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), on a successivement

$$3 \times \frac{13 - 3y}{2} + 2y = 12$$

ou $3(13 - 3y) + 4y = 24$

ou $39 - 9y + 4y = 24$ ou $-5y = -15$

$$\text{et } y = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Par suite

$$x = \frac{13 - 3 \times 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Méthode de réduction.

Multiplions l'équation (1) par 3 et l'équation (2) par 2, il vient :

$$6x + 9y = 39 \quad (3)$$
$$6x + 4y = 24 \quad (4)$$

Retranchant (4) de (3) on a :

$$5y = 39 - 24 = 15$$

et $y = \frac{15}{5} = 3$

Portant cette valeur de y dans l'équation (1), il vient:

$$2x + 3 \times 3 = 13$$

d'où $2x = 13 - 9 = 4$

et $x = \frac{4}{2} = 2$

Réponses : $x = 2$, $y = 3$.

Nota. — Vérifier si ces nombres satisfont aux équations données.

41. — *Résoudre le système d'équations* :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4y = 20 & (1) \\ 3x + 4y + 2z = 17 & (2) \\ 4x + 2y + 3z = 17 & (3) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire

$$2x = 20 - 3y - 4z$$

$$\text{et } x = \frac{20 - 3y - 4z}{2}$$

Remplaçons x par cette valeur dans les deux autres équations, on a :

$$\begin{cases} \frac{3(20 - 3y - 4z)}{2} + 4y + 2z = 17 \\ \frac{4(20 - 3y - 4z)}{2} + 2y + 3z = 17 \end{cases}$$

On a successivement :

$$\begin{cases} 3(20 - 3y - 4z) + 8y + 4z = 34 \\ 2(20 - 3y - 4z) + 2y + 3z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 - 9y - 12z + 8y + 4z = 34 \\ 40 - 6y - 8z + 2y + 3z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9y + 8y - 12z + 4z = 34 - 60 \\ -6y + 2y - 8z + 3z = 17 - 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y - 8z = -26 \\ -4y - 5z = -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 8z = 26 \\ 4y + 5z = 23 \end{cases}$$

De la première équation on tire $y = 26 - 8z$ portons cette valeur dans la deuxième.

$$4(26 - 8z) + 5z = 23$$
$$104 - 32z + 5z = 23$$
$$-32z + 5z = 23 - 104$$
$$-27z = -81, \quad 27z = 81$$

$$z = \frac{81}{27} = 3 \quad \text{d'où } y = 26 - 24 = 2$$

$$x = \frac{20 - 3y - 4z}{2} = \frac{20 - 6 - 12}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Réponses : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Nota. — Vérifier si ces nombres satisfont aux équations données.

Remarque. — Nous avons résolu le système donné par la méthode d'élimination par substitution.

42. — *Résoudre le système d'équations* :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & (1) \\ 2x - y + 3z = 9 & (2) \\ 3x - 2y + 4z = 11 & (3) \end{cases}$$

Solution. — Résolvons ce système par la méthode d'élimination par réduction.

Multiplions l'équation (1) par — 2 et ajoutons-la à l'équation (2) ; on obtient :

$$5y - z = 7 \qquad (4)$$

De même multiplions l'équation (1) par — 3 et ajoutons-la à l'équation (3) ; on obtient :

$$7y - 2z = 8 \qquad (5)$$

x étant éliminé, éliminons z entre les équations (4) et (5).

Multiplions pour cela l'équation (4) par 2 et l'équation 5 par — 1 puis ajoutons membre à membre ; on obtient :

$$3y = 6 \qquad \text{d'où } y = \frac{6}{3} = 2$$

Substituant dans l'équation (4), on tire $z = 3$.

Portant dans l'équation (1) les valeurs de y et de z on tire $x = 1$.

Réponses : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Nota. — On vérifiera si ces nombres satisfont bien aux équations données.

43. — *Résoudre le système* :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \\ x + y = c \end{cases}$$

Solution. — Une propriété des rapports donne,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b}$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{c}{a+b}$$

Par suite

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{a+b} \quad \textit{donc} \quad x = \frac{ac}{a+b}$$

Et

$$\frac{y}{b} = \frac{c}{a+b} \text{ donc } y = \frac{bc}{a+b}$$

Réponses : $x = \dfrac{ac}{a+b}$ et $y = \dfrac{bc}{a+b}$

44. — *Résoudre le système.*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 & (2) \end{cases}$$

Solution. — Une propriété des rapports donne

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{m}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

et par suite

$$x = \frac{am}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$y = \frac{bm}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$z = \frac{cm}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

45. — *On a payé une somme de 159 fr. avec 51 pièces, les unes de 5 fr., les autres de 2 fr. Combien y a-t-il de pièces de chaque espèce ?*

Solution. — Soit x le nombre de pièces de 5 fr. et y le nombre de pièces de 2 fr., l'énoncé fournit les deux équations :

$$\begin{cases} x + y = 51 & (1) \\ 5x + 2y = 158 & (2) \end{cases}$$

Multipliant la première équation par 2 et la retranchant de l'équation (2) il vient

$$3x = 57$$

$$\text{d'où } x = 19$$

et par suite

$$y = 51 - 19 = 32$$

Vérification.

$$5^f \times 19 + 2^f \times 32 = 95^f + 64^f = 159^f.$$

Réponses : Il y a 19 pièces de 5 fr. et 32 pièces de 2 fr.

46. — *Trouver deux nombres dont la différence et le quotient soient tous deux égaux à 5. Généraliser.*

Solution. — Soient x et y ces deux nombres. On doit avoir :

$$x - y = 5$$

$$x = 5y$$

Remplaçons x par $5y$ dans la première équation, il vient :

$$4y = 5$$

d'où

$$y = \frac{5}{4}$$

et

$$x = 5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$$

Réponses : Les deux nombres sont $\dfrac{25}{4}$ et $\dfrac{5}{4}$

GÉNÉRALISATION. — *Trouver deux nombres dont la différence et le quotient soient tous deux égaux à a.*

x et y étant ces deux nombres, on a

$$\begin{cases} x - y = a & (1) \\ x = ay & (2) \end{cases}$$

Portons la valeur de x fournie par la seconde équation dans la première. Il vient :

$$(a - 1)y = a \qquad (3)$$

Si a est différent de 1, on en tire

$$y = \frac{a}{a-1} \quad \textit{et} \quad x = \frac{a^2}{a-1}$$

Le problème a dans ce cas une solution.

Si $a = 1$, l'équation (3) devient : $0 = 1$; le problème n'a pas de solution.

47. — *Partager 232 en trois parties telles que si on ajoute à la première la demi-somme des deux autres, qu'on ajoute à la seconde le tiers de la somme des deux autres et qu'on ajoute à la troisième le quart de la somme des deux autres, les trois sommes ainsi obtenues soient égales.*

Solution. — Soient x, y, z les trois nombres. D'après l'énoncé, on a :

$$x + y + z = 232$$

$$x + \frac{x+z}{2} = x + \frac{x+z}{3} = z + \frac{x+y}{4}$$

Ce système de trois équations à trois inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} x + y + z = 232 \\ 4x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

En résolvant on trouve :

$$x = 40 \qquad y = 88 \qquad z = 104$$

Ce sont les nombres cherchés.

Réponses : 40 ; 88 ; 104.

48. — *Trois robinets* A, B, C, *peuvent remplir un bassin. Les robinets* A *et* B *coulant ensemble le remplissent en* 20 *minutes ; enfin* C *et* A *coulant ensemble le remplissent en* 12 *minutes. Combien chaque robinet coulant seul mettrait-il de temps pour remplir le bassin ?*

Solution. — Soient x, y, z, les nombres de minutes que mettraient A, B, C, coulant séparément.

En 1 minute le robinet A remplit une fraction du bassin égale à $\frac{1}{x}$

De même en 1 minute B remplit une fraction égale à $\frac{1}{y}$ et C une fraction égale à $\frac{1}{z}$

Les robinets A et B coulant ensemble remplissent une fraction du bassin égale à $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

D'autre part en 1 minute, A et B remplissent $\frac{1}{10}$ du bassin.

On a donc l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

En raisonnant de même pour les autres, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Ce système a été résolu (Algèbre n° 97) ; il donne

$$x = 15 \text{ m} ; \qquad y = 30 \text{ m} ; \qquad z = 60 \text{ m}$$

Réponses : 15 minutes ; 30 minutes ; 60 minutes.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

49. — *Résoudre l'équation*

$$3x^2 - 17x + 10 = 0$$

Solution. — La formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donne $$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 120}}{6} = \frac{17 \pm 13}{6}$$

d'où l'on tire :

$$x' = \frac{17 + 13}{6} = 5 \qquad x'' = \frac{17 - 13}{6} = \frac{2}{3}$$

Ces deux racines vérifient l'équation.

Réponses : $x' = 5$; $x'' = \frac{2}{3}$

50. — *Résoudre l'équation*

$$4x^2 - 12x - 7 = 0$$

Solution. — On a $a = 4$, $b = -12$, $c = -7$ a et c étant de signes contraires, l'équation a deux racines.

La formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donne $$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{8} = \frac{12 \pm 16}{8}$$

d'où l'on tire :

$$x' = \frac{12 + 16}{8} = \frac{7}{2} \qquad x'' = \frac{12 - 16}{8} = -\frac{1}{2}$$

Remarque. — b étant pair, la formule, appliquée de préférence,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

donne $$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{4} = \frac{6 \pm 8}{4}$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{6 \pm 8}{4} = \frac{7}{2} \qquad x'' = \frac{6 - 8}{4} = -\frac{1}{2}$$

Réponses : $x' = \frac{7}{2}$ $\quad x'' = -\frac{1}{2}$

51. — *Résoudre l'équation*

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

Solution. — On voit que $9x^2 - 12x + 4$ est le carré de $3x - 2$; on a donc

$$(3x - 2)^2 = 0 \text{ ou } (3x - 2)(3x - 2) = 0$$

d'où $3x - 2 = 0$ et $x = \frac{2}{3}$

La formule

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

conduit au même résultat.

On a

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

L'équation a donc une racine double.

Réponses : $x' = x'' = \frac{2}{3}$

52. — *Résoudre l'équation*

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x(x - 1)(x - 2).$$

Solution. — Développons les deux membres, il vient :

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 - 3x^2 + 2x$$

L'équation paraît être du troisième degré, mais les réductions étant faites on trouve :

$$9x^2 + 9x + 6 = 0$$

ou en divisant les deux membres par 3

$$3x^2 + 3x + 2 = 0$$

Formant $b^2 - 4ac$, on a $9 - 4 \times 3 \times 2 = -15$.

L'équation proposée n'a pas de racines.

53. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

Solution. — On a :

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)} = a \pm \sqrt{b^2}$$

d'où $x' = a - b$ $\qquad x'' = a + b$

Réponses :

$x' = a - b$ $\qquad x'' = a + b$

54. — *Former une équation ayant pour racines* 5 *et* — 7.

Solution. — On a :

$$5 + (-7) = -2 ; \text{ donc } -\frac{b}{a} = -2 \text{ et } \frac{b}{a} = 2$$

On a :

$$5 \times (-7) = -35 ; \text{ donc } \frac{c}{a} = -35$$

L'équation demandée est

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

La vérification est aisée.

Réponses : $x^2 + 2x - 35 = 0$

55. — *Trouver les côtés d'un rectangle de surface* 65^{m^2} *et de périmètre* 36 m.

Solution. — Désignons par a et b les deux dimensions du rectangle :
on a :

$$2(a + b) = 36 \quad \text{ou} \quad a + b = 18 \quad \text{et} \quad ab = 65$$

Les longueurs des côtés sont donc les racines de l'équation

$$x^2 - 18x + 65 = 0$$

On trouve

$$x' = a = 5 \quad \text{et} \quad x'' = b = 13$$

La vérification est facile.

Réponses : 5 et 13.

56. — *Reconnaître* a priori, *la nature des racines des équations.*

1° $45x^2 - 83x + 15 = 0$
2° $45x^2 + 83x + 15 = 0$
3° $4x^2 - 28x + 49 = 0$
4° $15x^2 - 18x - 27 = 0$

Solution. — 1° — Formons $b^2 - 4ac$ on trouve

$83^2 - 4 \times 45 \times 15$, nombre positif :

l'équation a donc deux racines.

Le produit $x'x'' = \frac{15}{45}$ est positif ; les deux racines sont donc de même signe.

La somme $x' + x'' = +\frac{83}{45}$ est positive, les deux racines sont toutes deux positives.

Réponse : L'équation a deux racines positives.

2° — On a la même valeur pour $b^2 - 4ac$ et pour $x'x''$ que précédemment ; les deux racines sont donc de même signe.

La somme $x' + x'' = -\frac{83}{45}$ est négative ; les deux racines sont toutes deux négatives.

Réponse : L'équation a deux racines négatives.

3° — Formons $b^2 - 4ac$ ou mieux $b'^2 - ac$ puisque le coefficient de x est pair. On a :

$$b'^2 - ac = 14^2 - 4 \times 49 = 0$$

Les deux racines sont donc toutes deux égales à

$$\frac{14}{3} = \frac{7}{2}$$

Réponse. — L'équation a deux racines égales.

4° — Comme $\frac{c}{a} = -\frac{27}{15}$ est négatif, nous savons que les deux racines existent certainement ; et il est inutile de former $b^2 - 4ac$.

Le produit $x'x''$ étant négatif, les deux racines sont de signes contraires.

La somme $x' + x'' = \frac{18}{15}$ étant positive, la plus grande en valeur absolue est positive.

Réponse : L'équation a deux racines de signes contraires.

57. — *Résoudre les équations bicarrées* :

1° $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$
2° $4x^4 + 35x^2 - 9 = 0$

Solution. — 1° — Posons $x^2 = y$, on aura l'équation du second degré.

$$y^2 - 29y + 100 = 0$$

qui a pour racines

$$y' = 4 \text{ et } y'' = 25$$

Résolvons les deux équations :

$$x^2 = 4 \quad \text{et} \quad x^2 = 25$$

On obtient les solutions :

$$x = \pm 2 \qquad x = \pm 5$$

Réponses : Les racines sont $+2$ et -2, $+5$ et -5.

2° — Posons $x^2 = y$, la résolvante en y est

$$4y^2 + 35y - 9 = 0$$

qui a pour racines

$$y' = -9 \quad \text{et} \quad y'' = \frac{1}{4}$$

Résolvons les deux équations :

$$x^2 = -9 \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{1}{4}$$

La première n'a pas de solutions, la seconde donne $x = \pm\frac{1}{2}$; ce sont les deux seules solutions de l'équation proposée.

Réponses : Les racines sont $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

58. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+3} = 0$$

Solution. — On peut écrire l'équation sous la forme

$$\sqrt{4x-3} = \sqrt{2x+3}$$

Elevons les deux membres au carré, on obtient

$$4x - 3 = 2x + 3$$

d'où

$$x = 3$$

Cette racine vérifie l'équation donnée. L'élévation au carré n'a pas introduit de racines étrangères.

Réponses : $x = 3$.

59. — *Résoudre l'équation* :

$$\sqrt{x^2+11} - \sqrt{x^2+5x-25} = 1$$

Isolons un radical, on aura :

$$\sqrt{x^2+11} = 1 + \sqrt{x^2+5x-25}$$

Elevons au carré il vient :

$$x^2 + 11 = 1 + x^2 + 5x - 25 + 2\sqrt{x^2+5x-25}$$

ou

$$5x - 35 = -2\sqrt{x^2+5x-25}$$

Elevons de nouveau au carré :

$$25x^2 - 350x + 35^2 = 4(x^2 + 5x - 25)$$

Effectuant on trouve :

$$21x^2 - 370x + 1325 = 0$$

qui a pour racines :

$$x = 5 \text{ et } x = \frac{265}{21}$$

La vérification montre que seule la racine $x = 5$ convient.

La solution $x = \frac{265}{21}$ est étrangère. Elle appartiendrait à l'équation $5x - 35 = +2\sqrt{x^2+5-25}$ obtenue en élevant au carré

$$\sqrt{x^2+11} = 1 - \sqrt{x^2+5x-25}$$

ou

$$\sqrt{x^2+11} + \sqrt{x^2+5x-25} = 1$$

60. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ x^2 + y^2 = b^2 & (2) \end{cases}$$

Elevons l'équation (1) au carré, on a

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2$$

En remplaçant $x^2 + y^2$ par b^2, il vient :

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

On est donc ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} x + x = a \\ xy = \dfrac{a^2 - b^2}{2} \end{cases}$$

On voit que x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - aX + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0$$

que l'on sait résoudre.

61. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ x^3 + y^3 = b^3 & (2) \end{cases}$$

Solution. — Elevons les deux membres de l'équation (1) au cube, il vient :

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = a^3$$

D'où, en remplaçant $x^3 + y^3$ par b^3 et $x + y$ par a

$$b^3 + 3axy = a^3$$

et

$$xy = \frac{a^3 - b^3}{3a}$$

On est ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = \dfrac{a^3 - b^3}{3a} \end{cases}$$

On sait que x et y sont les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - aX + \frac{a^3 - b^3}{3a} = 0$$

62. — *Par quel nombre faut-il diviser 24 pour que le diviseur, augmenté du quotient, donne 10?*

Solution. — Soit x le diviseur ; le quotient est $\frac{24}{x}$ et l'équation du problème est

$$x + \frac{24}{x} = 10$$

On peut l'écrire :

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

ses racines sont $x' = 6$ et $x'' = 4$.

Elles conviennent toutes deux au problème.

Réponses : 6 et 4.

63. — *Une fraction est telle que sa différence avec 1, multipliée par l'unité augmentée de 10 fois la fraction inconnue, donne 3 pour produit. Quelle est cette fraction ?*

Solution. — L'équation est

$$(1 - x)(1 + 10x) = 3$$

ou

$$10x^2 - 9x + 2 = 0$$

Elle donne

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{20} = \frac{9 \pm 1}{20}$$

$$x' = \frac{1}{2} \qquad x'' = \frac{2}{5}$$

Réponses : $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{5}$

64. — *L'achat d'un certain nombre d'exemplaires d'un ouvrage s'élève à 100 francs. Si le prix avait été de 1 franc de moins par exemplaire on aurait en 5 exemplaires de plus pour la même somme. Combien d'exemplaires de l'ouvrage a-t-on achetés et à quel prix?*

Solution. — Soit x le prix d'un exemplaire. Le nombre des exemplaires à x francs est $\frac{100}{x}$ et celui des exemplaires à $(x - 1)$ francs est $\frac{100}{x - 1}$

D'où l'équation :

$$\frac{100}{x - 1} - \frac{100}{x} = 5$$

ou

$$x^2 - x - 20 = 0$$

Elle a pour racines $x' = 5$ et $x'' = -4$.

Seule la solution $x' = 5$ répond à la question.

Le prix de l'ouvrage est de $100 : 5 = 20$ fr.

Réponses : 5, 20 francs.

Remarque. — La solution négative répond à l'énoncé du problème, ci-après, voisin de celui qui vient d'être traité, et qui aurait pour équation :

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x + 1} = 5$$

L'achat d'un certain nombre d'exemplaires d'un ouvrage s'élève à 100 francs. Si le prix avait été de 1 franc de plus par exemplaire, on aurait eu 5 exemplaires de moins pour la même somme. Combien d'exemplaires de l'ouvrage a-t-on achetés et à quel prix?

65. — *Trouver les côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est 12 mètres, sachant en outre que la hauteur correspondant à l'hypoténuse mesure 2 m 40.*

Solution. — Désignons les côtés de l'angle droit par b et c et l'hypoténuse par a. On a d'abord l'équation

$$a + b + c = 12$$

La relation de Pythagore donne

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Enfin, exprimant le double de l'aire du triangle de deux manières différentes, on a :

$$bc = ah \text{ ou } bc = 2,4\,a$$

On a donc à résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 12 & (1) \\ a^2 = b^2 + c^2 & (2) \\ 2,4\,a = bc & (3) \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (3) par 2 et ajoutons membre à membre à l'équation (2), il vient :

$$a^2 + 4,\ a = b^2 + c^2 + 2bc$$

ou

$$a^2 + 4,8\,a = (b + c)^2$$

De l'équation (1) on tire

$$b + c = 12 - 2$$

Donc

$$a^2 + 4,8\,a = (12 - a)^2$$

d'où

$$28,8\,a = 144$$

et

$$a = \frac{144}{28.8} = 5$$

Les équations (1) et (3) deviennent

$$b + c = 7$$
$$bc = 12$$

b *et* c sont les racines de l'équation

$$X^2 - 7X + 12 = 0$$

On obtient : $b = 4$ et $c = 3$

Les côtés du triangle mesurent donc 3^m, 4^m et 5^m.

Réponses : 3^m, 4^m, 5^m.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES

66. — *Trouver la somme des 30 premiers termes de la progression arithmétique commençant par 3 et ayant pour raison 5.*

Solution. — Le 30e terme sera

$$3 + 29 \times 5 = 148$$

Appliquant la formule $S = \frac{(a+l)n}{2}$, on a :

$$S = \frac{(3 + 148)\,30}{2} = 2265$$

Réponse : 2265.

67. — *Trouver la somme des* n *premiers nombres pairs.*

Solution. — La suite des nombres entiers pairs forme une progression arithmétique de raison 2, le premier terme étant égal à 2 et le $n^{\text{ième}}$ terme étant égal à 2 n.

On aura donc

$$S = \frac{(2 + 2n)\,n}{2} = n\,(n + 1)$$

Réponse : $n\,(n + 1)$.

Remarque. — Cette somme est évidemment le double de la somme des n premiers nombres ou $2 \times \frac{n+(n+1)}{2}$

c'est donc bien $n\,(n + 1)$.

68. — *Trouver trois nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme* 15 *et leur produit* 105.

Solution. — Appelant x le terme du milieu et r la raison, on a la progression

$$x - r.\ x.\ x + r$$

D'après l'énoncé on a :

$$x - r + x + x + r = 15 \qquad d'où\ x = 5$$

et

$$(5 - r) \times 5\,(5 + r) = 105$$

d'où $r^2 = 4$ et $r = \pm 2$

Les nombres demandés sont

$$3,\ 5,\ 7 \text{ ou } 7,\ 5,\ 3$$

Réponses : 3, 5, 7 ou 7, 5, 3.

69. — *Dans une progression arithmétique, on donne le nombre des termes* 17, *la somme des termes* 595, *et le produit des termes extrêmes* 201. *Trouver le premier et le dernier terme, ainsi que la raison.*

Solution. — Soient a et l le premier et le dernier terme et r la raison.

La somme des termes est égale à

$$\frac{a+l}{2} \times 17$$

D'où l'équation

$$\frac{a+l}{2} \times 17 = 595$$

et

$$a + l = \frac{595 \times 2}{17} = 70$$

Or par hypothèse on a $al = 201$.

a et l sont donc les racines de l'équation

$$X^2 = 70\,X + 201 = 0$$

or, on trouve $X = 35 \pm 32$

Si la progression est croissante $a = 35 - 32 = 3$ et $l = 35 + 32 = 67$.

En la supposant décroissante $a = 67$ et $l = 3$.

On sait que le dernier terme de la progression est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison qu'il a de termes avant lui.

D'où, dans le cas d'une progression croissante

$$67 = 3 + 16\,r \qquad \text{et} \qquad r = \frac{67 - 3}{16} = 4$$

et dans le cas d'une progression décroissante

$$3 = 67 + 16\,r \qquad \text{et} \qquad r = \frac{3 - 67}{16} = -4$$

Réponses : 3 ou 67, 67 ou 3, 4 ou — 4.

70. — *Calculer le sixième terme de la progression géométrique qui commence par* 3 *et dont la raison est* $\frac{1}{5}$:

Solution. — Le sixième terme en a 5 avant lui, la formule

$$h = a\,q^{p-1} \text{ devient } h = \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{3}{3125}$$

Réponse : $\frac{3}{3125}$

71. — *Trouver la somme des dix premiers termes de la progression*

$\div\!\div$ 2 : 4 : 8 : 16...

La formule $S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q \quad 1}$ donne

$$S = \frac{2 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2 \times 1023 = 2046.$$

Réponse : 2046.

72. — *Trouver la limite de la somme des termes de la progression indéfiniment prolongée.*

$$\div\!\div\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ \ldots\ldots$$

Solution. — La formule $S = \frac{l\,q - a}{q - 1}$ s'écrit, dans le cas d'une progression géométrique décroissante, afin d'avoir des termes positifs dans la fraction qui donne S.

$$S = \frac{a - l\,q}{1 - q} \quad \text{ou} \quad S = \frac{a}{1 - q} - \frac{l\,q}{1 - q}$$

Quand le nombre des termes augmente indéfiniment, le dernier terme l tend vers zéro, donc $\frac{l\,q}{1 - q}$ a pour limite o et par suite

$$\text{limite } S = \frac{a}{1 - q}$$

Par suite

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Réponse : 2.

73. — *Trouver la fraction génératrice de la fraction décimale périodique simple* 0,526526...

Cette fraction peut s'écrire

$$\frac{526}{1\,000} + \frac{526}{1\,000^2} + \frac{526}{1\,000^3} + \ \ldots\ldots$$

Solution. — On obtient ainsi une progression géométrique décroissante de raison $\frac{1}{1\,000}$ et dont le premier terme est $\frac{526}{1\,000}$.

La formule limite $S = \frac{a}{1 - q}$ donne

$$S = \frac{\frac{526}{1\,000}}{1 - \frac{1}{1\,000}} = \frac{526}{999}$$

Réponse : $\frac{526}{999}$

74. — *La surface d'un triangle est* 648m² 58, *la hauteur est* 37m 65. *Quelle est la base?*

De $S = \frac{b \times h}{2}$, on tire : $b = \frac{2\,S}{h} = \frac{1297{,}16}{37{,}65}$

d'où log. b = log. 1297,16 — log. 37,65.
= log. 1297,16 + colog. 37,65

Calculs auxiliaires :

log. 1297 = 3,11294 diff. tab. 33
pour 16 5
log. 1297,16 = 3,11299
log. 37,65 = 1,57576

Calculs définitifs :

log. 1297,16 = 3,11299
colog. 37,65 = 2,42424
log. b = 1,53723
pour 53719... 3445
diff. tab. 13, pour 4... 0,3
b = 34^m 453

Réponse : $34,45^m$.

75. — *Trouver le diamètre d'une sphère dont le volume, est de* 1^{m3}, *sachant que le volume d'une sphère en fonction de son diamètre* D *est donné par la formule*

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3$$

Solution. — De cette formule on tire :

$$D^3 = \frac{6V}{\pi} = \frac{6}{\pi} = \quad \text{et } D = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6}{3,1416}}$$

d'où log. D = (log. 6 — log. 3,1416)

Calculs auxiliaires :

log. 3,141 = 0,49707 diff. tab. 14
pour 6 = 8
log. 3,1416 = 0,49715

Calculs définitifs :

log. 6 = 0,77815
log. 3,1416 = 0,49715
3 log. D. = 0,28100
log. D. = 0,09367
pour 09342 1240
diff. tab. 30 pour 25 0,7
D = 1^m 2407

Réponse : $1,240^m$.

76. — *Calculer la valeur de x donnée par la formule.*

$$x = \frac{(34,2)^2 \times \sqrt[3]{3,5472}}{\sqrt[4]{3,45 \times 872}}$$

Solution. — On a :

$$\log. x = 2 \log 34,2 + \frac{1}{3} \log 3,5472 - \frac{1}{4}(\log 3,45 + 872)$$

Calculs auxiliaires :

log. 34,2 = 1,53403
2 log. 34,2 = 3,06806
Pour log. 3547 ..... 54986 diff. tab. 12
0,2 2

Pour 35472 54988
log. 3,5472 = 0,54988
$\frac{1}{3}$ log. 3,5472 = 0,18329
log. 3,45 = 0,53782
log. 872 = 2,94052
log. 3,45 + log. 872 = 3,47834
$\frac{1}{4}$ (log. 3,45 + log. 872) = 0,86959
$\frac{1}{4}$ (colog. 3,45 + colog. 872) = $\overline{1}$,13041

Calculs définitifs :

2 log. 34,2 = 3,06806
$\frac{1}{3}$ log. 3,5472 = 0,18329
$\frac{1}{4}$ (colog. 3,45 + colog. 872) = $\overline{1}$,13041
log. x = 2,38176
Pour 38166 2408
diff. tab. 18
pour 10 0,55
x = 240,855

Réponse : 240,855.

77. — *Qu'est devenu au bout de 6 ans un capital de 4958 fr. 60, placé à intérêts composés à 4%.*

Solution. — La formule générale qui donne la valeur cherchée est :

$$C = c\,(1 + r)^n$$

d'où en appliquant les logarithmes

log. C = log. c + n log. (1 + r)
et log. C = log. 4958,6 + 6 log. 1. 04

Calculs auxiliaires :

log. 4958 = 3,69531 diff. tab. 8
pour 0,6 = 5
log. 4958,6 = 3,69536
log. 1,04 = 0,01703

Calculs définitifs :

log. 4958,6 = 3,69536
6 log. 1,04 = 0,10218
log. C = 3,79754
C = 6274

Réponse : 6274 francs.

Remarque. — Il existe des tables des puissances des nombres 1,03, 1,04, 1,05 etc., elles sont ordinairement contenues dans les tables de logarithmes.

78. — *Quel est le capital qui, placé à intérêts composés au taux de 4 % est devenu 7113 fr. au bout de 15 ans ?*

Solution. — De la formule C = c (1 + r) on tire

$$c = \frac{C}{(1 +)r\,n}$$

d'où log. c = log. C — n log. (+ r)
ou log. c = log. C + n colog. (1 + r)

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient

log. c = log. 7113 + 15 colog. 1.04

Calculs auxiliaires :

colog. 1,04 = $\overline{1}$,98297
15 colog. 1,04 = 1,74455

Calculs définitifs :

log. 7113 = 3,85205
15 colog. 1,04 = 1,74455
log. c = 3,59660
c = 3950

Réponse : 3950 francs.

79. — *En combien d'années un capital de 3.200 francs placé à 3% à intérêts composés est-il. devenu 3.400 francs?*

Solution. — De la formule C = c (1 + r)^n on tire :

log. C = log. c + n log. (1 + r)

d'où n log. (1 + r) = log. C — log. c

$$\text{et } n = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1 + r)}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

$$n = \frac{\log. 3400 - \log. 3200}{\log. 1,03}$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \log. 3400 & = & 3,53148 \\ \log. 3.200 & = & 3,50515 \\ \hline \log. 3400 - \log. 3200 & = & 0,03633 \end{array}$$

et

On a :

$$\log. 1,033 = 0,01284$$

Donc

$$n = \frac{0,03633}{0,01284} = 2,8 \text{ ou } 2 \text{ ans } 10 \text{ mois.}$$

Réponse : 2 ans 10 mois.

80. — *A quel taux un capital de 12600 francs placé pendant 12 ans, en capitalisant chaque année, est-il devenu 17970 francs ?*

Solution. — La formule

$$n \log. (1 + r) = \log. C - \log. c.$$

ponne

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. C - \log. c}{n}$$

d'où

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. 17970 - \log. 12600}{12}$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \log. 17970 & = & 4,25455 \\ \log. 12600 & = & 4,10037 \\ \hline \log. 17970 - \log. 12600 & = & 0,15418 \end{array}$$

D'où

$$\log. (1 + r) = \frac{0,15418}{12} = 0,01286$$

Comme pour 01284, on a 103

$$1 + r = 103 \qquad \text{et } r = 0,03$$

Le taux est 3% environ.

Réponse : 3%.

81. — *On verse au commencement de chaque année une somme de 1250 fr. Quel sera le capital constitué à intérêts composés au bout de la 20ème année, le taux étant 4% .*

Solution. — D'après la formule :

$$A = \frac{a (1 + r) [(1 + r)^n - 1]}{r} \quad \text{on a}$$

$$A = \frac{1250 \times 1,04 (1,04^{20} - 1)}{0,04}$$

Le calcul de $1,04^{20}$ au moyen des logarithmes donne

$$1,04^{20} = 2,1911$$

d'où

$$A = \frac{1300 \times 1,1911}{0,04} = 38711^{1}$$

Réponse : 38711 francs.

82. — *Quelle est l'annuité nécessaire pour constituer un capital de 50000 francs en 18 ans à 5% ?*

Solution. — De la formule

$$A = \frac{a (1 + r) [(1 + r)^n - 1]}{r}$$

$$\text{on tire } a = \frac{A r}{(1 + r) [(1 + r)^n - 1]}$$

D'où $\log. a = \log. A + \log. r - \log. (1 + r) - \log. ((1 + r)^n - 1)$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

$$\log. a = \log. 50000 + \log. 0,05 - \log. 1,05 - \log. (1.05^{18} - 1))$$

Calculs auxiliaires

$$\begin{array}{rcl} \log. 1.05 & = & 0,02119 \\ 18 \log. 1,05 & = & 0,38142 \\ 1,05^{18} & = & 2,40667 \\ 1,05^{18} - 1 & = & 1,40667 \end{array}$$

d'où

et

Calculs définitifs :

$$\begin{array}{rcl} \log. 50000 & = & 4,69897 \\ \log. 0,05 & = & 2,69897 \\ \text{colog. } (1.05^{18} - 1) & = & \underline{1,85181} \\ \text{colog. } 1,05 & = & 1,97881 \\ \hline \log. a & = & 3,22856 \\ a & = & 1692,60 \end{array}$$

d'où

Réponse : 1692 francs 60.

83. — *Une commune emprunte 150000 francs qu'elle veut rembourser en 20 annuités égales. Quel sera le montant de chaque annuité, les intérêts composés étant comptés au taux de 5% l'an?*

Solution. — Dans la formule $a = \dfrac{Ar (1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$

remplaçons les lettres par leurs valeurs, il vient

$$a = \frac{150.000 \times 0.05 \times 1,05^{20}}{1,05^{20} - 1} = \frac{7500 \times 1,05^{20}}{1\ 05^{20} - 1}$$

Calculons $1,05^{20} - 1$:

$$\begin{array}{rcl} 20 \log. 1,05 & = & 0,42380 \\ 1,05^{20} & = & 2,653375 \\ 1,05^{20} - 1 & = & 1,653375 \end{array}$$

d'où

et

par suite :

$$a = \frac{7500 \times 1,05^{20}}{1,653375}$$

et

$$\log. a = \log. 7500 + 20 \log. 1,05 + \text{colog. } 1,653375$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \log. 7500 & = & 3,87506 \\ 20 \log. 1,05 & = & \underline{0,42380} \\ \text{colog. } 1653375 & = & 1,78163 \\ \hline \log. a & = & 4,08049 \end{array}$$

d'où

$$a = 12036 \text{ francs.}$$

Réponse : 12036 francs.

Remarque. — Ces calculs se font souvent à l'aide de tables qui donnent les puissances successives de $1 + r$ pour les différentes valeurs de n.

84.— *Une commune a fait construire un groupe scolaire qui est achevé le 1er janvier 1917. Elle peut s'acquitter envers l'entrepreneur soit en lui payant 28480 fr. le 1er janvier 1920, soit en lui versant 30 annuités, dont la première est exigible le 1er janvier 1918. Elle décide en faveur de ce dernier mode de paiement. Quel sera le montant de l'annuité si l'on tient compte des intérêts composés à 4 %.*

Solution. — La première annuité étant versée le 1er janvier 1918, la trentième le sera le 1er janvier 1947.

Soit a le montant de chaque annuité. En appelant r l'intérêt de 1 fr. par an, la première annuité placée pendant 29 ans devient

$$a (1 + r)^{29}$$

Les suivantes deviennent respectivement

$$a (1 + r)^{28}, \qquad a (1 + r)^{27}, \ldots \qquad a (1 + r), a.$$

la dernière ne rapportant aucun intérêt.

La somme est égale à

$$a + a (1 + r) + a (1 + r)^2 + \ldots a (1 + r)^{28} + a (1 + r)^{29}$$

soit la somme des termes d'une progression géométrique de 30 termes, dont la raison est $(1 + r)$ et le premier terme a.

Cette somme est égale à

$$\frac{a[(1+r)^{30}-1]}{1+r-1} = \frac{a[(1+r)^{30}-1]}{r}$$

Or le 1er janvier 1947 la dette, qui valait 28480 francs le 1er janvier 1920, vaut 28480 $(1+r)^{27}$.

D'où l'équation

$$\frac{[a(1+r)^{30}-r]}{r} = 28\,480\,(1+r)^{27}$$

de laquelle on tire

$$a = \frac{28\,480 \times r\,(1+r)^{27}}{(1+r)^{30}-1} = \frac{28480 \times 0{,}04 \times 1{,}04^{27}}{1{,}04^{30}-1}$$

Les tables donnent

$$1{,}04^{27} = 2{,}883369$$
$$1{,}04^{30} = 3{,}243398$$

Donc

$$a = \frac{28\,480 \times 0.04 \times 2{,}883369}{2{,}243398} = 1464{,}17$$

Réponse : 1464 francs 17.

NOTIONS
SUR LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Graphique de température. — Supposons qu'on veuille se rendre compte de la température qu'il fait pendant une après-midi de janvier sur la terrasse d'une maison de campagne. Que fera-t-on ? On y placera un thermomètre, que nous supposons exact, et de temps en temps on notera la température qu'il indique. Si nous faisons notre relevé d'heure en heure, par exemple, nous inscrirons sur notre carnet les observations suivantes :

Midi	+ 5°,1	7 h	+ 3°,
1 h	+ 5°,8	8 h	+ 1°,3
2 h	+ 6°,2	9 h	— 0°,7
3 h	+ 5°,9	10 h	— 2°,1
4 h	+ 5°,5	11 h	— 3°,6
5 h	+ 5°	12 h	— 4°,3
6 h	+ 4°,2		

On a ainsi un tableau des températures successives. On y voit que la température s'est d'abord élevée entre midi et 2 heures de + 5°, 1 à + 6°,2 pour s'abaisser ensuite sans arrêt jusqu'à minuit à —4°,3.

A ce tableau on substitue un *graphique* qui parle mieux aux yeux et que l'on fait de la façon suivante :

On prend une feuille de papier quadrillé. Sur ce papier on renforce à l'encre une raie horizontale Ox et une raie verticale Oy (fig. 1).

Sur la droite *oy* on marque les *heures* aux points de division formés par le quadrillage : O correspond à midi ; puis 1 h, 2 h, 3 h, etc... Sur la droite *oy* on marque les températures : O correspond à la température 0°. On marque ensuite les degrés positifs de bas en haut en remontant, aux points de division formés par le quadrillage sur *oy*, + 1°, + 2°, + 3°, etc... On marque, de même, les degrés négatifs de haut en bas à partir de 0, en descendant, — 1°, — 2°, — 3°, etc.

Ceci fait, *une température quelconque est représentée par le point qui se trouve à l'intersection de la verticale de l'heure avec l'horizontale de cette température.*

Par exemple, à 7 heures, la température est de + 3°. On marquera donc le point M qui est à l'intersection de la verticale de 7 heures avec l'horizontale de 3° (fig. 1). En suivant la même méthode, on a :

à midi le point A sur *oy* à la division + 5°,1,
à 1 h — B sur la verticale 1 h à la division + 5°,8,
à 2 h — C — 2 h — + 6°,2,
à 3 h — D — 3 h — + 5°,9,
et ainsi de suite.

A partir de 9 heures les points sont *au-dessous* de *ox* car les températures sont négatives. On a :

à 9 h le point L sur la verticale 9 h à la division —0°,7,
à 10 h — P — 10 h — —2°,1,
à 11 h — R — 11 h — —3°,6,
à minuit — S — 12 h — —4°,3,

Les points A, B, C, D..., P, R, S étant marqués, on les joint par un trait continu A B C D... R S et c'est ce trait qu'on appelle le *graphique* ou le *diagramme* de la température.

Avantages du graphique. — Ce graphique remplace alors le tableau précédent. Si nous voulons savoir quelle était la température à 8 heures, il nous suffit de regarder à quelle division la courbe coupe la verticale 8 heures, et nous lisons que la température était de + 1°,5, car le point K d'intersection est entre la division + 1° et + 2° au milieu.

Ce graphique a l'avantage de mieux parler aux yeux.

En effet, lorsque la température s'élève, les points représentatifs *montent*, la courbe *monte* ; lorsqu'au contraire la température s'abaisse, les points représentatifs *descend*, la courbe *descend*. Il suffit donc de jeter un coup d'œil sur le graphique pour voir que la courbe monte d'abord jusque vers 2 heures, puis descend jusqu'à minuit.

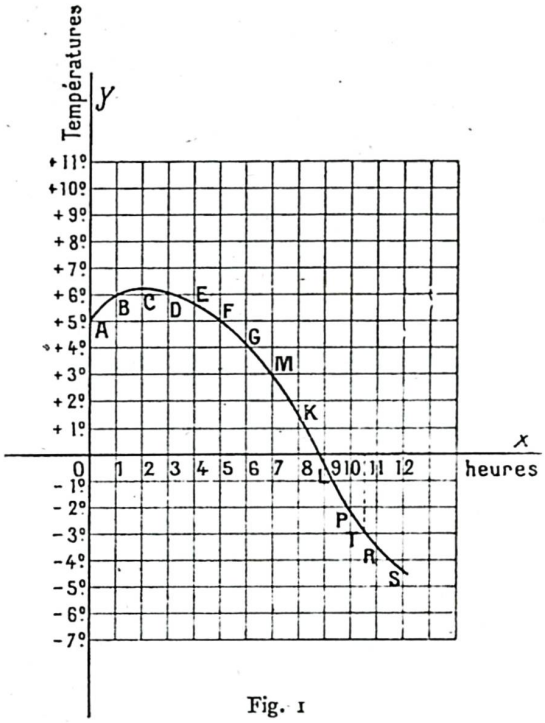


Fig. 1

Mais il y a plus, ce graphique permet plus facilement de savoir approximativement quelle était la température à une *heure quelconque* ou, inversement, à quelle heure la température avait une valeur donnée.

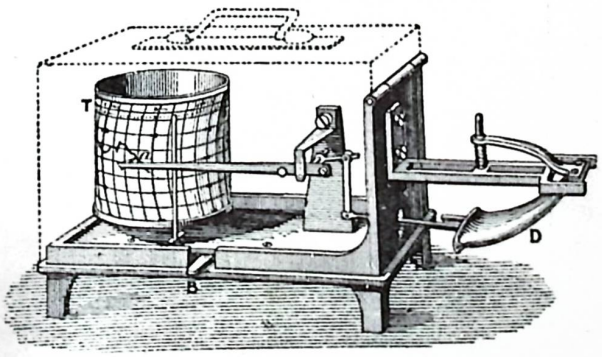


Fig. 2

Si, par exemple, nous voulons savoir quelle était la température à 10 h. ½, nous traçons (en pointillé sur la fig. 1) la verticale qui passe par la division 10,5 de *Ox* ; elle rencontre la courbe en un point T. La division correspondante à ce point T sur *Oy*

nous indique la température correspondante. Ainsi la division correspondante à T est environ —3°. La température était environ de —3° à 10 h. ½.

Inversement, cherchons à quelle heure de la journée la température a été de + 2°. Pour cela, nous prenons le point d'intersection de l'horizontale + 2° avec la courbe. Ce point est entre les divisions 7 heures et 8 heures, environ 7 h. ¾. C'est donc à 7 h. ¾ que la température a été de + 2°.

Il existe des appareils, appelés *thermomètres enregistreurs*, qui tracent le graphique de la température (fig. 2).

phérique pendant la journée précédente. Les revues scientifiques donnent des graphiques plus complets se rapportant à une semaine, à un mois. Les graphiques donnent pour une région la hauteur de pluie tombée ainsi que le nombre des jours de pluie, les températures maxima et minima, la direction des vents dominants; et cela, pour une saison ou pour une année caractérise la climatologie de cette région.

Au reste, le *Bureau central météorologique* publie chaque jour une carte où sont marquées les courbes indiquant les régions où la pression atmosphérique

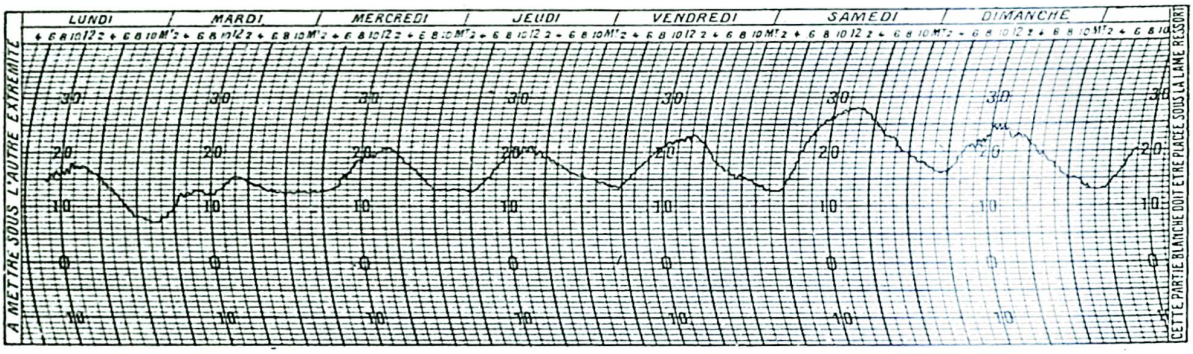


Fig. 3

Les points représentatifs sont automatiquement enregistrés, non plus d'heure en heure ou même de minute en minute, mais d'une manière continue.

De la sorte, le graphique présentera dans certains cas — saute de vent, pluie, etc. — de petites variations brusques que le tableau établi par des observations d'heure en heure aurait pu ne pas indiquer.

Nous donnons ci-dessus un exemple de la courbe, fournie par un thermomètre enregistreur (fig. 3).

était la même, la veille au même moment. On déduit de l'étude de ces cartes la probabilité du temps qu'il fera un ou deux jours plus tard dans telle ou telle région.

Citons encore les graphiques médicaux qui permettent au médecin, par l'examen de la température d'un malade, de suivre d'un regard l'allure et l'évolution de la maladie.

Les résultats des statistiques peuvent être également

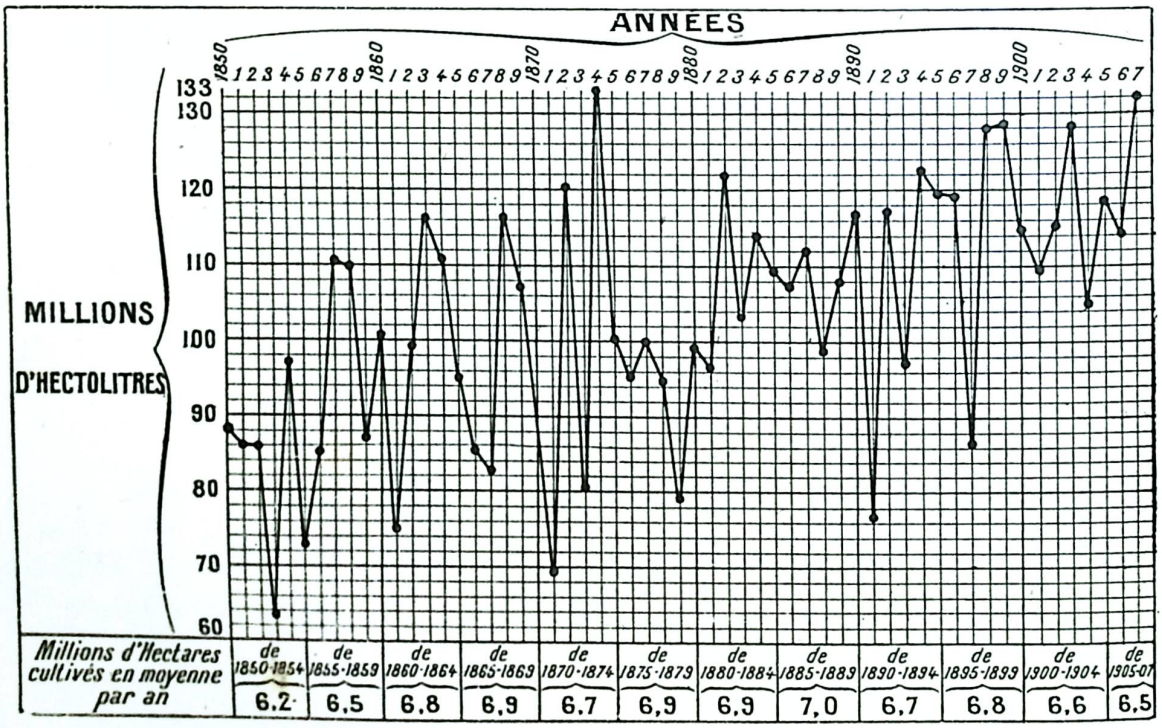


Fig. 4 — Production annuelle du blé en France

On peut représenter par des graphiques les variations de tout phénomène dont l'étude se fait expérimentalement. Tels sont les graphiques météorologiques que publient la plupart des journaux quotidiens; graphiques de la température et de la pression atmos-

représentés par des graphiques; nous en donnons ci-après quelques exemples.

Le graphique précédent (fig. 4) nous montre que les années 1853, 1855, 1861, 1871 notamment, 1873, 1879, 1891, 1897 furent des années de disette et que

les années 1872, 1874, 1894, 1898, 1899, 1903 et 1907 furent des années d'abondance ; que la période 1875-1881 fut de faible rendement, mais que les périodes 1882-1890, 1894-1896, 1898-1900 furent des périodes relativement heureuses.

Remarque générale. — Dans un graphique la ligne tracée est droite, brisée ou courbe, cependant on l'appelle toujours une *courbe*. Du reste, en mathématiques supérieures on donne le nom de courbe à toute ligne et la ligne droite est un cas particulier de la ligne courbe.

Lorsque la courbe résume des faits constatés sans pouvoir prévoir ce qui arrivera dans l'avenir, on dit que c'est une *courbe empirique*. C'est ce qui a eu lieu dans tous les exemples présentés jusqu'ici.

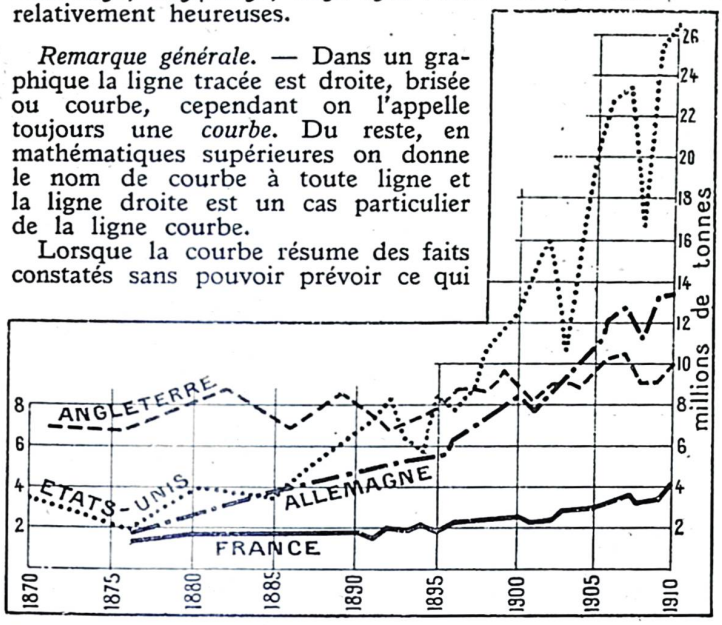


Fig. 5 — Production annuelle de la fonte en France, en Allemagne, aux Etats-Unis et en Angleterre

FONCTION LINÉAIRE

Définition. — Toute quantité qui peut prendre diverses valeurs, qui peut varier, est dite **variable**. Quand on peut donner à une variable des valeurs arbitraires, elle est dite *variable indépendante*.

Une quantité variable est dite **fonction** d'une autre variable indépendante lorsque sa valeur *dépend* de celle de la variable indépendante. Une variable qui est fonction d'une autre est encore dite variable dépendante de cette autre.

Par exemple, le prix d'un voyage en chemin de fer est *fonction* de la distance parcourue ; le chemin parcouru par un mobile qui se meut avec la vitesse de 4 mètres à la seconde, dépend du temps pendant lequel ce mobile a marché, ce chemin est donc une *fonction* du temps du parcours ; la longueur de la circonférence d'un cercle est une *fonction* du rayon de ce cercle.

En physique, on rencontre sans cesse des exemples de fonctions. La longueur d'une barre de fer est *fonction* de la température qu'elle subit ; le volume d'une masse de gaz est *fonction* à la fois de la température et de la pression.

En général, on désigne une variable indépendante par la lettre x et une variable dépendante ou fonction par la lettre y.

Dès lors quand on dit que la variable y est une fonction de la variable indépendante x, cela signifie que *l'on peut*, théoriquement tout au moins, calculer la valeur de y quand on connaît la valeur de x.

Par exemple si on désigne par y le chemin parcouru par un mobile dans le temps x à la vitesse de 4 mètres à la seconde, on a :

$$y = 4x$$

formule qui permet de calculer y quand on connaît x.

pour $x = 2^s$, on a $y = 8^m$
pour $x = 5^s, 2$, on a $y = 20^m,8$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que :

Lorsqu'une quantité y est **fonction** *d'une variable x, il existe une* **formule** *qui permet de calculer y chaque fois que l'on connaît x.*

C'est cette formule qui définit, du point de vue mathématique, la fonction y de la variable x.

Quand la fonction est liée à la variable par une loi mathématique, le graphique est utilisable d'une façon perpétuelle : il peut renseigner sur ce qui s'est passé, et faire prévoir exactement ce qui se passera. On obtient alors des **courbes algébriques** dont les usages sont plus intéressants que ceux des courbes empiriques.

Fonction entière du premier degré. — Les plus simples des fonctions sont celles dans lesquelles y est un polynôme du *premier degré* en x. On les appelle communément **fonctions linéaires.**

Ainsi l'égalité

$$y = 4x - 5$$

définit une fonction y de la variable x. Or $4x - 5$ est un polynôme entier du premier degré en x. Donc cette fonction y est *une fonction entière du premier degré* ; c'est une fonction linéaire.

En résumé :

On dit que y *est une* **fonction linéaire** *de x lorsque y est égal à un polynôme du premier degré en x, c'est-à-dire lorsque les valeurs de y son données par une formule de la forme :*

$$y = ax + b$$

où a et b désignent des nombres fixes donnés, ce qu'on appelle des **constantes.**

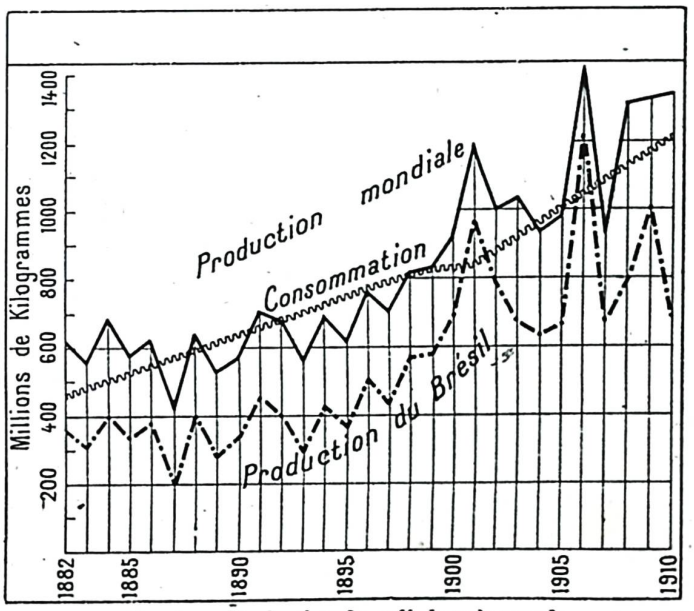


Fig. 6 — Production du café dans le monde

DÉFINITION GÉNÉRALE DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Segment. — Nous savons qu'une droite indéfinie peut être regardée comme engendrée par un point mobile qui se déplace toujours dans la même direction, soit dans un sens, soit dans l'autre.

On dit que cette droite est un *axe orienté* ou plus brièvement *un axe* quand on connaît le sens suivant lequel elle est décrite.

Considérons une droite indéfinie $x'\,x$ (fig. 7), parcourue dans le sens de x' vers x; ce sens est dit *sens positif*. Nous l'indiquerons par une petite flèche au bout de la droite.

Par définition, le sens contraire de x vers x' est le *sens négatif*. Soient A et B deux points de l'axe $x'\,x$; la portion de droite A B parcourue par un mobile dans un sens déterminé est appelée un *segment*. Si le mobile se déplace dans le sens de la flèche, le point A est l'*origine* du segment A B, le point B en est l'*extrémité*. Si le mobile se déplaçait en sens contraire, le segment B A aurait pour origine le point B et pour extrémité le point A.

Ainsi *un segment est une distance parcourue par un mobile dans un sens connu.*

Remarquons que les deux segments A B et B A sont évidemment distincts ; c'est la même portion de droite, mais *parcourue dans deux sens différents*. Deux tels segments sont dits *opposés*.

le point qui a pour abscisse — 5 est à une distance de 5 de O du côté négatif. Le point O lui-même a pour abscisse *zéro*.

Coordonnées. — Traçons dans un plan deux axes rectangulaires x' O x, y' O y, orientés de x' vers x et de y' vers y (fig. 10). Un point quelconque M du

Fig. 9

plan sera déterminé si on connaît les pieds P et Q des perpendiculaires abaissées de ce point sur x' O x et y' O y.

Le segment O P porté sur O x est l'abscisse du point P, on l'appelle l'*abscisse* ou l'x du point M.

Le segment O Q porté sur O y est ce qu'on appelle l'*ordonnée*, ou l'y du point M.

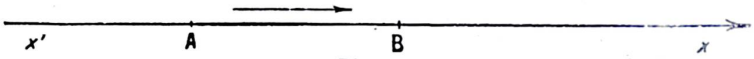


Fig. 7

Mesure algébrique d'un segment. — On sait exprimer la mesure d'une portion de droite à l'aide d'une unité choisie. Quand on donnera la mesure d'un segment, il faudra en outre indiquer le *sens* de ce segment ; car sans cette précaution deux segments opposés auraient même mesure. On y parvient en employant les nombres positifs et négatifs. Soit A B un segment pris sur l'axe $x'\,x$ (fig. 7). Le sens A B étant positif, ce segment est *positif*, la longueur de A B étant par exemple de 2 centimètres ; la mesure algébrique de A B sera + 2.

Soit C D un autre segment de $x'\,x$, le sens C D étant opposé au sens positif $x'\,x$, le segment C D est *négatif*, la longueur C D étant par exemple de 3 centimètres ; la mesure algébrique de C D sera — 3.

Pour désigner la *mesure algébrique* d'un segment on surmonte les deux lettres qui désignent ce segment par un trait.

Ainsi $\overline{AB}$ signifie mesure algébrique du segment A B ; $\overline{CD}$ signifie mesure algébrique du segment C D.

Sur la fig. 8, on a :

$$\overline{AB} = +2, \qquad \overline{CD} = -3$$

Il est clair que les mesures algébriques de deux segments opposés sont des nombres opposés.

De ce qui précède, il résulte que :

A tout segment considéré sur un axe, correspond un nombre, positif ou négatif, qui le mesure.

Et, réciproquement : à tout nombre donné, positif ou négatif, on peut faire correspondre un segment mesuré par le nombre donné.

L'abscisse et l'ordonnée du point M sont les *coordonnées cartésiennes* (1) de ce point par rapport aux axes rectangulaires O x et O y qui sont dits *axes de coordonnées*.

Le point O s'appelle *origine des coordonnées*.

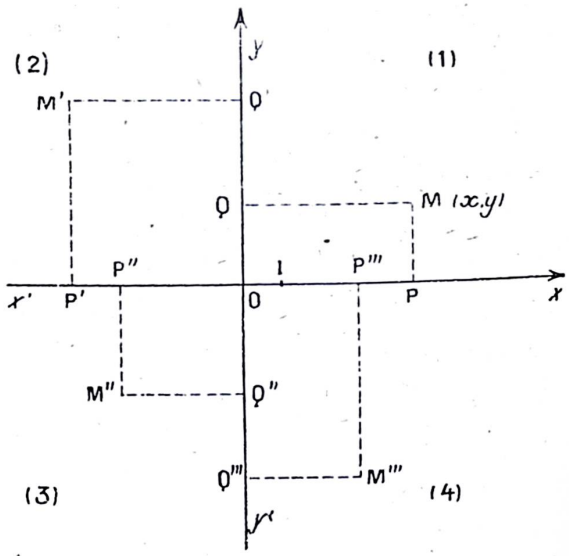


Fig. 10

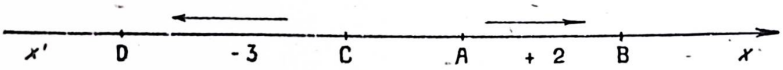


Fig. 8

Abscisses. — Considérons un axe orienté $x'\,x$ et soit O un point fixe de cet axe que nous appellerons *origine des abscisses* (fig. 9). Pour définir la position d'un point quelconque M de l'axe, il suffit de savoir ; 1° A quelle distance il est de O, 2° de quel côté de O il se trouve.

On connaîtra tout cela, à la fois, si on connaît la mesure algébrique du segment O M. C'est cette mesure qu'on appelle l'*abscisse* du point M. Il s'ensuit donc que :

On appelle **abscisse** *d'un point la mesure algébrique du segment qui va de l'origine des abscisses au point en question.* On désigne fréquemment l'abscisse d'un point par la lettre x.

Par exemple le point qui a pour abscisse $x = +4$ est celui qui est à une distance 4 de O du côté positif ;

On inscrit quelquefois à côté du point M (fig. 10) ses coordonnées entre parenthèses, on a alors soin d'écrire toujours l'abscisse la première.

Choisissons une unité de longueur, quelconque d'ailleurs, O I par exemple. Si O P = 4 et O Q = 2 on définira le point M par la notation :

$$\text{point M } (x = 4, y = 2) \text{ ou point M } (4,2)$$

(1) L'idée de définir la position d'un point dans un plan par deux coordonnées est due au célèbre philosophe et mathématicien français *René Descartes* (1596-1650). C'est pour cela qu'on nomme *coordonnées cartésiennes* le système de coordonnées que nous venons de définir. La découverte de Descartes fit faire un pas immense aux mathématiques puisqu'elle permit, en appliquant l'algèbre à la géométrie, de substituer aux méthodes synthétiques de la géométrie pure la méthode analytique de l'algèbre.

et si on ne juge pas utile de désigner ce point par une lettre, on pourra dire plus simplement :

le point $x = 4$, $y = 2$ ou le point (4,2).

Signes des coordonnées. — Les deux axes $x'\,x$, $y'\,y$ forment autour du point O quatre angles $x\,O\,y$, $x'\,O\,y$, $x'\,O\,y'$, $x\,O\,y'$ que nous numéroterons (1), (2), (3), (4).

Si nous prenons (fig. 10) un point M dans l'angle (1) ses deux coordonnées sont *positives*, car les segments O P et O Q ont les sens O x, O y.

Considérons en second lieu un point M′ dans l'angle (2), son abscisse O P′ est négative et son ordonnée O Q′ est positive. Soit en troisième lieu, M″ un point de l'angle (3), son abscisse O P″ est négative et son ordonnée O Q″ est également négative. Enfin soit un point M‴ de l'angle (4), son abscisse O P‴ est positive, son ordonnée O Q‴ est négative.

Comme les résultats des quatre cas précédents sont distincts, les réciproques sont vraies, et l'on peut dire que la connaissance des signes des coordonnées d'un point permet de dire immédiatement, dans lequel des quatre angles (1), (2), (3) ou (4) il se trouve.

Détermination d'un point par ses coordonnées. Ainsi tout point d'un plan a deux coordonnées bien déterminées. Il est aisé de voir qu'étant donné deux nombres quelconques positifs ou négatifs, il existe un point du plan et un seul qui admet ces deux nombres pour coordonnées.

Soient $x'\,O\,x$ et $y'\,O\,y$ deux axes rectangulaires (fig. 10) et une unité de longueur O I.

Soient d'autre part, $x = 4$ et $y = 2$ deux coordonnées quelconques.

Il existe un point P et un seul sur O x, tel que $\overline{OP} = 4$. Il existe de même un point Q et un seul O y, tel que $\overline{OQ} = 2$. Par P menons une parallèle à O y, par Q une parallèle à O x. Ces deux droites se coupent en un point M et un seul qui est l'unique point du plan qui a pour abscisse 4 et pour ordonnée 2. Donc :

Tout point du plan est parfaitement déterminé par ses deux coordonnées.

Remarquons que tout point situé sur l'axe O x a une *ordonnée* nulle et que réciproquement, tout point pour lequel

$$y = 0$$

est situé sur O x.

Et que tout point situé sur l'axe O y a une *abscisse* nulle et que réciproquement, tout point pour lequel

$$x = 0$$

est situé sur O y.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION DU PREMIER DEGRÉ

$$y = a\,x + b$$

Considérons la fonction du premier degré ou fonction linéaire

$$y = 2\,x$$

Traçons les deux axes de coordonnées rectangulaires $x'\,O\,x$ et $y'\,O\,y$; puis donnant à x diverses valeurs, calculons les valeurs correspondantes de y (fig. 11). Nous aurons :

pour $x = -2$, $y = -4$	d'où le	point	figuratif	A
— $x = -1$, $y = -2$	—	—	—	B
— $x = 0$, $y = 0$	—	—	—	O
— $x = +1$, $y = +2$	—	—	—	C
— $x = +2$, $y = +4$	—	—	—	D

Joignons tous ces points, dont les valeurs respectives qui précèdent sont les coordonnées, nous obtiendrons la *courbe représentative* de la fonction

$$y = 2\,x.$$

Nous n'avons pris qu'un certain nombre de points, nous aurions pu en prendre un nombre beaucoup plus grand, et même nous pourrions imaginer qu'on recommence l'opération pour toutes les valeurs possibles et imaginables de x de $-\infty$ à $+\infty$.

On appelle **graphique** *ou* **courbe représentative** *d'une fonction la courbe obtenue en construisant tous les points obtenus en donnant à x toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$ et prenant pour l'ordonnée y les valeurs correspondantes de la fonction.*

Il va sans dire qu'en pratique on obtient ces graphiques en construisant seulement quelques points qu'on joint ensuite par un trait continu aussi régulier que possible. Tel est, par exemple, le graphique ou la courbe représentative de la température (fig. 1).

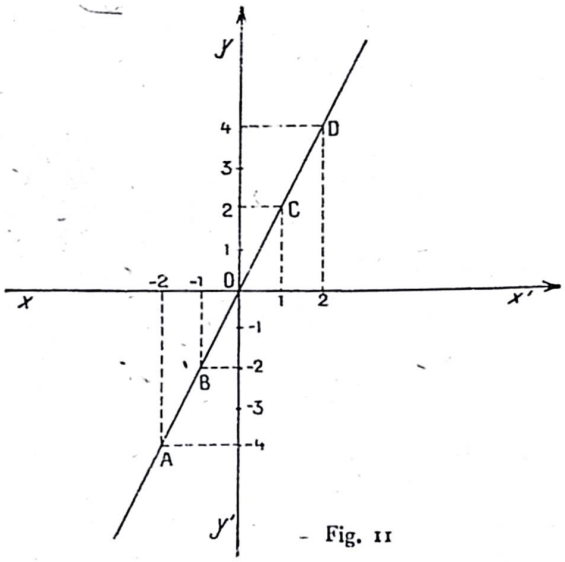


Fig. 11

Théorème. — *La courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite.*

Reprenons la fonction linéaire : $y = 2\,x$. Soit O A une abscisse positive (fig. 12), l'ordonnée correspondante A M est positive et égale à 2 O A, de même à l'abscisse positive O A′ correspond l'ordonnée positive A′ M′ égale à 2 O A′ ; à une abscisse négative O A″

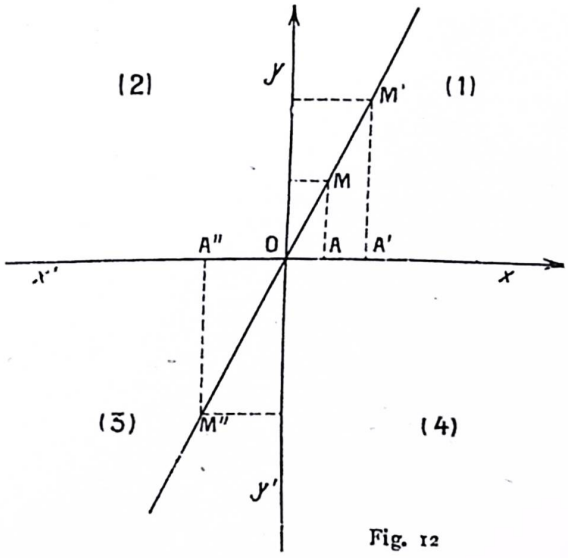


Fig. 12

correspond l'ordonnée négative A″ M″ égale à 2 O A″. Par conséquent, si M est situé dans l'angle (1), les points M′, M″ sont situés dans l'angle (1) ou dans l'angle (3)

Dans tous les cas, les points M′, M″ *sont situés dans les angles traversés par la droite* O M.

Mais les triangles O A M, O A′ M′, O A″ M″ sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, puisque les égalités

$$AM = 2\,OA \quad A'M' = 2\,OA' \quad A''M'' = 2\,OA''$$

donnent

$$\frac{AM}{OA} = \frac{A'M'}{OA'} = \frac{A''M''}{OA''} = 2$$

Il en résulte que les angles M O A, M′ O A′, M″ O A″ sont égaux et que, par suite, les points M, M′ M″ sont en ligne droite.

La droite O M supposée prolongée indéfiniment représente la fonction

$$x = 2\,x.$$

A tout système de valeurs correspondantes x et y correspond un point de la droite ; et, réciproquement les coordonnées d'un point quelconque de la droite vérifient la relation $y = 2\,x$. *Autrement dit, le lieu géométrique du point M défini par $y = 2\,x$ est une droite passant par l'origine* O.

On dit que la relation $y = 2\,x$ est l'*équation de la droite O M* ; que O M est la droite d'équation $y = 2\,x$ ou que O M est *la droite $y = 2\,x$*.

On construirait de la même façon la représentation graphique de la fonction

$$y = -2\,x.$$

On montrerait comme précédemment que la courbe représentative est une droite (fig. 13). Pour tracer cette droite, deux points suffisent ; prenons ceux qui ont pour abscisse O et + 1.

Pour $x = 0$, $y = p$ d'où le point O ; pour $x = +1$, $y = -2$, d'où le point M.

La droite illimitée M O, qui a tous ses points situés dans les angles (2) et (4) est le lieu géométrique des points pour lesquels

$$y = -2\,x.$$

D'une façon générale, la *fonction*

$$y = a\,x$$

a pour représentation graphique une droite qui passe par l'origine et par le point M dont les coordonnées sont

$$x = +1,\ y = a.$$

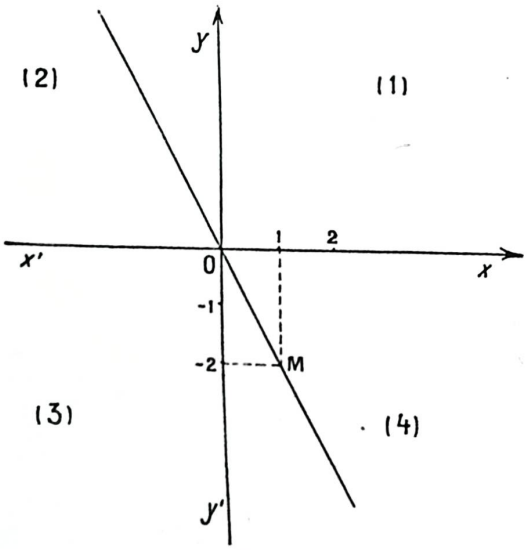


Fig. 13

Considérons maintenant la fonction linéaire

$$y = 2\,x + 3$$

Posons $y' = 2\,x$, il s'ensuit

$$y = y' + 3$$

Traçons la droite O M (fig. 14) représentative de la fonction $y' = 2\,x$. Soit A un point quelconque de O x ; à l'abscisse O A correspond l'ordonnée $\overline{AM}$. Par ce même point A de O x on obtiendra l'ordonnée $\overline{AD}$ de $y = y' + 3$ en ajoutant 3 à A M, c'est-à-dire en prenant un segment M D égal à 3.

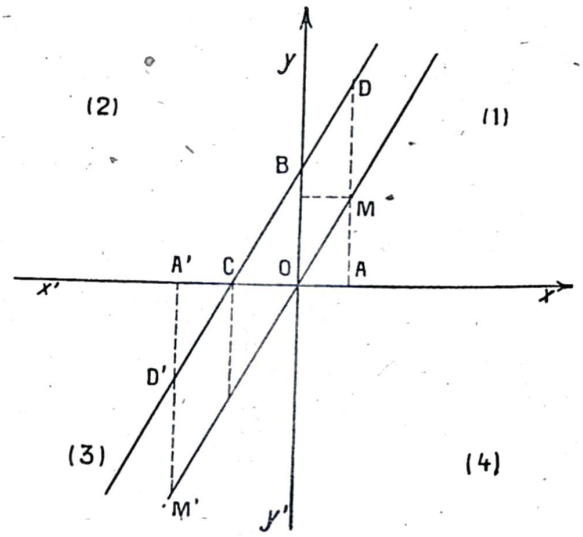


Fig. 14

De même soit A′ un autre point de l'axe des x ; à l'abscisse $\overline{OA'}$ correspond l'ordonnée $\overline{A'M'}$ de la droite $y' + 2\,x$ et un point D′ de $y = 2\,x + 3$ tel que $\overline{M'D'} = 3$.

Les segments M D, M′ D′ sont égaux et de même sens ; le quadrilatère M D D′ M′ est donc un parallélogramme ; et le point D′ est sur la parallèle à M M′ menée par le point D ; donc tous les points de la courbe $y = 2\,x + 3$ sont sur cette parallèle ; donc enfin D D′ est la ligne représentative de la fonction

$$y = 2\,x + 3.$$

Pour tracer la droite D D′ représentative de $y = 2\,x + 3$ on pourra déterminer l'ordonnée correspondante à $x = 0$ soit $y = 3$, d'où le point B.

La longueur O B est appelée *l'ordonnée à l'origine.*

Le point C où D D′ rencontre l'axe des x est un point d'ordonnée zéro. C'est donc le point pour lequel $2\,x + 3 = 0$ d'où $x = -\frac{3}{2}$. Les points B et C étant construits, il suffira de joindre B C pour avoir la droite cherchée.

Remarque. — On procéderait de la même manière pour construire la représentation graphique de la fonction.

$$y = -2\,x + 3.$$

De tout ce qui précède, il résulte que le graphique de la fonction linéaire

$$y = ax + b$$

est une droite.

Pour la construire, on fera d'abord

$$x = 0 \text{ alors } y = b$$

puis $$y = 0 \text{ alors } x = -\frac{b}{a}.$$

APPLICATIONS

I. Problème. — *Un cycliste part à 7 heures du matin ; il roule jusqu'à dix heures, à une vitesse de quinze kilomètres à l'heure, il s'arrête une heure pour réparer un*

pneumatique, puis il reprend son chemin pendant une heure et demie et il arrive à destination. Après un repos de deux heures, il revient à son point de départ à la vitesse de treize kilomètres. Déterminer graphiquement l'heure de son retour.

Solution. — Nous prendrons comme unité de longueur le myriamètre, représenté par le segment O V de l'axe des y et pour unité de temps l'heure représentée par le segment O H de l'axe des x (fig. 15).

Le cycliste est animé d'un mouvement uniforme dont l'équation au départ est

$$e = 1{,}5\ t.$$

La courbe figurative est représentée par la droite O A, A ayant pour coordonnées 10 et 4,5.

La panne est figurée par A B, B ayant pour coordonnées

$$11 \text{ et } \overline{Ob} = 4{,}5.$$

Le cycliste roulant avec la même vitesse, le graphique est représenté par la droite B C, droite dont le point C a pour coordonnées

$$12{,}5 \text{ et } \overline{Oc} = 6{,}75.$$

Le temps de repos est représenté par C D, droite parallèle à l'axe des x, le point D ayant pour coordonnées

$$14{,}5 \text{ et } 6{,}75.$$

Le cycliste revient ensuite à son point de départ à la vitesse de 13 kilomètres. Cette vitesse a pour mesure algébrique — 1,3. Le graphique du retour est représenté par la droite D E qui rencontre l'axe O x en E dont l'abscisse $19\frac{3}{4}$ correspond environ à 7 h. 45 du soir.

Le cycliste était de retour à 7 h. 45 du soir environ (exactement à 7 h. 42).

II. Problème. — *Un premier voyageur part d'une localité à midi avec une vitesse de 4 kilomètres à l'heure, un deuxième voyageur part de la même localité et dans la même direction une heure après lui, avec une vitesse de*

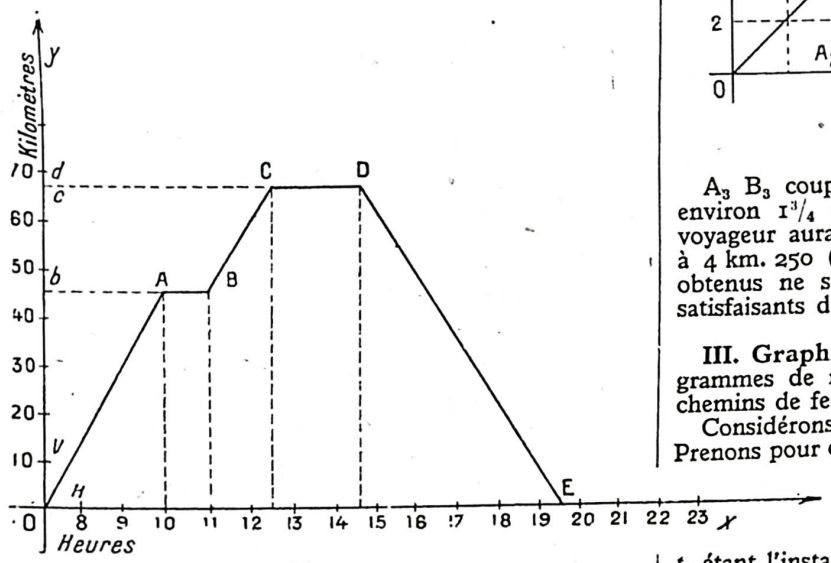


Fig. 15

6 kilomètres à l'heure. D'une autre localité, située à 14 kilomètres de la première, une voiture va à la rencontre des deux voyageurs ; elle part une demi-heure après le premier voyageur avec une vitesse de 8 kilomètres à l'heure. A quelle heure et à quelle distance du point de départ les deux voyageurs se rencontreront-ils ? 2° A quelles heures et à quelles distances du premier point de départ la voiture rencontrera-t-elle les deux voyageurs ?

Solution. — Traçons deux axes rectangulaires o t (sur lequel nous marquerons les temps) et o y (sur lequel nous marquerons les distances). Le point o correspond à midi (fig. 16). Prenons deux divisions, de notre papier quadrillé pour représenter 1 heure et marquons sur o t, 1 h., 2 h., 3 h... De même sur o y à partir de o, prenons une demi-division sur o y à partir de o, prenons une demi-division pour représenter 1 km. et marquons 2 km., 4 km...

Le premier voyageur, partant à midi, son graphique contiendra le point o, après 1 h. il aura parcouru 4 km., il sera en B_1 ; la droite O B_1 est la représentation graphique de la marche du premier voyageur. De même, nous construirons la droite A_2 B_2 qui sera le graphique du second voyageur. Les deux droites se coupent en M qui a pour coordonnées 3 et 12 ; la rencontre des deux voyageurs aura lieu à 3 heures et à 12 kilomètres du point de départ.

A_3 B_3 est le graphique de la voiture ; A_3 ayant pour coordonnées $\frac{1}{2}$ et 14. Après une heure de route la voiture est en B_3 de coordonnées $1\frac{1}{2}$ et 6.

A_3 B_3 coupe O B_1 en B_3 ; la rencontre avec le premier voyageur aura lieu à 1 h. $\frac{1}{2}$ et à 6 kilomètres.

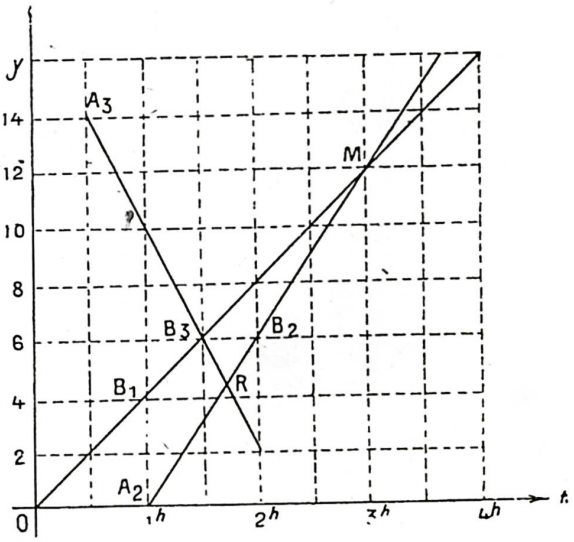


Fig. 16

A_3 B_3 coupe A_2 B_2 en R qui a pour coordonnées environ $1\frac{3}{4}$ et $4\frac{1}{4}$; la rencontre avec le deuxième voyageur aura lieu à 1 h. $\frac{3}{4}$ (exactement 1 h. 43) et à 4 km. 250 (exactement 4 km. 286). Si les résultats obtenus ne sont pas rigoureusement exacts, ils sont satisfaisants dans la pratique.

III. Graphique des chemins de fer. — Les diagrammes de mouvement sont très employés dans les chemins de fer pour figurer les mouvements des trains.

Considérons par exemple la ligne de Paris à Bordeaux. Prenons pour origine Paris et soit v la vitesse d'un train, x sa distance à Paris à l'instant t, on aura

$$x = v\ (t - t_0)$$

t_0 étant l'instant du départ de Paris.

Si nous portons les *temps en abscisses* et les *distances en ordonnées*, le diagramme du mouvement — mouvement uniforme — sera une droite. Si à un certain endroit le train s'arrête, la distance x reste constante pendant l'arrêt et le diagramme est une droite parallèle à ot.

Ainsi le diagramme complet d'un train sera composé de lignes droites successives ; les arrêts étant représentés par des lignes horizontales.

L'indicateur des chemins de fer du P-O nous fournit les renseignements suivants :

x	Stations		Rapide N° 7	Rapide N° 101	Express N° 33
			matin		soir
0	Paris	dép.	9 h 52	Midi 23	10 h 46
123	Les Aubrais	arr.	11 h 28	1 h 50	Min. 26
		dép.	11 h 32	1 h 54	Min. 36
182	Blois	arr.	.....	.....	1 h 16
		dép.	.....	.....	1 h 23
235	St-Pierre-d Corps	arr.	midi 48	3 h 6	2 h 9
		dép.	midi 52	3 h 11	2 h 19
303	Châtellerault	arr.	.....	.....	3 h 17
		dép.	.....	.....	3 h 20
336	Poitiers	arr.	2 h 4	4 h 19	3 h 40
		dép.	2 h 9	4 h 23	3 h 57
449	Angoulême	arr.	3 h 27	5 h 37	5 h 45
		dép		5 h 41	5 h 53
547	Libourne	arr.	.....	.....	7 h 36
		dép.	.....	.....	7 h 43
588	Bordeaux Saint-Jean..		5 h 8	7 h 12	8 h 50

arriver au point *b* d'abscisse 11 h. 28 sur l'horizontale d'ordonnée $x = 123$ km.

Arrivé aux Aubrais, le train s'arrête 4 minutes; pendant tout ce temps, on a $x = 123$.

x est constant et le diagramme est une petite droite *b c* parallèle à *o t*.

A 11 h. 32, le train repart et va jusqu'à Saint-Pierre-des-Corps où il arrive à 12 h. 48. Le diagramme de la marche est une nouvelle portion de ligne droite *c d* qui va du point *c* de coordonnées

$$t = 11 \text{ h. } 32,\ x = 123 \text{ km.}$$

au point *d* de coordonnées

$$t = 12 \text{ h. } 48,\ x = 235 \text{ km.}$$

A Saint-Pierre-des-Corps, nouvel arrêt de 4 minutes qui se traduit par une petite droite *d e* parallèle à *o t*; et ainsi de suite.

Le diagramme complet du train est la ligne brisée *a b c d e f g h*.

Nous avons encore tracé les diagrammes des trains 101 et 33.

Pour le train 33, le diagramme est en deux morceaux, parce qu'il passe par *minuit*. Arrivé à 24 (minuit, il faut revenir à *zéro*, en 0.

Sur la même feuille de papier, nous pourrions également figurer les diagrammes des trains revenant de Bordeaux à Paris.

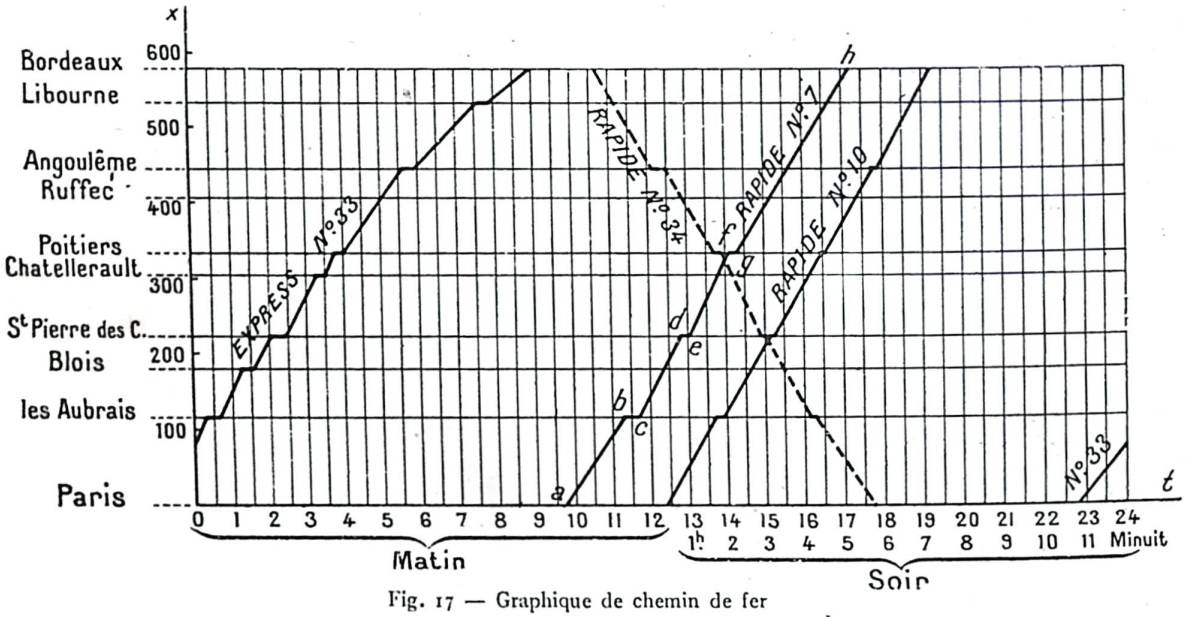


Fig. 17 — Graphique de chemin de fer

Comptons les heures de la journée de 0 à 24, de minuit à minuit. Midi sera l'instant 12, 1 h. de l'après-midi l'instant 13, etc. (fig. 17).

Nous porterons les temps *en abscisses* sur un axe horizontal *o t* en ayant adopté une longueur arbitraire 0 1 pour représenter l'heure.

Portons les distances en *ordonnées* sur l'axe vertical *o x*, ces distances étant prises de Paris comme origine. Prenons sur *o x* une longueur arbitraire pour représenter 100 kilomètres et marquons les points 100, 200, 300, etc. Intercalons aux distances convenables les stations. Ainsi les Aubrais sont à 123 kilomètres de Paris. Nous marquerons cette station sur *o x* à la division 123 avec l'unité choisie, et ainsi de suite.

Considérons la marche du rapide n° 7, nous voyons qu'il va d'abord d'un train de Paris aux Aubrais. Il part de Paris à 9 h. 52 et arrive aux Aubrais à 11 h. 28. Le diagramme de sa marche est alors une ligne droite *a b* qui part du point *a* d'abscisse 9 h. 52 sur *f t* pour

Comme le sens positif de la ligne est Paris-Bordeaux, la vitesse *v* du train est dans ce cas *négative*. Les diagrammes sont alors des lignes droites *descendantes*.

Nous avons figuré en pointillé le diagramme du train n° 34 dont voici l'horaire :

Bordeaux, 10 h. 34 (matin) ; Angoulème, arr. midi 9, départ midi 14 ; Poitiers, arr. 1. h. 33, dép. 1 h. 38 ; Saint-Pierre-des-Corps, arr. 2 h. 49, dép. 2 h. 53 ; Les Aubrais, arr. 4 h. 10, dép. 4 h. 14 ; Paris, arr. 5 h. 42.

C'est une ligne brisée descendante.

Ainsi sur le graphique, les diagrammes des trains allant de Paris à Bordeaux ayant des vitesses positives sont des lignes brisées *montantes*, c'est ce qu'on appelle les trains montants.

Les diagrammes des trains revenant de Bordeaux à Paris ont des vitesses négatives, c'est ce qu'on appelle les trains *descendants*.

L'intérêt de tels graphiques est très grand et leur emploi simplifie *considérablement* les services d'une ligne.

1° Sur une feuille de papier on a, en abrégé, la marche de tous les trains sur une double voie.

2° On peut savoir immédiatement à quelle heure un train donné devra passer en un point quelconque de la voie *non marqué sur l'indicateur.*

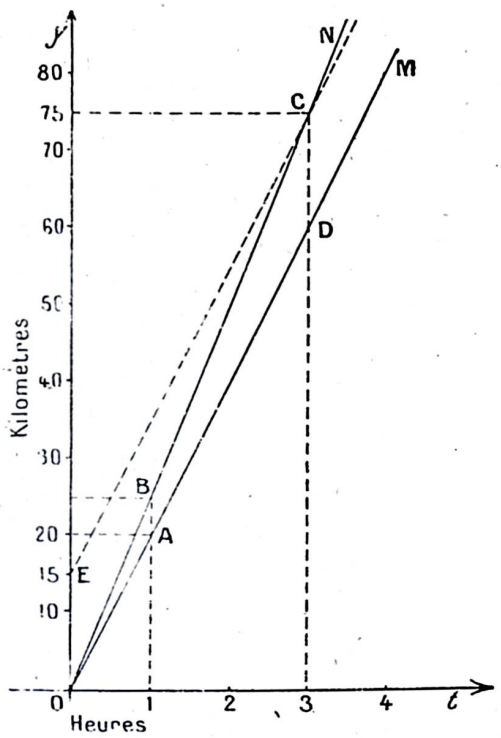


Fig. 18

3° La pente générale du diagramme montre la rapidité du train. Ainsi dans la figure 17 on voit tout de suite que les trains n° 101 et n° 7 sont plus rapides que le train n° 33, car les diagrammes *montent plus vite.*

4° On voit les *points de croisement* des trains.

Ainsi dans la figure 17 les diagrammes des deux trains 34 et 7 se croisent un peu au-dessus de Châtellerault, un peu avant 1 h. 30 du soir. Sur une ligne à *double voie* deux trains allant en sens inverse peuvent se croiser n'importe où sans se rencontrer.

Mais deux trains allant dans le même sens ne peuvent se rencontrer que *dans une gare* ; sans quoi, il y aurait collision.

5° Le graphique permet d'organiser en quelques minutes, sans calculs, l'horaire d'un nouveau train circulant sur la ligne. Il suffit, pour cela, de tracer un diagramme qui ne rencontre les diagrammes déjà existant et de même sens que dans les gares.

EXERCICES

I. Deux cyclistes partent en même temps du même point dans la même direction avec des vitesses de 20 km. et 25 km. à l'heure, déterminer graphiquement l'heure à laquelle ils seront séparés par 15 kilomètres.

II. Deux promeneurs allant à la vitesse de 3 kilomètres à l'heure, suivent une rue A B d'une longueur de 6 km. ; l'un part de A à 6 h. 5 l'autre part de B une demi-heure plus tard. Des tramways qui se succèdent de 10 en 10 minutes parcourent la même rue dans les deux sens. Le premier tramway part de A à 6 h. 30 et le premier tramway quitte B à 7 h. La vitesse des tramways est 12 km. à l'heure. On demande :

1° Combien chaque piéton a croisé de tramways ;

2° Combien de tramways ont dépassé chacun des piétons (construction graphique).

CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice I.

Solution. — Soit O *t* l'axe des temps et O*y* l'axe des espaces parcourus (fig. 18). Le point correspond à l'origine des temps est le point O. Prenons 1 cm. pour représenter 1 heure et marquons sur O *t* 1 h., 2 h., 3 h. . .

Le point O correspond à l'origine des espaces. Prenons 1 cm. pour représenter 10 km., 20 km...

Le premier cycliste marchant à 20 km. à l'heure, son graphique contiendra le point O et après 1 heure de marche le point A de coordonnées 1 et 20.

La droite O A est la représentation graphique du mouvement de ce cycliste.

Le deuxième cycliste marchant à la vitesse de 25 km. à l'heure, son graphique contiendra le point O et le point B de coordonnées 1 et 25.

La droite O B est la représentation graphique du mouvement de ce deuxième cycliste.

Menons par le point d'ordonnée 15 la parallèle au diagramme O M du premier cycliste ; elle coupe le diagramme O N du deuxième cycliste en un point C tel que C D = 15 km. En effet, le quadrilatère O E C D est un parallèlogramme, et C D = O E = 15 kilomètres.

Le point C a pour coordonnées 3 et 75. C'est donc 3 heures après leur commun départ que les deux cyclistes seront séparés par une distance de 15 kilomètres.

Exercice II.

Solution : Le piéton parti de A à 6 h. 5 arrive en B deux heures plus tard, soit à 8 h. 5 (fig. 19). Lorsqu'il part de A, aucun tramway n'est encore parti de A ou de B ; il rencontre donc tous les tramways qui partent de B avant 8 h. 5 soit, de 7 à 8 h. : 6 tramways, et le tramway de 8 h., ce qui fait au total 7 tramways.

Il est dépassé par tous les tramways partis de A qui arrivent à B avant 8 h. 5 ; le dernier de ces tramways, arrivé à 8 h., était parti de A à 7 h. 30 ; de 6 h. 30 à 7 h. 30, il est parti 7 tramways.

Le piéton parti de B à 6 h. 35 arrive à A à 8 h. 35. Aucun tramway parti de A n'était arrivé à B avant le départ du piéton, celui-ci rencontre donc tous les tramways partis de A avant 8 h. 35, soit de 6 h. 30 à

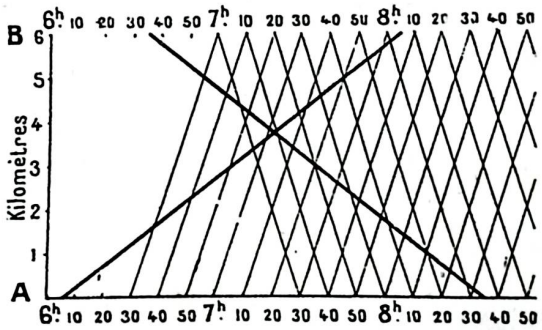


Fig. 19

7 h. 30 : 6 tramways, de 7 h. 30 à 8 h. 30 : 6 tramways, et le tramway de 8 h. 30, ce qui fait au total 13 tramways.

Il est dépassé par les tramways qui partent de B de façon à arriver en A avant 8 h. 35 ; le dernier arrivé, celui de 8 h. 30, avait quitté B à 8 h. ; de 7 h. à 8 h. il est parti de B 7 tramways.

GÉOMÉTRIE

AVERTISSEMENT

La géométrie qui étudie les figures et leurs propriétés comprend la géométrie plane et la géométrie dans l'espace.

On a pu dire que la géométrie était l'art de raisonner juste sur des figures fausses. En laissant de côté le caractère humoristique de cette définition, nous demandons au lecteur de ne pas la faire sienne. Tout au contraire il devra, surtout au début, s'appliquer à exécuter des figures claires, parfaitement exactes, en s'aidant de la règle et du compas, en particulier pour les nombreuses constructions que nous lui proposerons.

Il ne devra pas se contenter d'un vague à peu près, une figure bien faite facilitant un raisonnement régulier.

Quant à la démonstration des problèmes nous recommandons d'agir comme nous l'avons fait nous-même pour celle des théorèmes.

Tout problème comporte une hypothèse, une conclusion et une démonstration : Indiquer avec soin, en se servant de toutes les données de l'énoncé l'hypothèse ou les hypothèses de base, la conclusion, c'est-à-dire ce qu'on doit démontrer, puis effectuer la démonstration en opérant soit par synthèse, soit par analyse.

Dans le premier cas, on part d'une définition ou d'une proposition connue pour y substituer des propositions équivalentes qui conduisent à la conclusion cherchée.

Dans le deuxième cas, on part de la conclusion qu'on suppose exacte et l'on en déduit une série de propositions équivalentes jusqu'à ce qu'on arrive à une définition ou à une proposition qu'on sait vraie. On commence alors la démonstration par la phrase « Supposons le problème résolu... »

C'est le plus souvent l'examen de la figure qui fait apparaître, grâce à des constructions auxiliaires, la suite des propositions à enchaîner l'une à l'autre pour arriver au résultat cherché.

GÉOMÉTRIE

1. Définition. — Un même corps peut occuper des portions variables de l'espace déterminées par différentes causes dont une des principales est la forme du corps.

La forme d'un corps peut être considérée en elle-même du point de vue des rapports de ses différentes parties. Ainsi envisagée, on lui donne plus particulièrement le nom de FIGURE, mais on donne aussi ce nom à ses différentes parties ou à ses différents éléments considérés en eux-mêmes.

L'étude des figures et de leurs propriétés est le but de la GÉOMÉTRIE.

On appelle VOLUME la portion de l'espace occupée par un corps. On appelle SOLIDE la figure qui délimite ce volume.

Si l'on considère un solide, on voit que, par rapport à lui, l'espace est divisé en deux parties, l'une qui est *intérieure* au solide, l'autre qui lui est *extérieure*. Ces deux parties de l'espace sont séparées par la SURFACE du solide.

Si on coupe ou si on brise un corps de façon à le partager en deux, la figure représentée par ce corps sera elle-même partagée en deux figures nouvelles, deux solides. Dans cette opération, on aura été obligé de couper ou de déchirer la surface extérieure du corps suivant une LIGNE.

Enfin, un POINT peut être considéré comme l'intersection de deux lignes.

Les notions que nous avons essayé de définir sont d'ailleurs trop simples, trop initiales, pour qu'il soit possible d'en donner une définition rigoureuse.

Nous ferons seulement remarquer que le point idéal conçu par le géomètre n'a pas d'étendue ; la ligne n'a ni largeur, ni épaisseur ; la surface n'a pas d'épaisseur.

Si un point se déplace, il décrit une ligne. Si une ligne se déplace, elle engendre, en général, une surface. Si une surface se déplace, elle engendre, en général, un volume.

Quelques exemples simples nous permettront de nous en rendre compte, autant que l'imperfection de nos sens nous en laisse le moyen :

La pointe d'un crayon, qui est un point, trace une ligne grossière. Un fil, qui est l'image grossière d'une ligne, en coupant une motte de beurre, engendre une surface. Un objet quelconque, qui est limité par une surface, quand on l'enfonce dans cette même motte de beurre y creuse un trou dont la figure est celle d'un solide.

A.

Fig. 1

On désigne un point par une lettre placée à côté de lui. Ainsi l'on dit le point A (fig. 1).

2. Ligne droite. — La plus simple de toutes les lignes est la ligne droite. Un fil tendu nous en offre l'image. On dit couramment une *droite* au lieu d'une ligne droite. On désigne une droite par deux lettres

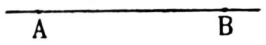


Fig. 2

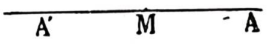


Fig. 3

dont chacune est placée en un de ses points. Exemple : la droite A B (fig. 2).

3. La ligne droite jouit des deux propriétés suivantes que nous regarderons comme évidentes :

1° *La ligne droite est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.*

2° *Entre deux points quelconques, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.*

Deux droites distinctes ne peuvent donc se couper qu'en un seul point, car, si elles avaient deux points communs, elles seraient confondues.

A moins d'indication contraire, une droite est toujours supposée *illimitée* dans les deux sens.

Soit M un point d'une droite indéfinie A' M A (fig. 3) ; on peut à partir du point M se déplacer sur la droite dans deux sens différents ; le sens M A ou le sens M A' ; chacune de ces parties M A, M A', limitée en M, illimitée dans l'autre sens, se nomme *demi-droite*.

La partie d'une droite comprise entre deux points de cette droite se nomme un *segment* de droite, ou une *portion* de droite.

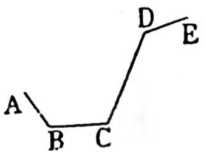


Fig. 4

4. Ligne brisée. — Ligne courbe. — Une ligne brisée est une ligne composée de portions de lignes droites, mises bout à bout. Une ligne courbe est une ligne qui n'est ni droite, ni brisée. Ainsi, la ligne A B C D E (fig. 4) est une ligne brisée, la ligne M N P (fig. 5) est une ligne courbe.

5. Plan. — Un plan est une surface telle que la droite qui joint deux quelconques de ses points y est contenue tout entière. La surface d'une eau tranquille, une glace bien polie offrent l'image d'une surface plane.

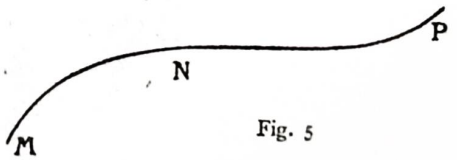


Fig. 5

6. Figures égales. — Deux figures sont égales par définition, quand on peut les faire coïncider.

GEOMÉTRIE PLANE

La géométrie plane est la partie de la géométrie qui s'occupe des figures tracées dans un plan, ou *figures planes*.

La ligne droite

7. Angle. — Un angle est la figure formée par deux demi-droites menées d'un même point dans deux directions différentes (fig. 6). Les demi-droites O A, O B sont appelées les *côtés* de l'angle ; leur origine commune O est le *sommet* de l'angle.

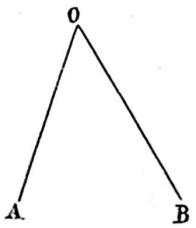


Fig. 6

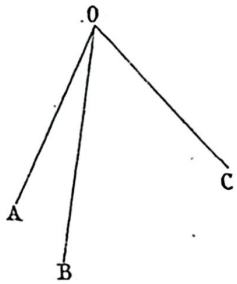


Fig. 7

On désigne généralement un angle au moyen de trois lettres placées l'une au sommet et les deux autres sur les côtés de l'angle.

On énonce la lettre du sommet entre les deux autres. L'angle de la figure 6 se désigne par la notation $\widehat{AOB}$.

8. Angles adjacents. — Deux angles sont dits *adjacents* quand ils ont même sommet et un côté commun et que les côtés non communs sont de part et d'autre du côté commun.

Les deux angles A O B et B O C (fig. 7) sont adjacents.

Les côtés O A, O C sont appelés *côtés extérieurs*. Les côtés extérieurs peuvent être en ligne droite.

9. Somme de deux angles. — On appelle somme de deux angles, l'angle formé par les côtés extérieurs (non communs) de ces deux angles, quand on a amené ces angles à être adjacents.

L'angle A O C (fig. 7) est la somme des deux angles A O B et B O C. On écrit symboliquement :

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$$

10. Différence de deux angles. — C'est l'angle qu'il faut ajouter au plus petit de ces angles pour reproduire le plus grand.

La notion d'un angle plus grand ou plus petit qu'un autre est évidente. Nous remarquerons donc que l'égalité ci-dessus définit la différence B O C des angles A O C et A O B. On écrit symboliquement :

$$\widehat{AOC} - \widehat{AOB} = \widehat{BOC}$$

On voit que, pour former la différence B O C de deux angles A O C et A O B (fig. 7), il suffit de porter le plus petit angle sur le plus grand de façon que les sommets des deux angles et l'un de leurs côtés coïncident et que l'autre côté du plus petit angle tombe à l'intérieur du plus grand.

11. Droite perpendiculaire. — On dit qu'une droite est perpendiculaire à une autre, quand elle forme avec cette autre deux angles adjacents égaux.

L'existence d'une telle figure est démontrée par le théorème suivant :

12. Théorème. — *Par un point O sur une droite A B, on peut mener une demi-droite O D perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*

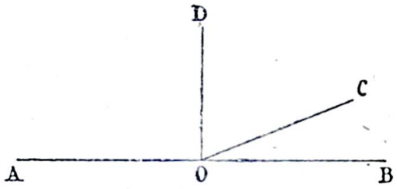


Fig. 8

HYPOTHÈSE : A B est une droite.
O est sur cette droite.

CONCLUSION : On peut mener une perpendiculaire.
On n'en peut mener qu'une.

DÉMONSTRATION : Puisque le point O est sur la droite A B, si on mène par O une demi-droite quelconque O C, cette demi-droite forme avec O B et avec O A deux angles qui sont adjacents.

Si les angles A O C et B O C sont égaux, O C est perpendiculaire à A B et la première conclusion est démontrée.

Si ces angles ne sont pas égaux, il y en a un qui est plus petit que l'autre, par exemple :

$$\widehat{BOC} < \widehat{COA}$$

Alors on peut diminuer l'un des angles C O A et augmenter l'autre B O C en faisant tourner la droite O C autour du point O de manière à la rapprocher de O A.

Puisque le plus petit angle augmente tandis que le plus grand diminue, il arrivera nécessairement un instant où les deux angles passeront par une même valeur, ils seront égaux et, comme ils sont adjacents, la droite O C sera perpendiculaire, dans une position O D, à la droite A B.

D'ailleurs O D est la seule perpendiculaire à A B qu'on puisse mener par le point O ; car, si on fait tourner O D si peu que ce soit autour du point O, dans un sens ou dans l'autre, l'un des angles diminue, l'autre augmente et ils cessent d'être égaux.

Les angles adjacents égaux formés par la perpendiculaire sont appelés : *angles droits*.

13. Angle droit. — C'est donc un angle formé par deux demi-droites dont l'une est perpendiculaire sur l'autre.

On dit souvent *droit* pour *angle droit*.

14. Théorème. — Tous les angles droits sont *égaux*.

HYPOTHÈSE : Soient deux angles droits A O B, A′ O′ B′.

CONCLUSION : A O B = A′ O′ B′.

DÉMONSTRATION. — Par définition, deux figures égales sont deux figures qu'on peut faire coïncider. Cherchons donc si l'on peut faire coïncider les deux angles A O B et A′ O′ B′.

Portons l'angle A′ O′ B′ sur l'angle A O B, le point O′ en O, et le côté O′ B′ sur le côté O B, O′ A′ tombant du même côté que O A par rapport à O B.

Dans cette nouvelle position, puisque la droite O′ A′ est perpendiculaire à O′ B′ (hypothèse) et que O′ B′ coïncide avec O B, O′ A′ est aussi perpendiculaire à O B.

Mais alors O A (hypothèse) et O′ A′ sont toutes les deux perpendiculaires à O B.

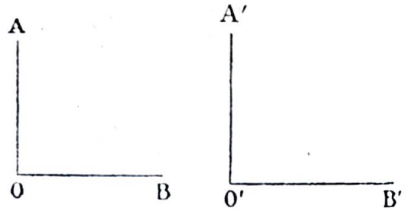


Fig. 9

Or (12), en un point O d'une droite on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite.

Donc O A et O′ A′ coïncident.

Par suite, les deux angles A O B, A′ O′ B′ coïncident. Ils sont égaux (conclusion).

15. Oblique. — Une droite qui n'est pas perpendiculaire à une autre droite est dite *oblique* à cette droite.

16. Angles aigus, angles obtus. — Un angle est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est plus plus *petit* ou plus *grand* qu'un angle droit.

17. Angles supplémentaires, angles complémentaires. — Deux angles sont *supplémentaires* si leur somme vaut deux droits. Ils sont *complémentaires* si leur somme vaut un droit.

Il est clair que deux angles égaux ont des compléments égaux ou des suppléments égaux, et réciproquement que deux angles qui ont même complément ou même supplément sont égaux.

18. Théorème. — *Deux angles adjacents qui ont leurs côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires.*

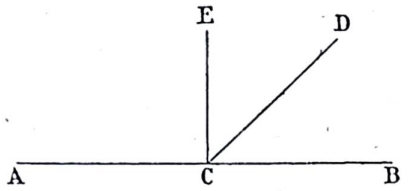


Fig. 10

Hypothèse : Les angles adjacents A C D et D C B ont leurs côtés extérieurs en ligne droite.

Conclusion : $\widehat{ACD} + \widehat{DCB} = 2$ droits.

Démonstration : Si, en particulier, la droite C D était perpendiculaire à la droite A B, c'est-à-dire, si elle se confondait avec C E, les deux angles D C A et D C B seraient droits et par conséquent on aurait :

$$\widehat{DCA} + \widehat{DCB} = 2 \text{ dr.}$$

Cette circonstance n'est pas réalisée en général, mais on a dans tous les cas :

$$\widehat{ACE} + \widehat{BCE} = 2 \text{ dr.}$$

Si nous pouvons démontrer que, dans tous les cas,

$$\widehat{ACE} + \widehat{BCE} = \widehat{ACD} + \widehat{BCD}$$

nous aurons démontré le théorème.

Or on a (9) :

$$\widehat{ACE} + \widehat{ECD} = \widehat{ACD}$$

et (10) :

$$\widehat{ECB} - \widehat{ECD} = \widehat{BCD}$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient l'égalité :

$$\widehat{ACE} + \widehat{ECD} + \widehat{ECB} - \widehat{ECD} = \widehat{ACD} + \widehat{BCD}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\widehat{ACE} + \widehat{ECB} = \widehat{ACD} + \widehat{BCD}$$

ce qui démontre le théorème.

19. Théorème réciproque. — *Si deux angles*

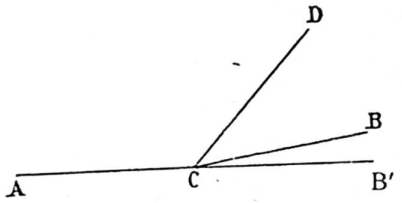


Fig. 11

adjacents sont supplémentaires, ils ont leurs côtés extérieurs en ligne droite.

Hypothèse (fig. 11) : angles adjacents A C D et D C B tels que

$$\widehat{ACD} + \widehat{DCB} = 2 \text{ dr.}$$

Conclusion : A B est une droite.

Démonstration : On s'appuie sur le théorème direct.

Si on prolonge la droite A C en C B′, l'angle D C B′ est supplémentaire de l'angle A C D (17) :

$$\widehat{ACD} + \widehat{DCB'} = 2 \text{ dr.}$$

mais on a aussi (hypothèse) :

$$\widehat{ACD} + \widehat{DCB} = 2 \text{ dr.}$$

Ces deux égalités prouvent que

$$\widehat{DCB'} = \widehat{DCB}$$

ce qui exige que C B coïncide avec C B′ (conclusion).

20. Corollaire. — *La somme des angles consécutifs formés autour d'un point et d'un même côté d'une droite est égale à deux droits.*

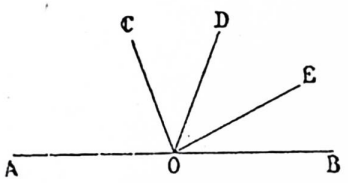


Fig. 12

Car on peut toujours remplacer cette somme par la somme de deux angles adjacents supplémentaires (fig. 12) :

$$\widehat{AOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOB}$$
$$= \widehat{AOD} + \widehat{DOB} = 2 \text{ dr.}$$

21. Corollaire. — *La somme des angles adjacents*

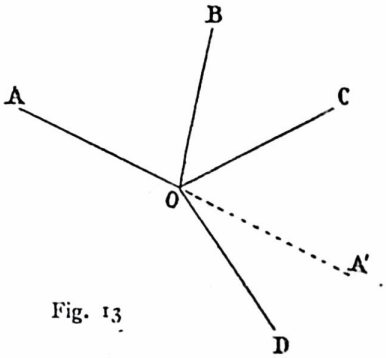


Fig. 13

consécutifs formés autour d'un point et recouvrant tout le plan est égale à quatre droits.

Il suffit de prolonger un des côtés de l'un des angles, O A par exemple prolongé en OA′ (fig. 13) pour décomposer la somme en deux sommes égales chacune à deux droits.

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA}$$
$$= \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA'} + \widehat{A'OD} + \widehat{DOA}$$

Mais

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA'} = 2 \text{ dr.}$$

et

$$\widehat{A'OD} + \widehat{DOA} = 2 \text{ dr.}$$

Donc

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA}$$
$$= 2 \text{ dr.} + 2 \text{ dr.} = 4 \text{ dr.}$$

22. Angles opposés par le sommet. — On appelle *angles opposés par le sommet* deux angles tels que les côtés de l'un sont le prolongement de ceux de l'autre.

Tels sont les angles A O B et A′ O B′ ou encore les angles A O A′ et B O B′ formés par les droites A B′ et B A′ (fig. 14).

23. Théorème. — *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

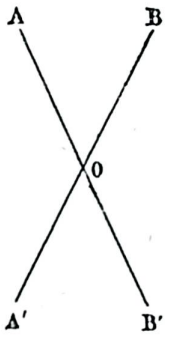


Fig. 15

HYPOTHÈSE (fig. 14) : A B′ est une droite.

A′ B est une droite.

CONCLUSION : A O B = A′ O B′.

DÉMONSTRATION : On s'appuie sur le théorème (17) qui permet d'exprimer l'hypothèse.

Puisque A B′ est une ligne droite (hypothèse), les angles A O B et B O B′ sont supplémentaires :

$$\widehat{AOB} + BOB' = 2 \text{ dr.}$$

Puisque A′ B est une ligne droite (hypothèse) les angles A′ O B′ et B O B′ sont supplémentaires :

$$\widehat{A'OB'} + \widehat{BOB'} = 2 \text{ dr.}$$

De ces deux égalités, on tire la conclusion :

$$AOB + \widehat{BOB'} = \widehat{A'OB'} + \widehat{BOB'}$$
$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

24. Bissectrice. — On appelle *bissectrice* d'un angle, la demi-droite, qui, partant du sommet de cet angle, le partage en deux angles égaux.

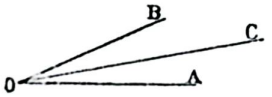


Fig. 15

Si $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$, O C est bissectrice de $\widehat{AOB}$ (fig. 15).

Exercices

1. — Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires. (Démontrer).

2. — Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont en ligne droite. (Démontrer).

3. — L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée dans cet angle par le sommet, est égal à la demi-différence des deux angles que détermine cette droite dans l'angle donné. (Démontrer).

14. — L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée par le sommet, hors de cet angle, est égal à la demi-somme des angles que détermine cette droite avec les deux côtés de l'angle donné. (Démontrer).

Triangles

25. Polygone. — Un POLYGONE est la figure formée par une ligne brisée *fermée*.

Les segments de droite qui composent la ligne brisée s'appellent les CÔTÉS du polygone ; les sommets des angles formés par deux côtés consécutifs sont les SOMMETS du polygone. La somme des longueurs des côtés s'appelle le PÉRIMÈTRE.

On dit qu'un polygone est *convexe* lorsqu'en prolongeant l'un quelconque de ses côtés, on ne traverse pas ce polygone. Un polygone qui n'est pas convexe est *non-convexe*.

26. Triangle. — Un *triangle* est un polygone de trois côtés. C'est le plus simple de tous les polygones. Ex. : le triangle A B C (fig. 16).

Il a six éléments : trois côtés et trois angles.

27. Hauteur. Médiane d'un triangle. — On appelle *hauteur* d'un triangle la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé ou sur son prolongement. On donne souvent à ce côté, considéré par rapport à la hauteur à laquelle il correspond, le nom de *base*.

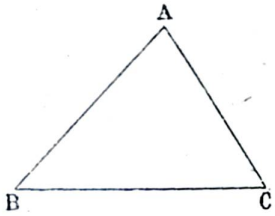


Fig. 16

On appelle *médiane* d'un triangle la droite qui joint l'un des sommets au milieu du côté opposé.

Un triangle a trois hauteurs et trois médianes, puisqu'il a trois sommets et trois côtés.

28. Théorème. — *Dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

La démonstration résulte de cette propriété qu'une ligne droite A B est le plus court chemin du point A au point B.

$$A\,B < A\,C + B\,C$$

29. Corollaire. — *Dans un triangle un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.*

En effet on a (fig. 16) :

$$B\,C < A\,B + A\,C$$

et en retranchant A C aux deux membres :

$$B\,C - A\,C < A\,B$$

En définitive, A B étant un côté d'un triangle, A C et B C les deux autres, on a toujours :

$$B\,C - A\,C < A\,B < B\,C + A\,C$$

30. Théorème. — *Si on joint un point O pris dans l'intérieur d'un triangle A B C à deux sommets A et B*

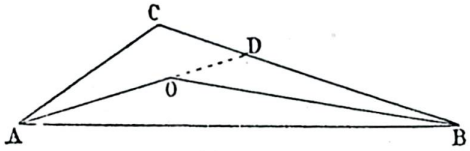


Fig. 17

de ce triangle, la ligne brisée A O B obtenue est plus courte que la ligne brisée formée par les côtés A C et B C du triangle.

HYPOTHÈSE (fig. 17) : O est à l'intérieur du triangle.

CONCLUSION : A O + O B < A C + C B.

DÉMONSTRATION : Pour exprimer l'hypothèse, nous remarquerons que, si le point O est à l'intérieur du triangle, quand on prolonge A O ou B O on doit rencontrer le contour du triangle.

Prolongeons par exemple A O jusqu'en D. Nous ne pouvons nous appuyer pour faire la démonstration que sur le théorème (28).

Considérons d'abord le triangle C A D, nous pouvons écrire :

$$A\,D < A\,C + C\,D$$

ou

$$A\,O + O\,D < A\,C + C\,D \qquad \text{(I)}$$

D'autre part, le triangle D O B nous donne :

$$O\,B < O\,D + D\,B \qquad \text{(II)}$$

Additionnons membre à membre les inégalités (I) et (II) :

$$A\,O + O\,D + O\,B < A\,C + C\,D + O\,D + D\,B$$

Si nous retranchons O D aux deux membres et si nous remarquons que

$$C\,D + D\,B = C\,B$$

il vient :

$$A\,O + O\,B < A\,C + C\,B$$

31. Théorème. — *Si une ligne brisée convexe a mêmes extrémités qu'une autre ligne brisée convexe qui l'enveloppe entièrement, elle est plus courte que la ligne enveloppante.*

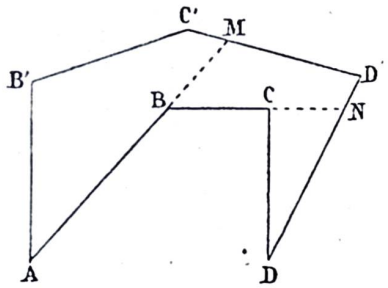


Fig. 18

Hypothèse (fig. 18) : Les lignes brisées sont convexes.

La ligne A B' C' D' D enveloppe la ligne A B C D.

Conclusion : A B + B C + C D < A B' + B' C' + C' D' + D' D.

Démonstration : Puisque la ligne brisée intérieure est convexe, les prolongements de ses côtés ne la traversent pas (25). Puisque d'autre part elle est complètement enveloppée par l'autre ligne brisée, les prolongements des côtés A B et B C doivent rencontrer cette ligne brisée, par exemple en M et en N. Cette construction exprime donc l'hypothèse.

La suite de la démonstation résulte de l'axiome (3) :

$$A\,M < A\,B' + B'\,C' + C'\,M$$
$$B\,N < B\,M + M\,D' + D'\,N$$
$$C\,D < C\,N + N\,D$$

$$A\,M + B\,N + C\,D < A\,B' + B'\,C' + C'\,M + B\,M + M\,D' + D'\,N + C\,N + N\,D$$

ou en remarquant que

$$A\,M = A\,B + B\,M$$
$$B\,N = B\,C + C\,N$$
$$C'\,M + M\,D' = C'\,D'$$
$$D'\,N + N\,D = D'\,D$$

$$A\,B + B\,M + B\,C + C\,N + C\,D$$
$$< A\,B' + B'\,C' + C'\,D' + B\,M + C\,N + D'\,D$$

et enfin en retranchant B M et C N aux deux membres :

$$A\,B + B\,C + C\,D < A\,B' + B'\,C' + C'\,D' + D'\,D$$

32. Triangle isocèle. — On appelle *triangle isocèle* un triangle qui a deux côtés égaux. Le point de rencontre de ces deux côtés s'appelle plus particulièrement *sommet* du triangle isocèle et le troisième côté prend le nom de *base*.

33. Théorème. — *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Hypothèse (fig. 19) : A B = A C.

Conclusion : $\widehat{ABC} = A\widehat{C}B$.

Démonstration : On retourne le triangle A B C de manière à l'amener dans la position A' B' C', le sommet B' ayant pris la place du sommet C', et le sommet C la place du sommet B. Puis on essaye de superposer le triangle A' B' C' dans cette position, sans le retourner, au triangle A B C.

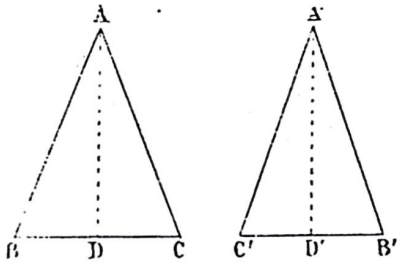


Fig. 19

L'angle A' est évidemment égal à l'angle A, on peut donc le faire coïncider avec ce dernier (6). Le côté A' C' prend la direction de A B et comme A C est égal à A B (hypothèse) et que A' C' n'est autre que A C, C' tombe en B. Pour des raisons identiques B' tombe en C.

Les deux triangles coïncident, ils sont égaux et, par suite, les angles sont égaux chacun à chacun :

$$\widehat{ABC} \quad \widehat{A'C'B'} \qquad \widehat{ACB} \quad \widehat{A'B'C'}$$

et comme A' C' B' n'est autre que $\widehat{ACB}$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \text{ (conclusion)}$$

L'idée de cette démonstration découle de la remarque que, si le théorème est vrai, le triangle isocèle présente le même aspect soit qu'on le regarde en-dessus par la face supérieure, soit qu'on le regarde en-dessous par la face inférieure.

34. Théorème réciproque. — *Si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux ; le triangle est isocèle.*

Hypothèse (fig. 19) : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Conclusion : A B = A C.

Démonstration : On procède comme pour le théorème direct. Dans le retournement, le côté B' C' n'a pas changé, on peut donc faire coïncider B' C' avec C B, B' en C et C' en B. Comme les angles à la base sont égaux, les côtés C' A' et B' A' prennent la direction de B A et de C A ; le point A' tombe à la fois sur B A et sur C A, donc il tombe en A. Les deux triangles coïncident et on a :

$$A\,B = A'\,C' \qquad A\,C = A'\,B'$$

d'où

$$A\,B = A\,C$$

35. Théorème. — *Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet, la médiane relative à la base et la hauteur sont sur une même droite.*

Menons la médiane A D (fig. 19) et soit A' D' cette médiane après retournement du triangle. Quand on réalise la superposition des deux triangles A B C et A' B' C', comme on l'a fait pour la démonstration du théorème (33), le point D' tombe évidemment au point D. On a donc

$$\widehat{BAD} = \widehat{C'A'D'}$$

d'où

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$$

ce qui démontre que A D est bissectrice de l'angle A ; et d'autre part

$$\widehat{BDA} = \widehat{C'D'A'}$$

d'où

$$\widehat{BDA} = \widehat{CDA}$$

ce qui démontre que A D est perpendiculaire sur la base B C, c'est la hauteur.

A D est donc à la fois médiane, bissectrice et hauteur.

Triangle équilatéral. — On appelle *triangle équilatéral* un triangle qui a ses trois côtés égaux.

Il résulte de ce qui précède que :

36. Corollaire. — *Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux.*

37. Corollaire. — *Si un triangle a les trois angles égaux, il est équilatéral.*

38. Théorème. — *Si deux angles d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à ces angles sont inégaux et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

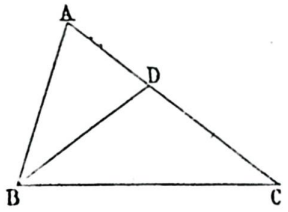


Fig. 20

Soit le triangle A B C (fig. 20).

Hypothèse : $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

Conclusion : A C > A B.

Démonstration : Pour exprimer l'hypothèse, on porte dans l'angle A B C à partir de B C un angle D B C égal à A C B. Puisque ce dernier angle est plus petit que l'angle A B C la droite B D tombe entre les côtés B C et B A, et elle rencontre le côté A C en un point D.

Le triangle B D C est isocèle (34) et le côté B D est égal au côté D C.

$$BD = DC$$

On a par suite :

$$BD + DA = DC + DA = AC$$

Mais, dans le triangle A B D le côté A B est plus petit que la somme des deux autres (28) :

$$AB < BD + DA$$

donc on a aussi :

$$AB < AC \qquad \text{(conclusion)}$$

39. Théorème réciproque. — *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, les angles opposés à ces côtés sont inégaux et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

Hypothèse (fig. 20) : A C > A B.

Conclusion : $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

Démonstration. — Si les angles étaient égaux, les côtés opposés à ces angles seraient égaux (34), ce qui est contraire à l'hypothèse ; donc les angles sont inégaux.

Si l'angle A B C était plus petit que l'angle A C B, le côté A C serait plus petit que le côté A B (40), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il faut donc que $\widehat{ABC}$ soit plus grand que $\widehat{ACB}$ (conclusion).

Cas d'égalité des Triangles

Il y a trois cas d'égalité des triangles.

40. Théorème. — Premier cas d'égalité des triangles. — *Deux triangles qui ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun sont égaux.*

Soient deux triangles (fig. 21) A B C et A′ B′ C′ qui ont un côté adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

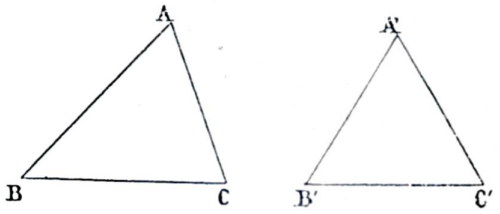


Fig. 21

Hypothèse : B C = B′ C′

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$

Conclusion : Les triangles sont égaux.

Démonstration : Il s'agit de démontrer que l'on peut amener les deux triangles à coïncider (6).

Portons le triangle A′ B′ C′ sur le triangle A B C de façon que B′ C′ coïncide avec B C, ce qui est possible puisque B C = B′ C′ (hypothèse), B′ en B et C′ en C et de façon que le sommet A′ tombe au-dessus de B C du même côté que le sommet A.

Puisque l'angle B est égal à l'angle B′ (hypothèse) et que B′ C′ coïncide avec B C le côté B′ A′ prend la direction de B A et le point A′ tombe quelque part sur B A.

Puisque l'angle C est égal à l'angle C′ (hypothèse), C′ A′ prend la direction de C A et le point A′ tombe quelque part sur C A.

Le point A′ devant tomber à la fois sur B A et sur C A tombe au point A et par suite les deux triangles coïncident.

Ils sont égaux et tous leurs éléments sont égaux chacun à chacun.

41. Théorème. — Deuxième cas d'égalité des triangles. — *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun sont égaux.*

Hypothèse (fig. 21) : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C}$
A B = A′ B′
A C = A′ C′

Conclusion : Les triangles sont égaux.

Démonstration : Portons le triangle A′ B′ C′ sur le triangle A B C de façon que l'angle A′ coïncide avec l'angle A, ce qui est possible puisque ces angles sont égaux (hypothèse).

Le côté A′ C′ prend la direction de A C et le côté A′ B′ la direction de A B, et, en vertu de l'hypothèse C′ tombe en C et B′ en B.

Les deux triangles coïncident ; ils sont égaux et tous leurs éléments sont égaux chacun à chacun.

42. Théorème. — TROISIÈME CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES. — *Deux triangles qui ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun sont égaux.*

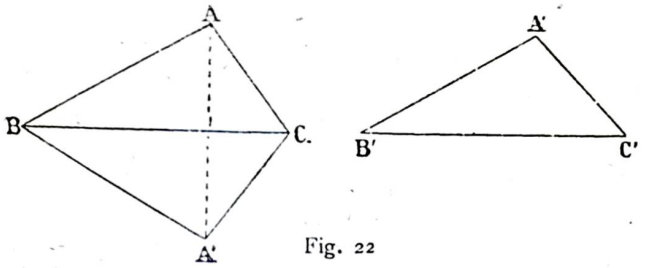


Fig. 22

Soient les deux triangles A B C, A′ B′ C′ (fig. 22).

HYPOTHÈSE : A B = A′ B′
A C = A′ C′
B C = B′ C′

CONCLUSION : Les deux triangles sont égaux.

DÉMONSTRATION : Portons le triangle A′ B′ C′ sous le triangle A B C dans la position A′ B′ C′, en faisant coïncider B′ C′ avec B C, ce qui est possible en vertu de l'hypothèse.

Joignons A A′ ; les deux triangles A B A′ et A C A′ sont isocèles en vertu des deux premières hypothèses. Par suite, on a sur les angles les égalités :

$$\widehat{BAA'} = \widehat{BA'A}$$
$$\widehat{CAA'} = \widehat{CA'A}$$
$$\widehat{BAA'} + \widehat{CAA'} = \widehat{BA'A} + \widehat{CA'A}$$

ou, en remarquant que

$$\widehat{BAA'} + \widehat{CAA'} = \widehat{BAC}$$
$$\widehat{BA'A} + \widehat{CA'A} = \widehat{BA'C}$$
$$\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$$

Mais alors, les deux triangles B A C et B′ A′ C′ peuvent être considérés comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et ils sont égaux en vertu du deuxième cas d'égalité des triangles.

Remarque. — Des théorèmes précédents il résulte que deux triangles ont leurs six éléments égaux chacun à chacun dès qu'ils ont trois éléments égaux chacun à chacun et que ces éléments forment un des trois groupes suivants :

1° Un côté et deux angles adjacents ;

2° Deux côtés et l'angle compris ;

3° Les trois côtés.

Dans l'étude des figures, pour démontrer l'égalité de deux portions de droite ou l'égalité de deux angles on se sert fréquemment de l'égalité de deux triangles.

43. Théorème. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant des angles inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

HYPOTHÈSE (fig. 23) : A B = A′ B′
A C = A′ C′
$\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$

CONCLUSION : B C > B′ C′.

DÉMONSTRATION : Portons le triangle A′ B′ C′ sur le triangle A B C de façon que A′ B′ coïncide avec A B (hypothèse) et que C′ tombe du même côté de A B que C. Comme $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$, la droite A C′ tombe dans l'angle B A C (hypothèse).

Trois cas peuvent se présenter :

1° C′ tombe à l'intérieur du triangle A B C. On a dans ce cas (30) :

A C′ + B C′ < A C + B C

et comme (hypothèse) :

A C = A′ C′

on a :

B C′ < B C (conclusion)

2° C′ tombe sur B C.

Alors, comme c'est entre B et C, on a évidemment

B C′ < B C (conclusion)

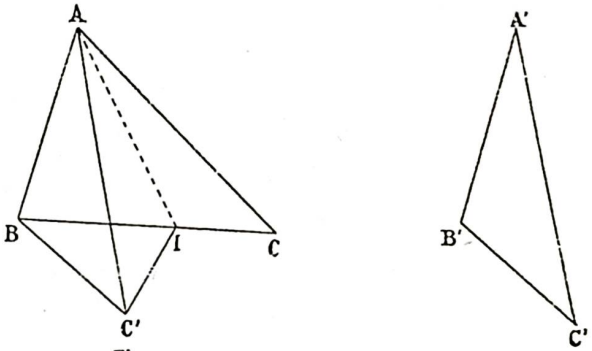


Fig. 23

3° C′ tombe en dehors du triangle A B C.

Menons la bissectrice A I de l'angle C A C′ et joignons C′ I.

Les deux triangles A I C et A I C′ sont égaux (2° cas), comme ayant

$\widehat{C'AI} = \widehat{CAI}$ (bissectrice)

A I commun

A C′ = A C (hypothèse)

Il s'ensuit que

C I = C′ I

Par suite,

B C = B I + I C = B I + I C′

On peut donc remplacer dans les mesures B C par la ligne brisée B I + I C′ : Or dans le triangle B I C′ on a (28) :

B C′ < B I + I C′

d'où

B C′ < B C (conclusion)

Exercices

5. — Quand deux triangles ont un côté commun et deux côtés qui se croisent, la somme des côtés qui se croisent est plus grande que la somme des côtés qui ne se croisent pas. (Démontrer.)

6. — Si l'on joint les trois sommets d'un triangle à un point pris à son intérieur, la somme de ces droites est plus petite que le périmètre du triangle, mais plus grande que le demi-périmètre. (Démontrer).

7. — Dans un triangle A B C, on prolonge la médiane B D d'une longueur D F égale à B D, on joint le point A au point F, prouver que A F = B C. (Démontrer.)

8. — Dans un triangle, une médiane est plus petite que la demi-somme des deux côtés qui la comprennent, et plus grande que leur demi-différence. (Démontrer.)

9. — Un triangle isocèle a deux médianes égales et deux bissectrices égales. (Démontrer.)

Perpendiculaires et obliques
Triangles rectangles

44. Théorème. — *D'un point pris hors d'une droite, on peut abaisser une perpendiculaire sur cette droite et une seule.*

HYPOTHÈSE (fig. 24) : A B est une droite.

O n'est pas sur la droite.

CONCLUSION : On peut abaisser une perpendiculaire du point O sur A B.

On ne peut en abaisser qu'une.

DÉMONSTRATION : Pour exprimer l'hypothèse, on plie le plan suivant A B, de façon à rabattre le point O au-dessous de A B, en O'. On joint O O'.

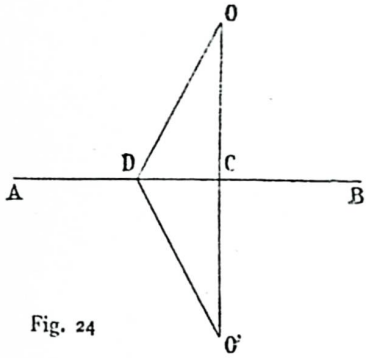


Fig. 24

Je dis que la droite O O' est perpendiculaire à A B. En effet, si on rabat la figure A C O sur la figure A C O', autour de A B comme charnière, ces deux figures coïncident ; donc l'angle A C O est égal à l'angle A C O'.

$$\widehat{ACO} = \widehat{ACO'}$$

Mais, comme ce sont deux angles adjacents formés par la droite A C avec la droite O O', ces deux angles sont droits. D'autre part, l'angle O C B opposé par le sommet à l'angle A C O' lui est égal, c'est-à-dire qu'il vaut un droit. On a donc enfin :

$$\widehat{ACO} = \widehat{OCB}$$

ce qui démontre que O O' est perpendiculaire sur A B (conclusion).

Je dis que O O' est la seule perpendiculaire à A B passant par le point O.

En effet, soit une autre droite O D. Les deux angles O D C et C D O' sont égaux, car en pliant la figure suivant A B, on les amène en coïncidence. Mais O D O' étant une ligne brisée, la somme des angles O D C, C D O' n'est pas égale à deux droits (18), par conséquent chacun d'eux est différent d'un droit et O D n'est pas perpendiculaire sur A B.

45. Théorème. — *Si d'un point pris hors d'une droite, on mène la perpendiculaire à cette droite et diverses obliques.*

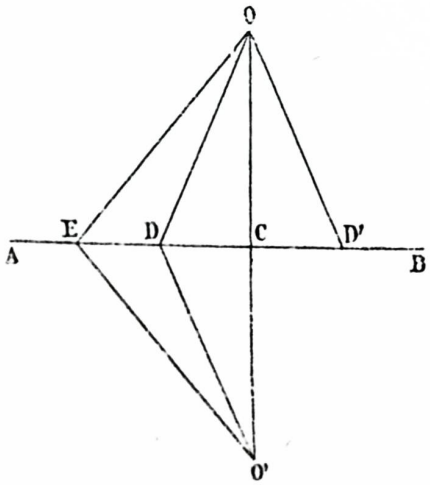


Fig. 25

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique.*

2° *Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales.*

3° *Deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire sont inégales et la plus grande est celle qui s'en écarte le plus.*

1° HYPOTHÈSE (fig. 25) : O C perpendiculaire à A B.

O D oblique à A B.

CONCLUSION : O C < O D.

DÉMONSTRATION : On a remarqué dans la figure 24 que l'oblique O D était caractérisée par le fait qu'en rabattant la figure autour de A B, on lui faisait prendre une position D O' qui n'est pas dans le prolongement de O D.

Utilisons cette remarque pour exprimer l'hypothèse.

Rabattons (fig. 25) la figure D O C autour de A B comme charnière sur la partie inférieure du plan. Cette figure prend la position D O' C et on a évidemment

$$OC = O'C$$
$$OD = O'D$$

O C étant perpendiculaire à A B, C O' est dans le prolongement de O C, ce qui n'est pas le cas pour O D et O' D. La figure O D O' est donc un triangle dans lequel le côté O O' est plus petit que la somme des deux autres :

$$OO' < OD + DO'$$

Mais comme

$$OO' = OC + O'C = 2 \times OC$$
$$OD + DO' = 2 \times OD$$

on a enfin

$$2 \times OC < 2 \times OD$$

ou

$$OC < OD \qquad \text{(conclusion)}$$

2° HYPOTHÈSE (fig. 25) : C D = C D'.

O C perpendiculaire à A B.

CONCLUSION : O D = O D'.

DÉMONSTRATION : Les deux triangles C O D et C O D' sont égaux en vertu du deuxième cas d'égalité des triangles, car ils ont

$$\widehat{OCD} = \widehat{OCD'}$$

comme angles droits (hypothèse),

O C commun

$$CD = CD \qquad \text{(hypothèse)}$$

par suite, tous leurs éléments sont égaux chacun à chacun et on a :

$$OD = OD' \qquad \text{(conclusion)}$$

Remarque. — Cette démonstration s'applique à la réciproque du théorème (35).

3° HYPOTHÈSE (fig. 25) : C E > C D.

O C perpendiculaire à A B.

CONCLUSION : O E > O D.

DÉMONSTRATION : Rabattons la figure autour de A B. Comme le point E est plus loin du point C que le point D (hypothèse), le contour O E O' enveloppe entièrement la ligne brisée O D O'. D'ailleurs O C O' est une droite, puisque O C est perpendiculaire sur A B (hypothèse).

En vertu du théorème (30), la ligne brisée O D O' est plus courte que la ligne brisée O E O'

$$OE + EO' > OD + DO'$$

et comme on a d'autre part :

$$OE = EO' > OD = DO'$$

par construction, on a aussi :

$$2 \times OE > 2 \times OD$$

ou

$$OE > OD \qquad \text{(conclusion)}$$

46. Théorème réciproque. — 1° *Si une droite est la plus courte qu'on puisse mener d'un point à une droite, c'est la perpendiculaire à cette droite.*

2° *Si deux obliques sont égales, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire.*

2° *Si deux obliques sont égales, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire.*

3° *Si deux obliques sont inégales, elles s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire et la plus grande est celle qui s'en écarte le plus.*

1° Hypothèse (fig. 25) : O C < O D.
O D étant une droite quelconque.

Conclusion : O C perpendiculaire à A B.

Démonstration : Rabattons la figure autour de A B. On a :

$$O\,C = O'\,C$$

Si O C n'était pas perpendiculaire sur A B, O′ C ne serait pas dans le prolongement de O C. On pourrait alors joindre O et O′ par une droite perpendiculaire à A B qui serait divisée en deux parties égales par A B en un certain point C. Cette droite serait plus courte que la ligne brisée O C O′ et par suite sa moitié O C serait plus courte que O C. Mais alors O C ne serait pas la droite la plus courte qu'on puisse mener de O à la droite A B, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il faut que le point C se confonde avec le point C et par conséquent O C est perpendiculaire à A B.

2° Hypothèse : O D = O D′.
O C perpendiculaire à A B.

Conclusion : C D = C D′.

Démonstration : Si C D′ n'était pas égal à C D, les deux obliques O D et O D′ en vertu du théorème direct, seraient inégales, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° Hypothèse : O E > O D.
O C perpendiculaire à A B.

Conclusion : C E > C D.

Démonstration : Si la conclusion n'était pas vérifiée, l'hypothèse, en vertu du théorème direct, ne le serait pas non plus.

47. Triangle rectangle. — Un triangle *rectangle* est un triangle qui a un *angle droit*.

Le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypoténuse* du triangle rectangle.

Les cas d'égalité des triangles quelconques que nous avons énoncés plus haut s'appliquent naturellement aux triangles rectangles. Mais ces derniers ont encore deux autres cas d'égalité qui leur sont spéciaux.

48. Théorème. — Premier cas d'égalité des triangles rectangles. — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

Hypothèse (fig. 26) : 1° $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = 1$ dr.
2° A C = A′ C′.
3° $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

Conclusion : Les 2 triangles sont égaux.

Démonstration : Portons le triangle A′ B′ C′ sur le triangle A B C, A′ C′ sur A C. A′ en A, C′ en C (hypothèse) et de façon que B′ tombe du même côté de A C que le point B.

Comme les angles en C et en C′ sont égaux (hypothèse), le côté C′, B′, prend la direction de C B et le point B′ tombe quelque part sur C B.

Dans ces conditions, la droite A′ B′ qui est perpendiculaire à C′ B′ (hypothèse), se trouve être aussi perpendiculaire à C B dans sa nouvelle position. Puisque le point A′ coïncide avec le point A, les deux droites A B et A′ B′ sont alors deux perpendiculaires abaissées d'un

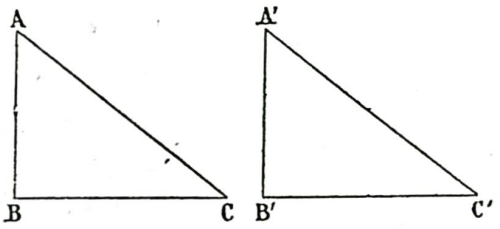


Fig. 26

même point sur une droite, il faut qu'elles se confondent (45) et par suite que B′ tombe en B.

Ainsi les deux triangles coïncident ; ils sont égaux.

49. Théorème. — Deuxième cas d'égalité des triangles rectangles. — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Hypothèse (fig. 26) :

1° $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = 1$ dr.
2° A C = A′ C′.
3° A B = A′ B′.

Conclusion : Les triangles sont égaux.

Démonstration : Portons le triangle A′ B′ C′ sur le triangle A B C, A′ B′ sur A B (hypothèse), A′ en A, B′ en B, de façon que le sommet C′ tombe du même côté de A B que le sommet C.

Comme $\widehat{ABC}$ est égal à $\widehat{A'B'C'}$ (hypothèse), B′ C′ prend la direction de B C et C′ tombe quelque part sur B C.

Mais A C et A′ C′, dans sa nouvelle position, sont deux obliques par rapport à la perpendiculaire A B. Ces obliques sont égales (hypothèse), donc elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire (47), et par suite elles se confondent, C′ tombe en C.

Les triangles coïncident : ils sont égaux.

50. Lieu géométrique. — On appelle *lieu géométrique* des points satisfaisant à une condition donnée, la figure formée par tous ces points à l'exclusion de tous les autres points du plan.

Pour démontrer qu'une figure est un lieu géométrique, on doit démontrer :

1° *Que tout point de cette figure satisfait à la condition donnée* (proposition directe).

2° *Que tout point situe en dehors de la figure ne satisfait pas à cette condition* (proposition contraire).

Ou bien :

3° *Que tout point qui satisfait à cette condition fait partie de la figure* (proposition réciproque).

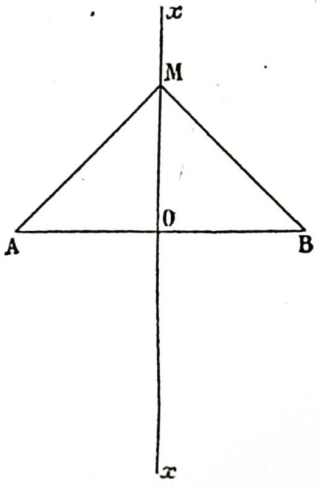


Fig. 27

51. Théorème. — *Le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés est la perpendiculaire élevée au milieu du segment de droite qui joint ces deux points.*

1° Tout point M de la perpendiculaire *xx′* au milieu de A B est équidistant de A et de B (fig. 27).

En effet puisque

$$OA = OB$$

n a aussi :

$$MA = MB$$

en vertu du théorème (46).

2° Tout point M équidistant de A et de B est sur la perpendiculaire au milieu de A B.

En effet, si on abaisse du point M la perpendiculaire sur A B, le pied O de cette perpendiculaire est à égale distance de A et de B en vertu du théorème (47).

52. Théorème. — *Le lieu géométrique des points équidistants des deux côtés d'un angle est la bissectrice de cet angle.*

1° Tout point de la bissectrice A S de l'angle B A C (fig. 28) satisfait à la condition.

HYPOTHÈSE : 1° $\widehat{BAS} = \widehat{CAS}$.

2° $MIA = MDA = 1$ dr.

CONCLUSION : $MI = MD$.

DÉMONSTRATION : *La distance d'un point à une droite* est, par définition, la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite. Il s'agit donc de démontrer que $MI = MD$.

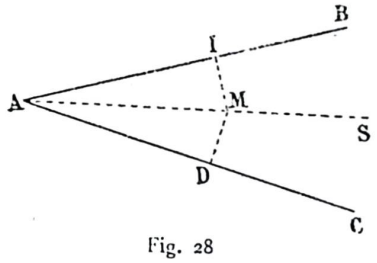


Fig. 28

Or les deux triangles rectangles (hypothèse), A I M et A D M sont égaux, en vertu du 1er cas d'égalité des triangles rectangles. Ils ont :

l'hypoténuse A M commune

$\widehat{MAI} = \widehat{MAD}$ (hypothèse)

Par conséquent, tous leurs éléments sont égaux et on a :

$MI = MD$ (conclusion)

2° Tout point M équidistant de A B et de A C est sur la bissectrice de l'angle B A C.

HYPOTHÈSE : 1° $MI = MD$.

2° $\widehat{MIA} = \widehat{MDA} = 1$ dr.

CONCLUSION : $\widehat{MAI} = \widehat{MAD}$.

DÉMONSTRATION : Les deux triangles M A I et M A D sont égaux comme rectangles (hypothèse), ayant l'hypoténuse commune A M, et un côté de l'angle droit égal (2° cas d'égalité des triangles rect.) :

$MI = MD$ (hypothèse)

Par suite, ils ont tous leurs éléments égaux et on peut écrire :

$\widehat{MAI} = \widehat{MAD}$ (conclusion).

Exercices

10. — Dans un triangle isocèle, les hauteurs relatives aux côtés égaux sont égales. (Démontrer.)

11. — Deux points A et B sont situés d'un même côté d'une droite. Trouver le chemin le plus court pour aller du point A au point B en touchant la droite.

12. — Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande que la droite qui joint deux points quelconques pris respectivement sur les côtés de l'angle droit. (Démontrer.)

13. — On coupe les côtés d'un angle par une sécante quelconque ; on mène les bissectrices des quatre angles formés avec les côtés de cet angle ; démontrer que ces bissectrices se coupent deux à deux sur la bissectrice de l'angle donné.

Droites parallèles

53. Définition. — On dit que deux droites sont PARALLÈLES lorsque, étant situées dans un même plan, elles ne se rencontrent pas, aussi loin qu'on les prolonge.

L'existence de droites parallèles est démontrée par le théorème suivant :

54. Théorème. — *Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

Car, si elles n'étaient pas parallèles, on pourrait, de leur point de rencontre, mener deux perpendiculaires différentes à la même droite, ce qui est impossible (45).

55. Théorème. — *Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite.*

Soient A B une droite ; O un point hors de cette droite. (fig. 29).

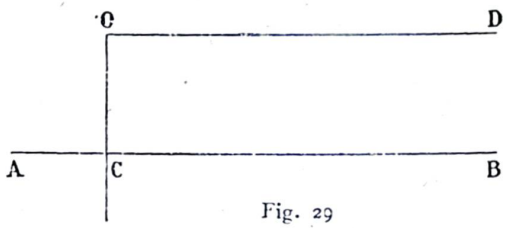


Fig. 29

DÉMONSTRATION : Du point O abaissons la perpendiculaire O C sur A B, puis au point O élevons la perpendiculaire O D sur O C. D'après le théorème précédent, les deux droites O D et A B sont parallèles.

Ainsi on peut mener par O une parallèle à A B mais rien ne prouve qu'on n'en puisse pas mener d'autre.

56. Postulat d'Euclide. — *On admet que, par un point pris hors d'une droite on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.*

57. Théorème. — *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Car si O C (fig. 29) perpendiculaire à A B n'était pas perpendiculaire à la parallèle O D à A B, on pourrait au point O élever une perpendiculaire à O C, qui serait parallèle à A B (55) ; mais alors, par le point O on pourrait mener deux parallèles à A B ce qui est impossible (57).

58. Théorème. — *Si deux droites sont parallèles à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

Car, si elles n'étaient pas parallèles, elles se rencontreraient et on pourrait les considérer comme deux parallèles menées d'un même point (leur point de rencontre) à une même droite. Or, d'un point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite (57).

59. Angles formés par une même droite avec deux autres. — Soient deux droites A B et C D coupées par une même droite R S ; la rencontre de R S et des deux droites A B et C D détermine huit angles 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′.

Ces angles considérés deux à deux portent le nom, de correspondants alternes-internes, alternes-externes, intérieurs ou extérieurs d'un même côté de la droite.

Les angles

1 et 1′ 2 et 2′ 3 et 3′ 4 et 4′

sont deux à deux correspondants.

Les angles

1 et 3′ 4 et 2′

sont alternes-internes.

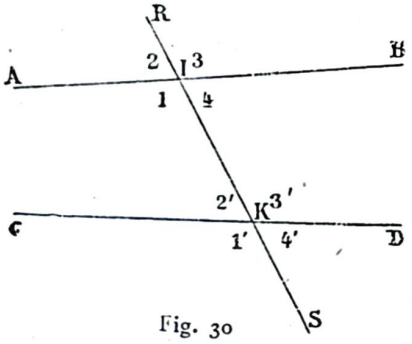


Fig. 30

Les angles

2 et 4′ 3 et 1′

sont alternes-externes.

Les angles

1 et 2′ 4 et 3′

sont intérieurs d'un même côté.

Les angles

2 et 1′ 3 et 4′

sont extérieurs d'un même côté.

60. Théorème. — *Lorsque deux parallèles sont coupées par une même droite, les angles correspondants, alternes-internes, alternes-externes, sont égaux, les angles intérieurs et extérieurs sont égaux, les angles intérieurs et extérieurs d'un même côté sont supplémentaires.*

Si nous démontrons (fig. 31) que les angles alternes-internes A M S et D N R sont égaux, cette égalité entraînera celle des angles alternes-externes R M B et C N S, égaux aux premiers comme opposés par le sommet ; celle des angles alternes-externes A M R et D N S supplémentaires des angles A M S et D N R, et celle

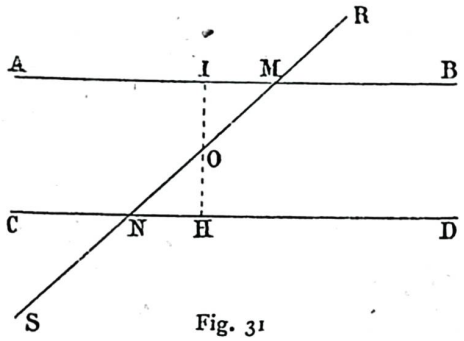


Fig. 31

des angles alternes-internes B M S et C N R supplémentaires de ces mêmes angles. Enfin les angles correspondants sont égaux par suite des égalités précédentes et les angles intérieurs et extérieurs d'un même côté sont supplémentaires.

Nous nous bornerons donc à démontrer que les angles A M S et D N R sont égaux.

Hypothèse : A B parallèle à C D.

Conclusion : $\widehat{AMS} = \widehat{DNR}$.

Démonstration : Par le milieu O de M N faisons passer une droite O I perpendiculaire à A B. Puisque A B est parallèle à C D (hypothèse), la perpendiculaire O I à A B est en même temps perpendiculaire à C D (58).

Nous avons traduit l'hypothèse par les deux égalités :

$$OM = ON$$

$$\widehat{OIM} = \widehat{OHN} = 1 \text{ dr.}$$

Mais nous remarquons aussi que les angles I O M et H O N opposés par le sommet sont égaux.

Dans ces conditions, les deux triangles rectangles O I M et O H N sont égaux, en vertu du premier cas d'égalité des triangles rectangles.

Ils ont l'hypoténuse égale.

$$OM = ON$$

et un angle aigu égal

$$\widehat{IOM} = \widehat{HON}$$

Ils ont donc tous leurs éléments égaux et, en particulier

$$\widehat{IMO} = \widehat{ONH} \qquad \text{(conclusion).}$$

61. Théorème réciproque. — *Si deux droites forment avec une autre qui les coupe des angles alternes-internes, alternes-externes, correspondants égaux, ces droites sont parallèles.*

Hypothèse (fig. 31) : $\widehat{AMS} = \widehat{RND}$.

Conclusion : A B parallèle à C D.

Démonstration : Prenons le milieu O de M N et abaissons de ce point la perpendiculaire O I sur A B. Si C D est parallèle à A B, O H doit être aussi perpendiculaire à C D. Nous allons le démontrer.

Les deux triangles O I M et O H N sont égaux en vertu du premier cas d'égalité des triangles ; ils ont en effet :

$$OM = ON$$

$$\widehat{IMO} = \widehat{ONH} \qquad \text{(hypothèse).}$$

$$\widehat{IOM} = \widehat{NOH}$$

Ils ont donc tous leurs éléments égaux et en particulier :

$$\widehat{OIM} = \widehat{OHN}$$

L'angle O H N est droit, ce qui démontre le théorème.

Exercices

14. — La parallèle à l'un des côtés d'un triangle menée par le point de concours des bissectrices est égale à la somme des segments adjacents à ce côté qu'elle détermine sur les deux autres.

15. — Etant donné un angle B A C et un point M sur le côté A C, trouver sur A C un deuxième point N qui soit à égale distance de M et du côté A B.

16. — Dans un triangle isocèle la somme des distances d'un point de la base aux deux autres côtés est constante. Examiner le cas où le point est pris sur le prolongement de la base. (Démontrer.)

Somme des angles d'un triangle et d'un polygone convexe

62. Théorème. — *La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

Hypothèse : A B C est un triangle.

Conclusion :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 2 \text{ dr.}$$

Démonstration : Pour exprimer que A B C est un triangle, il suffit d'exprimer que le côté A B rencontre à la fois la droite A C et la droite B C. Pour cela, menons par B une parallèle B S à A C. Les deux parallèles A C et S B sont coupées par la droite A B et par la droite B C.

Les angles C A B et A B S sont égaux comme alternes-internes. Les angles A C B et S B D sont égaux comme correspondants.

On a par conséquent, autour du point B et d'un même côté de la droite D C, trois angles, dont deux

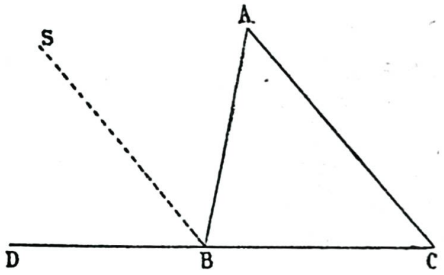


Fig. 32

sont égaux à deux des angles du triangle et dont le troisième est le troisième angle du triangle. La somme de ces angles vaut deux droits (19).

$$\widehat{DBS} = \widehat{BCA} \qquad \widehat{SBA} = \widehat{BAC}$$
$$\widehat{DBS} + \widehat{SBA} + \widehat{ABC} = 2 \text{ dr.}$$
$$\widehat{BCA} + \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 2 \text{ dr.}$$

(conclusion).

63. Conséquence. — Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ou obtus.

Si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, les troisièmes angles sont égaux.

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

L'ANGLE EXTÉRIEUR d'un triangle, c'est-à-dire *l'angle formé par un côté et le prolongement d'un autre* (tel que A B D, fig. 32), est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACB} + \widehat{CAB}$$

64. Théorème. — *La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux droits que le polygone a de côtés moins deux.*

HYPOTHÈSE (fig. 33) : Le polygone est convexe.

Il a n côtés.

CONCLUSION : La somme des angles vaut $(n - 2) \times 2$ dr.

DÉMONSTRATION : Si le polygone est convexe, des droites joignant le sommet A aux autres sommets sont tout entières situées dans l'intérieur du polygone (hypothèse) ; si le polygone a n côtés, on peut mener $(n - 2)$ de ces droites (hypothèse).

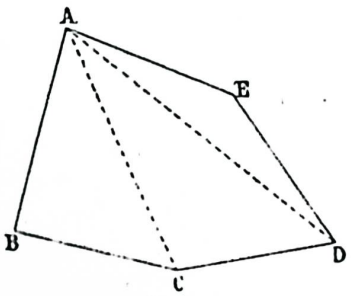


Fig. 33

Soient A C, A D, etc. ces droites. Ce faisant, on partage le polygone en autant de triangles qu'on a mené de droites telles que A C, c'est-à-dire en $(n - 2)$ triangles.

Les angles de ces triangles sont, ou bien des angles du polygone, ou bien des parties de ces angles, et faire la somme de tous les angles de tous les triangles revient au même que de faire la somme des angles du polygone.

Or la somme des angles de chaque triangle vaut 2 dr. (63). La somme de tous les angles des $(n - 2)$ triangles vaut donc

$$(n - 2) \times 2 \text{ dr.}$$

et c'est justement la valeur de la somme des angles du polygone.

65. Corollaire. — *La somme des angles extérieurs formés en prolongeant dans le même sens tous les côtés d'un polygone convexe est égale à 4 droits.*

HYPOTHÈSE (fig. 34) :

Le polygone est convexe.

On prolonge les côtés.

CONCLUSION :

$$\widehat{BAA'} + \widehat{CBB'} + \widehat{DCC'} + \widehat{EDD'} + \widehat{AEE'} = 4 \text{ dr.}$$

DÉMONSTRATION : Puisque le polygone est convexe (hypothèse), les prolongements A A' B B', etc. des côtés ne pénètrent pas dans l'intérieur du polygone.

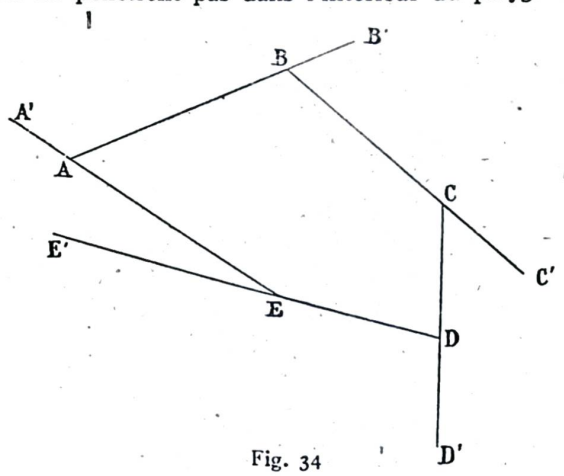


Fig. 34

A chaque sommet du polygone, l'angle intérieur et l'angle extérieur sont supplémentaires, puisque leurs côtés extérieurs sont en ligne droite et qu'ils sont adjacents.

La somme des angles à la fois intérieurs et extérieurs est donc égale à autant de fois 2 dr. qu'il y a de sommets ou de côtés au polygone, c'est-à-dire à

$$n \times 2 \text{ dr.}$$

Or la somme des angles intérieurs vaut

$$(n - 2) \times 2 \text{ dr.} = n \times 2 \text{ dr.} - 2 \times 2 \text{ dr.}$$

La différence donne la somme des angles extérieurs celle-ci est donc:

$$n \times 2 \text{ dr.} - (n \times 2 - 4) \text{ dr.} = n \times 2 \text{ dr.} - n \times 2 \text{ dr.} + 4 \text{ dr.}$$

ou

$$4 \text{ dr.}$$

Exercices

17. — Si l'on joint un point intérieur O d'un triangle A B C aux sommets A et B, l'angle A O B est toujours plus grand que l'angle A C B du triangle. (Démontrer.)

18. — Si un angle aigu d'un triangle rectangle est double de l'autre angle aigu, l'hypoténuse est double du plus petit côté, et réciproquement. (Démontrer.)

19. — Dans un triangle A B C, l'angle formé par les bissectrices des angles B et C égale un droit, plus la moitié de l'angle A (Démontrer.)

Parallélogrammes

66. Définitions. — Un *quadrilatère* est un polygone de quatre côtés.

Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles.

L'existence du parallélogramme résulte de celle des parallèles. Pour former un parallélogramme, il suffit de mener deux parallèles et de les couper par deux autres parallèles.

67. Théorème. — *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux, les angles opposés sont égaux.*

HYPOTHÈSE (fig. 35) : 1° A B parallèle à D C
2° A D parallèle à B C

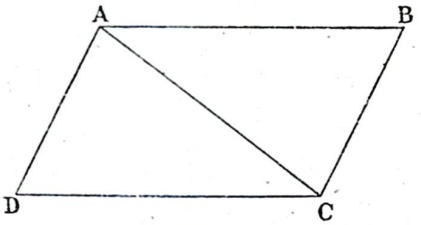


Fig. 35

CONCLUSION : A B = D C
A D = B C
$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$
$\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$

DÉMONSTRATION : Appliquons le théorème (61) pour exprimer l'hypothèse. Joignons A C (diagonale). Les angles alternes-internes sont égaux :

$$\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$$
$$\widehat{BCA} = \widehat{DAC}$$

Nous voyons alors que les deux triangles D A C et A B C sont égaux en vertu du premier cas d'égalité des triangles, car ils ont

A C commun

$$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} \qquad \widehat{BCA} = \widehat{DAC}$$

Ils ont tous leurs éléments égaux et les conclusions

A B = D C
A D = B C
$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

se trouvent vérifiées.

Quant à l'égalité

$$\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$$

elle se déduit de

$$\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$$
$$\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$$

d'où

$$\widehat{BAC} + \widehat{DAC} = \widehat{ACD} + \widehat{BCA}$$

68. Théorème réciproque I. — *Si, dans un quadrilatère, deux côtés sont égaux et parallèles, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

HYPOTHÈSE (fig. 35) : A B = D C.
A B parallèle à D C.

CONCLUSION : A D parallèle à B C.

DÉMONSTRATION : Elle résulte de la considération des triangles A B C et A D C qui sont égaux.

Les angles D A C et Q C B étant alternes-internes égaux , les droites A D et B C sont parallèles.

69. Théorème réciproque II. — *Si, dans un quadrilatère, les côtés opposés sont égaux, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

HYPOTHÈSE (fig. 35) : A B = D C.
A D = B C

CONCLUSION : A B parallèle à D C.
A D parallèle à B C.

DÉMONSTRATION : Les triangles A B C et A D C sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun (3e cas). On en déduit l'égalité des angles alternes-internes et, par suite, le parallélisme des droites A B, D C et A D, B C.

70. Théorème réciproque III. — *Si, dans un quadrilatère, les angles opposés sont égaux, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

HYPOTHÈSE (fig. 35) : $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$.
$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.

La figure est un quadrilatère.

CONCLUSION : A B parallèle à D C.
A D parallèle à B C.

DÉMONSTRATION : Puisque la figure est un quadrilatère (hypothèse), la somme de ses angles est égale à 4 droits (65). Mais, de l'hypothèse, on déduit encore que les deux angles adjacents au même côté sont supplémentaires :

$$\widehat{DAB} + \widehat{ADC} + \widehat{DCB} + \widehat{ABC} = 4\text{dr.}$$
$$\widehat{DAB} + \widehat{ADC} \quad \widehat{DCB} + \widehat{ABC}$$
$$\widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 2 \text{ dr.}$$
$$\widehat{DCB} + \widehat{ABC} = 2\text{dr.}$$

Or, comme ces angles occupent la position d'intérieurs d'un même côté, les droites qui rencontrent leur côté commun sont parallèles (conclusion).

71. Théorème. — *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires*

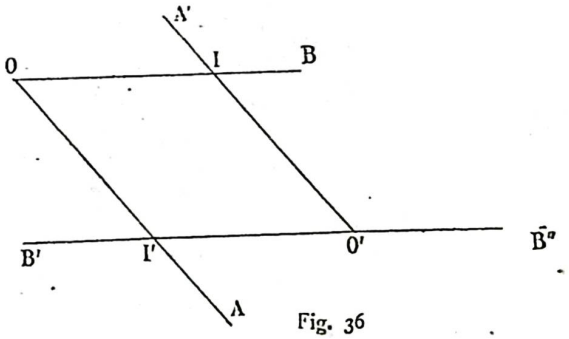


Fig. 36

HYPOTHÈSE (fig. 36) :
O A parallèle à O' A'.
O B parallèle à O' B' ou O' B''.

CONCLUSION : $\widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}$

ou

$$\widehat{A'O'B''} + \widehat{AOB} = 2 \text{ dr.}$$

DÉMONSTRATION : Si on prolonge les côtés des angles, les côtés non parallèles se rencontreront (ou leurs prolongements), et on formera un parallélogramme O I O' I' (hypothèse), dans lequel on aura :

$$\widehat{IOI'} = \widehat{IO'I'} \qquad \widehat{I'O'I} + \widehat{I'OI} = 2 \text{ dr.}$$

72. Théorème. — *Les diagonales B D, A C, d'un parallélogramme A B C D, se coupent en leur milieu.*

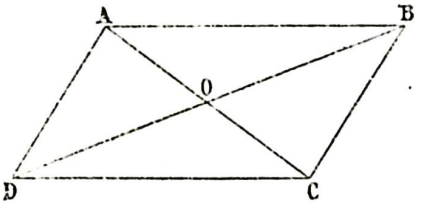


Fig. 37

HYPOTHÈSE (fig. 37 : A B C D est un parallélogramme.

CONCLUSION : D O = O B.
A O = O C.

DÉMONSTRATION : Les deux triangles A O B, D O C, sont égaux (1er cas), car ils ont (68):

$$AB = DC \qquad \text{(hypothèse)}$$

et

$$\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$$

$$\widehat{ABO} = \widehat{ODC}$$

par suite du parallélisme des droites A B et D C (hypothèse). Ils ont tous leurs éléments égaux et on a :

$$AO = OC$$
$$BO = OD \qquad \text{(conclusion).}$$

73. Théorème réciproque. — *Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu ce quadrilatère est un parallélogramme.*

Les deux triangles (fig. 38) A O B et D O C ont un angle égal

$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC}$$

comme opposés par le sommet, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Ils sont égaux ; les côtés A B et D C sont égaux et, de plus, parallèles par suite de l'égalité des angles alternes-internes. Le quadrilatère est un parallélogramme (69).

74. Rectangle. — Un *rectangle* est un parallélogramme dont les angles sont droits.

75. Théorème. — *Les diagonales d'un rectangle sont égales.*

HYPOTHÈSE (fig. 38) : A B C D est un parallélogramme.

Ses angles sont droits.

CONCLUSION : A C = B D.

DÉMONSTRATION : Si l'on considère les triangles A D C et B C D, on voit qu'ils sont égaux (2e cas) comme ayant

$$\widehat{ADC} = \widehat{BCD} \qquad \text{(hypothèse)}$$
$$DC \quad \text{commun}$$
$$AD = BC \qquad \text{(hypothèse)}$$

Ces triangles étant égaux, la conclusion est vérifiée.

76. Théorème réciproque. — *Si les diagonales d'un parallélogramme sont égales, ce parallélogramme est un rectangle.*

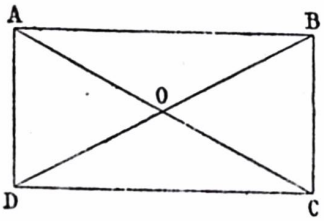


Fig. 38

En effet, les deux triangles A D C et B C D (fig. 38) sont égaux (3e cas). Et des deux égalités :

$$\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$$

$$\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 2 \text{ dr.} \qquad \text{(angles intérieurs).}$$

On déduit :

$$\widehat{ADC} = 1 \text{ dr.} \qquad \widehat{BCD} = 1 \text{ dr.}$$

77. Losange. — Un *losange* est un parallélogramme qui a ses quatre côtés égaux.

78. Théorème. — *Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

En effet, elles se coupent en leur milieu puisqu'un losange est un parallélogramme.

Dans le triangle isocèle B A D (fig. 39), la droite O A étant la médiane est en même temps la hauteur (35).

79. Théorème réciproque. — *Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, ce parallélogramme est un losange.*

Car, si dans un triangle la hauteur est en même temps la médiane, ce triangle est isocèle (46, *Remarque*).

78. Carré. — Le *carré* est un rectangle dont les côtés sont égaux.

C'est donc en même temps un losange.

79. Théorème. — *Les diagonales d'un carré sont égales et perpendiculaires l'une à l'autre et réciproquement, si les diagonales d'un parallélogramme sont égales et perpendiculaires, ce parallélogramme est un carré.*

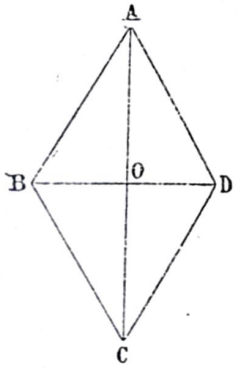


Fig. 39

Exercices

20. — Toute droite menée dans un parallélogramme par le point de rencontre des diagonales a ce point pour milieu. (Démontrer.)

21. — Par un point pris à l'intérieur d'un angle, mener une droite, qui, limitée aux deux côtés, ait ce point pour milieu. (Démontrer.)

22. — Si l'on joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on obtient une droite parallèle au troisième côté et égale à sa moitié. (Démontrer.)

23. — Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point situé aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet. (Démontrer.)

24. — Si l'on joint les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme. Quelles sont les conditions à remplir pour que la figure obtenue soit un rectangle, un losange, un carré ?

Figures symétriques

80. Symétrie par rapport à un point. — On appelle *symétrique* d'un point M par rapport à un point O appelé *centre de symétrie*, le point M′ obtenu en joignant M O et en prolongeant cette droite d'une longueur O M′ égale à M O.

On appelle figure symétrique d'une figure donnée F par rapport à un centre de symétrie O, la figure F′ dont tous les points sont symétriques des points F par rapport à O et qui contient le symétrique de tous les points de F par rapport à O.

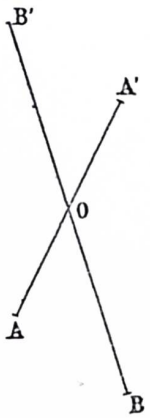


Fig. 40

81. Théorème. — *Deux figures symétriques par rapport à un point sont égales.*

Soient F et F′ les deux figures symétriques. Soit A′ le symétrique d'un point A de la figure F. Nous allons démontrer que si on amène le point A à coïncider avec le point A′ en faisant tourner la figure F sur le plan autour du point O, tout autre point B de la figure F viendra coïncider avec son symétrique B′.

HYPOTHÈSE (fig. 40) : O A = O A′.

O B = O B′.

A A′ et B B′ sont des droites.

CONCLUSION : F = F′.

DÉMONSTRATION : Les angles A O B′ et A′ O B′ sont opposés par le sommet (3e hypothèse), donc ils sont égaux. Si on fait tourner la figure F autour de O

de manière à amener O A sur O A′, A′ en A (hypothèse), l'angle A O B coïncide avec l'angle A′ O B′ et O B′ coïncide avec O B ; B coïncide avec B′.

Il résulte de là que tous les points de la figure F viendront coïncider de la même façon avec tous les points de la figure F′. Donc :

$$F = F' \qquad \text{(conclusion).}$$

82. Symétrique par rapport à une droite. — On appelle *symétrique* d'un point M par rapport à une droite *x y*, appelée *axe de symétrie*, le point M′ obtenu en abaissant la perpendiculaire M O sur *x y* et en prolongeant cette droite d'une longueur O M′ égale à M O.

On appelle figure symétrique d'une figure donnée F, par rapport à un axe de symétrie *x y*, la figure F′ dont tous les points sont symétriques des points de F par rapport à *x y*.

83. Théorème. — *Deux figures symétriques par rapport à une droite sont égales.*

En effet, si on fait tourner la figure F autour de l'axe *x y* comme charnière, pour la rabattre sur la figure F′, chaque point de F vient coïncider avec son symétrique dans la figure F′.

Le cercle

84. Définitions. — On appelle *circonférence* une ligne courbe *plane* dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur appelé *centre*.

On appelle *cercle* la portion du plan limitée par la circonférence.

On appelle *rayon* le segment de droite qui joint le centre à un point quelconque de la circonférence.

On appelle *diamètre* le segment de droite qui joint deux points de la circonférence en passant par le centre.

Un arc est une ligne courbe régulière qui a deux extrémités distinctes.

La droite qui joint les deux extrémités d'un arc s'appelle *corde*.

85. Remarque. — Par définition, tous les rayons d'un même cercle sont égaux et on voit immédiatement qu'un diamètre vaut deux rayons.

Si un point est à l'intérieur de la circonférence, il est à une distance du centre inférieure au rayon, car, si on joint le centre à ce point, il faut prolonger la droite ainsi obtenue pour atteindre la circonférence.

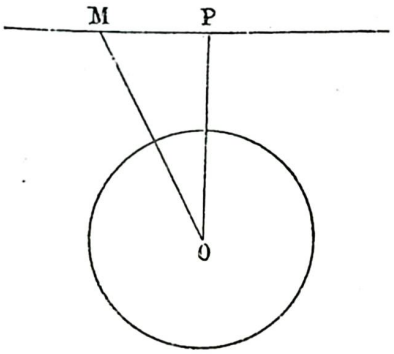


Fig. 41

Si un point est à l'extérieur de la circonférence, il est à une distance du centre supérieure au rayon ; car la droite qui joint le centre à ce point coupe la circonférence.

Les réciproques de ces deux propositions sont évidentes, comme les propositions directes.

Par rapport à une circonférence, un point peut donc occuper trois positions différentes : il peut être extérieur

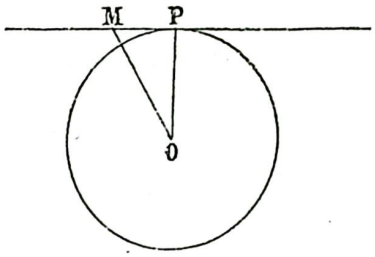


Fig. 42

à la circonférence, il peut être sur la circonférence, il peut être intérieur à la circonférence. Dès lors : la circonférence est le *lieu géométrique* des points du plan dont la distance au centre est égale au rayon.

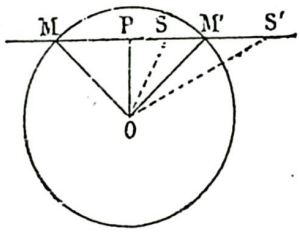


Fig. 43

86. Positions relatives d'une droite et d'un cercle. — Il peut se présenter trois cas, suivant que la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite est supérieure, égale ou inférieure au rayon (fig. 41, 42, 43).

Appelons *r* le rayon.

1° $$O\,P > r$$

Le point P est en dehors de la circonférence et, à plus forte raison, tout autre point M de la droite car

$$O\,M > O\,P$$

2° $$O\,P = r$$

Le point P est un point de la circonférence. Tout autre point M de la droite est en dehors de la circonférence, car

$$O\,M > O\,P$$
$$O\,M > r$$

La droite est dite *tangente* à la circonférence.

3° $$O\,P < r$$

Le point P est à l'intérieur de la circonférence. Si on mène une oblique O S à la droite et qu'on fasse glisser le point S sur la droite en l'éloignant du point P, l'oblique O S deviendra de plus en plus grande et il arrivera un moment et un seul où elle sera égale au rayon ; à ce moment le point S sera en M′ sur la circonférence ; on obtient un autre point M en faisant glisser S de la même façon de l'autre côté de P.

On voit par conséquent que la droite rencontre la circonférence en deux points M et M′ et en deux points seulement.

On dit que la droite est *sécante* à la circonférence.

Réciproquement : si une droite est extérieure à la circonférence, sa distance au centre est supérieure au rayon ; si elle est tangente, la distance au centre est égale au rayon ; si elle est sécante, sa distance au centre est inférieure au rayon.

87. Tangente à la circonférence. — Nous venons d'acquérir la notion de la tangente. On peut donner d'une telle droite la définition suivante :

La tangente à la circonférence est une droite qui n'a qu'un point commun avec la circonférence.

88. Théorème. — *La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact.*

La démonstration de ce théorème a été donnée plus haut.

89. Sécante et tangente. — Soit une sécante M M′ (fig. 44). Imaginons qu'on fasse tourner cette sécante autour du point M, dans le sens de la flèche. Le point M′ se déplace sur la circonférence en se rapprochant du point M, et il arrive un moment où il se confond avec le point M.

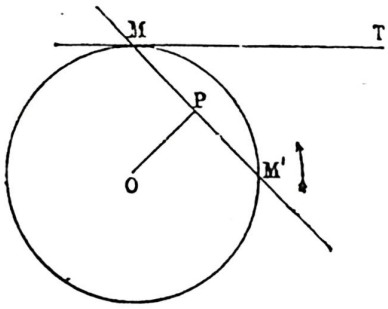


Fig. 44

A ce moment, la droite a pris la position M T et elle est tangente à la circonférence car elle n'a plus qu'un point commun avec celle-ci. D'ailleurs, dans ce mouvement, la perpendiculaire O P à la sécante se déplace également, et le pied P, toujours situé entre M et M′, se confond avec M en même temps que M′. Quand la sécante a pris la position M T, la perpendiculaire à M T passe par le point M, ce qui est d'accord avec le théorème (89).

Ces considérations permettent de donner de la tangente à la circonférence une autre définition, équivalente à la première, qui s'énonce ainsi :

La tangente à la circonférence est la limite des positions d'une sécante qui tourne autour d'un de ses points d'intersection avec la circonférence, jusqu'à ce que le second point d'intersection se confonde avec le premier.

90. Théorème. — *Un diamètre partage la circonférence et le cercle en deux parties égales.*

En effet, si on fait tourner la partie supérieure de la figure (fig. 45), autour de A B comme charnière,

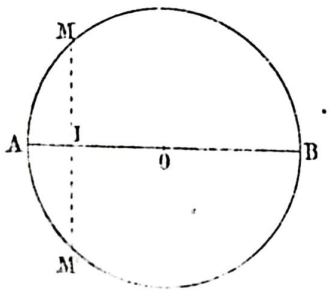


Fig. 45

tout point M de la circonférence, situé au-dessus du diamètre, vient coïncider avec un point M′ de la circonférence, situé au-dessous de A B. Car, s'il n'en était pas ainsi, le point M tomberait soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la circonférence et il ne serait plus à une distance de O égale au rayon. Or, dans le mouvement de rabattement, la distance O M égale au rayon n'a évidemment pas changé

Il suit de là que les deux parties de la circonférence et du cercle exactement superposables : elles sont donc égales.

Si on joint M M′ et si on remarque que O M = O M′ on voit que M M′ est perpendiculaire à A B et partage en deux parties égales par A B. Les deux moitiés de la circonférence sont symétriques par rapport à la droite A B.

Cette remarque nous conduit à énoncer le théorème suivant :

91. Théorème. — *Le diamètre perpendiculaire à une corde partage la corde et les arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales.*

On a (fig. 45) :

$$M\,I = M'\,I$$
$$\overset{\frown}{A\,M} = \overset{\frown}{A\,M'}$$
$$\overset{\frown}{M\,B} = \overset{\frown}{M'\,B}$$

92. Théorème. — *Le diamètre est plus grand que toute autre corde.*

Comme tous les diamètres sont égaux, nous pouvons faire la démonstration pour un diamètre quelconque, B D par exemple (fig. 46).

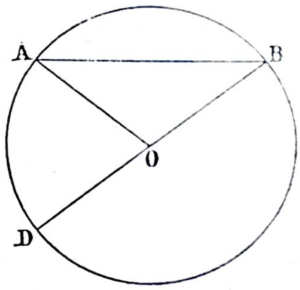


Fig. 46

Hypothèse : A B est une corde, ne passant pas par O.

B D est un diamètre.

Conclusion : B D > A B.

Démonstration : Il suffit de remarquer que le diamètre vaut deux fois le rayon. Si on joint les extrémités de la corde A B au centre, on obtient une ligne A O B, qui est brisée puisque A B ne passe pas par O (hypothèse) et qui est égale à deux fois le rayon, c'est-à-dire au diamètre B D.

Or, dans le triangle A O B, on a :

$$A\,O + O\,B > A\,B$$

donc

$$B\,D > A\,B \qquad \text{(conclusion).}$$

93. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux,*

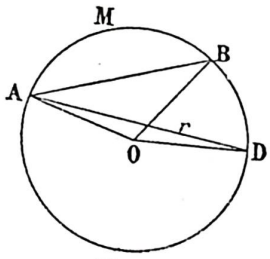


Fig. 47

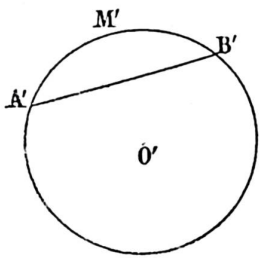


Fig. 48

1° *Si des arcs sont égaux, ils sont sous-tendus par des cordes égales.*

2° *Si des arcs sont inégaux, ils sont sous-tendus par des cordes inégales et le plus grand arc est sous-tendu par la plus grande corde.*

1° Hypothèse (fig. 47 et 48) : $r = r'$.

$$\overset{\frown}{A\,M\,B} = \overset{\frown}{A'\,M'\,B'}$$

Conclusion : A B = A′ B′.

DÉMONSTRATION : Puisque les deux circonférences sont égales, on peut les faire coïncider (hypothèse). Appliquons donc le centre O′ au centre O, la circonférence O′ tombe sur la circonférence O.

Si les arcs sont égaux, on doit pouvoir les faire coïncider (hypothèse). Faisons tourner la circonférence O′ autour de son centre placé en O, jusqu'à ce que le point A′ vienne se placer en A, le point B′ tombera alors en B (hypothèse).

Mais alors les deux cordes A B et A′ B′ auront leurs extrémités en coïncidence ; elles seront elles-mêmes en coïncidence. Donc

$$A\,B = A'\,B' \qquad \text{(conclusion).}$$

2° HYPOTHÈSE (fig. 48) : $r > r'$

$$\text{arc } \widehat{A\,M\,D} > \text{arc } \widehat{A'\,M'\,D'}$$

CONCLUSION : $A\,D > A'\,B'$.

DÉMONSTRATION : Transportons la circonférence O′ sur la circonférence O et amenons A′ à coïncider avec A. Comme A′ M′ B′ est plus petit que l'arc A M D (hypothèse), l'extrémité B′ de A′ M′ B′ tombe entre A et D en un certain point B.

Joignons le centre O aux trois points A B D. O B est situé dans l'angle A O D et par conséquent l'angle A O B est plus petit que l'angle A O D.

$$\widehat{A\,O\,B} < \widehat{A\,O\,D}$$

Or les deux triangles A O B et A O D ont deux côtés égaux chacun à chacun

$$A\,O = O\,B = O\,D$$

comprenant des angles inégaux

$$\widehat{A\,O\,B} < \widehat{A\,O\,D}$$

leurs troisièmes côtés sont inégaux (44) et au plus grand angle A O D est opposé le plus grand côté A D.

$$A\,B < A\,D \qquad \text{(conclusion).}$$

94. Théorème réciproque. — 1° *Si, dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes sont égales, elles sous-tendent des arcs égaux.*

2° *Si deux cordes sont inégales, elles sous-tendent des arcs inégaux et la plus grande corde sous-tend le plus grand arc.*

La démonstration des réciproques découle immédiatement des propositions directes.

95. Théorème. — *Dans un cercle : 1° deux cordes égales sont à la même distance du centre ; 2° deux cordes*

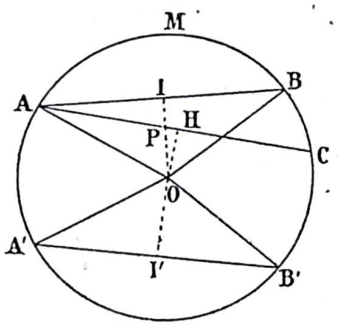


Fig. 49

inégales sont inégalement éloignées du centre et la plus grande en est le plus rapprochée.

1° HYPOTHÈSE (fig. 49) : $A\,B = A'\,B'$.

A, B, A′, B′, sont sur la circonférence.

CONCLUSION : $O\,I = O\,I'$.

O I et O I′ étant les perpendiculaires abaissées du centre sur A B et A′ B′.

DÉMONSTRATION : Les deux triangles isocèles (hypothèse) A O B et A′ O B′, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Par suite, leurs hauteurs O I et O I′ sont égales (conclusion).

2° HYPOTHÈSE : $A\,C > A'\,B'$.

A, C, A′, B′ sont sur la circonférence.

CONCLUSION : $O\,H < O\,I'$.

O H et O I′ étant perpendiculaires sur A C et sur A′ B′.

DÉMONSTRATION : Par le point A, menons la corde A B égale à A′ B′, on a :

$$O\,I = O\,I' \ (1^\circ)$$

L'arc A M C est plus grand que l'arc A M B (94) ; par suite, le point B tombe entre A et C sur l'arc A M C et la droite A C est située dans l'angle O A B. La droite A C rencontre donc la droite O I en un certain point P.

Or O H étant la plus courte distance de O à A C, O H ne peut être supérieure à O P et par conséquent elle est inférieure à O I qui est plus grande que O P.

$$O\,H < O\,I \qquad \text{(conclusion).}$$

96. Théorème réciproque. — *Dans un cercle 1° deux cordes situées à la même distance du centre sont égales ; 2° deux cordes situées à des distances différentes du centre sont inégales et la plus rapprochée du centre est la plus grande.*

Résulte du théorème direct.

97. Théorème. — *Par trois points non en ligne droite, on peut faire passer une circonférence et une seule.*

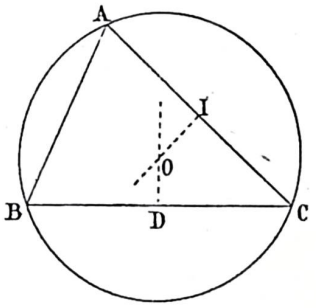


Fig. 50

HYPOTHÈSE : 3 points A, B, C, non en ligne droite.

CONCLUSION : On peut faire passer une circonférence par A, B, C, et une seule.

DÉMONSTRATION : Elevons au milieu de A C et au milieu de B C deux perpendiculaires I O et D O.

Ces perpendiculaires se rencontrent en un point O, parce que les trois points A, B, C, n'étant pas en ligne droite (hypothèse), les droites A C et B C forment un angle et que les perpendiculaires aux côtés de cet angle ne peuvent pas être parallèles (sans quoi l'angle A B C serait nul ; A, B, C, seraient en ligne droite).

Le point O est à égale distance de A et de C et de B et de C (52) ; il est donc à égale distance de A, de B et de C. C'est le centre d'une circonférence passant par les trois points A, B, C (conclusion).

D'ailleurs, il n'y a qu'une circonférence passant par A, B, C ; car une autre circonférence aurait son centre sur O I lieu géométrique des points équidistants de A et de C, et sur O D lieu géométrique des points équidistants de B et de C. C'est-à-dire que son centre serait en O et par conséquent cette circonféfence se confondrait avec la première (conclusion).

On peut remarquer que, le point O étant équidistant de A et de B, la perpendiculaire au milieu de A B passe aussi par O.

En joignant les trois points A, B, C par des droites, on forme un triangle. La circonférence dont nous venons de déterminer le centre s'appelle la *circonférence circonscrite* au triangle.

Conséquence. — Deux circonférences distinctes ne peuvent avoir plus de deux points communs. Autrement elles se confondraient.

Deux circonférences qui ont deux poin s communs sont dites *sécantes.*

98. Théorème. — *On peut toujours mener, à l'intérieur d'un triangle, une circonférence tangente aux trois côtés de ce triangle et on n'en peut mener qu'une.*

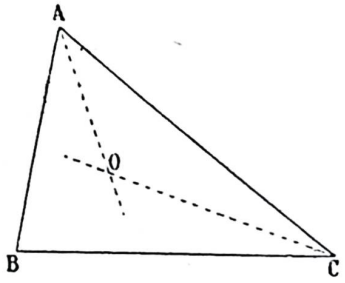


Fig. 51

La démonstration est analogue à celle du théorème (98). On utilise le lieu géométrique des points équidistants de deux droites qui se coupent (53).

Si nous menons les bissectrices A O et C O des angles A et C (fig. 51), la somme des angles C A O et A C O est inférieure à 1 dr. parce que la somme des angles B A C et B C A est inférieure à 2 dr. Il s'ensuit que les bissectr,ices ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point O

Ce point O étant équidistant de B C et de A C d'une part, de A C et de A B d'autre part, il est équidistant de A B, A C et B C. O est donc le centre d'une circonférence qui passe par le pied des trois perpendiculaires égales abaissées du point O sur les trois côtés du triangle. Cette circonférence est tangente aux trois côtés (89).

On démontre comme plus haut (98) qu'il n'y a qu'une circonférence tangente intérieurement aux trois côtés du triangle.

La circonférence dont nous venons de déterminer le centre s'appelle la *circonférence inscrite* dans le triangle.

99. Théorème. — *Si deux circonférences se coupent, la droite qui joint leurs centres est perpendiculaire à la corde commune en son milieu.*

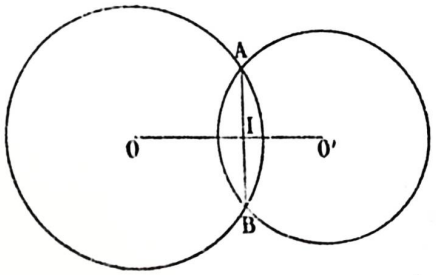


Fig. 52

Hypothèse (fig. 52) : A et B communs à deux circonférences.

Conclusion : O O' perpendiculaire à A B en son milieu.

Démonstration : Puisque A et B sont sur la circonférence O, ils sont à égale distance du point O'. Les points O et O' sont donc deux points équidistants de A et de B, ils sont sur la perpendiculaire élevée au milieu de la droite A B (52). D'où la conclusion.

100. Théorème. — *Deux circonférences qui ont un point commun A en dehors de la ligne des centres, ont un autre point commun B, elles sont sécantes.*

Hypothèse (fig. 52) : A est sur la circonférence O. A est sur la circonférence O'.

Conclusion : O et O' se coupent en B.

Démonstration : Puisque A est sur la circonférence O (hypothèse), son symétrique par rapport à O O' est sur la circonférence O (91). Puisque A est sur la circonférence O' (hypothèse), son symétrique est sur la circonférence O'.

Le symétrique B du point A est donc à la fois sur la circonférence O et sur la circonférence O' (conclusion).

101. Corollaire. — *Si deux circonférences ont un point commun sur la ligne des centres, ces deux circonférences sont tangentes.*

Car le point commun coïncide avec son symétrique par rapport à la ligne des centres.

Réciproquement : Si deux circonférences sont tangentes, c'est-à-dire n'ont qu'un point commun, ce point se trouve sur la ligne des centres.

102. Positions relatives sur deux circonférences. — Deux circonférences peuvent occuper l'une par rapport à l'autre cinq positions différentes :

1° Elles peuvent être extérieures l'une à l'autre.

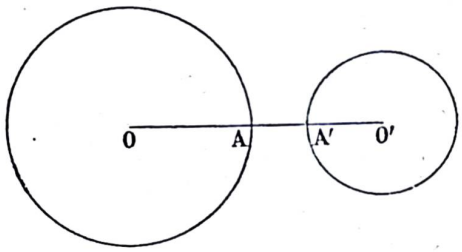


Fig. 53

Dans ce cas (fig. 53), on peut écrire :

$$O\,O' > O\,A + O'\,A'$$

et si on pose

$$O\,O' = d \qquad O\,A = r \qquad O'\,A' = r'$$

on a :

$$d > r + r'$$

et on peut énoncer le théorème :

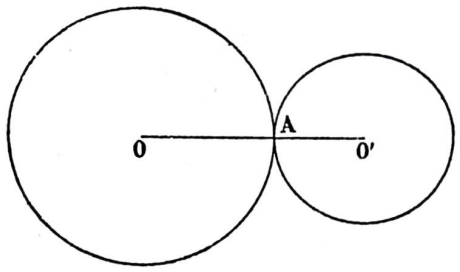


Fig. 54

Théorème. — *Si deux circonférences sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.*

2° Elles peuvent être tangentes extérieurement (fig. 54).

Dans ce cas on peut écrire :

$$d = r + r'$$

Théorème. — *Si deux circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons.*

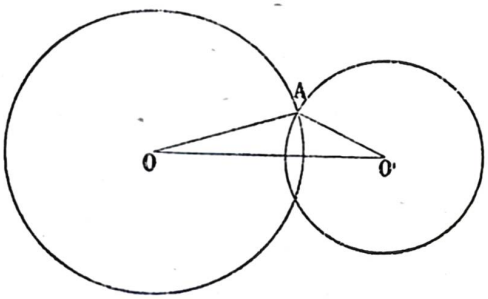


Fig. 55

3° Elles peuvent être sécantes (fig. 55).

La considération du triangle O A O′ permet d'écrire :

$$d < r + r'$$
$$d > r - r'$$

Théorème. — *Si deux circonférences sont sécantes, la distance des centres est inférieure à la somme des rayons et supérieure à leur différence.*

4° Elles peuvent être tangentes intérieurement (fig. 56).

Dans ce cas on peut écrire :

$$d = r - r'$$

Théorème. — *Si deux circonférences sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

5° Elles peuvent être intérieures (fig. 57).

On a :

$$OA - O'B = OO' + BA$$
$$OA - O'B < OO'$$
$$r - r' > d$$

Théorème. — *Si deux circonférences sont intérieures, la distance des centres est inférieure à la différence des rayons.*

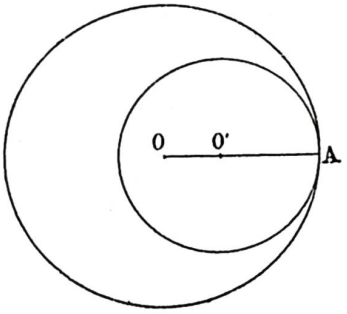


Fig. 56

Nous avons fait sur les positions relatives de deux circonférences toutes les hypothèses possibles. Les

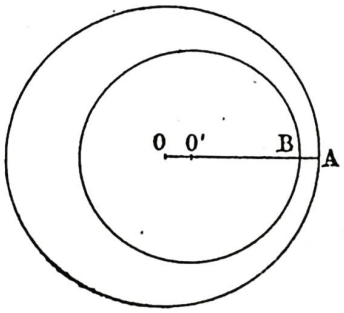


Fig. 57

réciproques des cinq théorèmes précédents sont donc nécessairement vraies.

Exercices

25. — La ligne la plus courte et la ligne droite la plus longue qu'on puisse mener d'un point à une circonférence passent par le centre.

26. — La plus petite corde que l'on puisse mener dans un cercle par un point pris à son intérieur, est perpendiculaire au diamètre passant par ce point.

27. — Par un point A, extérieur à un cercle, on mène une sécante A B C telle que sa partie extérieure A B soit égale au rayon, on mène la sécante A O D et on joint O C. Prouver que l'angle C O D est triple de l'angle C A D.

28. — Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes égales tracées dans une circonférence donnée ?

29. — Décrire une circonférence de rayon donné passant par un point et tangente à une droite donnée.

30. — Par un point fixe pris dans le plan d'un cercle, on lui mène des sécantes, trouver le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes interceptées.

Mesure des angles

103. Angle au centre. — On appelle *angle au centre* un angle qui a son sommet au centre de la circonférence.

104. Angle inscrit. — On appelle *angle inscrit* un angle qui a son sommet sur la circonférence.

Il existe entre l'angle au centre ou l'angle inscrit et l'arc compris entre les côtés de l'angle, des relations simples que nous allons établir.

105. Théorème. — *Dans un cercle, deux angles aux centres égaux interceptent des arcs égaux.*

Hypothèse (fig. 58) : $AO = BO = CO = DO$.

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}.$$

Conclusion : arc A M B = arc C N D.

Démonstration : Les triangles A O B et C O D sont égaux (2e cas), comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (hypothèse).

Il s'ensuit que

$$AB = CD$$

et les arcs $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{CND}$, sont égaux (94), (conclusion).

106. Théorème réciproque. — *Dans un cercle deux arcs égaux sont interceptés par des angles aux centres égaux.*

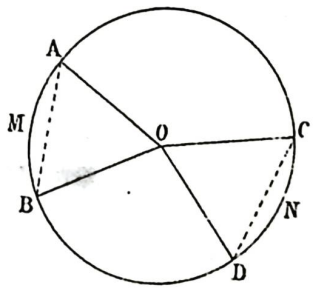


Fig. 58

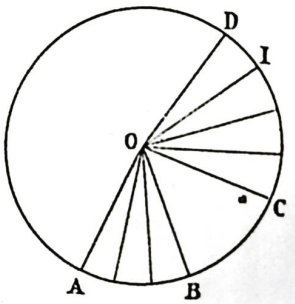


Fig. 59

Car les cordes sont égales et les triangles A O B, C O D (fig. 58), sont égaux (3e cas).

107. Théorème. — *Dans un cercle, le rapport des angles au centre est égal au rapport des arcs qu'ils interceptent.*

Soient les deux angles au centre A O B et C O D (fig. 59).

Il s'agit de démontrer que le rapport de l'angle A O B à l'angle D O C, c'est-à-dire le quotient du nombre qui mesure A O B avec une certaine unité, par le nombre qui mesure C O D avec la même unité, est égal au rapport de l'arc A B à l'arc C D, c'est-à-dire au quotient du nombre qui mesure l'arc A B au nombre qui mesure l'arc C D avec la même unité.

Choisissons pour unité d'angle au centre l'angle D O I, par exemple, et, pour unité d'arc, l'arc D I intercepté par l'unité d'angle.

Mesurons l'angle D O C et l'angle A O B au moyen de l'angle D O I et supposons que ce dernier soit contenu n fois dans l'angle D O C et m fois dans l'angle A O B, nous écrirons $\frac{n}{m}$ le quotient des nombres qui mesurent les angles au moyen de l'unité D O I.

Or, en portant D O I n fois dans l'angle D O C, nous avons intercepté, sur l'arc D C, n arcs égaux à l'arc D I (106), le nombre qui mesure l'arc D C au moyen de l'unité d'arc D I est donc égal à n ; de même le nombre qui mesure l'arc A B au moyen de l'unité d'arc D I est égal à m ; le rapport des arcs est donc aussi $\frac{n}{m}$ (conclusion).

108. Théorème. — *La mesure d'un angle au centre est la même que celle de l'arc qu'il intercepte, pourvu qu'on fasse correspondre l'unité d'arc à l'unité d'angle.*

En effet (fig. 59), si on prend comme unité d'angle l'angle au centre D O I et comme unité d'arc, l'arc intercepté par cet angle au centre, la mesure de l'arc D C est exprimée par le même nombre n que la mesure de l'angle D O C.

Autrement dit : le rapport de l'angle D O C à l'unité d'angle est le même que le rapport de l'arc D C à l'unité d'arc (108).

109. Unités d'angles et unités d'arcs. — Les unités d'angles et les unités d'arcs correspondantes le plus souvent employées sont :

1° L'angle droit correspondant à un quadrant (quart de circonférence).

2° L'angle de 1 degré égal à la 90e partie d'un angle droit et correspondant à l'arc de 1 degré égal à la 90e partie d'un quadrant, c'est-à-dire la 360e partie de la circonférence.

Les sous-multiples du degré d'angle ou d'arc sont :

La minute, qui vaut la 60e partie du degré.

La seconde, qui vaut la 60e partie de la minute.

On écrit le nombre : un degré, cinq minutes, vingt-quatre secondes de la manière suivante :

$$1^\circ\ 5'\ 24''$$

3° L'angle de 1 grade égal à la 100e partie d'un angle droit et correspondant à la 400e partie de la circonférence.

Les sous-multiples du grade d'angle ou d'arc sont :

La minute centésimale, qui vaut la 100e partie du grade.

La seconde centésimale, qui vaut la 100e partie de la minute.

On écrit le nombre un grade, cinq minutes, vingt-quatre secondes de la manière suivante :

$$1^g\ \ 5'\ \ 24''$$

4° L'angle de 1 radian est un angle au centre tel que l'arc qu'il comprend a la même longueur que le rayon. Cette unité d'angle ou d'arc suit le système décimal. $360^\circ = 400^g = 2\pi$ rad. Le radian est une unité de plus en plus usitée.

110. Théorème. — *La mesure de l'angle inscrit est égale à la mesure de la moitié de l'arc qu'il intercepte.*

Soit l'angle inscrit B A C (fig. 60).

Hypothèse : B, A, C sur la circonférence.

Conclusion : Mesure $\widehat{BAC}$ = mesure $\frac{\widehat{BC}}{2}$.

Démonstration : Menons le diamètre A D et joignons O B. Le triangle A O B est isocèle (hypothèse), et, par suite, les angles O A B et O B A sont égaux. Mais (64) l'angle B O D est égal à la somme des deux angles égaux O B A et O A B, donc on peut écrire :

$$\widehat{BOD} = 2 \times \widehat{DAB}$$

Or l'angle B O D étant un angle au centre, a même

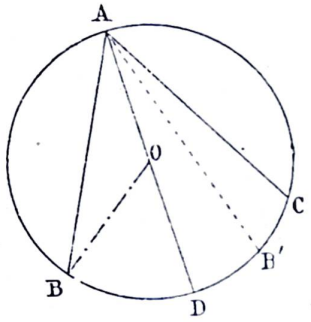


Fig. 60

mesure que l'arc B D pourvu qu'on fasse correspondre les unités d'angle et d'arc. Par suite $\widehat{OAB}$, ou $\widehat{BAD}$ a même mesure que la moitié de l'arc B D. En répétant le même raisonnement pour l'angle D A C, on peut écrire que la mesure de $\widehat{BAD} + \widehat{DAC}$, c'est-à-dire de $\widehat{BAC}$, est égale à la mesure de la moitié de $\widehat{BD} + \widehat{DC}$, c'est-à-dire de la moitié de $\widehat{BC}$ (conclusion).

Nous avons supposé que le centre O était à l'intérieur de l'angle B A C ; s'il était en dehors de l'angle comme pour B' A C, on procéderait par différence :

$$\text{mesure de } \widehat{B'AC} = \text{mes. } \widehat{DAC} - \text{mes. } \widehat{DAB'}$$

$$\text{mesure de } \widehat{B'AC} = \text{mes. } \frac{\widehat{DC}}{2} - \text{mes. } \frac{\widehat{DB'}}{2}$$

$$\text{mesure de } \widehat{B'AC} = \text{mes. } \frac{\widehat{B'C}}{2}$$

111. Théorème. — *La mesure de l'angle formé par une tangente et une sécante passant par le point de contact est égale à la mesure de la moitié de l'arc sous-tendu par la corde.*

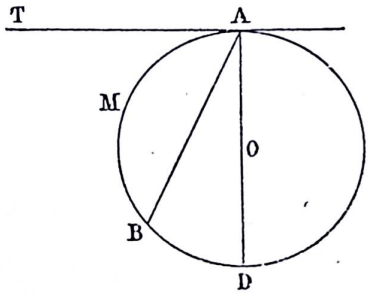


Fig. 61

Hypothèse : soient la tangente A T et la sécante A B (fig. 61).

Conclusion : mes. $\widehat{BAT}$ = mes. $\frac{\widehat{AMB}}{2}$.

Démonstration : Menons le diamètre A D ; il est perpendiculaire à A T (89). L'angle droit T A D a même mesure qu'un arc d'un quadrant, c'est-à-dire que la moitié de la demi-circonférence A M D.

L'angle B A T est la différence.

$$\widehat{BAT} = \widehat{DAT} - \widehat{BAD}$$

Or la mesure de $\widehat{BAD}$ est égale à la mesure de la moitié de $\overset{\frown}{BD}$ (111) ; on peut donc écrire :

$$\text{mes. } \widehat{BAT} = \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{AMD}}{2} - \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\text{mes. } \widehat{BAT} = \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{AMB}}{2} \text{ (conclusion).}$$

112. Théorème. — *La mesure d'un angle qui a son sommet à l'intérieur de la circonférence est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par cet angle.*

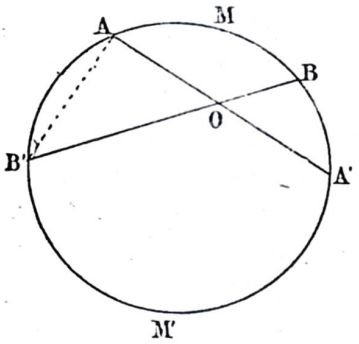


Fig. 62

Hypothèse (fig. 62) : Soit A O B un angle qui a son sommet O à l'intérieur de la circonférence.

Conclusion : mes. $\widehat{AOB}$ = mes. $\dfrac{\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{A'M'B'}}{2}$

Démonstration : Joignons A B'. Si on considère le triangle A O B', on peut écrire (64) :

$$\widehat{AOB} = \widehat{OAB'} + \widehat{OB'A}$$

Or on a (111) :

$$\text{mes. de } \widehat{OAB'} \text{ ou } \widehat{A'AB'} = \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{A'M'B'}}{2}$$

$$\text{mes. de } \widehat{OB'A} \text{ ou } \widehat{AB'B} = \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{AMB}}{2}$$

donc

$$\text{mes. } (\widehat{A'AB} + \widehat{AB'B}) = \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{A'M'B}}{2}$$

$$\text{mes. } \widehat{AOB} = \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{A'M'B'}}{2}$$

(conclusion).

113. Théorème. — *La mesure d'un angle qui a son sommet à l'extérieur de la circonférence est égale à la demi-différence des mesures des arcs interceptés par cet angle.*

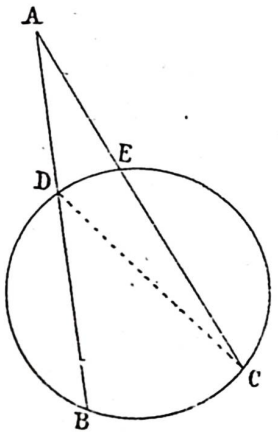


Fig. 63

Hypothèse (fig. 63) : Soit B A C un angle qui a son sommet à l'extérieur de la circonférence.

Conclusion : mes. $\widehat{BAC}$ = mes. $\dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{2}$

Démonstration : Joignons D C. On a (64) :

$$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} + \widehat{DCE}$$

d'où

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} - \widehat{DCE}$$

et $\text{mes. } \widehat{BAC} = \text{mes. } (\widehat{BDC} - \widehat{DCE})$

$$\text{mes } \widehat{BAC} = \text{mes. } \left(\frac{\overset{\frown}{BC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DE}}{2}\right) = \text{mes. } \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{2}$$

(Conclusion).

114. Triangle rectangle inscrit. — Par les trois sommets d'un triangle rectangle, on peut toujours faire passer une circonférence et une seule (97).

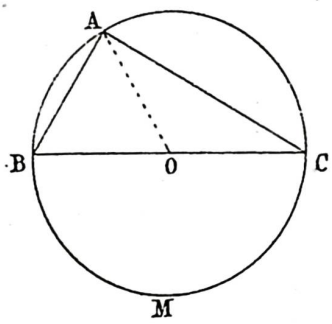


Fig. 64

Nous remarquerons que l'angle droit B A C (fig. 64) a même mesure que la moitié de l'arc B M C, celui-ci doit donc être égal à une demi-circonférence. Il s'ensuit que l'hypoténuse B C est un diamètre :

Un triangle rectangle peut être inscrit dans une demi-circonférence.

D'autre part, si on joint A au centre O, le rayon A O vaut la moitié de B C.

$$AO = BO = OC$$

donc :

La médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la moitié de l'hypoténuse.

On peut encore remarquer que, de ce que les triangles B O A et C O A sont isocèles, il résulte que les angles sont liés par les relations :

$$\widehat{OBA} = \widehat{BAO} \qquad \widehat{OCA} = \widehat{CAO}$$

115. Théorème. — *Pour que, par les quatre sommets d'un quadrilatère, on puisse faire passer une circonférence, il faut et il suffit que les angles opposés soient supplémentaires.*

1° La condition est nécessaire.

Hypothèse : A B C D inscrit (fig. 65).

Conclusion : $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 2$ dr.

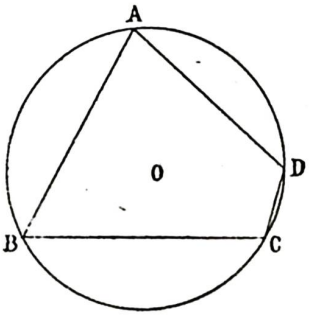


Fig. 65

Démonstration : L'angle B A D a même mesure que la moitié de l'arc B C D ; l'angle B C D a même mesure que la moitié de l'arc B A D :

$$\text{mes. } (\widehat{BAD} + \widehat{BCD}) =$$

$$\text{mes. } \left(\frac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD}}{2}\right)$$

c'est-à-dire que la somme des angles B A D et B C D a pour mesure, la mesure de la moitié de la circonférence. Donc

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 2 \text{ dr.}$$

2° La condition est suffisante :

HYPOTHÈSE : $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 2$ d.

CONCLUSION : A B C D inscrit.

DÉMONSTRATION : Par les trois points A B C, on peut toujours faire passer une circonférence. Il suffit de démontrer que cette circonférence passe par le quatrième sommet D.

Or si le sommet D n'était pas sur la circonférence, il serait soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de celle-ci; dans le premier cas, la mesure de l'angle A D C serait supérieure à la mesure de l'arc A B C (113); dans le second cas, elle lui serait inférieure (114).

Par conséquent, ni dans l'un ni dans l'autre cas, la somme des angles A B C et A D C n'aurait our mesure la mesure de la moitié de la circonférence ; les angles ne seraient pas supplémentaires, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que le point D soit sur la circonférence.

Le quadrilatère A B C D est dit inscriptible.

Exercices

31. — Lorsque deux circonférences sont tangentes extérieurement, et qu'on mène deux sécantes par le point de contact, les cordes qui joignent les extrémités de ces sécantes sont parallèles.

32. — Trouver un point d'où l'on voit deux droites données A B et C D sous des angles donnés M et N.

33. — Une droite de longueur constante se meut en appuyant ses deux extrémités sur les côtés indéfinis d'un angle droit : trouver le lieu décrit par le milieu de cette droite.

Usage de la règle et du compas

116. — Les figures géométriques peuvent être représentées, avec une précision suffisante, au moyen du dessin. On se sert dans ce but de deux instruments : la règle et le compas ; on utilise aussi l'équerre, qui n'est autre chose qu'une espèce de règle.

117. **Règle.** — La règle permet de tracer des lignes droites. En particulier, elle permet de joindre par une ligne droite, deux points donnés.

Avant de se servir d'une règle, il faut la vérifier. Pour cela, on applique un de ses bords M N sur le papier contre deux points A et B, de manière à joindre

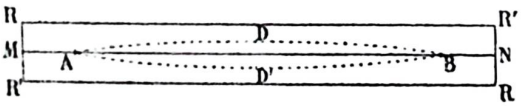


Fig. 66

ces deux points par une droite A B que l'on trace (fig. 66). Puis on retourne la règle de manière à appliquer le même bord contre les deux points mais, cette fois, en dessus au lieu d'en dessous ou réciproquement, et on joint encore les deux points par une droite en suivant le bord de la règle.

Si la règle est bonne, c'est-à-dire si le bord M N est bien droit, les deux lignes ainsi tracées coïncident exactement. Sinon, elles s'écartent plus ou moins l'une de l'autre, suivant A D B et A D' B par exemple. Dans ce dernier cas, il ne faut pas se servir de la règle, elle est mauvaise.

On doit répéter l'essai pour les différentes faces de la règle.

118. **Compas.** — Le compas est un instrument qui permet de tracer des circonférences. Du moment qu'un compas est rigide et que sa pointe fixe n'est pas émoussée, il est bon.

Il ne faut pas que son articulation soit trop lâche, autrement son écartement change durant le tracé d'une circonférence et la figure manque d'exactitude. Il ne faut pas non plus que la pointe fixe soit émoussée, autrement elle glisse sur le papier et le tracé de la figure s'en ressent. Il faut enfin que cette pointe soit aussi fine que possible pour qu'on n'ait pas besoin de l'appuyer fortement sur le papier.

Pendant le tracé d'une circonférence, on aura soin de tenir le plan du compas toujours dans la même inclinaison par rapport au papier. Autant que possible, on maintiendra le plan du compas perpendiculaire au plan du dessin. Il faut en tout cas se garder de coucher le compas très fortement sur le papier, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, ce qui aurait pour conséquence de déformer la figure et d'épaissir le trait.

Enfin le maniement du compas n'est facile qu'à la condition que la longueur des deux branches soit convenablement réglée. Pour un faible écartement, les deux branches seront d'égale longueur. Quand l'écart est assez grand, la branche correspondant à la pointe fixe doit être un peu plus courte que l'autre.

Les compas portent généralement un peu au-dessus de la pointe une articulation qui permet de diriger toujours la pointe perpendiculairement au papier, quel que soit l'écartement des deux branches.

119. — **Equerre.** — L'équerre est une sorte de règle plate en forme de triangle rectangle. On en fait de deux sortes : les unes ont la forme d'un triangle rectangle isocèle, les autres la forme d'un triangle rectangle d'ont l'un des côtés de l'angle droit est double de l'autre.

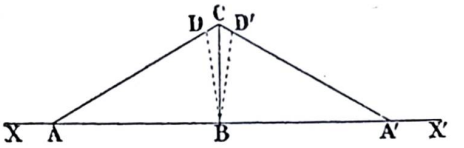


Fig. 67

On vérifie que les côtés de l'équerre sont droits comme pour la règle. Pour vérifier que l'angle au sommet est droit, on trace une droite X X' (fig. 67), on applique l'équerre en A B C, de façon que A B, côté de l'angle coïncide avec X X' et on trace la droite B C qui doit être perpendiculaire à X X'. Si B C est effectivement perpendiculaire à X X', quand on retourne l'équerre pour la placer dans la position A' B C, la droite tracée le long du côté B C coïncidera avec la première. Si les deux droites ne coïncident pas et prennent par exemple les positions B D, B D', l'angle B n'est pas droit.

Il est rare que l'angle A B C soit rigoureusement droit. Ce n'est d'ailleurs pas à cause de son angle droit qu'on emploie surtout l'équerre dans le dessin géométrique.

Nous allons maintenant traiter les problèmes élémentaires qu'on a constamment à résoudre dans le dessin géométrique et pour lesquels la connaissance des deux premiers livres de géométrie est nécessaire.

120. **Problème.** — *Elever une perpendiculaire au milieu d'une droite.*

Soit A B la droite donnée.

Du point A avec une ouverture de compas arbitraire, on décrit deux arcs de cercle au-dessus et au-dessous de la droite A B. Du point B avec la *même* ouverture de compas, on décrit deux arcs de cercle. Les arcs ainsi tracés (fig. 68) se coupent en M et en M' de part et d'autre de la droite. Si on joint M M' par une droite, celle-ci est perpendiculaire au milieu C de A B.

En effet M et M′ se trouvant aux points d'intersection de deux circonférences de *même rayon* ayant pour centres A et B, sont équidistants de A et de B. Ils se trouvent donc sur la perpendiculaire élevée au milieu de A B (52).

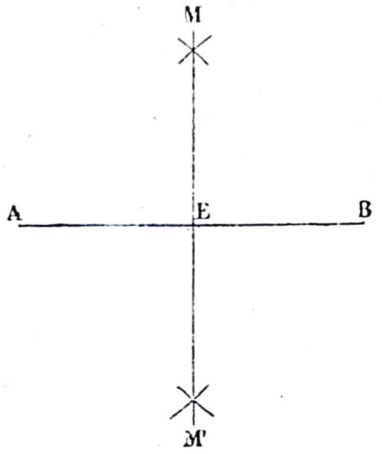


Fig. 68

121. Problème. — *Trouver le milieu d'un segment de droite donné.*

On élève par la méthode précédente la perpendiculaire au milieu de la droite.

En répétant plusieurs fois l'opération, on peut partager un segment de droite en 4, 8, 16, etc. parties égales.

122. Problème. — *D'un point extérieur à une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

On ramène ce problème au problème (121) en déterminant sur la droite deux points situés à égale distance du point donné. Il suffit pour cela de décrire, du point C donné comme centre, une circonférence de rayon arbitraire qui coupe la droite en deux points A et B.

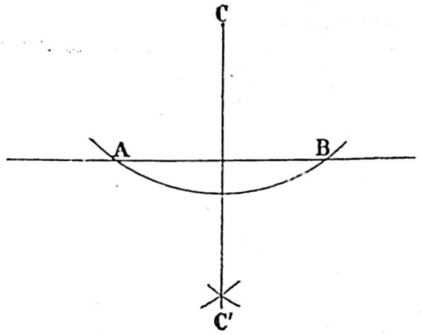


Fig. 69

C A = C B comme rayons d'un même cercle (fig. 69). De A et de B comme centres, avec une même ouverture de compas, on décrit de l'autre côté de la droite deux arcs de cercle qui se coupent en C′ ; on n'a plus qu'à joindre C C′

123. Problème. — *Construire une droite faisant, en un point d'une autre droite, un angle égal à un angle donné.*

Soit α l'angle donné (fig. 70). Soit X Y la droite donnée, on demande de construire une droite faisant avec X Y, au point A, un angle égal à α.

Du sommet S de l'angle α comme centre avec une ouverture de compas arbitraire, je décris un arc de cercle M N. Avec la même ouverture de compas, de A comme centre, je décris l'arc B D. Avec le compas, je mesure la distance M N, et avec cette ouverture de compas, de B comme centre, je décris un arc de cercle qui coupe B D au point C. Je joins A C, l'angle B A C est égal à l'angle α.

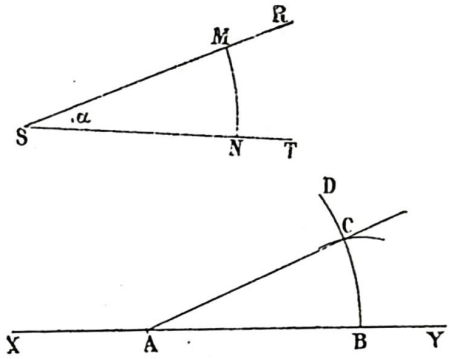


Fig. 70

En effet, en mesurant M N avec le compas, nous avons mesuré la corde de l'arc. Par suite l'arc M N est égal à l'arc B C (95) et l'angle au centre S est égal à l'angle au centre A (107).

124. Problème. — *Par un point donné, hors d'une droite, mener une parallèle à cette droite.*

Ce problème peut se résoudre par deux méthodes également simples.

1re Méthode. — *Méthode de la règle et du compas.*

Soient A B la droite donnée et M le point (fig. 71). Du point M comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, on décrit un arc de cercle I E. Du point I comme centre, avec la même ouverture de compas, on décrit un arc M N. On prend avec le compas la distance M N et on la porte sur I E. On obtient

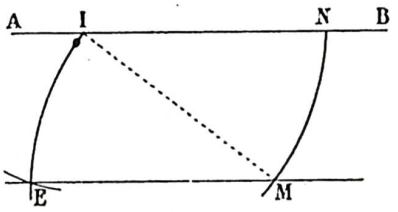


Fig. 71

ainsi un point E qu'il suffit de joindre au point M pour avoir la parallèle demandée. En effet cette méthode est simplement une application du problème (124). On a construit deux angles N I M et I M E égaux et ayant la position d'alternes-internes (62).

2e Méthode. — *Méthode de la règle et de l'équerre.*

Soient la droite X X′ donnée, et le point A. Par A on veut faire passer une parallèle à X X′ (fig. 72).

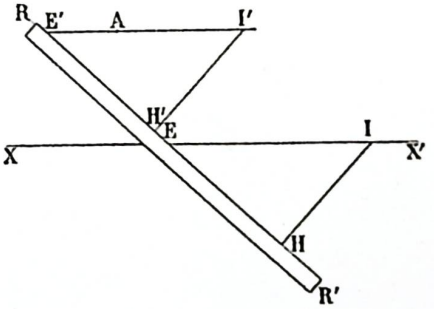


Fig. 72

On applique une équerre sur le papier de telle sorte que l'un de ses côtés E I coïncide avec la droite X X′.

Puis on place une règle R R′ contre un autre côté E H de l'équerre maintenue dans cette position.

La règle R R′ restant fixe, on fait alors glisser l'équerre E H I, le côté E H restant toujours appliqué contre la règle, jusqu'à ce que le côté E I vienne passer par le point A. On immobilise l'équerre dans cette nouvelle position E′ I′ H′. La direction de la droite cherchée est fournie par le côté E′ I′. En effet les angles I′ E′ H′ et I E H étant égaux dans la position de correspondants, I′ E′ et I E sont parallèles (62).

Cette méthode est plus rapide que la première surtout quand on veut tracer une série de parallèles à une droite donnée.

125. Problème. — *Construire la bissectrice d'un angle.* — Soit B A C l'angle donné (fig. 73).

De A comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, on décrit un arc de cercle M N. Avec la même ouverture de compas, de M et de N comme centre, on décrit deux arcs de cercles qui se coupent en

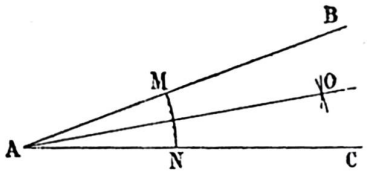


Fig. 73

O. Si on joint A O, on obtient la bissectrice de l'angle B A C. En effet cette droite est perpendiculaire au milieu de la corde de l'arc M N (123) et, par suite, c'est la bissectrice de l'angle M A N du triangle isocèle M A N (35).

126. Problème. — *D'un point donné, extérieur à un cercle, mener une tangente à ce cercle.*

Soient O le cercle donné et A le point (fig.74).

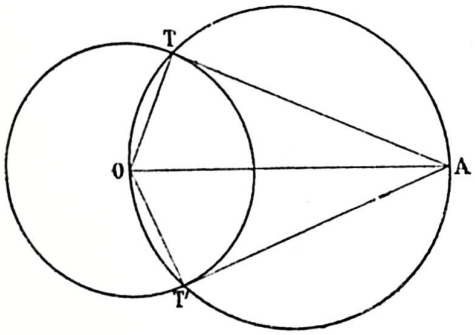


Fig 74

Nous remarquerons que la tangente A T cherchée doit être perpendiculaire à l'extrémité du rayon O T (89). Par suite, le triangle A O T est rectangle en T ; on peut l'inscrire dans une demi-circonférence ayant pour diamètre son hypoténuse O A (115). On en déduit la construction suivante :

On détermine le milieu de O A (122) et de ce point comme centre, sur O A comme diamètre, on décrit une circonférence qui coupe la circonférence donnée en deux points T et T′. Ces deux points donnent chacun une solution A T et A T′. Du point A on peut mener à la circonférence deux tangentes *symétriques* par rapport à O A.

127. Théorème. — *Le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment de droite donné* A B, *sous un angle donné se compose de deux arcs de cercles symétriques par rapport à* A B.

Démonstration : Soit la droite A B (fig. 75). Soit un point M répondant à la condition exprimée dans l'énoncé : on voit du point M la droite A B sous l'angle donné.

Les trois points A M B déterminent une circonférence (98), construisons-la. Je dis que l'arc A M B de cette circonférence est le lieu géométrique cherché pour la partie du plan située au-dessus de A B.

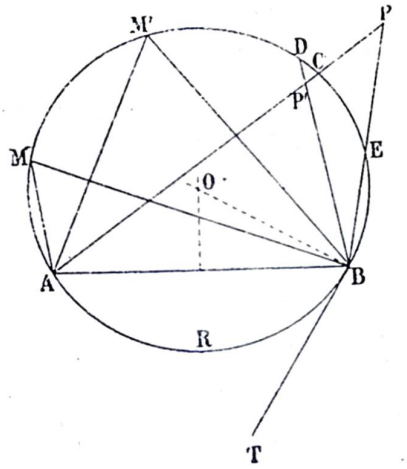


Fig. 75

1° Tout point M′ de cet arc est un point du lieu, car l'angle A M′ B a même mesure que l'angle A M B : ces deux angles inscrits ayant même mesure que la moitié de l'arc A R B (111).

2° Tout point du plan qui n'est pas sur l'arc A M B (pour la partie du plan située au-dessus de A B) n'est pas un point du lieu.

En effet, si le point est situé quelque part en P, à l'extérieur de la circonférence, l'angle A P B a pour mesure la demi-différence des mesures des arcs A B R et C E (114) ; il est donc plus petit que l'angle A M B. Si le point est situé à l'intérieur de la circonférence, en P′ par exemple, l'angle A P′ B a pour mesure la demi-somme des mesures des arcs A R B et D C (113); il est donc plus grand que l'angle A M B.

Le théorème est démontré pour la partie du plan située au-dessus de A B (51). Il suffit de faire tourner, autour de A B comme charnière, la partie supérieure du plan et de la rabattre sur la partie inférieure pour voir que le symétrique de l'arc A M′ B par rapport à A B est le lieu géométrique des points répondant à la condition énoncée et qui sont situés au-dessous de A B.

128. Remarque. — Quand le point M′ se déplace sur l'arc de cercle A M B, dans un sens ou dans l'autre, il finit par venir en coïncidence avec le point A ou le point B. A ce moment l'angle A M′ B n'existe plus et l'on ne peut dire que ni A, ni B ne sont des points du lieu.

Toutefois on peut remarquer que, si M′ tend par exemple à se confondre avec B, la sécante M′ B tend à se confondre avec la tangente au point B à la circonférence (90), soit B T cette tangente. L'angle A B T a même mesure que l'arc A R B (112) et par conséquent il est égal à l'angle A M B.

Cette remarque est très importante car la tangente B T permet de déterminer le centre de l'arc de cercle A M B ; nous allons voir comment.

129. Problème. — *Construire le segment capable d'un angle donné α par rapport à une droite donnée* A B.

Soit A B la droite donnée (fig. 75). Menons en B une droite B T faisant avec A B un angle égal à α, nous savons que la circonférence cherchée est tangente à B T au point B et qu'elle passe par A et B. Son centre

se trouve donc : 1° sur la perpendiculaire au milieu de A B (52), 2° sur la perpendiculaire à B T, au point B (89).

L'intersection O de ces deux droites donne le centre de la circonférence cherchée ; O B est son rayon.

La construction peut se répéter au-dessous de A B, en portant l'angle α au-dessus de la droite donnée.

CONSTRUCTION DES TRIANGLES

130. Problème. — *Construire un triangle, connaissant un côté et les angles adjacents.*

Soient a le côté donné, α et β les angles donnés (fig. 76).

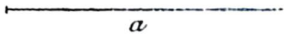


Fig. 76

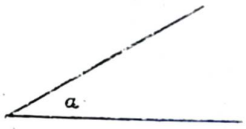


Fig. 77

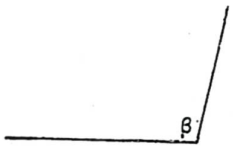


Fig. 78

Sur une droite indéfinie X X′ (fig. 79) on porte la longueur a (fig. 77), en A B, on fait en A avec A B un angle égal à α et en B avec A B et du même côté de la droite un angle β (124). Les deux droites A S, B R ainsi obtenues se coupent en un point C qui est le troisième sommet du triangle.

Discussion. — Pour que les deux droites A S et B R se rencontrent , il faut et il suffit que la somme des angles α et β soit inférieure à 2 droits.

$$\alpha + \beta < 2 \text{ dr.}$$

Si l'on avait

$$\alpha + \beta = 2 \text{ dr.}$$

les deux droites A S et B R seraient parallèles et, si l'on avait

$$\alpha + \beta > 2 \text{ dr.}$$

elles se rencontreraient au-dessous de A B, formant ainsi un triangle dont les angles ne seraient pas α et β, mais les suppléments de ces angles.

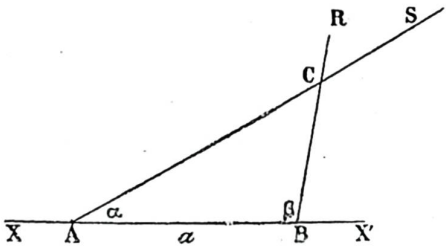


Fig. 79

Dans ces deux cas, il serait impossible de construire le triangle demandé.

Or, la condition

$$\alpha + \beta < 2 \text{ dr.}$$

résulte du théorème (63). Puisqu'on doit avoir

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2 \text{ dr.}$$

Il faut, pour que C ne soit ni nul ni négatif (ce qui n'aurait pas de sens), qu'on ait :

$$\widehat{A} + \widehat{B} < 2 \text{ dr.}$$

131. Problème. — *Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris.*

Sur les deux côtés de l'angle donné on porte les longueurs données pour les côtés du triangle, on joint les extrémités des côtés ainsi limités.

Le problème est toujours possible.

132. Problème. — *Construire un triangle, connaissant les trois côtés.*

Soient a, b, c les trois longueurs données. Des deux extrémités de l'un des côtés c = A B par exemple, comme centres, on décrit deux arcs de cercle ayant respectivement pour rayon a et b. Ces deux arcs de cercle se coupent en deux points C et C′ ; si l'on joint C ou C′ aux deux sommets A et B, on obtient le triangle cherché A B C (fig. 80).

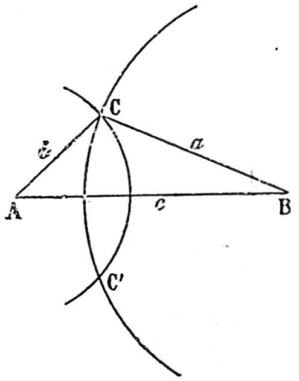


Fig. 80

Discussion. — Pour qu'il y ait une solution il faut que les deux circonférences se coupent, ce qui suppose (103) que l'on a :

$$c < a + b$$

conclusion conforme à celle du théorème (28)

$$AB < BC + AC$$

133. Problème. — *Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

Soient α l'angle donné, a et b les deux côtés, α est opposé, dans le triangle, au côté a.

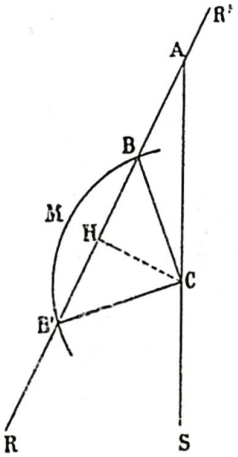


Fig. 81

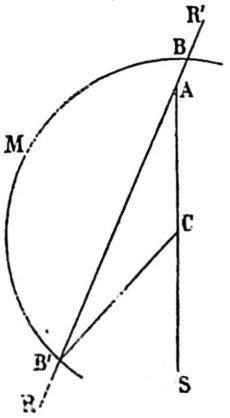


Fig. 82

En un point A d'une droite A S, indéfinie (fig. 81), on mène une droite A R faisant avec A S un angle α. Sur l'un des côtés A S de l'angle R A S ainsi formé on porte la longueur b donnée. On obtient ainsi le côté A C du triangle cherché. Du point C comme centre avec a pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe A R en deux points B et B″. Les deux triangles A B C et A B′ C répondent à la question : car ils ont tous les deux, les côtés A C = b, B C ou B′ C = a, et l'angle R A S = α.

Discussion. — 1° α *est aigu.* — Pour qu'il y ait une solution, il faut et il suffit que l'arc de cercle M rencontre la droite A R.

Pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que le rayon de l'arc de cercle soit au moins égal à la distance du point C à la droite A R, c'est-à-dire à C H, perpendiculaire abaissée de C sur A R. On doit donc avoir, en appelant h la hongueur de cette perpendiculaire.

$$a \geqq h$$

Si a est égal à h, la circonférence est tangente à A R au point H : il n'y a qu'une solution qui est le triangle A C H.

Si a est supérieur à h, la circonférence coupe A R en deux points B et B'. Ces deux points peuvent se trouver sur A R lui-même, du même côté du point A, ou se trouver de part et d'autre de A sur A R et sur son prolongement.

Le premier cas est réalisé si

$$a \leqq b$$

et il y a deux solutions A B C, A B' C.

Le second est réalisé si

$$a > b$$

il n'y a qu'une solution (fig. 82) A B' C. Le triangle A B C ne contient pas en effet l'angle α.

2° α *est obtus.*

Soit S A R' l'angle obtus (fig. 82). Pour qu'il y ait une solution, il faut et il suffit que l'arc M coupe le côté A R' du côté de R', c'est-à-dire que

$$a > b$$

On voit du reste que, même dans ce cas, le problème n'a alors qu'une solution car les deux points d'intersection B et B' se trouvent de part et d'autre de A.

Cette discussion est résumée dans le tableau suivant :

1° $\alpha < 1$ dr.		
	$a < h$	0 solution
	$a = h$	1 solution
	$b > a > h$	2 solutions
	$a > b > h$	1 solution
2° $\alpha = 1$ dr.	$b = h$	
	$a \leqq b$	0 solution
	$a > b$	2 solutions égales
3° $\alpha < 1$ dr.		
	$a \leqq b$	0 solution
	$a > b$	1 solution

Constructions

34. — Construire un triangle connaissant les milieux des trois côtés.

35. — Construire un triangle connaissant deux côtés et une médiane.

36. — Construire un triangle connaissant un côté, un angle adjacent à ce côté et la somme ou la différence des deux autres côtés.

37. — Construire un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit et la hauteur abaissée sur l'hypoténuse.

38. — Construire un triangle rectangle connaissant la médiane et la hauteur relatives à l'hypoténuse.

39. — Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et un angle aigu.

40. — Construire un parallélogramme connaissant les deux diagonales et leur angle.

41. — Mener par un point pris dans le plan d'un cercle une sécante qui détermine dans le cercle un segment capable d'un angle donné.

Figures semblables

LIGNES PROPORTIONNELLES

134. — *Variation du rapport des segments déterminés sur une même droite par deux points fixes et un point mobile.* — Sur une droite indéfinie $x\,x'$ (fig. 83) supposons qu'on ait pris deux points fixes A et B. Un point M se déplace sur $x\,x'$ en partant de la gauche et d'un point *infiniment* éloigné. Il se rapproche du point A en allant de gauche à droite, finit par l'atteindre, le dépasse, parcourt l'intervalle de A à B, puis s'éloigne vers la droite jusqu'à l'*infini* après avoir dépassé le point B.

Fig. 83

Quelle que soit la position du point M, on peut toujours, à un instant donné, mesurer les distances M A et M B et calculer le rapport $\frac{MA}{MB}$. Nous nous proposons d'étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$ quand M se déplace.

Supposons d'abord M placé à gauche du point A et très éloigné, à une distance *infinie*. Nous représenterons l'infini par le symbole : ∞. Dans ce cas, on a donc :

$$MA = \infty \qquad MB = \infty$$

Le rapport $\frac{MA}{MB}$ peut s'écrire :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB - AB}{MB} = \frac{MB}{MB} - \frac{AB}{MB}$$

ou encore

$$\frac{MA}{MB} = 1 - \frac{AB}{MB}$$

AB est invariable et de grandeur *finie*. M B est *infinie*, ce qui veut dire que le numérateur de la fraction $\frac{AB}{MB}$ a une valeur négligeable par rapport à celle de son dénominateur et que par suite, elle peut être considérée comme nulle. Ainsi lorsque le point M est à l'infini à gauche, la valeur du rapport $\frac{MA}{MB}$ tend vers 1.

Si le point M se rapproche du point A, la valeur de A B reste invariable, tandis que M B diminue, tout en restant plus grand que A B. Il s'ensuit que la fraction $\frac{AB}{MB}$ d'abord très petite, devient de plus en plus grande, tout en restant inférieure à 1. Ainsi le rapport $\frac{MA}{MB}$ égal à la différence de l'unité et d'une fraction inférieure à 1 mais croissante, diminue au fur et à mesure que M se rapproche de A.

Quand M arrive en A, on a

$$AB = MB$$

et le rapport $\frac{MA}{MB}$ prend la valeur

$$\frac{MA}{MB} = 1 - 1 = 0$$

M se déplace maintenant entre A et B. Au moment où il part de A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ est nul. M s'écarte

de A ; le numérateur de la fraction, d'abord très petit, va en croissant par valeurs négatives, tandis que le dénominateur, d'abord égal à A B, va en diminuant. La valeur de la fraction croît en valeur absolue. Lorsque le point M se trouve à égale distance de A et de B, le rapport a pour valeur(— 1), puisque ses deux termes sont égaux. Puis le numérateur devient plus grand en valeur absolue que le dénominateur, la fraction croît jusqu'à moins l'infini. Elle atteint cette valeur quand M est infiniment rapproché de B car M B est alors infiniment petit par rapport au numérateur M A.

Supposons maintenant que le point M dépasse le point B et continue à s'éloigner vers la droite. On peut écrire alors :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB - AB}{MB} = 1 - \frac{AB}{MB}$$

Le numérateur A B de la fraction $\frac{AB}{MB}$ est invariable ; le dénominateur négatif part d'une valeur infiniment petite et croît jusqu'à une valeur infiniment grande ; il s'ensuit que la valeur de cette fraction passe de l'infini à zéro. Par conséquent la valeur du rapport $\frac{MA}{MB}$ passe de l'infini à 1.

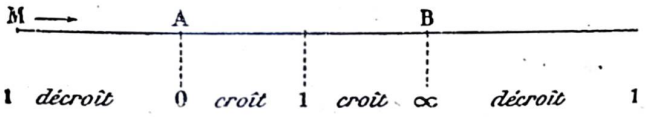


Fig. 85

La valeur du rapport décroît continuellement ; mais il y a un brusque changement de signe quand le point M arrive en B ; la valeur de $\frac{MA}{MB}$ passe subitement de $-\infty$ à $+\infty$.

C'est ce qu'on appelle une discontinuité.

135. Remarque. — D'après ce qui précède, il n'y a qu'une seule position du point M pour laquelle le rapport $\frac{MA}{MB}$ prend une valeur donnée.

On trouve qu'il y a deux positions du point M, l'une entre A et B, l'autre en dehors de cet intervalle, pour lesquelles le rapport $\frac{MA}{MB}$ prend deux valeurs opposées. On obtient ainsi entre les 4 points M, M', A et B une division harmonique.

136. Théorème. — *Une parallèle à un côté d'un triangle partage les deux autres côtés en segments proportionnels.*

Soit le triangle A B C (fig. 86). Menons D E parallèle à B C.

Hypothèse : D E parall. à B C.

Conclusion : $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.

Démonstration : Si la proportion

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$$

est vraie, cela veut dire, que, en mesurant D A et D B avec la même unité, E A et E C avec la même unité, et en prenant les quotients des mesures, on doit trouver le même nombre. Essayons donc de mesurer les segments.

Avec une certaine unité mesurons les segments AD et D B et supposons que cette unité soit contenue 3 fois dans A D et 2 fois dans B D. Divisons A D et D B en parties égales à l'unité choisie. Le rapport

$$\frac{DA}{DB} \text{ est égal à } \frac{3}{2}$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}.$$

Par les points de division F, G, H, menons des parallèles F I, G K, H L à la droite D E ; elles sont en même temps parallèles entre elles et à B C (hypothèse). Je dis que tous les segments A I, I K, K E, etc., déterminés par les parallèles sur la droite A C sont égaux entre eux. Démontrons par exemple que I K est égal à A I.

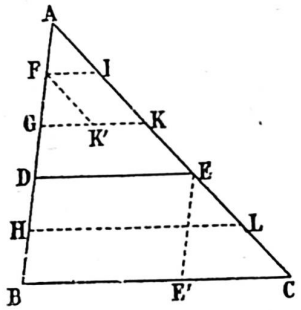


Fig. 86

Par le point F menons F K' parallèle à I K ; la figure F I K K' est un parallélogramme et l'on a

$$F K' = I K.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$F K' = A I.$$

Or les deux triangles A I F, F K' G sont égaux. Ils ont en effet

$$A F = F G$$

par construction ; et les angles adjacents à ces côtés égaux chacun à chacun comme correspondants :

$$\widehat{AFI} = \widehat{FGK'}$$

$$\widehat{FAI} = \widehat{GFK'}$$

De l'égalité de ces deux triangles on déduit :

$$F K' = A I$$

et par suite

$$I K = A I$$

On démontrerait de la même façon que tous les autres segments déterminés sur A C par les parallèles sont égaux à A I.

Mais on peut choisir, pour mesurer A C, l'unité A I. Dans ce cas, on trouve que A E et E C sont exprimés par les mêmes nombres que A D et D B mesurés avec l'unité A F. Le rapport $\frac{EA}{EC}$ est donc lui aussi égal à $\frac{3}{2}$, ce qui entraîne,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$$

137. Remarque. — De la proportion (1), on déduit (Arith.) :

$$\frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC}$$

ou

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Or ces derniers rapports sont égaux au rapport

$$\frac{DE}{BC}$$

à cause de la parallèle au côté B C *et de ce côté lui-même.*

En effet, menons E E′ parallèle à A B, la figure D E E′ B est un parallélogramme et l'on a

$$DE = BE'.$$

Mais E E′, parallèle au côté A B, partage A C et B C en segments proportionnels. On a donc :

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BE'}{E'C}$$

d'où

$$\frac{AE}{AE + EC} = \frac{BE'}{BE' + E'C}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BE'}{BC}$$

et, en remplaçant B E, par D E

$$\frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BC}$$

En définition, D E étant parallèle au côté B C du triangle, on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Cette remarque est très importante.

Les paragraphes (137) et (138) s'appliquent encore au cas où la parallèle D E coupe, non pas les côtés du triangle eux-mêmes, mais les prolongements de ces côtés dans un sens ou dans l'autre. La démonstration est identiquement la même.

138. Théorème réciproque. — *Si une droite partage deux côtés d'un triangle en segments proportionnels, elle est parallèle au troisième côté.*

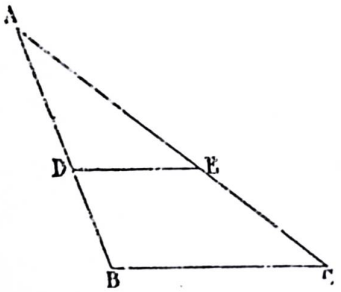


Fig. 87

Soient le triangle A B C et la droite D E qui partage A B et A C en segments proportionnels (fig. 87).

HYPOTHÈSE : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

CONCLUSION : D E parall. à B C.

DÉMONSTRATION : Il n'y a sur A C entre A et C qu'un point E qui partage A C dans le rapport $\frac{AD}{DB}$ (136). Or, si l'on mène par D la parallèle à B C, nous savons que cette parallèle doit partager A C dans le même rapport que A B. Il faut donc qu'elle passe par le point E (hypothèse) et par suite elle se confond avec D E (conclusion).

On suppose naturellement que les points D et E se trouvent tous les deux entre le sommet A et le côté B C, ou tous les deux sur le prolongement de A B et de A C. Dans ce dernier cas, il faudrait modifier légèrement le début de la démonstration en disant : Il n'y a sur le prolongement de A C qu'un point E qui partage A C dans le rapport $\frac{DA}{BD}$ (137).

139. Théorème. — *La bissectrice de l'angle intérieur d'un triangle partage le côté opposé à cet angle en* SEGMENTS ADDITIFS *proportionnels aux côtés de l'angle qui leur sont adjacents.*

La bissectrice de l'angle extérieur d'un triangle partage le côté opposé à cet angle en SEGMENTS SOUSTRACTIFS *proportionnels aux côtés de l'angle qui leur sont adjacents.*

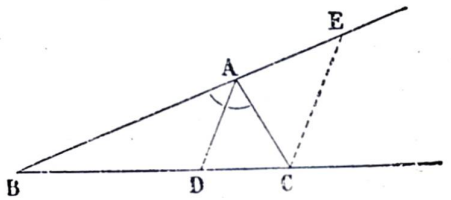


Fig. 88

Soit le triangle A B C (fig. 88). Menons la bissectrice A D de l'angle intérieur B A C.

HYPOTHÈSE : $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.

CONCLUSION : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

DÉMONSTRATION : Nous ne pouvons nous appuyer que sur le théorème (137). Il faut donc chercher à construire une figure répondant aux conditions de ce théorème. Or, nous pouvons remarquer que, si on mène par le point C une parallèle à D A, on forme un triangle B C E dans lequel D A, parallèle à C E, partage B C et B E en segments proportionnels

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

Or, les trois premiers termes de cette proportion sont identiques à ceux de la proportion de la conclusion

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$

Il s'ensuit que, si la conclusion est exacte, on doit avoir

$$AE = AC.$$

Il nous suffit de démontrer cette dernière égalité pour démontrer le théorème. L'hypothèse va nous permettre de le faire.

Les angles B A D et B E C sont égaux comme correspondants ; les angles D A C et A C E sont égaux comme alternes-internes. Ainsi :

$$\widehat{BAD} = \widehat{BEC} \qquad \widehat{DAC} = \widehat{ACE}$$

et, comme les angles B A D et D A C sont égaux par hypothèse, on a :

$$\widehat{BEC} = \widehat{ACE}$$

et par suite le triangle A C E est isocèle (34).

$$AC = AE$$

ce qui démontre la conclusion.

La démonstration de la seconde partie du théorème est identique à celle de la première (fig. 89). On mène par le point C une parallèle à la bissectrice A D de l'angle extérieur C A S.

Le triangle E A C est isocèle. On a :

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BC}{CD} \text{ ou } \frac{BE + EA}{EA} = \frac{BC + CD}{CD}$$

d'où $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$

et comme $AE = AC$

on a enfin $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD}$

Dans la première partie du théorème, on dit que les segments sont *additifs*, parce que l'on a :

$$BC = BD + DC$$

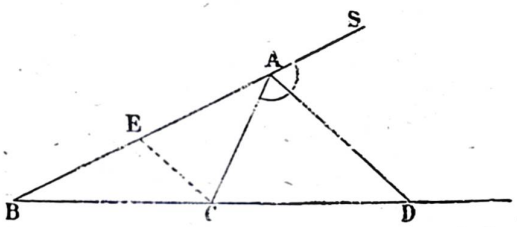


Fig. 89

Dans la seconde, on dit qu'ils sont *soustractifs*, parce que l'on a :

$$BC = BD - DC.$$

140. Théorème réciproque. — *Si une droite issue du sommet de l'angle d'un triangle partage le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents de l'angle, c'est la bissectrice de l'angle.*

En effet, il n'y a qu'un point entre B et C et un point sur le prolongement de B C qui partagent B C en segments proportionnels aux côtés de l'angle (136). Or, d'après le théorème direct, la bissectrice de l'angle intérieur et la bissectrice de l'angle extérieur passent chacune par un de ces deux points. Il s'ensuit que la droite répondant à l'hypothèse du présent théorème se confond avec l'une des bissectrices intérieure ou extérieure.

Exercices

42. — Deux points A et B d'une droite indéfinie $x\,y$ sont distants de 100 mètres ; trouver sur cette droite, un point M, dont le rapport des distances aux deux points A et B soit égal au rapport des nombres 4 et 7.

43. — On donne deux droites $x\,x'$ et $y\,y'$; on les coupe par trois parallèles A B, C D et E F, de manière que $AC = 8$ m., $CE = 10$ m., $BD = 9$ m. Que vaut le quatrième segment D F ?

44. — Dans un triangle A B C, les deux côtés A B et A C mesurent respectivement 18 m. et 24 m. ; on prend sur A B, à partir du point A, une longueur $AD = 5^{m}40$, et sur A C la longueur $AE = 7^{m}20$; la droite D E est-elle parallèle à B C ; Calculer sa valeur quand $BC = 27$ m.

45. — Dans un triangle A B C on donne : $a = 4$ m., $b = 6$ m., $c = 8$ m. ; calculer les segments D A, D C et D′ A, D′ C déterminés sur A C par la bissectrice de l'angle B et celle de l'angle extérieur C B E.

POLYGONES SEMBLABLES

141. Définition. — *Deux polygones sont semblables lorsque, ayant un même nombre de côtés, ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues (c'est-à-dire ceux qui sont adjacents aux angles égaux) proportionnels.*

142. Théorème fondamental. — *Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine un deuxième triangle semblable au premier.*

En effet, soient A B C le triangle, B′ C′ une parallèle au côté B C (fig. 89 bis).

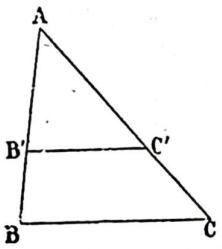


Fig. 89 bis

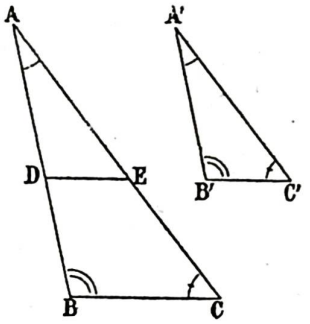


Fig. 90

1° Les angles sont égaux :

A est commun

$\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$ $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$

comme correspondants.

2° Les côtés sont proportionnels (138) :

1. — Cas de similitude des triangles.

143. 1er Cas. — Théorème. — *Deux triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun sont semblables.*

Soient les deux triangles A B C et A′ B′ C′ (fig. 90) qui ont :

Hypothèse : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$

Il s'agit de démontrer qu'on a aussi :

Conclusion : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Démonstration : On ramène la démonstration à celle du 1er cas d'égalité des triangles, en s'appuyant d'autre part sur le théorème fondamental (143).

Portons sur A B une longueur A D égale à A B′, et par D menons une parallèle D E à B C.

Le triangle A D E est semblable au triangle A B C.

Or, le triangle A D E est égal au triangle A′ B′ C′, puisque qu'on a :

$AD = A'B'$ par construction.

$\widehat{DAE} = \widehat{B'A'C'}$ par hypothèse

$\widehat{ADE} = \widehat{A'B'C'}$ comme égaux l'un et l'autre à $\widehat{ABC}$, le premier par construction, le second par hypothèse.

Il s'ensuit que A′ B′ C′ est semblable à A B C.

144. Remarque. — Il suffit de savoir que deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun pour être en état d'affirmer qu'ils sont semblables. L'égalité des troisièmes angles résulte immédiatement du théorème (63). Du reste, on ne s'appuie dans la démonstration que sur l'égalité de deux angles.

145. Corollaire. — *Si deux triangles ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun ils sont semblables.*

En effet, soient A, B, C les angles du premier triangle, A′, B′, C′ ceux du second.

Les théorèmes 23 ou 72 permettent de conclure que l'on a :

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ ou $\widehat{A} + \widehat{A'} = 2$ dr.

$\widehat{B} = \widehat{B'}$ ou $\widehat{B} + \widehat{B'} = 2$ dr.

$\widehat{C} = \widehat{C'}$ ou $\widehat{C} + \widehat{C'} = 2$ dr.

Or on ne peut avoir à la fois deux des égalités de droite, sans quoi la somme des angles des deux triangles serait supérieure à 4 dr., ce qui est impossible. Il faut donc que deux des égalités de gauche au moins soient vérifiées, mais elles entraînent nécessairement la troisième.

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \qquad \widehat{B} = \widehat{B'} \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

La démonstration du théorème se ramène alors à celle du théorème précédent.

146. 2e Cas. — Théorème. — *Si deux triangles ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Hypothèse (fig. 90) :

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

Conclusion : Les triangles sont semblables.

Démonstration : On s'appuie sur le deuxième cas d'égalité des triangles et sur le théorème fondamental.

Prenons $AD = A'B'$ et menons par D une parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable au triangle ABC (143). D'un autre côté, il est égal au triangle A' B' C' ; en effet nous savons que

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \text{ (hypothèse)}$$
$$AD = A'B' \text{ (par construction)}$$

Mais on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

et d'autre part

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

donc

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{AE}{AC}$$
$$A'C' = AE$$

Les deux triangles ADE et A' B' C' ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Le triangle A' B' C' étant égal au triangle ADE, est semblable au triangle ABC.

147. 3e Cas. — Théorème. — *Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Hypothèse (fig. 90) :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Conclusion : Les triangles sont semblables.

Démonstration : On s'appuie sur le théorème (143) et sur le troisième cas d'égalité des triangles.

Prenons $AD = A'B'$ et menons DE parallèle à BC. ADE est semblable à ABC. D'autre part ADE est égal à A' B' C', ces deux triangles ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

En effet de

$$AD = A'B' \text{ (par construction)}$$

on déduit

$$\frac{AD}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

et de

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

on déduit

$$\frac{AE}{AC} = \frac{A'C'}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{DE}{BC} = \frac{B'C'}{BC}$$

d'où

$$AE = A'C' \qquad DE = B'C'$$

2. — Similitude de deux polygones.

148. Théorème. — *Si deux polygones sont semblables, on peut les décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.*

Soient deux polygones ABCDE, A' B' C' D' E' (fig. 91) ils sont semblables :

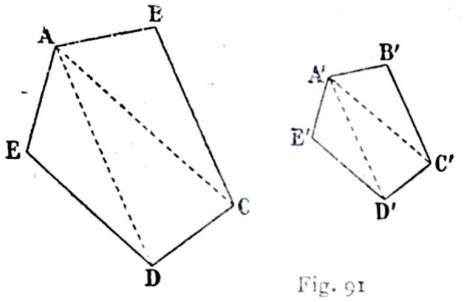


Fig. 91

Hypothèse : Les angles sont égaux. Les côtés homologues sont proportionnels.

Conclusion : On peut les décomposer en triangles semblables, semblablement placés.

Démonstration : Choisissons deux sommets homologues A et A' des deux polygones et joignons les aux autres sommets. Nous formons ainsi ainsi une série de triangles : ABC, A' B' C', etc. Et, comme les deux polygones ont le même nombre de sommets (par définition de la similitude), ils seront décomposés en un même nombre de triangles.

Les triangles ABC, A' B' C', semblablement placés, sont semblables comme ayant un angle égal.

$$B = B'$$

compris entre côtés proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

Par suite on a

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

ce qui entraîne

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'D'}{CD}$$

D'autre part, les deux triangles ABC, A' B' C' étant semblables, on en déduit que les angles ACB et A' C' B' sont égaux et que, les angles DCB, D' C' B' étant eux-mêmes égaux par hypothèse :

$$\widehat{DCB} - \widehat{ACB} = \widehat{D'C'B'} - \widehat{A'C'B'}$$
$$\widehat{ACD} = \widehat{A'C'D'}$$

Mais alors les deux triangles ACD, A' C' D' semblablement placés sont semblables, comme ayant un angle égal

$$\widehat{ACD} = \widehat{A'C'D'}$$

compris entre côtés proportionnels

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'D'}{CD}$$

On répétera la démonstration pour les autres triangles.

149. Théorème réciproque. — *Si deux polygones peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés ils sont semblables.*

HYPOTHÈSE (fig. 91) : A B C semblable à A′ B′ C′
A C D semblable à A′ C′ D′
A D E semblable à A′ D′ E′

CONCLUSION : A = A′ B = B′ C = C′, etc.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}$$

DÉMONSTRATION : 1° Les angles des polygones sont égaux, soit comme angles de triangles semblables, soit comme sommes d'angles égaux. Par exemple :

$$\widehat{EAB} = \widehat{E'A'B'}$$

parce qu'on a :

$$\widehat{EAB} = \widehat{EAD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAB}$$

$$\widehat{E'A'B'} = \widehat{E'A'D'} + \widehat{D'A'C'} + \widehat{C'A'B'}$$

$$\widehat{EAD} = \widehat{E'A'D'} \quad \widehat{DAC} = \widehat{D'A'C'} \quad \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

2° Les côtés sont proportionnels. La similitude des triangles entraîne en effet :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \qquad (1)$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{D'C'}{DC} = \frac{A'D'}{AD} \qquad (2)$$

$$\frac{A'D'}{AD} = \frac{E'D'}{ED} = \frac{E'A'}{EA} \qquad (3)$$

on en déduit, en remarquant que les rapports $\frac{A'C'}{AC}$ et $\frac{A'D'}{AD}$ sont communs l'un aux égalités (1) et (2), l'autre aux égalités (2) et (3) :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{D'C'}{DC} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{E'D'}{ED} = \frac{E'A'}{EA}$$

il suffit de supprimer les rapports $\frac{A'C'}{AC}$ et $\frac{A'D'}{AD}$ pour avoir les propositions de la conclusion.

150. Corollaire. — *Le rapport des périmètres de polygones semblables est égal au rapport des côtés homologues.*

Car de la suite d'égalités

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}$$

on déduit (Arith.) :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'}{AB + BC + DC + DE + EA}$$

Exercices

46. — On donne les deux bases B et b d'un trapèze et sa hauteur h ; on demande de calculer les hauteurs des deux triangles obtenus en prolongeant les côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur point de rencontre.

Application numérique : B = 40 m., b = 24 m., h = 20 m.

47. — Construire les deux points qui divisent un segment de droite A B dans le rapport $\frac{p}{q}$, p et q étant des longueurs données.

48. — Etant donné deux circonférences O et O′ de rayons différents R et R′ ; 1° si l'on mène deux rayons parallèles et de même sens, la droite qui joint les extrémités des deux rayons rencontre la ligne des centres en un point fixe ; 2° si l'on mène deux rayons parallèles et de sens contraires, la droite qui joint les extrémités des deux rayons rencontre aussi la ligne des centres en un point fixe.

49. — Inscrire un carré dans un triangle.

RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

151. Définition. — On appelle *projection orthogonale* (orthos = droit, gônos = angle) ou *projection* d'un segment de droite sur un axe, le segment limité sur cet axe par les pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités du segment de droite donné, sur l'axe.

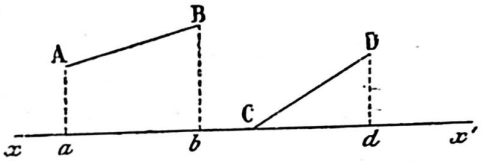


Fig. 92

Ex. : La projection de A B sur l'axe xx' est ab (fig. 92). En particulier, si le segment a une de ses extrémités sur l'axe, comme C D, sa projection est la portion de l'axe comprise entre cette extrémité et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité sur l'axe. La projection de C D est $C\,d$.

152. Théorème. — *Dans un triangle rectangle :*

La hauteur relative à l'hypoténuse partage le triangle en deux triangles semblables entre eux et semblables au triangle proposé, ce qui conduit aux résultats suivants :

1° *Cette hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

2° *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.*

3° *Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,*

1° (Fig. 93),

HYPOTHÈSE : $\widehat{BAC}$ = dr.
A H perpendiculaire à B C

CONCLUSION : A B H semblable à A H C
A B H et A H C semblables à A B C

DÉMONSTRATION : Le triangle A H C est semblable au triangle B A C en vertu du premier cas de similitude, car les angles A H C et B A C sont égaux comme droits (hypothèse) et l'angle C est commun aux deux triangles. On a donc :

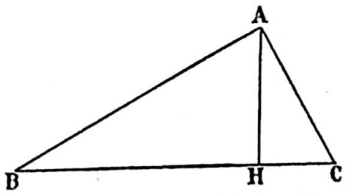


Fig. 93

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \qquad (1)$$

Le triangle A B H est semblable lui aussi au triangle C B A, car les angles A H B et B A C sont égaux comme droits, et l'angle B est commun. On a donc :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB} \qquad (2)$$

Puisque les deux triangles A B H e C A H sont semblables l'un et l'autre au triangle A B C, ils ont leurs angles égaux, ils sont semblables entre euxt On a encore :

$$\frac{AH}{CH} = \frac{AB}{CA} = \frac{BH}{AH} \qquad (3)$$

2° De cette dernière ligne d'égalité, on tire, en supprimant le rapport du milieu

$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$$

Ce qui montre que A H est moyenne proportionnelle entre B H et C H.

3° Des égalités (1), on tire :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \qquad (4)$$

A C est moyen proportionnel entre B C (hypoténuse entière) et C H (projection de A C sur B C).

3° Des égalités (2), on tire

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \qquad (5)$$

A B est moyen proportionnel entre B C (hypoténuse entière) et B H (projection de A B sur B C).

4° De (4), on tire :

$$\overline{AC}^2 = BC \times CH$$

et de (5)

$$\overline{AB}^2 = BC \times BH$$

En additionnant membre à membre ces deux dernières égalités, on en tire :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times CH + BC \times BH$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times (CH + BH) = BC \times BC$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

153. Remarque. — Désignons par a l'hypoténuse B C du triangle rectangle A B C, par b et c les côtés A C et A B de l'angle droit, par h la hauteur A H relative à l'hypoténuse et par b' et c' les projections des côtés b et c sur l'hypoténuse on a les quatre relations.

1° $h^2 = b'\,c'$;
2° $b^2 = a\,b'$;
3° $c^2 = ac'$;
4° $a^2 = b^2 + c^2$

qui permettent de résoudre un grand nombre de problèmes numériques relatifs au triangle rectangle.

154. Observation. — Dans la démonstration de ce théorème, comme dans beaucoup d'autres démonstrations, on éprouve quelquefois de la difficulté à écrire les proportions des côtés homologues des triangles semblables. Par exemple pour les triangles A B C et A H C. Pour éviter les erreurs, on doit s'attacher à faire correspondre dans un même rapport les côtés opposés aux angles égaux :

B C opposé à l'angle A du triangle A B C correspond à

A C opposé à l'angle H du triangle A H C.

Nous conseillons de procéder de la manière suivante :

Ecrire les trois lettres qui désignent les trois sommets de l'un des triangles A H C par exemple. Ecrire au-dessous les trois lettres de l'autre triangle en faisant correspondre dans une même colonne les lettres qui désignent des angles égaux :

A	H	C
B	A	C

Former les rapports en prenant chaque fois pour numérateur deux lettres de la première ligne, et pour dénominateur les deux lettres correspondantes de la seconde ligne :

$$\frac{AH}{BA} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC}$$

Exercices

50. — Connaissant les projections des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse $b' = 7^m,2$; $c' = 12^m,8$, calculer l'hypoténuse a, les côtés b et c de l'angle droit, la hauteur h abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

51. — Dans un cercle de rayon 6 m., on mène un diamètre A B que l'on partage en 5 parties égales et par les points de division on mène des cordes perpendiculaires à A B. Calculer les longueurs de ces cordes.

52. — Si du milieu d'un des côtés d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, la différence des carrés des segments déterminés sur l'hypoténuse est égale au carré de l'autre côté du triangle.

53. — Dans un triangle rectangle, l'inverse du carré de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est égal à la somme des inverses des carrés des deux côtés de l'angle droit.

54. — Par les extrémités d'un diamètre A B d'une circonférence on mène deux tangentes qui sont parallèles, puis une troisième tangente quelconque C D dont le point de contact est E ; démontrer que le rayon est moyen proportionnel entre les deux segments C E et D E.

RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE

155. Théorème. — *Dans un triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur celui-là.*

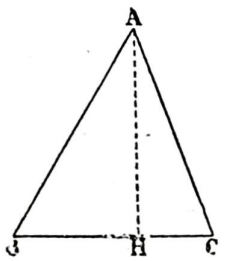


Fig. 94

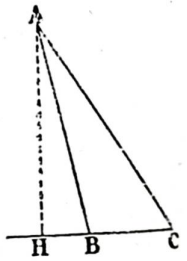


Fig. 95

Soit le triangle A B C (fig. 94) :

Hypothèse : A C B < 1 dr.

Abaissons la perpendiculaire A H sur B C, on veut démontrer :

Conclusion : $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times HC$

Démonstration : Dans le triangle A B H, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \qquad (1)$$

Mais

$$BH = BC - CH$$

et (Algèbre) :

$$\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 - 2\,BC \times CH + \overline{CH}^2 \qquad (2)$$

Dans le triangle A H C, on a d'autre part

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$$

d'où

$$\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 \qquad (3)$$

Remplaçons dans l'égalité (1), AH^2 et BH^2 par les valeurs des égalités (2) et (3) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times CH + \overline{CH}^2$$

ou, en réduisant les termes semblables

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times CH$$

c'est la conclusion.

156. — Remarque. — Nous avons supposé que H tombait entre B et C ; il pourrait tomber sur le prolongement de B C (fig. 95).

Le calcul se ferait d'une façon identique :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$$
$$BH = CH - BC$$
$$\overline{BH}^2 = \overline{CH}^2 - 2\,BC \times CH + \overline{BC}^2$$
$$\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 + \overline{CH}^2 - 2\,BC \times CH + \overline{BC}^2$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times CH$$

157. — Théorème. — *Dans un triangle, le carré d'un côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur celui-là.*

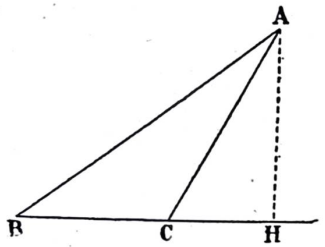


Fig. 96

Soit le triangle A B C (fig. 96) :

Hypothèse : $\widehat{ACB} > 1$ dr.

Conclusion :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CH$$

Démonstration : Dans le triangle A B H, on a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \qquad (1)$$

Evaluons AH^2 et BH^2. Dans le triangle A H C on a :

$$\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 \qquad (2)$$

D'autre part

$$BH = BC + CH$$
$$\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CH + \overline{CH}^2 \qquad (3)$$

(Algèbre).

En portant ces valeurs dans l'égalité (1), on obtient :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CH + \overline{CH}^2$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CH$$

c'est la conclusion.

158. Application. — Il résulte des théorèmes n°s 153, 156, 158, que *dans un triangle le carré d'un côté est égal, inférieur ou supérieur à la somme des carrés des autres côtés suivant que l'angle opposé à ce côté est droit, aigu ou obtus*, et réciproquement, *qu'un angle d'un triangle est droit, aigu ou obtus suivant que le carré du côté opposé est égal, inférieur ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

De là, un moyen de déterminer la nature de chacun des angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés.

Exercices

55. — Les côtés d'un triangle valent $a = 14$ m., $b = 15$ m., $c = 13$ m. ; calculer la hauteur h correspondant au côté a.

56. — Si dans un triangle A B C on mène la médiane A M et la hauteur A H, démontrer que le carré du plus grand des deux côtés A B et A C est égal à $AM^2 + BM^2 + 2\,BM \times MH$ et le carré du plus petit à $AM^2 + BM^2 - 2\,BM \times MH$.

En déduire une expression de la somme $AB^2 + AC^2$ (*somme des carrés de deux côtés d'un triangle*). Enoncer le théorème obtenu.

Lignes proportionnelles dans le cercle

159. — Théorème. — *Si par un point on fait passer plusieurs sécantes d'un même cercle, le produit des segments déterminés sur chacune des sécantes par le point donné et par les points d'intersection avec la circonférence est constant.*

On peut envisager deux cas : 1° Le point est en dehors de la circonférence ; 2° Il est à l'intérieur de la circonférence.

1° (fig. 98). Par le point M, extérieur au cercle, menons deux sécantes quelconques M A B, M C D :

Hypothèse : A, B, C, D sont sur une même circonférence.

Conclusion : $MA \times MB = MC \times MD$.

Démonstration : Joignons A D et C B. Nous exprimerons que les quatre points sont sur la circonférence en écrivant que les angles inscrits A B C, et A D C qui ont tous deux pour mesure la moitié de l'arc A C, sont égaux :

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$$

Les deux sécantes et les droites A D et C B forment deux triangles M B C, M D A qui sont semblables comme ayant l'angle M commun et l'angle M B C égal à l'angle M D A (144).

On a donc :

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA} = \frac{BC}{DA}$$

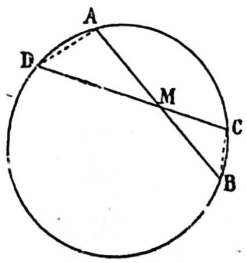


Fig. 97

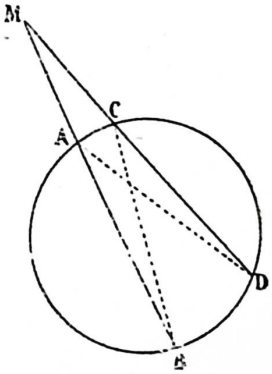


Fig. 98

De la première proportion, on tire, en faisant le produit des extrêmes et le produit des moyens (Arith.) :

$$MA \times MB = MC \times MD$$

2° M est à l'intérieur du cercle (fig. 97). — La démonstration est rigoureusement identique. Il suffit

de remarquer que les angles A M D et C M B sont égaux comme opposés par le sommet.

160. Théorème. — *Si d'un point extérieur à un cercle, on mène à ce cercle une sécante et une tangente, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

Soit un point M extérieur au cercle (fig. 99). Menons la tangente M T et la sécante M A B.

HYPOTHÈSE : M T tangente,
M A B sécante.

CONCLUSION : $\overline{MT}^2 = MA \times MB$.

DÉMONSTRATION : Joignons A T et B T. Les deux triangles M B T et M T A sont semblables, car ils

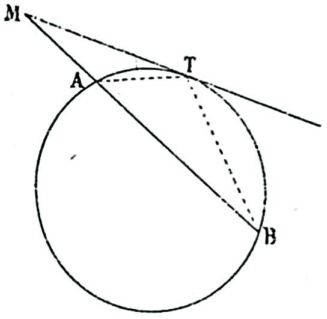


Fig. 99

ont deux angles égaux chacun à chacun, savoir : M commun, $\widehat{MBT} = \widehat{MTA}$, parce qu'ils ont tous deux pour mesure la moitié de l'arc A T (111) et (112). On peut donc écrire :

$$\frac{MB}{MT} = \frac{MT}{MA} = \frac{BT}{TA}$$

De la première proportion, on tire :

$$\overline{MT}^2 = MA \times MB$$

161. Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Le produit constant $MA \times MB$ s'appelle *puissance* du point M par rapport au cercle.

Exercice

57. — Si deux cercles O et O′ se coupent en A et B, les tangentes aux deux cercles, issues d'un même point de la corde commune A B prolongée, sont égales. Examiner le cas où les circonférences deviennent tangentes.

Constructions au moyen de la règle et du compas

162. Problème I. — *Partager un segment de droite donné en parties proportionnelles à deux segments donnés.*

On s'appuie sur le théorème (137).

Soient a, b les longueurs données, A B le segment de droite donné (fig. 100). Il s'agit de trouver sur A B un point M tel que l'on ait :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}$$

Par le point A menons une droite quelconque A X et sur A X prenons des longueurs $AC = a$, $CD = b$. Joignons D B et menons par C une parallèle C M à D B. M est le point cherché. On a en effet (137) :

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AM}{MB}$$

On peut diviser une droite en segments proportionnels à plusieurs longueurs données en procédant d'une manière analogue. On porte les différentes longueurs les unes à la suite des autres sur A X, on joint l'extrémité D du dernier segment au point B,

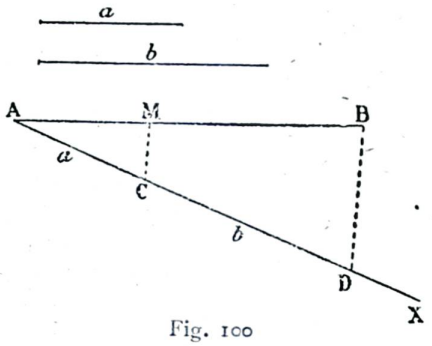


Fig. 100

et on mène par les autres points de division des parallèles à B D.

163. Problème II. — *Construire une quatrième proportionnelle à trois longueurs données.*

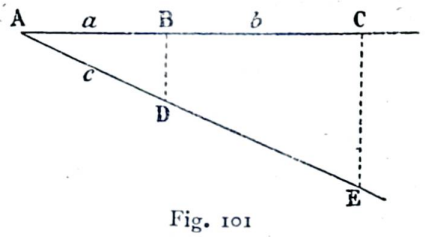


Fig. 101

Sur les deux côtés d'un angle, on porte es trois longueurs données (fig. 101). $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$. On joint B D et on mène par C une parallèle à B D ; on obtient ainsi le point E et le segment D E est la quatrième proportionnelle cherchée. On a bien en effet (137) :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

164. Remarque. — Il faut avoir soin de disposer la figure de façon que l'ordre des segments corresponde à leur place dans la proportion qu'on cherche à compléter.

Ainsi, en représentant par x la quatrième proportionnelle cherchée, on peut avoir l'une des quatre proportions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \qquad \frac{a}{b} = \frac{x}{c} \qquad \frac{a}{x} = \frac{b}{c} \qquad \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

Dans le premier cas, les segments seront disposés comme sur la figure 101. Dans le second, on voit que D E devrait occuper la place de A D et réciproquement : on remplace la proportion donnée par la proportion équivalente.

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{x}$$

on devra faire

$$AB = b \qquad BC = a \qquad AD = c$$

Dans le troisième cas, on écrira la proportion

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{x}$$

et on fera

$$AB = b \qquad BC = c \qquad AD = a$$

Enfin, dans le quatrième cas, on écrira la proportion :

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{x}$$

et on fera

$$AB = c \qquad BC = b \qquad AD = a$$

165. Problème III. — *Construire une moyenne proportionnelle à deux longueurs données.*

On peut appliquer soit la deuxième, soit la troisième partie du théorème (153), soit encore le théorème (161). On dispose ainsi de trois méthodes.

Soient a et b des longueurs données ; on cherche une longueur x telle que l'on ait :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

ou

$$x^2 = a \times b$$

1re Méthode. — Si on admet que a et b représentent les deux segments déterminés par le pied de la hauteur sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, cette hauteur représentera justement la longueur x cherchée.

Sur une droite (fig. 102), on porte les longueurs données A B = a, B C = b à la suite l'une de l'autre. Sur A C comme diamètre, on décrit une demi-circonférence. Nous savons que le sommet d'un triangle

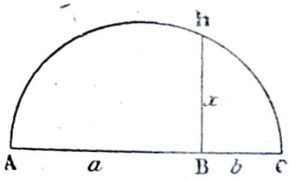


Fig. 102

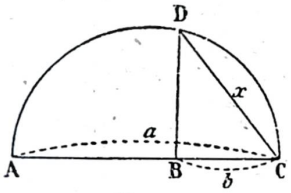


Fig. 103

rectangle qui a pour hypoténuse A C se trouve sur cette demi-circonférence (115). Au point B, on élève une perpendiculaire à A C, qui rencontre la circonférence au point H. Dans le triangle rectangle A H C, on a bien (153) :

$$\overline{BH}^2 = AB \times BC$$

B H est la longueur x cherchée.

2° Méthode. — Si on admet que a représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle, et b la projection sur l'hypoténuse de l'un des côtés de l'angle droit, ce côté de l'angle droit représente justement la moyenne proportionnelle cherchée.

Sur une droite, on porte la longueur A C = a (fig. 103), puis sur A C, à partir de C par exemple, on porte C B = b. Sur A C comme diamètre, on décrit une demi-circonférence ; on élève en B la perpendiculaire B D à A C. On joint au point C le point D où cette perpendiculaire rencontre la circonférence. Dans le triangle A D C on a (153) :

$$\overline{DC}^2 = AC \times BC$$

D C est donc bien la longueur x cherchée.

3° Méthode. — Si on admet que a représente la sécante entière menée d'un point à une circonférence, et b sa partie extérieure, la tangente menée du même

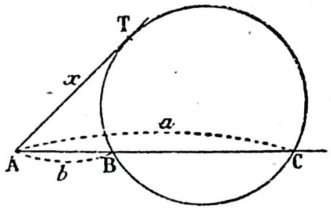


Fig. 104

point à la même circonférence représentera la moyenne proportionnelle cherchée.

Sur une droite indéfinie (fig. 104) on porte A C = a, A B = b ; sur B C comme corde, on décrit une circonférence quelconque.

Du point A on mène la tangente A T à cette circonférence. On a bien (161) :

$$\overline{AT}^2 = AB \times AC$$

A T est la longueur x cherchée.

166. Problème IV. — *Construire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée.*

Soient X X' la droite donnée, A et B les points donnés (fig. 105). Il suffit de trouver le point de contact de la circonférence et de la droite, puisqu'une circonférence est déterminée par trois points. Soit M ce point.

On doit avoir :

$$CA \times CB = \overline{CM}^2$$

Il suffit donc de construire la moyenne proportionnelle des deux segments C A, C B déterminés sur A B par le point de rencontre C de la droite A B et de X X'.

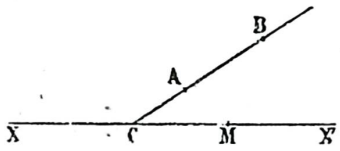


Fig. 105

Comme on peut porter cette moyenne proportionnelle soit dans le sens C X', soit dans le sens C X, il y a deux solutions.

Le problème n'est évidemment possible qu'autant que les points donnés sont d'un même côté de X X'.

167. Remarque. — Si A B est parallèle à X X', cette construction est en défaut. Il suffit alors de remarquer que le point de contact cherché est sur la perpendiculaire élevée au milieu de A B.

Exercices

58. — Construire deux droites connaissant leur somme et leur moyenne proportionnelle.

59. — Construire deux droites connaissant leur différence et leur moyenne proportionnelle.

Polygones réguliers

168. Définition. — *On appelle polygone régulier un polygone qui a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux.*

On dit qu'une ligne brisée est régulière quand elle a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux.

Le théorème suivant démontre l'existence des polygones réguliers.

169. Théorème. — *Si on divise une circonférence en un certain nombre de parties égales, n par exemple, et qu'on joigne les points de division par des droites, on obtient un polygone régulier de n côtés.*

En effet les droites sont toutes égales parce que ce sont les cordes d'arcs égaux et les angles sont égaux parce qu'ils ont même mesure ; puisqu'ils sont inscrits dans des arcs égaux (111).

170. Théorème. — *Un polygone régulier peut être inscrit dans un cercle ; il peut être circonscrit à un cercle.*

Soit le polygone régulier A B C D E F (fig. 106).

Hypothèse : Les côtés sont égaux. Les angles sont égaux.

Conclusion : 1° Tous les sommets sont sur une même circonférence.

2° Tous les côtés sont tangents à une même circonférence.

Démonstration : 1° Nous pouvons toujours faire passer une circonférence par trois des sommets, A, B, C par exemple (98). Si nous démontrons que cette circonférence passe par le quatrième sommet D, nous

aurons établi la première partie du théorème, car on pourrait démontrer de proche en proche qu'elle passe par tous les sommets.

L'empreinte de la figure restant fixée sur le plan, supposons qu'on fasse tourner la figure autour du centre O de la circonférence jusqu'à ce que le sommet A

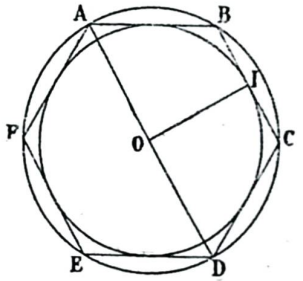


Fig. 106

vienne coïncider avec B. A ce moment A B coïncide avec B C, parce que, par hypothèse

$$A\,B = B\,C$$

et que les arcs sous-tendus par ces cordes sont égaux (95).

Mais l'angle A B C est égal à l'angle B C D, par hypothèse ; il s'ensuit que B C doit prendre la direction de C D et comme

$$B\,C = C\,D$$

par hypothèse, C tombe en D.

Or, dans le mouvement de rotation autour du point O, C est resté sur la circonférence ; donc D s'y trouve également.

2° Toutes les cordes A B, B C, etc. étant égales (hypothèse), sont à la même distance du centre O (96). Si donc on abaisse du point O la perpendiculaire O I sur l'un des côtés B C, et que, du point O comme centre avec O I pour rayon, on décrive une circonférence, cette circonférence sera tangente à tous les côtés du polygone. C'est la circonférence inscrite.

171. Définitions. — Le rayon de la circonférence circonscrite s'appelle : *rayon du polygone.*

Le rayon de la circonférence inscrite s'appelle : *apothème du polygone.*

Le centre commun des deux circonférences est le *centre du polygone régulier.*

L'angle sous lequel on voit du centre un côté du polygone s'appelle *angle au centre du polygone.*

On a vu (65) que la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois 2 *droits* qu'il y a de côtés *moins* 2 ou a $(2\,n - 4)$ *dr.*, n étant le nombre des côtés.

Tous les angles intérieurs étant égaux, chacun d'eux a pour valeur

$$\frac{(2n - 4)\ dr}{n}$$

172. Remarque. — Le théorème précédent donne le moyen de construire un polygone régulier quand on connaît son rayon ou son apothème. On décrit une circonférence ayant, pour rayon, le rayon ou l'apothème du polygone, on la divise en autant de parties égales qu'il y a de côtés au polygone, puis on joint les points de division ou on mène par ces points des tangentes à la circonférence.

La seule difficulté réside dans la division de la circonférence.

Proposons-nous d'inscrire des polygones réguliers dans quelques cas simples.

173. Problème I. — *Inscrire un carré dans un cercle.*

On mène dans le cercle deux diamètres rectangulaires A C, B D (fig. 107) et on joint leurs extrémités ; le quadrilatère A B C D est un carré car les sommets partagent la circonférence en quatre parties égales.

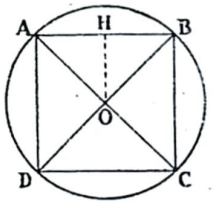


Fig. 107

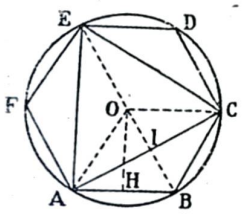


Fig. 108

Calcul du côté. — Soit R le rayon du cercle. Dans le triangle rectangle A O B, on a :

$$\overline{A\,B}^2 = \overline{A\,O}^2 + \overline{O\,B}^2 = 2\,R^2$$

d'où

$$A\,B = R\sqrt{2}$$

Calcul de l'apothème. — Soit O H l'apothème ; on a :

$$O\,H = H\,B = \frac{A\,B}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

174. Remarque. — Ayant inscrit un carré, pour inscrire un octogone régulier, il suffit de partager en deux parties égales l'arc sous-tendu par chaque côté du carré. On passe de même de l'octogone régulier au polygone régulier de 16 côtés, de celui-ci au polygone régulier de 32 côtés et ainsi de suite. De sorte que, sachant inscrire un carré, on sait inscrire des polygones réguliers de 8, de 16, de 32 et en général d'un nombre de côtés égal à 2^n.

175. Problème. — *Inscrire dans un cercle : 1° un hexagone régulier ; 2° un triangle équilatéral.*

1° Supposons le problème résolu et soit A B (fig. 108) le côté d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle O A. L'angle A O B étant le sixième de 360° est égal à 60° ; chacun des angles égaux O A B et O B A est la moitié du supplément de 60°, c'est-à-dire la moitié de 120° ou 60° ; donc le triangle A O B est équiangle et par suite équilatéral, et le côté de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est égal au rayon du cercle.

Il suffit donc, pour inscrire dans un cercle un hexagone régulier, de prendre six cordes consécutives égales au rayon.

Calcul de l'apothème. — Soit O H l'apothème de l'hexagone. Le point H est le milieu de A B. On a :

$$A\,H = \frac{A\,B}{2} = \frac{R}{2}$$

Dans le triangle rectangle O A H, on a :

$$\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2$$

ou

$$\overline{O\,H}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3\,R^2}{4}$$

d'où

$$O\,H = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

2° En joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone, on obtient le triangle équilatéral A C E. Mais le quadrilatère A B C O dont les quatre côtés sont égaux, étant un losange, les diagonales A C, O B se coupent en parties égales et à angle droit. De là résulte un autre moyen pour inscrire un triangle équilatéral dans un cercle : on prend un rayon O B, et on mène

une corde A C perpendiculaire au milieu I du rayon O B. Les points A et C sont deux sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle ; le troisième sommet est le point E diamétralement opposé au point B.

Calcul du côté. — Dans le triangle rectangle A B E on connaît l'hypoténuse B E = 2 R et le côté A B = R. On a donc :

$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2$$

ou

$$\overline{AE}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

d'où

$$AE = R\sqrt{3}$$

Calcul de l'apothème. — Soit O I l'apothème. Le quadrilatère A B C O étant un losange, on a :

$$OI = \frac{R}{2}$$

176. Remarque. — Sachant inscrire l'hexagone régulier, on sait inscrire des polygones réguliers de 12, de 24, de 48 côtés, et en général d'un nombre de côtés égal à 3×2^n.

Exercices

60. — Calculer les côtés et les apothèmes des polygones réguliers de 8 côtés, de 12 côtés, inscrits dans un cercle de rayon égal à 3 mètres.

61. — Mener par un point une droite qui divise une circonférence donnée dans le rapport de 3 à 7.

Mesure de la circonférence

177. Définition. — Pour comparer la longueur d'un arc de courbe à celle d'une ligne droite, on est obligé de ramener la mesure de l'arc à celle d'une droite ou d'une série de droites. C'est ce qui donne lieu à la définition suivante :

On appelle LONGUEUR *d'un arc de courbe la limite commune vers laquelle tendent les périmètres d'une ligne brisée convexe inscrite dans l'arc et d'une ligne brisée convexe circonscrite à l'arc, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de ces lignes brisées.*

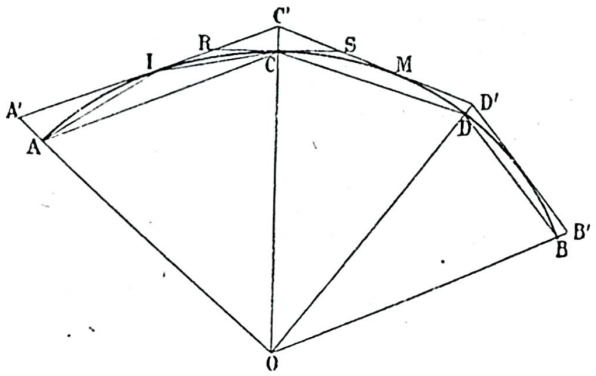


Fig. 109

Ex. : Considérons l'arc de cercle A M B (fig. 109) et soit A C D B, A' C' D' B' des lignes brisées convexes inscrite et circonscrite à l'arc de cercle.

La ligne A C D B est plus courte que la ligne A' C' D' B'. Par définition la longueur de l'arc de cercle est comprise entre la longueur de ces deux lignes :

$$ACDB < \widehat{AMB} < A'C'D'B'$$

Augmentons le nombre des côtés de la ligne A C D B, par exemple en joignant un point I de la circonférence aux deux sommets A et C. On a :

$$AI + IC > AC$$

et par suite

$$AICDB > ACDB$$

De même, si on joint deux points R S de la ligne circonscrite, on obtient une ligne A' R S D' B' qui est plus courte que A' C' D' B', parce que

$$RS < RC' + C'S$$

donc

$$A'RSD'B' < A'C'D'B'$$

Il s'ensuit que

$$A'C'D'B' - ACDB > A'RSD'B' - AICDB$$

On voit que l'intervalle dans lequel est comprise la valeur de l'arc A M B a diminué

$$ACDB < AICDB < AMB$$
$$A'RSD'B' < A'C'D'B'$$

Si on augmente indéfiniment le nombre des côtés de chacune des lignes brisées, la longueur de la ligne inscrite augmente en restant toujours plus petite que la longueur de la ligne circonscrite et la longueur de la ligne circonscrite diminue en restant toujours plus grande que la ligne inscrite. La différence de ces deux longueurs diminue donc elle-même indéfiniment. Si on se donne une valeur ε, aussi petite que l'on voudra, on pourra toujours amener la différence à être plus petite que ε. Il suffira d'augmenter suffisamment le nombre des côtés de chaque ligne. Soient P' le périmètre de la ligne circonscrite, P le périmètre de la ligne inscrite, on pourra toujours amener P' — P à satisfaire à la relation :

$$P' - P < \varepsilon$$

Il s'ensuit que P' et P se rapprochent indéfiniment d'une valeur C intermédiaire à P' et à P

$$P' > C > P$$

Cette valeur C, qu'on appelle limite commune des périmètres P' et P, est, par définition, la longueur de l'arc de cercle.

178. Théorème. — *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables. Le rapport de leurs périmètres est égal au rapport de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

En effet :

1° Les polygones ont leurs angles égaux, et, comme chacun d'eux a tous ses côtés égaux, le rapport d'un côté de l'un à un côté de l'autre est évidemment le même quels que soient les côtés choisis.

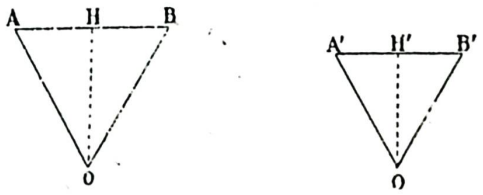


Fig. 110

2° Soient A B et A' B' les côtés des deux polygones (fig. 110). Considérons les triangles formés en joignant les extrémités de ces côtés aux centres des polygones.

Les angles au centre A O B, A' O' B' sont égaux et, comme les triangles A O B, A' O' B' sont isocèles, ils sont semblables. On a donc :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O'}{AO} = \frac{O'H'}{OH}$$

c'est-à-dire que les côtés sont dans le même rapport que les rayons et les apothèmes. Il s'ensuit (151) que le rapport des périmètres des deux polygones est égal au rapport des rayons et des apothèmes.

Si l'on désigne par P et P′ les périmètres des deux polygones, par R et R′ les rayons O A, O′ A′ des cercles circonscrits, par r et r' les rayons des cercles inscrits, on a :

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{r'}$$

179. Théorème. — *Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.*

Soient deux circonférences de longueurs C et C′, soit R et R′ leurs rayons. Inscrivons dans chaque circonférence un polygone régulier d'un même nombre de côtés, soient P et P′ les périmètres de ces polygones.

On a (179) :

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} \qquad (1)$$

P a pour limite C quand on augmente indéfiniment le nombre des côtés du polygone (178) ; de même P′ a pour limite C′ ; si on prend soin de conserver toujours aux deux polygones réguliers le même nombre de côtés, l'égalité (1) sera toujours vraie. On aura donc, à la limite :

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{2R}{2R'}$$

D'où (Arithm.) :

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} = \pi$$

Le rapport de la circonférence C au diamètre 2 R est un nombre constant. On désigne ce nombre par la lettre grecque : π (pi).

180. Remarque. — Le nombre π étant supposé connu, on pourra aisément calculer la longueur d'une circonférence connaissant son rayon R. Car de l'égalité

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

on tire

$$C = 2\pi R$$

Le calcul de π est donc de la plus grande importance. Nous allons voir par quelles méthodes on peut le réaliser.

181. Méthodes permettant le calcul de π. — On peut se donner arbitrairement l'un des termes du rapport $\frac{C}{2R}$ et calculer l'autre. De là deux méthodes différentes :

1° *Méthodes des périmètres.* — On se donne R et on calcule une valeur approchée de C.

2° *Méthode des isopérimètres.* — On se donne C et on calcule une valeur approchée de R.

Nous examinerons la première méthode seulement.

182. Méthode des périmètres. — On se donne R = 1. On inscrit dans la circonférence un polygone régulier de n côtés et on trace le polygone régulier de n côtés circonscrit à la circonférence.

Si R = 1, on a

$$\frac{C}{2} = \pi$$

Le demi-périmètre du polygone régulier inscrit est une valeur approchée, par défaut, de π. Le demi-périmètre du polygone régulier circonscrit est une valeur approchée, par excès, de π.

Si les deux valeurs trouvées commencent par un certain nombre de chiffres identiques, on sait que ces chiffres sont aussi les premiers du nombre π.

En doublant indéfiniment le nombre des côtés des polygones on peut ainsi obtenir autant de chiffres décimaux que l'on veut et calculer π à une approximation donnée.

Pour appliquer cette méthode, il faut savoir résoudre les deux problèmes suivants :

183. Problème I. — *Etant donné le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.*

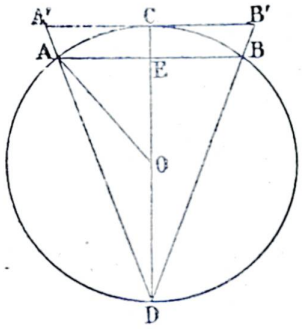


Fig. 111

Soit A B le côté connu (fig. 111). Menons le diamètre C D perpendiculaire à A B. On veut calculer A C, côté du polygone d'un nombre double de côtés. Joignons A au centre O.

Le triangle C A D est rectangle (115). On peut donc écrire (153) :

$$\overline{AC}^2 = CD \times CE$$

Or, on a :

$$CE = OC - OE$$

et dans le triangle rectangle A O E :

$$\overline{OE}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AE}^2$$

Si nous appelons R le rayon de la circonférence et le côté A B, nous pouvons écrire :

$$AE = \frac{a}{2} \qquad OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$CE = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$AC^2 = 2R \times \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)$$

et en posant $\qquad AC = a'$

$$a' = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)}$$

En particulier, si on fait R = 1, on trouve :

$$a' = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)} \qquad (1)$$

184. Problème. — *Etant donné le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit d'un même nombre de côtés.*

Il suffit de remarquer que l'apothème du polygone circonscrit est le rayon du polygone inscrit. Par suite, en appliquant le théorème (179), on a (fig. 111) :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OC}{OE}$$

et comme

$$OC = R \qquad OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

on a, en posant

$$A'B' = a_1 \qquad AB = a$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

d'où

$$a_1 = \frac{aR}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

En particulier si $R = 1$, on trouve

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} \qquad (2)$$

185. Application. — Appliquons le calcul en partant du côté de l'hexagone régulier.

Nous avons vu que, dans ce cas :

$$a = R$$

Si nous faisons

$$R = 1$$

le côté du polygone régulier de douze côtés sera exprimé, en remplaçant a par 1 dans l'expression (1) par :

$$a' = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right)}$$

On en tire :

$$a' = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)}$$

$$a' = \sqrt{2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Or

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508$$

d'où

$$a' = \sqrt{0{,}2679492}$$

ou

$$a' = 0{,}5176.$$

a' étant le côté du dodécagone, la valeur approchée de π s'obtiendra en multipliant a' par $\frac{12}{2}$.

On a :

$$\frac{P'}{2} = 6 \times 0{,}5176$$

ou

$$\frac{P'}{2} = 3{,}103$$

C'est une valeur approchée par défaut.

Calculons maintenant le côté du dodécagone circonscrit, en appliquant la formule (2) du problème (148). Il suffit de remplacer dans cette dernière a par 0,5176.

$$a_1 = \frac{0{,}5176}{\sqrt{1 - \frac{0{,}2679492}{4}}}$$

$$a_1 = \frac{0{,}5176}{\sqrt{0{,}9330127}}$$

$$a_1 = \frac{0{,}5176}{0{,}9659} = \frac{5176}{9659}$$

$$a_1 = 0{,}5358$$

a, étant le côté du dodécagone, on obtiendra une valeur de π approchée par excès, en multipliant a_1 par $\frac{12}{2}$.

$$\frac{P_1}{2} = 6 \times a_1 = 6 \times 0{,}5358$$

$$\frac{P_1}{2} = 3{,}214$$

Nous savons que π est compris entre $\frac{P'}{2}$ et $\frac{P_1}{2}$.

$$\frac{P'}{2} < \pi < \frac{P_1}{2}$$

$$3{,}106 < \pi < 3{,}214$$

Nous concluons que le premier chiffre du nombre π est nécessairement 3.

En continuant le calcul, pour les polygones de 24 côtés, on obtiendrait une valeur plus approchée, et ainsi de suite.

Les premiers chiffres du nombre π sont :

$$\pi = 3{,}1415926535$$

Pour retenir ces premiers chiffres on recommande d'avoir recours à l'artifice suivant. On apprend par cœur le vers :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages.

Le nombre de lettres de chacun des mots représente dans l'ordre un des chiffres du nombre π.

186. Calcul de la longueur d'un arc. — Connaissant le rayon R d'une circonférence, proposons-nous de calculer la longueur l d'un arc de n degrés.

La longueur d'une circonférence, c'est-à-dire la longueur d'un arc de 360° est $2\pi R$, celle d'un arc de 1° est $\frac{2\pi R}{360}$ ou $\frac{\pi R}{180}$;

celle d'un arc de n degrés est donc :

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

De cette relation on tire :

$$n = \frac{180\,l}{\pi R} \text{ ou } n = \frac{180\,l}{R} \times \frac{1}{\pi}$$

$$R = \frac{180\,l}{\pi n} \text{ ou } R = \frac{180\,l}{n} \times \frac{1}{\pi}$$

187. Remarque. — Si l'arc à calculer est défini par le nombre n de grades qu'il renferme, on a

$$l = \frac{\pi R n}{200}$$

car le grade est la $\frac{1}{200}$ partie de la demi-circonférence.

188. Applications. — I. *Calculer le rayon de la terre, sachant que le quart du méridien terrestre a pour longueur 10 000 kilomètres.*

Désignons par R le rayon terrestre, la longueur du méridien est $2\pi R$. Ecrivons qu'elle a pour valeur 40.000 kilomètres, on a :

$$2\pi R = 40000 \text{ d'où } R = \frac{40000}{2\pi} = \frac{20000}{\pi} = 20000 \times \frac{1}{\pi}$$

$$= 20000 \times 0{,}31831 = 6366 \text{ Km.}$$

II. *On demande de trouver la distance de Paris à Carcassonne, ces deux villes étant situées sur le même méridien ; la latitude de Paris est 48° 50′ 49″, celle de Carcassonne est 43° 12′ 54″.*

La différence des latitudes étant 5° 37′ 55″, ou 20275″, le problème revient à calculer la longueur d'un arc de méridien terrestre de 20275″.

Or un arc d'une seconde du méridien a une longueur égale à

$$\frac{10.000.000^{\,m}}{90 \times 60 \times 60} \text{ ou } \frac{10.000^{\,m}}{324}, \text{ ou } \frac{10^{\,km}}{324}$$

Donc un arc de méridien de 20272″ a une longueur égale à $\frac{202.750^{\,km}}{324}$ ou égale à 625,771 km.

Aires

189. Unité d'aire. — Nous adopterons, pour unité d'aire, l'aire du carré construit sur l'unité de longueur (voir arithmétique : Système métrique).

Les théorèmes suivants ne sont vrais qu'à cette condition.

190. Théorème. — *Le nombre qui mesure l'aire d'un rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent la base et la hauteur du rectangle.*

La base d'un rectangle A B C D (fig. 112) c'est son grand côté A B ; la hauteur c'est le petit côté B C.

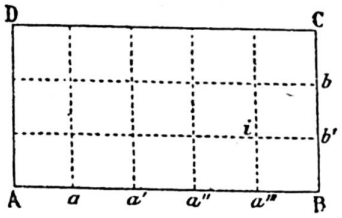


Fig. 112

Supposons qu'on mesure A B et B C avec l'unité de longueur et qu'on ait trouvé que cette dernière est contenue *m* fois dans A B et *n* fois dans B C. On pourra diviser A B en *m* segments A *a*, *a a′*, *a′ a″*, etc. égaux à l'unité de longueur, et B C en *n* segments *C b*, *b b′*, *b′* B, égaux eux aussi à l'unité de longueur.

Si l'on mène par les points de division, des parallèles aux côtés A B et B C, on divise la surface du rectangle en une série de carrés tels que *a‴ i b′* B dont l'aire est égale à l'unité d'aire (190).

L'aire du rectangle est donc exprimée par le nombre de ses carrés, or ce nombre est évidemment égal à *m n*, car on a formé *n* lignes de *m* carrés.

On dit souvent d'une manière abrégée que *l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

En appelant *s* le nombre qui mesure l'aire, *b* celui qui mesure la base, *h* celui qui mesure la hauteur, on a :

$$s = b\ h$$

191. Corollaire. — *Le nombre qui mesure l'aire d'un carré est égal au carré du nombre qui mesure son côté,*

$$\text{car } b = h$$

En appelant *a* le côté, on peut écrire :

$$s = a^2$$

On dit d'une manière abrégée : *L'aire d'un carré est égale au carré de son côté.*

192. Théorème. — *Le nombre qui mesure l'aire d'un parallélogramme est égal au produit des nombres qui mesurent la base et la hauteur.*

L'un des côtés A B du parallélogramme étant considéré comme la *base*, la *hauteur* est la perpendiculaire D H abaissée d'un point du côté opposé sur la base (fig. 112 bis).

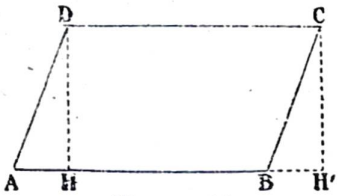


Fig. 112 bis

Prolongeons A B suivant B H′ et abaissons du point C une perpendiculaire C H′ sur A H′.

La figure H H′ C D est un rectangle et d'après le théorème (191) son aire est exprimée par le produit H H′ × D H. Or, l'aire du parallélogramme A B C D est égale à l'aire du rectangle D H H′ C ; autrement dit le parallélogramme est *équivalent* au rectangle. En effet, les deux triangles A D H et C B H, sont égaux : ils ont

$$A\ D = B\ C$$
$$D\ H = C\ H'$$
$$\text{angle } \widehat{ADH} = \text{angle } \widehat{BCH'}$$

et on peut écrire :

$$\text{aire } A\ B\ C\ D = \text{aire } D\ H\ B\ C + \text{aire } A\ D\ H$$
$$\text{aire } D\ H\ H'\ C = \text{aire } D\ H\ B\ C + \text{aire } C\ B\ H'$$
$$\text{aire } A\ D\ H = \text{aire } C\ B\ H'$$
$$\text{aire } D\ H\ B\ C + \text{aire } A\ D\ H = \text{aire } D\ H\ B\ C + \text{aire } C\ B\ H'$$
$$\text{aire } A\ B\ C\ D = \text{aire } D\ H\ H'\ C$$

D'un autre côté, l'égalité des triangles entraîne :

$$A\ H = B\ H'$$

et par suite :

$$A\ B = H\ H'$$

et comme on a :

$$\text{aire } D\ H\ H'\ C = H\ H' \times D\ H$$

on a aussi :

$$\text{aire } A\ B\ C\ D = H\ H' \times D\ H = A\ B \times D\ H$$

On dit d'une manière abrégée que *l'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

$$s = b\ h$$

193. Théorème. — *Le nombre qui mesure l'aire d'un triangle est égal à la moitié du produit des nombres qui mesurent la base et la hauteur du triangle.*

L'un des côtés B C du triangle étant choisi pour base, la hauteur est la perpendiculaire A H abaissée du sommet opposé sur la base (fig. 113).

Menons par A une parallèle à B C par C une parallèle à B A. On forme ainsi un parallélogramme A B C D dont l'aire est égale au produit de B C par A H (193).

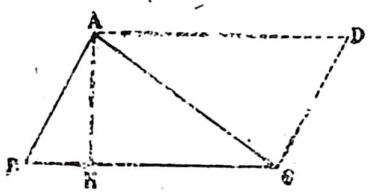


Fig. 113

Or les deux triangles A B C et A D C sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun (86). Il s'ensuit que l'aire du triangle A B C vaut la moitié de l'aire du parallélogramme A B C D :

$$\text{aire } ABC = \frac{\text{aire } ABCD}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$$

On dit d'une manière abrégée que *l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

$$s = \frac{b\ h}{2}$$

194. Théorème. — *Le nombre qui mesure l'aire d'un trapèze est égal au produit de la demi-somme des nombres qui mesurent les bases par le nombre qui mesure la hauteur.*

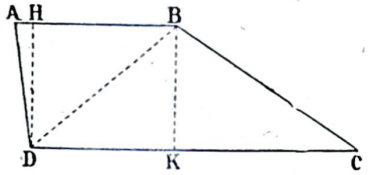


Fig. 114

Les bases d'un trapèze A B C D sont les deux côtés parallèles A B et D C (fig. 114), la hauteur est la perpendiculaire commune aux deux bases, D H ou B K.

Le trapèze peut se décomposer en deux triangles A D B et B D C par la diagonale D B. On a :

$$\text{aire ADB} = \frac{AB \times DH}{2}$$

$$\text{aire DBC} = \frac{DC \times BK}{2}$$

$$DH = BK$$

$$\text{aire ABC} + \text{aire DBC} = \text{aire ABCD}$$

$$= \frac{AB \times DH}{2} + \frac{DC \times DH}{2}$$

$$\text{aire ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \times DH$$

On dit d'une manière abrégée que *l'aire d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur.*

En appelant B la grande base, *b* la petite base et *h* la hauteur, on peut écrire :

$$s = \frac{B + b}{2} \times h$$

195. Aire d'un polygone. — On peut mesurer l'aire d'un polygone en le décomposant en triangles ou en trapèzes. C'est ainsi que procèdent les arpenteurs.

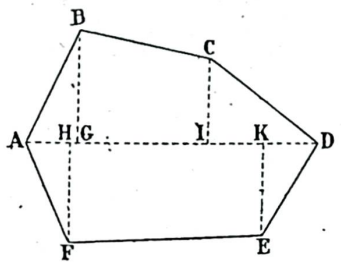


Fig. 115

La méthode la plus généralement employée consiste à mesurer la plus grande diagonale A D du polygone (fig. 115) puis les longueurs des perpendiculaires abaissées des divers sommets sur cette diagonale. On a :

$$\text{aire } ABCDEF = ABG + BCIG + CDI + DEK + KEFH + AFH$$

Les figures B G I C et H F E K sont des trapèzes dont les bases sont respectivement B G et C I, F H et E K et les hauteurs G I et H K.

196. Théorème. — *Si deux triangles ont même base et même hauteur, ils sont équivalents.*

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement du théorème 193.

197. Théorème. — *Si deux triangles ont même base, ils sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Soient deux triangles T et T′ ayant tous deux pour base *b* et pour hauteur, le premier *h*, le second *h′*.

On a :

$$\text{aire T} = \frac{b\ h}{2}$$

$$\text{aire T}' = \frac{b\ h'}{2}$$

$$\frac{\text{aire T}}{\text{aire T}'} = \frac{b\ h}{b\ h'} = \frac{h}{h'}$$

198. Théorème. — *Si deux triangles ont même hauteur, ils sont entre eux comme leurs bases.*

Même démonstration que pour le théorème 197.

199. Théorème. — *Les aires de deux triangles qui ont un angle égal sont proportionnelles au produit des côtés qui comprennent cet angle.*

Soient les deux triangles A B C et A D E (fig. 116) qui ont un angle égal

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$$

Joignons B E. Les deux triangles A B C et A B E peuvent être considérés comme ayant leur sommet en B et leurs bases en A C et A E. Dans ces conditions, ils ont même hauteur, car celle-ci n'est autre que la perpendiculaire abaissée du sommet B sur A C E. En vertu du théorème 198, on a donc :

$$\frac{\text{aire ABC}}{\text{aire ABE}} = \frac{AC}{AE} \qquad 1$$

Mais les deux triangles A B E et A D E peuvent être considérés comme ayant leur sommet en E et leurs bases en A B et A D. Ils ont même hauteur (perpendiculaire abaissée de E sur A B D) et par suite on a :

$$\frac{\text{aire ADE}}{\text{aire ABE}} = \frac{AD}{AB} \qquad 2$$

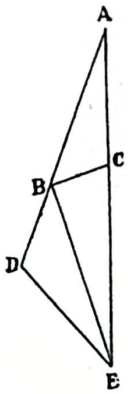


Fig. 116

Divisons membre à membre les égalités (1) et (2) il vient :

$$\frac{\text{aire ABC} \times \text{aire ABE}}{\text{aire ABE} \times \text{aire ADE}} = \frac{AC \times AB}{AE \times AD}$$

$$\frac{\text{aire ABC}}{\text{aire ADE}} = \frac{AC \times AD}{AE \times AD}$$

égalité qui exprime la conclusion du théorème.

200. Triangles équivalents. — Du théorème (196) il résulte qu'on peut déplacer un sommet d'un triangle

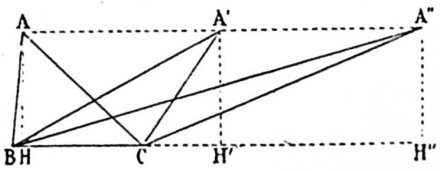


Fig. 117

sur une parallèle au côté opposé sans changer l'aire de ce triangle.

Ainsi les triangles A B C, A′ B C, A″ B C (fig. 117), dont les sommets A, A′, A″ sont sur une parallèle à

B C, sont équivalents. En effet leur base B C est commune, et leurs hauteurs A H, A′ H′, A″ H″ sont égales (68). On peut donc promener le sommet A sur la droite A A′ A″ sans changer l'aire du triangle A B C.

201. Application. — *Construire un triangle équivalent à un polygone donné.*

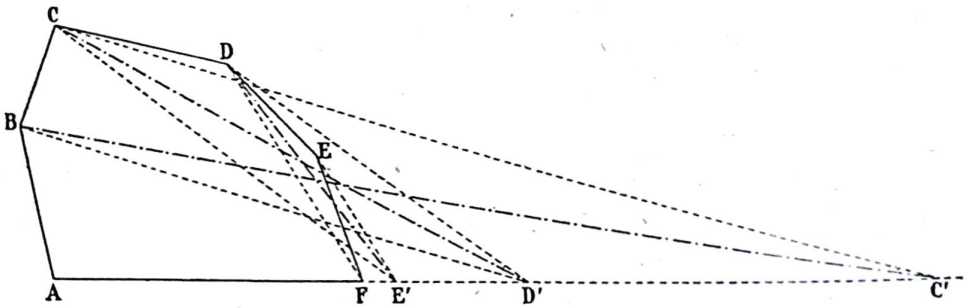


Fig 118

Soit un polygone A B C D E F (fig. 118). Joignons D F et, par le sommet E menons une parallèle E E′ à D F. Si on déplace sur E E′ le sommet E, du triangle D E F, on ne change pas l'aire de ce triangle. Ainsi le triangle D E′ F est équivalent au triangle D E F. Mais, par suite, le polygone A B C D E′ est équivalent au polygone A B C D E F. En effet :

$$\text{aire A B C D E F} = \text{aire A B C D F} + \text{aire D E F}$$
$$\text{aire A B C D E}' = \text{aire A B C D F} + \text{aire D E}' \text{ F}$$
$$\text{aire D E}' \text{ F} = \text{aire D E F}$$
$$\text{aire A B C D E F} = \text{aire A B C D E}'$$

En procédant de cette façon on a supprimé un sommet du polygone, ou, plus exactement, on a remplacé le polygone donné par un nouveau polygone, équivalent au premier et ayant un sommet de moins.

En joignant C E′ et en menant par D une parallèle D D′ à C E′, on transportera le sommet D en D′ sur le prolongement de A E′. Le triangle C D E′ étant équivalent au triangle C E′ D′, le polygone A B C D′ est équivalent au polygone A B C D E′. On réduira le polygone à un triangle en transportant le sommet C en C′ sur une parallèle C C′ à B D′. Le triangle A B C′ est équivalent au polygone A B C D′. On a donc :

$$\text{aire A B C}' = \text{aire A B C D}' = \text{aire A B C D E}'$$
$$= \text{aire A B C D E F}$$

202. Problème. — *Construire un carré équivalent à un triangle donné.*

Il suffit de connaître le côté du carré. Si on représente par a ce côté, par s' la surface du carré, par s celle du triangle donné, et par b et h la base et la hauteur de celui-ci, on a :

$$s' = s$$
$$s = \frac{b\,h}{2}$$
$$s' = a^2$$
$$a^2 = \frac{b\,h}{2}$$

a est moyenne proportionnelle entre $\frac{b}{2}$ et h, il sera facile de le construire (166).

Les numéros 201 et 202 permettent de construire un carré équivalent à un polygone donné quelconque, c'est-à-dire de faire la *quadrature* d'un polygone quelconque.

203. Théorème. — *Les aires de deux triangles semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues des triangles.*

En effet soient s et s' les aires des deux triangles semblables T et T′, soient b et h, b' et h' la base et la hauteur de chacun des triangles, prises par rapport aux sommets.

On a :

$$s = \frac{b\,h}{2}$$
$$s' = \frac{b'\,h'}{2}$$
$$\frac{s}{s'} = \frac{b\,h}{b'\,h'}$$

Mais comme les triangles T et T′ sont semblables, on a aussi :

$$\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'}$$

et, par suite :

$$\frac{b\,h}{b'\,h'} = \frac{b^2}{b'^2}$$

or $\frac{b^2}{b'^2}$ est justement le rapport des carrés des côtés homologues.

$$\frac{s}{s'} = \frac{b^2}{b'^2}$$

204. Théorème. — *Les aires de deux polygones semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.*

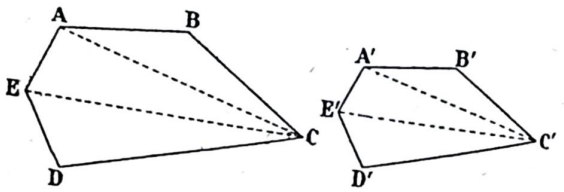


Fig. 119

Soient les deux polygones semblables A B C D E, A′ B′ C′ D′ E′ (fig. 119) :

$$(1) \quad \frac{\text{A B}}{\text{A}'\text{B}'} = \frac{\text{B C}}{\text{B}'\text{C}'} = \frac{\text{C D}}{\text{C}'\text{D}'} = \frac{\text{D E}}{\text{D}'\text{E}'} = \frac{\text{A E}}{\text{A}'\text{E}'}$$

On peut décomposer ces deux polygones en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés (149).

Et l'on a (204) :

$$\frac{\text{aire A B C}}{\text{aire A}'\text{B}'\text{C}'} = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{\overline{\text{A}'\text{B}'}^2} \qquad \frac{\text{aire A E C}}{\text{aire A}'\text{E}'\text{C}'} = \frac{\overline{\text{AE}}^2}{\overline{\text{A}'\text{E}'}^2}$$

$$\frac{\text{aire E D C}}{\text{aire E}'\text{D}'\text{C}'} = \frac{\overline{\text{E D}}^2}{\overline{\text{E}'\text{D}'}^2}$$

et en vertu des égalités (1) :

$$\frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } A'B'C'} = \frac{\text{aire } AEC}{\text{aire } A'E'C'} = \frac{\text{aire } EDC}{\text{aire } E'D'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

et (arithmétique 249) :

$$\frac{\text{aire } ABC + \text{aire } AEC + \text{aire } EDC}{\text{aire } A'B'C' + \text{aire } A'E'C' + \text{aire } E'D'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

$$\frac{\text{aire } ABCDE}{\text{aire } A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

205. Théorème. — *Le nombre qui mesure l'aire d'un polygone régulier est égal à la moitié du produit du nombre qui mesure le périmètre par le nombre qui mesure l'apothème.*

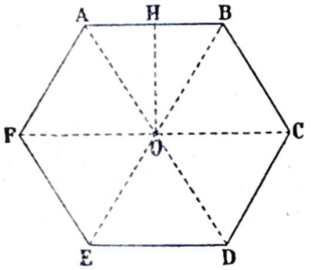


Fig. 120

Soit un polygone régulier A B C D E F (fig. 120). Soit O son centre. Son aire est égale à la somme des aires des triangles A O B, B O C, C O D, etc. Mais tous ces triangles sont égaux ; ils ont même hauteur : c'est-à-dire l'apothème du polygone régulier, et même base.

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA$$

Soit n le nombre des côtés du polygone ; on a :

$$\text{aire } ABCDEF = n \text{ aires } AOB$$

$$\text{aire } ABCDEF = \frac{H \times n\,AB}{2}$$

$$\text{aire } ABCDEF = \frac{OH \times (AB + BC + CD + DE + EF + FA)}{2}$$

ou en posant :

$$AB + BC + CD + DE + EF + FA = P$$

$$\text{aire } ABCDEF = \frac{OH \times P}{2}$$

P est le périmètre du polygone.

On dit d'une manière abrégée que *l'aire d'un polygone régulier est égale au produit de son périmètre par la moitié de son apothème.*

206. Théorème. — *Le nombre qui mesure l'aire d'un cercle est égal au produit du nombre qui mesure la circonférence par la moitié du nombre qui mesure le rayon.*

L'aire d'un cercle peut se comparer en effet à l'aire d'un polygone régulier : c'est la limite vers laquelle tend l'aire d'un polygone régulier inscrit dans le cercle quand on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone.

Or, quand on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone, le périmètre de ce dernier tend vers la longueur de la circonférence et l'apothème tend vers le rayon.

$$\text{Limite aire du polygone} = \text{limite du périmètre} \times \frac{\text{limite de l'apothème}}{2}$$

Limite aire du polygone = aire du cercle.

Limite du périmètre = longueur de la circonférence.

Limite de l'apothème = rayon.

Si nous appelons S la surface du cercle, et R le rayon on a (181) :

$$S = 2\pi R \times \frac{R}{2}$$

$$(1) \qquad S = \pi R^2$$

On dit d'une manière abrégée : *L'aire du cercle est égale au produit du nombre π par le carré du rayon.*

De la formule (1) il résulte que *les aires de deux cercles sont entre elles comme les carrés des rayons.*

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2}$$

207. Aire d'un secteur polygonal. — On appelle secteur polygonal le polygone obtenu en joignant les extrémités d'une ligne polygonale inscriptible non fermée au centre de cette ligne.

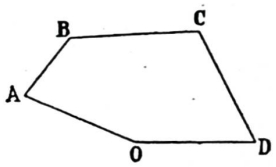


Fig. 121

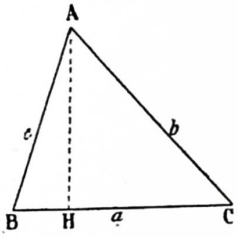


Fig. 122

Soit par exemple la ligne polygonale inscriptible A B C D (fig. 121), en joignant le centre O de cette ligne aux extrémités A et D, on obtient un *secteur polygonal.* Si tous les côtés de la ligne polygonale sont égaux, le secteur est dit *régulier.*

Il résulte de la démonstration du théorème (205) que *l'aire d'un secteur polygonal régulier est exprimée par le produit de la longueur de la ligne polygonale par la moitié de son apothème.*

208. Aire d'un secteur circulaire. — Si la ligne polygonale régulière est remplacée par une portion de circonférence, la figure devient un *secteur circulaire.*

L'aire d'un secteur circulaire peut être considérée comme la limite de l'aire d'un secteur polygonal dont on double indéfiniment le nombre des côtés. La limite de la ligne polygonale est la longueur de l'arc de cercle qui sert de base au secteur circulaire, la limite de son apothème est la longueur du rayon du secteur circulaire. Par suite, *l'aire d'un secteur circulaire s'exprime par le produit de l'arc de circonférence qui lui sert de base par la moitié du rayon.*

209. Aire d'un segment de cercle. — Un segment de cercle est la portion de cercle comprise entre un arc et sa corde.

Si on joint les deux extrémités de la corde au centre de la circonférence, on forme d'une part avec l'arc et les deux rayons ainsi tracés un secteur circulaire, d'autre part avec la corde et les deux rayons un triangle isocèle. *L'aire du segment est égale à la différence des aires du secteur circulaire et du triangle.*

Soient a, b, c, les trois côtés du triangle A B C (fig. 122). La surface s du triangle est :

$$(1) \qquad s = \frac{BC \times AH}{2}$$

Dans le triangle rectangle A B H on a (153)

$$(2) \qquad \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2$$

et comme le côté A C est opposé à un angle aigu B (si B était obtus, on remplacerait B H par H C et A B par A C), on a d'autre part (156) :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times BH$$

d'où on tire :

$$BH = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

Portons cette valeur dans l'équation (2) :

$$\overline{AH}^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$\overline{AH}^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

Le numérateur peut être considéré comme la différence de deux carrés et par suite on peut écrire (Algèbre) :

$$\overline{AH}^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

Mais on a aussi (Algèbre) :

$$a^2 + 2ac + c^2 = (a + c)^2$$

$$2ac + a^2 + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 =$$

$$(a + c + b)(a + c - b)$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$$

$$2ac - a^2 - c^2 + b^2 = -(a - c)^2 + b^2$$

$$b^2 - (a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$$

Ce qui donne en définitive pour $\overline{AH}^2$.

$$\overline{AH}^2 = \frac{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}{4a^2}$$

$$AH = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}}{2a}$$

Portons cette valeur dans l'équation (1) :

$$s = \frac{a\sqrt{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}}{2 \times 2a}$$

$$(3) \quad s = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}}{4}$$

On peut simplifier l'expression (3) en posant :

$$a + b + c = 2p$$

$2p$ représentant le périmètre du triangle. On a alors :

$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

L'expression (3) peut donc s'écrire :

$$s = \frac{\sqrt{2p \times 2(p - b) \times 2(p - c) \times 2(p - c)}}{4}$$

$$s = \frac{\sqrt{16\,p\,(p - b)(p - c)(p - a)}}{4}$$

$$s = \frac{4\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}}{4}$$

$$s = \sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Retenons la formule :

$$S = \sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Exercices

62. — Trouver l'aire d'un rectangle connaissant sa base 4 mètres, et sa diagonale 5 mètres.

Exprimer cette aire : 1° en décimètres carrés ; 2° en centimètres carrés.

63. — Trouver l'aire d'un rectangle connaissant sa diagonale 35 mètres, et sachant que la base est double de la hauteur.

Exprimer l'aire : 1° en décamètres carrés ; 2° en centiares.

64. — Trouver l'aire du carré inscrit dans la circonférence de rayon 1 mètre.

65. — Dans un parallélogramme A B C D, on donne le petit côté A D et la base D C, on sait en outre que l'angle A D C vaut 60 degrés calculer l'aire du parallélogramme.

A D = 53 mètres D C = 107,75 m.

Exprimer l'aire en ares.

66. — On donne la surface 405,60 m² d'un rectangle A B C D, et le rapport de la hauteur A B à la base B C : $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{7}$. Trouver A B et B C.

Sur le côté A D, parallèle à la base B C, on prend deux points A′ et D′ respectivement à 3 mètres et à 17 mètres de A : calculer l'aire du trapèze A′ B C D′.

67. — Trouver l'aire d'un triangle équilatéral connaissant son côté a = 0 m. 25.

68. — Quelle est l'aire d'un trapèze isocèle dont les angles aigus valent 60° et dont les bases valent respectivement 36 m. et 22 m.

69. — Dans un cercle de 2,4 m de rayon on inscrit : 1° un triangle équilatéral ; 2° un hexagone régulier. Calculer l'aire de chacun de ces polygones. Quel est le rapport qui existe entre ces deux aires ?

70. — L'aire comprise entre le périmètre d'un hexagone régulier et celui de la circonférence circonscrite étant 9,78 m² ; calculer le rayon de cette circonférence.

71. — Dans un triangle A B C dont la base A C vaut 25 m. et la hauteur B D, 18 m., on inscrit un carré dont un côté s'appuie sur A C ; calculer son aire.

72. — L'aire d'un trapèze est égale au produit de l'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu du côté opposé.

73. — Si sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle comme diamètres, on décrit des demi-circonférences qui soient extérieures au triangle, chacune de ces courbes fait avec la demi-circonférence menée par les sommets du triangle une figure qui a la forme d'un croissant, et qu'on nomme lunule d'Hippocrate. Démontrer que la somme des surfaces des deux lunules est équivalente à la surface du triangle.

74. — Calculer à moins de 0,01 m, le rayon d'un cercle tel que le segment correspondant à un arc de 120° soit équivalent à 1 mètre carré.

75. — On prend un point quelconque C sur le diamètre A B d'un demi-cercle, et on décrit deux demi-circonférences sur les segments A C et B C ; prouver que l'aire comprise entre les trois demi-circonférences est équivalente au cercle qui a pour diamètre la moyenne proportionnelle entre A C et B C.

76. — Construire un rectangle équivalent à un carré donné et dont les deux côtés aient leur différence égale à une longueur donnée.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Le plan

210. Existence du plan. — Nous avons défini le plan au début de la géométrie (5). Nous allons prouver l'existence de cette figure en démontrant qu'elle est déterminée par des figures déjà connues.

211. Théorème. — *Par deux droites qui se coupent on peut faire passer un plan et on n'en peut faire passer qu'un.*

Soient deux droites, A B et C D, qui se coupent au point O (fig. 123).

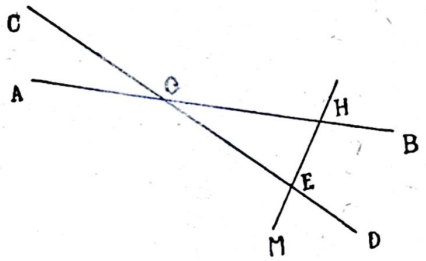


Fig. 123

Imaginons qu'on fasse passer un plan par la droite A B, ce qui est possible en vertu de la définition du plan, et faisons tourner ce plan autour de A B de manière à balayer tout l'espace. Il arrivera un moment où ce plan rencontrera un point de la droite C D et, comme il contient déjà le point O commun à A B et à C D, il contiendra la droite C D tout entière (5). A ce moment, le plan passera à la fois par A B et par C D, ce qui démontre la première partie du théorème.

Je dis qu'il n'y a qu'un plan qui passe par les deux droites. En effet, supposons qu'on ait fait passer deux plans P et P′ par A B et C D. Prenons un point M dans l'un des plans P, je dis qu'il est aussi dans le plan P′ et que, d'une façon générale, tout point M du plan P est aussi un point du plan P′.

Par le point M menons une droite quelconque dans le plan P de manière à couper les deux droites A B et C D en deux points E et H. Les points E et H sont aussi dans le plan P′ puisque A B et C D sont dans ce plan. Par suite, la droite E H est tout entière dans le plan P′ (5) et le point M est dans le plan P′.

Tout point M de P étant aussi dans P′, les deux plans se confondent.

212. Corollaire. — *Par trois points non en ligne droite, on peut faire passer un plan et un seul.*

Car, en joignant l'un des points aux deux autres par des lignes droites, on ramène cette proposition à la précédente.

213. Corollaire. — *Par une droite et un point extérieur à cette droite, on peut faire passer un plan et un seul.*

Car donner une droite équivaut à donner deux points et la proposition se ramène à la précédente.

214. Définition. — *On dit que* DEUX PLANS SONT PARALLÈLES LORSQU'ILS NE PEUVENT AVOIR AUCUN POINT COMMUN.

215. Théorème. — *Deux plans non parallèles se coupent suivant une droite.*

En effet, si on prend deux points A et B sur la ligne d'intersection des deux plans et qu'on joigne ces deux points par une ligne droite, cette droite est tout entière contenue dans chacun des deux plans, elle se confond donc nécessairement avec l'intersection. D'autre part, les deux plans ne peuvent avoir de point commun en dehors de cette droite, autrement ils se confondraient (213).

216. Théorème. — *Par deux droites parallèles, on ne peut faire passer qu'un seul plan.*

Par définition, on peut faire passer un plan par deux droites parallèles (54). Je dis qu'on ne peut en faire passer qu'un car, s'il en passait deux par exemple, ils se couperaient suivant deux droites, ce qui est impossible (215).

217. Perpendiculaire au plan. — Définition. — *On dit qu'*UNE DROITE EST PERPENDICULAIRE A UN PLAN QUAND ELLE EST PERPENDICULAIRE A TOUTES LES DROITES QUI PASSENT PAR SON PIED DANS LE PLAN.

Le théorème suivant démontre l'existence des perpendiculaires au plan.

218. Théorème. — *Une droite perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans le plan est perpendiculaire au plan.*

HYPOTHÈSE (fig. 124).

A B perpendiculaire à B C.
A B — à B D.
B C et B D dans le plan P.

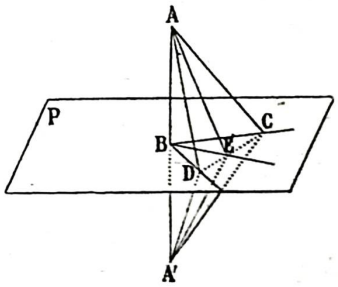


Fig. 124

CONCLUSION. — A B est perpendiculaire à toute droite B E du plan P.

DÉMONSTRATION. — La démonstration de ce théorème se tire du théorème (46) et de sa réciproque.

Les trois droites B D, B E, D C sont dans le même plan, on exprimera cette hypothèse en remarquant qu'une droite D C qui coupe B D et B C coupe B E en un certain point E.

Si B E est perpendiculaire à A B, elle fait avec cette droite et son prolongement deux angles adjacents égaux, ceci nous conduit à prolonger B A en B A′. Pour exprimer les deux premières hypothèses prenons :

$$B A' = B A$$

et joignons A D, A′ D, A C, A′ C ; en vertu du théorème (46) nous avons :

$$A D = A' D \qquad A C = A' C$$

Joignons A E et A′ E, si nous démontrons que ces deux droites sont égales, nous aurons prouvé que B E est perpendiculaire sur A A′ (47).

Or les deux triangles A D C et A′ D C qui ont un côté commun D C, et les deux autres côtés égaux chacun à chacun sont égaux. Si on fait tourner le triangle

A' D C autour de D C comme charnière de façon à le rabattre sur le triangle A D C, il coïncidera avec ce dernier et par suite A E coïncidera avec A' E.

$$A\,E = A'\,E$$

ce qui démontre le théorème.

219. Théorème des trois perpendiculaires. — *Etant donné la perpendiculaire* A B *au plan* P *et une droite quelconque* C D *du plan* P, *si on abaisse du pied* B *de la perpendiculaire* A B *une perpendiculaire* B E *sur* C D, *la droite qui joint un point quelconque* A *de* A B *au point* E *est perpendiculaire à* C D.

Hypothèse (fig. 125). — A B perpendiculaire à toutes les droites du plan P ; B E perpendiculaire à C D ; C D dans le plan.

Conclusion. — A E perpendiculaire à C D.

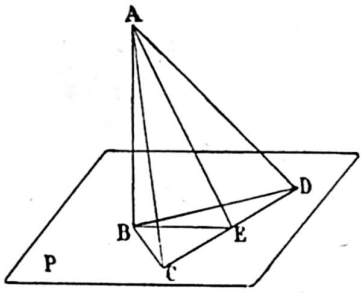


Fig. 125

Démonstration. — La démonstration résulte encore du théorème (46).

Pour exprimer les hypothèses prenons sur C D, de part et d'autre du point E, deux longueurs égales.

$$C\,E = D\,E$$

Puisque B E est perpendiculaire à C D, en son milieu, on a (46).

$$B\,C = B\,D$$

ce qui exprime la deuxième hypothèse.

D'autre part, les deux triangles A B C et A B D sont rectangles.

Les deux triangles A B C et A B D sont égaux comme rectangles ayant les deux côtés de l'angle droit égaux (42) : A B commun, B C = B D. Il s'ensuit que les hypoténuses sont égales :

$$A\,C = A\,D$$

Cette égalité entraîne la conclusion (35).

220. Remarque. — Il faut remarquer que la droite C D est perpendiculaire à la fois aux deux droites A E et B E, par suite elle est perpendiculaire au plan déterminé par ces deux droites (218).

221. Théorème. — *Par un point d'une droite on peut mener un plan perpendiculaire à cette droite et on n'en peut mener qu'un.*

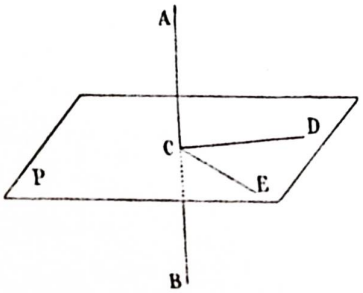


Fig. 126

Soit A B la droite donnée (fig. 126).

Il suffit évidemment de déterminer deux droites du plan cherché. Or, ces deux droites devront être perpendiculaires à A B au point C donné ; c'est la seule condition à laquelle elles doivent satisfaire.

Pour construire ces deux droites C D et C E, il suffira de faire passer par A B deux plans Q et Q' et de mener dans chacun d'eux une perpendiculaire en C à A B.

Le plan E C D est perpendiculaire à A B, au point C (218).

Je dis qu'il n'y en a pas d'autre. Soit en effet un plan P perpendiculaire en C à A B ; ce plan coupe les plans Q et Q', suivant deux droites C D et C E qui doivent être perpendiculaires à A B (217). Ces deux droites sont justement celles que nous venons de construire et, par conséquent, le plan P n'est autre que celui que nous venons de déterminer.

222. Corollaire. — On déduit de ce théorème que *le lieu géométrique des perpendiculaires élevées sur une droite en un point donné est la pan perpendiculaire à la droite en ce point.*

223. Théorème. — *Par un point pris hors d'une droite on peut faire passer un plan perpendicu aire à cette droite et on n'en peut faire passer qu'un.*

On ramène la démonstration de ce théorème à celle du théorème (221) en déterminant le point d'intersection C du plan et de la droite donnée. On n'aura plus alors qu'à mener un plan perpendiculaire à la droite par le point C.

Soit D le point extérieur donné (fig. 126) ; par le point D et la droite A B on fait passer un plan (213) et, dans ce plan, on abaisse la perpendiculaire E C sur la droite A B. Si l'on mène par C le plan perpendiculaire à A B, ce plan passe par E et répond à l'énoncé du théorème ; il contient toutes les droites telles que C D perpendiculaires à A B au point C (222).

D'autre part, tout plan P passant par E et perpendiculaire à A B ne peut rencontrer A B ailleurs qu'en C, car C E est la seule perpendiculaire qu'on puisse abaisser de E sur A B (12). Du moment que ce plan passe par C, il contient C D (222) et, par suite, il se confond avec le premier plan que nous avons construit.

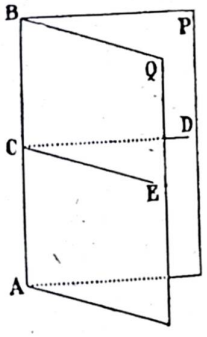


Fig. 127

224. Angle dièdre. Définition. — On appelle angle dièdre la figure formée par deux plans qui se coupent, limités a leur intersection.

Les deux plans P et Q (fig. 127) sont les faces du dièdre ; l'intersection A B prend le nom d' arête du dièdre. On désigne le dièdre par quatre lettres, une pour chaque face et deux pour l'arête, ces deux dernières étant placées entre les deux autres ; ex. dièdre P A B Q.

Deux dièdres P A B Q et P' A' B' Q' étant donnés, on peut toujours amener les deux arêtes A B et A' B' et deux faces P et P' à coïncider ; on peut aussi faire en sorte que les deux autres faces Q et Q' tombent du même côté de P P'. Si alors les deux faces Q et Q' coïncident également les deux dièdres sont égaux.

Si la face Q' du dièdre P' A' B' Q' est placée entre la face P et la face Q du dièdre P A B Q, on dit que le dièdre P' A' B' Q' est plus petit que le dièdre P A B Q. Dans le cas contraire, on dit qu'il est plus grand que ce dernier.

Du reste on conçoit qu'on puisse faire croître ou décroître un dièdre P' A' B' Q' de manière à le rendre plus grand ou plus petit qu'un dièdre P A B Q donné. Il suffit, la face P' restant fixe, de faire tourner la face Q' autour de l'arête A' B' comme charnière, dans un sens ou dans l'autre.

225. Somme de deux dièdres. — Deux dièdres P A B Q et P' A' B' Q' étant donnés, on peut faire coïncider les arêtes A B et A' B', et la face Q avec la face P',

en faisant tomber les faces P et Q′ de part et d'autre du plan Q P′. On dit alors que *les deux dièdres sont adjacents.*

L'angle dièdre P A B Q′ formé par l'arête commune et les deux faces extérieures de deux dièdres adjacents est, par définition, la *somme* de ces deux dièdres.

226. Définition. — *On dit que deux dièdres sont opposés par l'arête quand les faces de l'un sont dans le prolongement des faces de l'autre.*

227. Plans perpendiculaires. Définition. — ON DIT QU'UN PLAN P EST PERPENDICULAIRE A UN PLAN Q QUAND IL FORME AVEC CE DERNIER DEUX ANGLES DIÈDRES ADJACENTS ÉGAUX.

L'existence d'une telle figure est démontrée par le théorème suivant :

228. Théorème. — *Par une droite d'un plan on peut faire passer un plan perpendiculaire au premier, et un seul.*

La démonstration est identique à celle du théorème (12).

Les dièdres adjacents formés par un plan perpendiculaire à un autre, avec cet autre, s'appellent DIÈDRES DROITS.

229. Corollaire. — *Tous les dièdres droits sont égaux.*

Démonstration comme pour (13).

230. Définitions. — On dit qu'un DIÈDRE EST AIGU s'il est *plus petit* qu'un dièdre droit ; qu'il EST OBTUS s'il est *plus grand* qu'un dièdre droit.

Deux dièdres *dont la somme vaut un dièdre droit* sont dits COMPLÉMENTAIRES.

Deux dièdres *dont la somme vaut deux dièdres droits* sont dits SUPPLÉMENTAIRES.

231. Théorème. — *Un plan qui en rencontre un autre, forme avec cet autre et d'un même côté deux angles dièdres adjacents supplémentaires.*

Démonstration comme pour (17).

232. Théorème réciproque. — *Si deux angles dièdres adjacents sont supplémentaires ils ont leurs faces extérieures, non communes, dans le prolongement l'une de l'autre sur un même plan.*

Démonstration comme pour (18).

233. Corollaire. — *La somme des dièdres adjacents formés d'un même côté d'un plan est égale à deux dièdres droits.*

Démonstration, voir (19).

234. Corollaire. — *La somme des angles dièdres formés autour d'une droite comme arête et occupant tout l'espace est égale à quatre dièdres droits.*

Démonstration, voir (20).

235. Théorème. — *Deux angles dièdres opposés par l'arête sont égaux.*

Démonstration, voir (22).

236. Angle plan d'un dièdre. — Soit un angle dièdre P A B Q. Prenons un point C sur l'arête et, dans chacune des faces P et Q, élevons des perpendiculaires C D et C E sur l'arête. Nous formons ainsi un angle D C E qu'on appelle ANGLE PLAN du dièdre donné.

La valeur de l'*angle plan* d'un dièdre est indépendante du point C choisi. Si en effet on déplace C sur l'arête, les deux droites C D et C E se déplacent parallèlement à elles mêmes et l'angle D C E reste invariable.

Par suite l'*angle plan d'un dièdre caractérise ce dièdre* et nous allons voir qu'*il peut servir à le mesurer.*

237. Théorème. — *Si deux dièdres sont égaux, leurs angles plans sont égaux.*

Il suffit de faire coïncider les dièdres, puis de construire l'angle plan de l'un des dièdres en un point de l'arête, cet angle plan se trouve être en même temps celui de l'autre dièdre.

238. Théorème réciproque. — *Si deux dièdres ont des angles plans égaux, ils sont égaux.*

Soient les deux dièdres P A B Q, P′ A′ B′ Q′ (fig. 128), dont les angles plans D C E, D′ C′ E′ sont égaux.

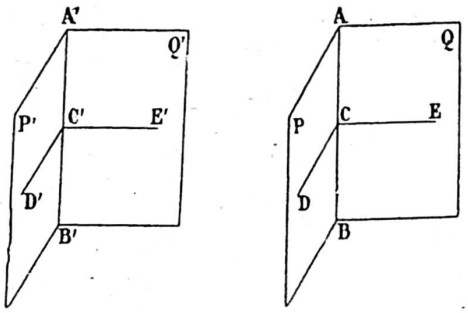


Fig. 128

Portons le plan Q′ sur le plan Q de façon que A′ B′ tombent sur A B et C′ en C. Les deux droites C E et C′ E′ perpendiculaires en un même point C de la droite A B coïncident ; et les droites C D et C′ D′, toutes deux perpendiculaires à la même droite A B au point C se trouvent dans le même plan D C E perpendiculaire à A B au point C (222). Mais, puisque les angles D′ C′ E′ et D C E sont égaux, la droite C′ D′ tombe sur C D. Par suite la face P′ coïncide avec la face P (211) ; les deux dièdres coïncidant ils sont égaux.

239. Théorème. — *Si deux angles dièdres adjacents sont supplémentaires, leurs angles plans sont supplémentaires.*

Soient deux dièdres adjacents supplémentaires P A B Q, P′ A B Q, et soient leurs angles plans D C E, D C F′ (fig. 129). Les deux droites C E, C E′ qui sont

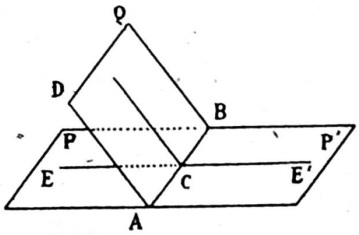


Fig. 129

dans un même plan P P′ (232), et qui sont toutes deux perpendiculaires sur A B sont le prolongement l'une de l'autre. Il s'ensuit que les deux angles plans E C D et D C E′ sont supplémentaires (17).

240. Théorème réciproque. — *Si deux angles dièdres ont des angles plans supplémentaires, ils sont eux-mêmes supplémentaires.*

Car, si on les rend adjacents, leurs faces extérieures se placent dans un même plan.

241. Corollaires. — *Un dièdre droit a pour angle plan un angle droit, et réciproquement.*

Deux dièdres complémentaires ont des angles plans complémentaires, et réciproquement.

242. Théorème. — *Le rapport de deux angles dièdres est égal à celui de leurs angles plans.*

Soient deux dièdres P A B Q, P′ A′ B′ Q′ (fig. 130). Mesurons ces deux dièdres au moyen d'un dièdre pris pour unité.

Supposons que ce dièdre soit contenu deux fois dans P A B Q et trois fois dans P′ A′ B′ Q′. Partageons en effet les dièdres P A B Q et P′ A′ B′ Q′ en 2 et 3 parties égales au moyen de plans passant par les arêtes ; soient R, R′, R″ ces plans. Tous les dièdres P A B R, R A B Q, P′ A′ B′ R′, R′ A′ B′ R″, R″ A′ B′ Q′ sont

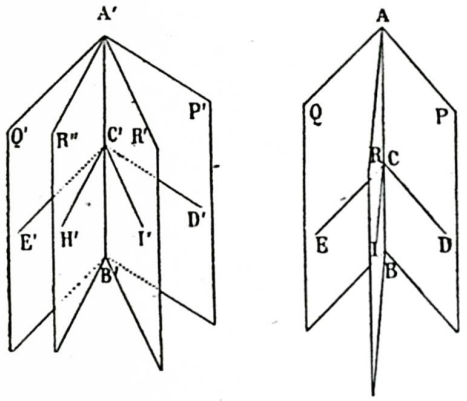


Fig. 130

égaux. Si on mène, par un point C et C′ de l'arête de chacun des dièdres donnés, un plan perpendiculaire à l'arête, les intersections C D, C E, C I, C′ D′, C′ I′, C′ H′, C′ E′ de ces plans avec les plans P R Q, P′ R′ R″ Q′ forment les angles plans des dièdres donnés et de leurs divisions.

Or, tous les angles dièdres tels que P A B R, obtenus par la division des dièdres donnés, étant égaux, leurs angles plans sont égaux. Si donc on choisit pour unité l'un de ces angles plans D C I, on voit que l'angle plan du dièdre P A B Q est mesuré par le nombre 2, et l'angle plan du dièdre P′ A′ B′ Q′ par le nombre 3.

Le rapport des angles plans et donc bien le même que celui des angles dièdres.

243. Corollaire. — *La mesure de l'angle dièdre est la même que celle de son angle plan pourvu qu'on prenne, pour unité d'angle plan, l'angle plan du dièdre unité.*

244. Théorème. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan mené par la droite est perpendiculaire au premier plan.*

Hypothèse (fig. 131). — La droite A B est perpendiculaire à toutes les droites passant par B dans le plan P.

Le plan Q passe par A B.

Conclusion. — Q est perpendiculaire à P.

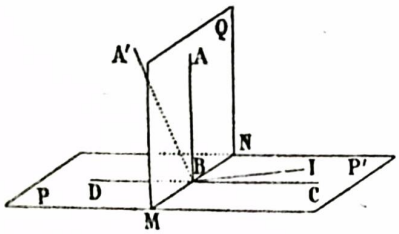


Fig. 131

Démonstration. — Elle se déduit du théorème (241). Il suffit, en effet, de démontrer que les angles plans des deux dièdres P M N Q, P′ M N Q sont droits.

Or, si on mène par le point B dans le plan P P′ une droite perpendiculaire à M N, cette droite est perpendiculaire à A B (hypothèse) ; comme d'autre part A B est aussi perpendiculaire à M N, les angles A B D et A B C sont les angles plans des dièdres P M N Q et P′ M N Q, A B étant perpendiculaire à D C ces angles plans sont droits.

245. Théorème. — *Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée dans l'un d'eux perpendiculairement à leur intersection est perpendiculaire à l'autre plan.*

Soient en effet les plans P et Q, Q est perpendiculaire à P (fig. 131), suivant l'intersection M N. Elevons au point B la perpendiculaire B A à M N dans le plan Q. Si on mène D C perpendiculaire à M N au point B, les droites A B et D C forment les deux angles plans A B D, A B C des dièdres P M N Q, P′ M N Q, comme ces dièdres sont droits (hypothèse), les angles plans sont droits.

Alors D C est perpendiculaire à A B et cette dernière droite étant perpendiculaire à la fois à M N et à D C est perpendiculaire au plan P (218).

246. Corollaire. — *En un point d'un plan on peut élever une perpendiculaire à ce plan et on ne peut en élever qu'une.*

En effet, soit P le plan donné (fig. 131), et soit à élever par le point B une perpendiculaire au plan P. On peut construire cette perpendiculaire en s'appuyant sur le théorème (245).

Menons par le point B une droite quelconque M N dans le plan P, faisons passer par M N un plan Q perpendiculaire au plan P, et dans le plan Q élevons au point B une perpendiculaire B A à M N. Cette droite A B est perpendiculaire au plan P (245).

Du reste, il n'y en a pas d'autre. Supposons en effet qu'on mène par B une autre droite quelconque B A′. Les deux droites B A et BA′ déterminent un plan (211) qui coupe le plan P suivant une certaine droite B I, B A est perpendiculaire à B I dans le plan A′ B A (217). par suite A′ B qui est aussi dans le plan A′ B A ne peut être perpendiculaire à B I (12), à moins qu'elle ne se confonde avec B A. Donc elle n'est pas perpendiculaire au plan P (217), à moins qu'elle ne se confonde avec B A.

247. Théorème. — *Deux plans étant perpendiculaires, si d'un point de l'un d'eux on abaisse une perpendiculaire sur l'autre, cette perpendiculaire est contenue tout entière dans le premier plan.*

Soient les deux plans P et Q (fig. 132) perpendiculaires. D'un point A du plan Q abaissons la perpendiculaire A C sur le plan P.

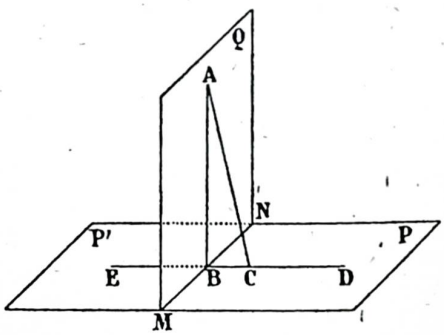


Fig. 132

Par le pied C de A C faisons passer une droite D E perpendiculaire en B à l'intersection M N des deux plans, et enfin menons dans le plan Q la droite A B.

La droite A B est perpendiculaire à M N (219), mais alors elle est perpendiculaire au plan P (245). Si elle est perpendiculaire au plan P, elle est perpendiculaire à B D (217). Dans ce cas A B et A C sont perpendiculaires à une même droite B D dans un même plan A B D ; c'est impossible, à moins que C ne se confonde avec B. La perpendiculaire abaissée du point A sur le plan P n'est donc autre que A B tout entière, située dans le plan Q.

248. Théorème. — *Si deux plans sont perpendiculaires à un même troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième plan.*

La démonstration de ce théorème se déduit du théorème précédent. En effet, soient deux plans Q et R, tous deux perpendiculaires à un même plan P. Si d'un point A de l'intersection des deux plans Q et R on abaisse une perpendiculaire sur P, cette perpendiculaire est tout entière dans le plan Q, puisque A est dans le plan Q (247) et tout entière dans le plan R, puisque A est dans le plan R. Elle se confond donc nécessairement avec l'intersection des deux plans.

249. Théorème. — *D'un point pris hors d'un plan on peut abaisser une perpendiculaire sur ce plan et on ne peut en abaisser qu'une.*

Soit le point A donné hors du plan P (fig. 133). Par le point A, faisons passer deux droites quelconques A B, A C qui coupent le plan P en B et en C. Joignons B C, et abaissons du point A dans le plan A B C une perpendiculaire sur B C, soit A I cette perpendiculaire. Elevons I H perpendiculaire sur B C dans le plan P. Les droites A I, I H déterminent un plan (211) qui est perpendiculaire à B C (218) et par suite au plan P (244).

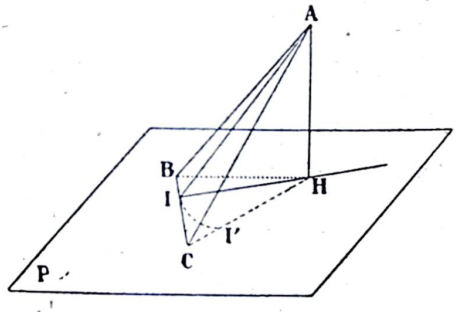


Fig. 133

Si maintenant on abaisse du point A la perpendiculaire A H sur I H dans le plan A I H, cette droite A H est perpendiculaire au plan P (245). Le théorème (247) démontre que A H est la seule perpendiculaire qu'on puisse abaisser du point A sur le plan P.

250. Théorème. — *Si d'un point pris hors d'un plan on abaisse sur ce plan la perpendiculaire et diverses obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *Deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire sont inégales et celle qui s'en écarte le plus est la plus grande.*

Ce théorème est la généralisation du théorème (46).

1° Soient A H la perpendiculaire au plan P et A I une oblique (fig. 133).

Dans le plan A I H, AH est plus courte que A I (46).

2° Soient A B et A C deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire.

Les deux triangles A B H, A C H sont égaux (42) comme rectangles en H (hypothèse) (217) ayant A H commun et B H = C H (hypothèse). On a donc A B = A C.

3° Soient A I et A C deux obliques telles que C H > I H.

Si on décrit de H comme centre avec H I pour rayon un arc de cercle, cet arc viendra rencontrer C A en un point I' placé entre C et H (hypothèse). Dans le plan A C H l'oblique A I' est plus courte que l'oblique A C (46). Mais comme, en vertu de la seconde partie de ce théorème, A I = A I', on en déduit que A C est plus grand que A I.

Les réciproques de ces trois propositions sont vraies, puisque les propositions directes envisagent tous les cas possibles.

251. Remarque. — Un point A étant donné hors d'un plan P (fig. 133) la plus courte distance de ce point au plan est la longueur de la perpendiculaire A H abaissée du point sur le plan.

On dit le plus souvent que A H EST LA DISTANCE DU POINT AU PLAN.

Droites et plans parallèles

252. Théorème. — *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

Ce théorème est la généralisation du théorème (55).

Soient deux droites A C et B D perpendiculaires au plan P (fig. 134). Il faut démontrer qu'elles répondent à la définition des parallèles (54).

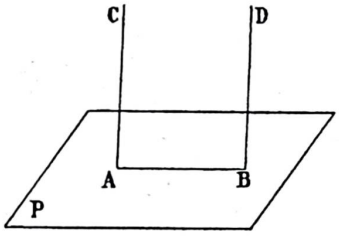


Fig. 134

Or, 1° elles ne se rencontrent pas ; car, si elles avaient un point commun, on pourrait abaisser de ce point deux perpendiculaires sur le plan P, ce qui est impossible (249) ;

2° Elles sont dans un même plan. En effet si dans le plan A B D (213) on élève en A une perpendiculaire à A B, cette perpendiculaire se confond avec A C (245 et 246). Donc A C et B D sont dans le même plan A B D.

253. Théorème réciproque. — *Deux droites étant parallèles, un plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

La démonstration de ce théorème résulte du postulat d'Euclide (57) et du théorème précédent (252).

Le plan P étant perpendiculaire à l'une A C des deux parallèles A C et B D (fig. 134), s'il n'était par perpendiculaire à B, on pourrait élever en B une perpendiculaire au plan P. Cette perpendiculaire serait parallèle à A C (252), ce qui n'est pas possible (57), à moins qu'elle ne se confonde avec B D.

254. Théorème. — *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.*

Car si on mène un plan perpendiculaire à la troisième droite, il est perpendiculaire à chacune de deux premières (253), et par suite celles-ci sont parallèles entre elles (252).

255. Définition. — UNE DROITE ET UN PLAN SONT DITS PARALLÈLES LORSQU'ILS N'ONT AUCUN POINT COMMUN.

Le théorème suivant démontre qu'il existe des droites parallèles à un plan.

256. Théorème. — *Si une droite, non située dans un plan, est parallèle à une droite de ce plan, elle est parallèle au plan.*

En effet soit A B une droite du plan P. Si une droite C D, non située dans le plan P, est parallèle à A B, 1° elle est dans un même plan avec A B (54) ; 2° elle ne rencontre pas A B (54).

L'intersection des deux plans A B C D et P, est la droite A B ; si C D rencontrait le plan P, ce ne pourrait être qu'en un point de A B ; c'est impossible en vertu de l'hypothèse.

257. Théorème. — *Si une droite* C D *est parallèle à un plan* P, *tout plan* Q *passant par la droite coupe le plan suivant une droite* A B *parallèle à* C D.

En effet 1° A B et C D sont dans un même plan 2° A B ne rencontre pas C D, car autrement C D rencontrerait le plan P.

C D est parallèle à A B (54).

258. Théorème. — *Si une droite* C D *est parallèle à un plan* P, *toute droite* A B, *menée parallèlement à* C D *par un point* A *du plan* P, *est tout entière dans le plan* P.

En effet, la droite C D et la droite A B déterminent un plan (54), ce plan coupe le plan P suivant une certaine droite A B′. Or, A B′ est parallèle à C D (257). A B′ et A B étant deux parallèles à C D menées par un même point A se confondent (57).

259. Théorème. — *Une droite* C D *parallèle à deux plans* P *et* Q *qui se coupent est parallèle à leur intersection* A B.

En effet, si par un point A de l'intersection on mène une parallèle A B′ à C D, 1° A étant dans le plan P, A B′ est dans le plan P (258) ; 2° A étant dans le plan Q, A B′ est dans le plan Q (258).

A B′ étant à la fois dans les deux plans se confond avec leur intersection A B.

260. Définition. — *Nous avons déjà dit* (215) *que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun quelle que soit la distance à laquelle on les prolonge.*

Le théorème suivant montre l'existence de plans parallèles.

261. Théorème. — *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

En effet, ils ne peuvent pas se rencontrer en vertu du théorème (223).

262. Théorème. — *Si on coupe deux plans parallèles* P *et* Q *par un même plan* R, *les intersections* A B *et* C D *de* R *avec* P *et* Q *sont parallèles.*

En effet, 1° A B et C D sont dans un même plan R ; 2° elles ne peuvent se rencontrer sans quoi les plans P et Q se rencontreraient.

Les intersections A B et C D sont parallèles (54).

263. Théorème. — *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, une droite* A B *menée parallèlement au plan* Q *par un point* A *du plan* P *est tout entière dans le plan* P.

La démonstration résulte des théorèmes (262) et (257) et du postulat d'Euclide (57).

Par A B on fait passer un plan quelconque R qui coupe P et Q, suivant deux droites A B′ et C D. A B′ et C D sont parallèles (262). D'autre part A B et C D sont parallèles (257). Par suite A B et A B′, toutes deux parallèles à C D, se confondent (57).

264. Théorème. — *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* A B *perpendiculaire à l'un* P *est aussi perpendiculaire à l'autre* Q.

En effet, soit A le pied de la perpendiculaire A B dans le plan P. Par le point A on peut faire passer une droite quelconque A D dans le plan P. A D est perpendiculaire à A B (217).

Le plan A D, A B (211), coupe le plan Q, suivant une certaine droite B C qui est parallèle à A D (262) et perpendiculaire à A B (58).

Quelle que soit la droite B C choisie dans le plan Q, on pourra toujours démontrer que B C est parallèle à une droite du plan P passant par le point A, et par conséquent que A B est perpendiculaire à toutes les droites passant par son pied dans le plan Q (217).

265. Théorème. — *Par un point* A *pris hors d'un plan* P, *on peut mener un plan* Q *parallèle au plan* P, *et on n'en peut mener qu'un.*

On s'appuie sur le théorème (261).

Du point A abaissons une perpendiculaire A B sur le plan P (249), et par A faisons passer un plan perpendiculaire Q à A B (221). Le plan Q est parallèle au plan P (261).

Le plan Q est le seul qu'on puisse mener par A parallèlement au plan P, car s'il y en avait un autre Q′ il serait perpendiculaire à A B au point A (264) et, par suite, il se confondrait avec Q (231).

266. Théorème. — *Deux plans* P *et* Q *parallèles à un troisième* R *sont parallèles entre eux.*

Car s'ils se rencontraient, on pourrait, d'un point de leur intersection, mener deux plans parallèles à un même plan, ce qui est impossible (265).

267. Théorème. — *Les segments* A B *et* C D, *interceptés sur deux droites parallèles par deux plans parallèles* P *et* Q, *sont égaux.*

En effet, le plan A B, C D (54) coupe les deux plans P et Q suivant deux parallèles A D, B C (262). La figure A B C D est donc un parallélogramme et les côtés A B et C D sont égaux (68).

268. Remarque. — Si A B et C D sont perpendiculaires aux deux plans P et Q, le théorème leur est encore applicable. D'autre part, ce sont les segments de droite les plus courts qu'on puisse mener entre les deux plans (250). Pour cette raison, on donne à la longueur de la perpendiculaire commune aux deux plans P et Q le nom de DISTANCE DES DEUX PLANS.

Deux plans parallèles sont partout à la même distance.

269. Définition. — Angle de deux demi-droites. — *Etant donné deux demi-droites ox et o′ x′ non situées dans un même plan, on appelle angle de ces deux demi-droites l'angle formé en menant par un point* A *quelconque de l'espace des demi-droites* A B *et* A C *respectivement parallèles aux demi-droites ox et o′ x′.*

Le théorème suivant démontre que l'angle obtenu est indépendant de la position du point choisi A dans l'espace.

270. Théorème. — *Si deux angles ont leurs côtés parallèles chacun à chacun, ils sont égaux ou supplémentaires.*

Soient B A C, E D F les deux angles et supposons que A B soit parallèle à D E, A C parallèle à D F (fig. 135), les côtés peuvent être parallèles et de même sens ;

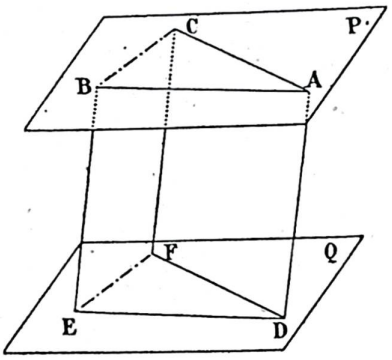


Fig. 135

parallèles de sens contraire ; ou parallèles l'un dans le même sens, l'autre en sens contraire. Supposons qu'ils soient tous deux parallèles et de même sens.

Prenons A B = D E ,A C = F D et joignons A D, B E, F C. Les figures A C F D et A B E D sont des parallélogrammes (69) ; par suite A D est parallèle à C F et B E est parallèle à A D ; B E est parallèle à C F (254). On a aussi C F = A D = B E (68).

Il suit de là que a figure B E F C est un parallélogramme (69) et que B C et E F sont égaux (68). Mais les deux triangles B A C, E D F ont alors leurs trois côtés égaux chacun à chacun et les angles C A B et E DF sont égaux.

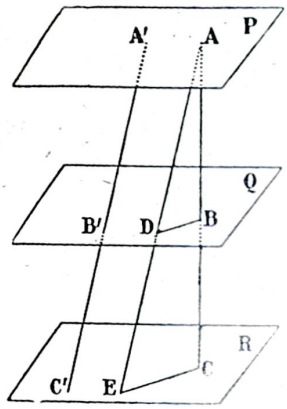


Fig. 136

Si les deux angles avaient leurs côtés parallèles et tous deux de sens contraire, on remplacerait l'un d'eux par l'angle opposé par le sommet et on arriverait à la même conclusion.

Si les deux angles avaient leurs côtés parallèles l'un de même sens, l'autre de sens contraire, on remplacerait l'un des angles par son supplément et on démontrerait ainsi que les angles donnés sont supplémentaires.

271. Remarque. — Les plans P et Q des deux angles sont parallèles. En effet, si on mène par A un plan parallèle au plan Q, il coupe le plan B E D A suivant B A parallèle à E D (262), il coupe aussi le plan C F D A suivant A C parallèle à D F (262). Il se confond donc avec le plan P.

272. Théorème. — *Trois plans parallèles interceptent sur deux droites quelconques des segments proportionnels.*

Soient deux droites quelconques A B C, A' B' C' coupées par les trois plans P, Q, R, (fig. 136). Menons par A une parallèle A D E à A' B' C'.

On a (267) :

$$A\,D = A'\,B'$$
$$D\,E = B'\,C'$$

Le plan E A, A C coupe les plans Q et R suivant deux parallèles B D et C E (262).

On a donc (137) :

$$\frac{A\,D}{D\,E} = \frac{A\,B}{B\,C}$$

et par suite :

$$\frac{A'\,B'}{B'\,C'} = \frac{A\,B}{B\,C}$$

Angles trièdres et polyèdres

273. Définitions. — On appelle ANGLE TRIÈDRE la figure formée par trois plans qui se coupent en un même point, *ces plans étant limités à leurs intersections* (fig. 137).

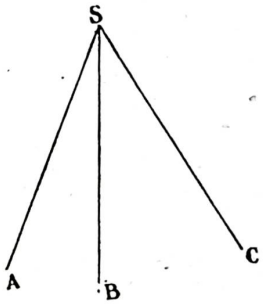


Fig. 137

Les intersections A S, B S, C S des trois plans sont les ARETES du trièdre ; le point S où les trois plans se rencontrent et où concourent les arêtes s'appelle SOMMET.

Les angles plans formés par des arêtes consécutives, soit A S B, A S C, B S C, sont les FACES.

Les angles dièdres formés par deux plans sont les DIÈDRES du trièdre. *On désigne ces dièdres par quatre lettres en plaçant au milieu les deux lettres de l'arête* : par exemple, on dira le dièdre formé par les deux plans A S B et B S C.

Il ne faut pas confondre une *face* qui est un *angle*, avec le plan qui contient cette face et qu'on nomme *plan* du trièdre.

On appelle ANGLE POLYÈDRE la figure formée par plusieurs plans qui se coupent en un même point ; ces plans étant limités à leurs intersections.

Les éléments de l'angle polyèdre se définissent comme pour le trièdre.

On dit qu'un angle polyèdre est *convexe* lorsque la figure est située tout entière d'un même côté par rapport à l'un des plans qui contribuent à la former.

274. Théorème. — *Dans un trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.*

HYPOTHÈSE (fig. 138) : Les trois droites A S, C S, B S sont concourantes.

CONCLUSION : $A\,S\,B < A\,S\,C + B\,S\,C$.

DÉMONSTRATION : Nous allons démontrer que la plus grande face, A S B par exemple, est plus petite que la somme des deux autres.

Nous nous appuierons sur les théorèmes (28) et (44).

Dans le plan A S B, menons une droite S D faisant avec A S un angle A S D égal à A S C. Il suffit évidemment de démontrer que l'angle D S B est plus petit que l'angle C S B.

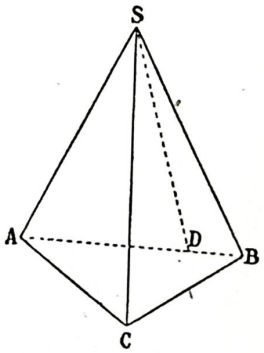


Fig. 138

Prenons sur S D et S C deux longueurs égales S D = S C, et, par un point A quelconque de l'arête S A, faisons passer un plan A D C qui coupe l'arête S B en un certain point B.

Les intersections de ce plan avec les plans du trièdre forment un triangle A B C.

Pour démontrer que l'angle B S D est plus petit que B S C, nous remarquons que les deux triangles C B S et D B S sont deux côtés égaux, à savoir S B commun, D S = C S par construction. Il suffit donc d'établir que le côté B C est plus grand que le côté B D (44).

Or, les deux triangles A S D et A S C sont égaux par construction :

$$A\,S \text{ commun}$$
$$S\,C = S\,D$$
$$\widehat{A\,S\,C} = \widehat{A\,S\,D}$$

donc :

$$A\,C = A\,D$$

Mais, dans le triangle A B C, on a (28) :

$$A\,B < A\,C + B\,C$$

On peut donc écrire :

$$A\,D + D\,B < A\,C + B\,C$$

et, en retranchant aux deux membres les quantités égales

$$D\,B < B\,C$$

ce qui démontre le théorème :

$$A\,S\,C = A\,S\,D$$

$$(1) \qquad \frac{B\,S\,C}{A\,S\,C + B\,S\,C} < \frac{B\,S\,D}{A\,S\,B}$$

275. Corollaire. — *Dans un trièdre, une face quelconque est plus grande que la différence des deux autres.*

De l'inégalité (1), on tire en effet en faisant passer B S C dans le second membre

$$A\,S\,C > A\,S\,B - B\,S\,C$$

276. Théorème. — *Dans un polyèdre convexe, la somme des faces est plus petite que quatre droits.*

Soit le polyèdre S A B C D E, convexe. Je dis que l'on a :

$$ASB + BSC + CSD + DSE + ESA < 4 \text{ dr.}$$

La démonstration de ce théorème se déduit de celle du théorème (274).

Coupons toutes les arêtes du polyèdre par un plan. Ce plan détermine, en coupant les plans du polyèdre, le polygone A B C D E, (fig. 139). Chacun des sommets

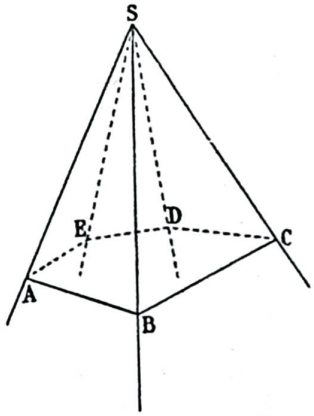


Fig. 139

de ce polygone est le sommet d'un trièdre formé par le plan que nous venons de mener et par deux plans du polyèdre.

Or, dans chaque trièdre, on a

Trièdre	A E B S :	$EAB < EAS + BAS$
—	B A C S :	$ABC < ABS + CBS$
—	C B D S :	$BCD < BCS + DCS$
—	D E C S :	$CDE < CDS + EDS$
—	E A D S :	$AED < DES + AES$

Additionnons membre à membre :

$$(1)\ EAB + ABC + BCD + CDE + AED < EAS + BAS + ABS + CBS + BCS + DCS + CDS + EDS + DES + AES.$$

Le premier membre est la somme des angles d'un polygone convexe. Ce polygone a autant de côtés que le polyèdre a de faces, soit n. On a (65) :

$$EAB + ABC + BCD + CDE + AED = 2\,(n - 2) \text{ droits.}$$

D'autre part, dans le second membre, on a écrit les angles à la base de tous les triangles formés autour du point S par les arêtes du polyèdre et les intersections du plan A B C D E avec les plans du polyèdre. Et on a (63) :

$$\begin{aligned} BAS + ABS &= 2 \text{ droits} - ASB \\ CBS + BCS &= 2 \text{ droits} - BSC \\ DCS + CDS &= 2 \text{ droits} - DSC \\ EDS + DES &= 2 \text{ droits} - DSE \\ AES + EAS &= 2 \text{ droits} - ASE \end{aligned}$$

En portant les valeurs ainsi obtenues dans l'égalité (1), on trouve :

$$2\,(n - 2) \text{ droits} < 2\,n \text{ droits} - (ASB + BSC + DSC + DSE + ASE)$$

Appelons S la somme des faces du polyèdre :

$$\begin{aligned} 2\,(n - 2) \text{ dr.} &< 2\,n \text{ dr.} - S \\ 2\,n \text{ dr.} - 4 \text{ dr.} &< 2\,n \text{ dr.} - S \\ 4 \text{ dr.} &> S \end{aligned}$$

277. Définition. — Soit le trièdre S A B C ; si on prolonge au delà du sommet, en S A′, S B′, S C′ les arêtes de ce trièdre, on forme un nouveau trièdre S A′ B′ C′ (fig. 140).

Il est facile de démontrer que les deux trièdres S A B C et S A′ B′ C′ ont tous leurs éléments égaux.

Les angles A S B et A′ S B′, A S C et A′ S C′, B S C et B′ S C′ sont égaux deux à deux comme opposés par le sommet. Les dièdres C S A B et C′ S A′ B′, A S B C et A′ S B′ C′, A S C B et A′SC′B′ sont égaux deux à deux pour la même raison.

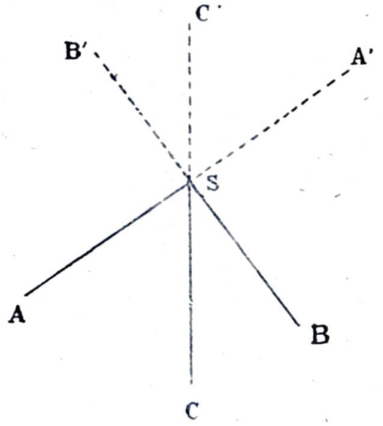


Fig. 140

Toutefois, bien que ces deux dièdres aient tous les éléments égaux, ils ne sont pas égaux ; car ils ne sont pas superposables. En effet, si nous essayons de les superposer, nous devons tout d'abord amener en coïncidence deux faces égales ou deux dièdres égaux. Essayons par exemple de faire coïncider d'abord la face A′ S B′ avec la face A S B qui lui est égale. Nous pouvons le faire de deux façons : 1° En rabattant le trièdre S A′ B′ C′ en avant autour de S de manière à amener S A′ sur S B et S B′ sur S A ; dans ce mouvement, l'arête S C′ vient en avant du côté de S C, mais comme le dièdre S A′ n'est pas égal au dièdre S B, ni la face A′ S C′ à la face B S C, cette arête S C′ ne coïncide pas avec S C. Les deux trièdres ne coïncident pas. — 2° En faisant tourner le trièdre S A′ B′ C′ autour de S, sans faire sortir A′ S B de son plan. Dans le mouvement l'arête S A′ vient se placer sur S A et S B′ sur S B ; mais S C′ reste en arrière, du côté opposé à S C, et par conséquent les deux trièdres sont seulement juxtaposés, accolés par la face A S B, A′ S B′, ils ne coïncident pas.

Les éléments de ces deux trièdres ne sont pas disposés dans le même ordre. Un observateur adossé à l'arête S A, la tête du côté de S, et la face tournée vers l'intérieur du trièdre, verrait l'arête S C à sa droite et l'arête S B à sa gauche. Un observateur placé dans les mêmes conditions à l'intérieur du trièdre S A′ B′ C′, adossé à l'arête S A′, la tête du côté de S, verrait l'arête S B′ à sa droite et l'arête S C′ à sa gauche. Les éléments égaux des deux trièdres sont donc disposés en ordre inverse. On dit que les deux trièdres ne sont pas de *même sens*.

Deux trièdres qui ont tous leurs éléments égaux, mais disposés en ordre inverse, sont dits SYMÉTRIQUES l'un de l'autre.

Exercices

77. — Par un point A quelconque mener une droite qui rencontre deux droites données quelconques.

78. — Trouver le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés, dans l'espace.

79. — Prendre sur une droite A B un point équidistant de deux points donnés quelconques C et D non situés dans le plan de A B.

80. — Quel est le lieu des points équidistants de deux plans donnés ?

81. — Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur des plans dont les intersections sont parallèles sont dans un même plan.

82. — Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, celui-ci forme avec les deux premiers des angles dièdres alternes-internes, alternes-externes, correspondants, égaux.

83. — Si deux dièdres ont leurs arêtes parallèles et leurs faces perpendiculaires chacune à chacune ils sont égaux ou supplémentaires.

84. — Démontrer que deux angles trièdres qui ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, sont égaux ou symétriques, suivant que les deux faces égales sont disposées dans le même sens ou en sens contraire.

85. — Démontrer que deux angles trièdres qui ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun sont égaux ou symétriques.

86. — Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite.

87. — Dans tout angle trièdre les plans menés perpendiculairement aux faces par les bisssectrices de ces faces, se coupent suivant une même droite.

88. — Quel est le lieu des points à égale distance des trois arêtes d'un trièdre ?

Les polyèdres — Les volumes

278. Définitions. — Polyèdre. — On appelle POLYÈDRE un solide limité par des plans.

Ces plans limités à leurs intersections sont les FACES du polyèdre, polygones dont les côtés sont les *arêtes* du polyèdre et les sommets, les SOMMETS du polyèdre.

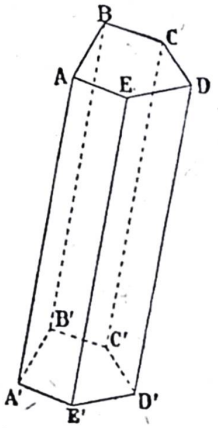


Fig. 141

279. Prisme. — Le PRISME est un polyèdre dont deux faces, nommées BASES, sont des polygones égaux et parallèles et dont les autres faces, dites FACES LATÉRALES, reliant les bases, sont des parallélogrammes.

Pour construire un prisme, il suffit de couper un système de droites parallèles par deux plans parallèles.

Soit en effet un système de droites parallèles A A', B B', C C', D D', E E'. (Fig. 141). Soient A B C D E et A' B' C' D' E' les intersections de ces deux plans avec les parallèles ; les droites A B et A' B' sont parallèles (262), il en est de même de B C et B' C', C D et C' D', E D et E' D', E A et E' A'. Ces droites sont aussi égales deux à deux (68). Les polygones A B C D E, A' B' C' D' E' ont donc leurs côtés égaux, chacun à chacun ; d'autre part, ils ont leurs angles égaux chacun à chacun (270) ; ces polygones sont donc égaux.

Il résulte de cette démonstration que *des sections parallèles faites dans un prisme sont des polygones égaux.*

On appelle SECTION DROITE d'un prisme, une section faite par un plan perpendiculaire aux faces latérales.

On appelle PRISME DROIT, un prisme dont les bases sont perpendiculaires aux faces latérales.

La HAUTEUR d'un prisme est la distance des bases. *Cette distance est mesurée sur la perpendiculaire commune aux deux bases.*

280. Parallélépipède. — On appelle PARALLÉLÉPIPÈDE un prisme dont les bases sont des parallélogrammes.

Un parallélépipède a six faces qui sont toutes des parallélogrammes.

On dit que le parallélépidède est droit quand ses bases sont perpendiculaires aux faces latérales. On dit qu'il est rectangle s'il est droit et si ses bases sont des rectangles.

281. Cube. — On appelle CUBE un parallélépipède rectangle, dont les bases et les faces latérales sont des carrés.

282. Théorème. — *Dans un parallélépipède, deux faces opposées quelconques sont égales et parallèles.*

Par définition, les bases sont égales et parallèles. Soient A B C D et A' B' C' D' ces bases (fig. 142).

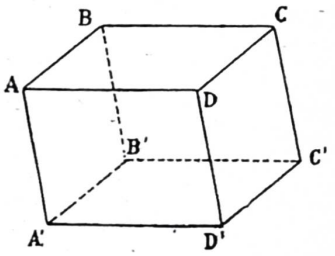


Fig. 142

Je dis que les faces A B B' A', D C C' D' par exemple sont égales et parallèles :

1° A B et D C sont parallèles et égaux, A' B' et D' C' sont parallèles et égaux comme côtés opposés de parallélogrammes.

2° Les arêtes A A', B B', C C', D D' sont égales (267).

3° Les angles A' A B et D' D C sont égaux et leurs plans sont parallèles (270).

De ces trois propositions il résulte que les parallélogrammes A B B' A', D C C' D' sont parallèles et qu'ils sont égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun et leurs angles égaux chacun à chacun.

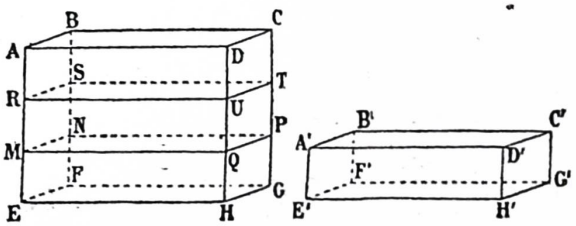


Fig. 143

283. Remarque. — Il résulte de ce théorème que deux faces opposées quelconques du parallélépipède peuvent être choisies pour bases.

284. Théorème. — *Les volumes de deux parallélépipèdes rectangles qui ont même base sont entre eux comme les hauteurs de ces parallélépipèdes.*

Soient les deux parallélépipèdes rectangles A B C D E F G H et A' B' C' D' E' F' G' H' qui ont par hypothèse les bases égales (fig. 143).

HYPOTHÈSE : A B C D = A' B' C' D'

Les hauteurs sont égales aux arêtes A E, A' E' ; nous voulons démontrer :

CONCLUSION :

$$\frac{\text{volume } A\,B'\,C'\,D'\,E'\,F'\,G'\,H'}{\text{volume } A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H} = \frac{A'\,E'}{A\,E}$$

DÉMONSTRATION : Mesurons les hauteurs A E et A′ E′ avec une unité de longueur arbitrairement choisie, A′ E′ lui-même, par exemple. Nous trouvons que cette unité, contenue 1 fois dans A′ E′, est contenue, par exemple, 3 fois dans A E.

Divisons A E en trois parties égales à A′ E′ et, par les points de divisions M et R, faisons passer des plans perpendiculaires à A E. On obtient ainsi des sections droites R S T U et M N P Q. Ces sections droites sont des rectangles égaux aux rectangles de base, A B C D, E F G H et aussi aux bases A′ B′ C′ D′, E′ F′ G′ H′ de l'autre parallélépipède (hypothèse).

Dans ces conditions, les polyèdres A B C D R S T U, R S T U M N P Q, M N P Q E F G H sont des parallélépipèdes rectangles, tous égaux au parallélépipède A′ B′ C′ D′ E′ F′ G′ H′. On peut donc décomposer chacun des parallélépipèdes donnés en autant de parallélépipèdes égaux, tels que A B C D R S T U, que l'unité de longueur choisie est contenue de fois dans la hauteur de ce parallélépipède. Or les volumes V et V′ des parallélépipèdes donnés étant évidemment proportionnels aux nombres de parallélépipèdes élémentaires ainsi construits, V et V′ sont proportionnels à A E et à A′ E′.

$$\frac{V}{V'} = \frac{A\ E}{A'\ E'}$$

285. Remarque. — Puisqu'on peut prendre pour bases d'un parallélépipède deux faces opposées quelconques, dans un parallélépipède rectangle, on pourra prendre pour hauteur une arête quelconque. Le théorème précédent peut donc s'énoncer sous une forme un peu différente et plus générale ; appelons *dimensions* d'un parallélépipède rectangle, les longueurs des trois arêtes issues d'un même sommet, nous dirons :

Si deux parallélépipèdes rectangles ont deux dimensions égales, leurs volumes sont entre eux comme les troisièmes dimensions.

286. Théorème. — *Si deux parallélépipèdes rectangles ont même hauteur, leurs volumes sont entre eux comme les aires de leurs bases.*

En s'appuyant sur la remarque précédente, on peut énoncer ce théorème un peu différemment :

Si deux parallélépipèdes rectangles ont une dimension égale, leurs volumes sont entre eux comme le produit des deux autres dimensions.

Soient deux parallélépipèdes V et V′, et soient a, b, c ; a' b' c' les trois dimensions de chacun d'eux.

HYPOTHÈSE :

$$a = a'$$

CONCLUSION :

$$\frac{V}{V'} = \frac{b \times c}{b' \times c'}$$

DÉMONSTRATION : Soit un parallélépipède V_1, qui ait pour dimensions a, b et c'. D'après le théorème précédent on a

$$\frac{V}{V_1} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{V_1}{V'} = \frac{b}{b'}$$

Multiplions membre à membre ces deux égalités :

$$\frac{V \times V_1}{V_1 \times V'} = \frac{V}{V'} = \frac{b \times c}{b' \times c'}$$

C'est la conclusion.

287. Théorème. — *Les volumes de deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme le produit de leurs trois dimensions.*

Soient V et V′ deux parallélépipèdes rectangles ; a, b, c, les dimensions de V ; a' b' c' les dimensions de V′.

Imaginons un troisième parallélépipède V_1, qui ait pour dimensions a, b, et c'.

D'après les deux théorèmes précédents, on a :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{V_1}{V'} = \frac{a \times b}{a \times b'}$$

Et, en multipliant membre à membre :

$$\frac{V}{V'} = \frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'}$$

On dit aussi :

Les volumes de deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.

289. Théorème. — *Le volume d'un parallélépipède rectangle est mesuré par le produit des trois dimensions (ou : de la base par la hauteur) de ce parallélépipède, pourvu qu'on prenne pour unité de volume, le volume du cube construit sur l'unité de longueur.*

En effet le cube construit sur l'unité de longueur a pour dimensions 1, 1 et 1. Soit C son volume et soit V le volume d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b, c.

D'après le théorème, précédent, on a :

$$\frac{V}{C} = \frac{a \times b \times c}{1 \times 1 \times 1}$$

$$\frac{V}{C} = a \times b \times c$$

Si on choisit C comme unité de volume, on pose C = 1 et la relation précédente devient :

$$V = a \times b \times c$$

289. Théorème. — *Le volume du parallélépipède droit a pour mesure le produit de la base par la hauteur.*

Soit un parallélépipède droit A B C D A′ B′ C′ D (fig. 144). Nous allons le remplacer par un parallélépipède rectangle équivalent. Pour cela, par les arêtes

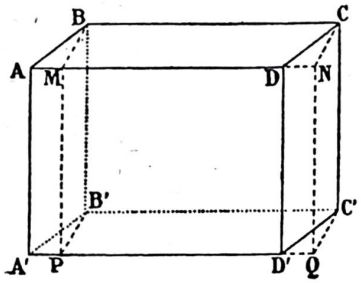


Fig. 144

B B′, C C′ du parallélépipède donné faisons passer des plans perpendiculaires à la face opposée A D D′ A′, soient B B′ P M, C C′ Q N ces plans limités à leurs intersections avec les faces du parallélépipède donné ou avec leurs prolongements.

Le polyèdre B C N M B′ C′ Q P est un parallélépipède rectangle. Il est facile de voir en effet que toutes ses faces sont des rectangles.

Or le volume de ce parallélépipède rectangle a pour expression

$$\text{aire } P\,B'\,C'\,Q \times C\,C'$$

Le rectangle B′ C′ Q P est équivalent au parallélogramme A′ B′ C′ D′ (193), l'expression précédente peut donc se remplacer par :

$$\text{aire } A'\,B'\,C'\,D' \times C\,C'$$

Mais le parallélépipède rectangle M B C N P B′ C′ Q est équivalent au parallélépipède donné. En effet, les polyèdres A B M A′ B′ P, D C N D′ C′ Q sont égaux, tous leurs éléments étant égaux chacun à chacun, comme il est facile de le démontrer.

On peut écrire :

volume A B C D A′ B′ C′ D′ = vol. A B M A′ B′ P + vol. M B C D P B′ C′ D′

volume M B C N P B′ C′ Q = vol. M B C D P B′ C′ D′ + vol. D N C D′ Q C′

et comme :

vol. A B M A′ B′ P = vol. D N C D′ Q C′

on a :

vol. A B C D A′ B′ C′ D′ = vol. M B C N P B′ C′ Q

Et d'après ce qui précède :

vol. A B C D A′ B′ C′ D′ = aire A′ B C′ D′ × C C′

C'est la conclusion.

290. Théorème. — *Le volume d'un prisme droit a pour mesure le produit de la base par la hauteur.*

Soit un prisme droit à base triangulaire A B C A′ B′ C′ (fig. 145). Il peut être considéré comme la moitié d'un parallélépipède droit A C B D A′ C′ B′ D′, construit sur le prisme donné. Ce parallélépipède obtenu en menant par A A′ et par B B′ des plans parallèles

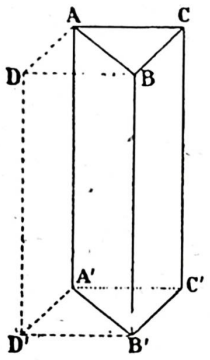


Fig. 145

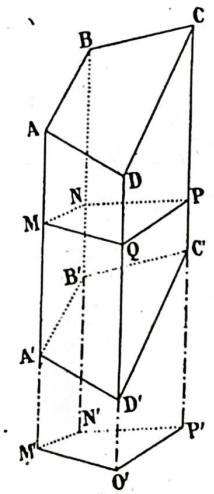


Fig. 146

aux faces C C′ B′ B et A A′ C′ C, est décomposé en effet par la face A B B′ A′ du prisme donné en deux prismes égaux ; le prisme A B D A′ B′ D′ a tous ses éléments égaux à ceux du prisme A B C A′ B′ C′ et disposés dans le même ordre.

Or le volume du parallélépipède droit A C B D A′ C′ B′ D′ est mesuré par le produit.

$$\text{aire } A'\,C'\,B'\,D' \times A\,A'$$

Le volume du prisme donné est donc mesuré par le produit

$$\frac{\text{aire } A'\,C'\,B'\,D'}{2} \times A\,A'$$

Et, si on remarque que

$$\frac{\text{aire } A'\,C'\,B'\,D'}{2} = \text{aire } A'\,B'\,C'$$

le volume est exprimé par

$$\text{aire } A'\,B'\,C' \times A\,A'$$

ce qui démontre le théorème pour un prisme triangulaire.

Si maintenant nous considérons un prisme droit polygonal d'un nombre quelconque de faces, nous voyons qu'on peut le décomposer en prismes droits triangulaires par des plans passant par deux arêtes latérales. Tous ces prismes triangulaires ont même hauteur h ; soit B_1, B_2, B_3, B_4..., B_n, leurs bases respectives. Le volume du prisme donné aura pour expression.

$$V = B_1\,h + B_2\,h + B_3\,h + B_4\,h + \ldots + B_n\,h$$
$$V = (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + \ldots + B_n)\,h$$

La quantité entre parenthèses est justement la base du prisme donné. Donc

$$V = B\,h$$

291. Théorème. — *Le volume d'un prisme oblique a pour mesure le produit de l'aire de sa section droite par son arête.*

Soit A B C D A′ B′ C′ D′ un prisme oblique (fig. 146).

Par un point M de l'arête A A′ menons la section droite M N P Q. Prolongeons les arêtes A A′, B B′, C C′, D D′ et par un point M′ tel que

$$A'\,M' = A\,M$$

menons une autre section droite M′ N′ P′ Q′.

Le polyèdre A B C D M N P Q est égal au polyèdre A′ B′ C′ D′ M′ N′ P′ Q′. En effet, si nous faisons glisser le polyèdre A B C D M N P Q le long des arêtes A A′, B B′, C C′, D D′, de manière à amener le polygone A B C D sur le polygone A′ B′ C′ D′ qui lui est égal, le point M viendra se placer en M′ puisque A M = A′ M′ et, comme les plans M N P Q, M′ N′ Q′ Q′ sont tous deux perpendiculaires à A A′, le plan M N P Q coïncidera avec le plan M′ N′ P′ Q′ et les points N P Q tomberont sur les points N′ P′ Q′. Les deux polyèdres coïncideront : ils sont égaux.

Ceci posé, nous pouvons écrire :

vol. A B C D A′ B′ C′ D′ = vol. A B C D M N P Q + vol. M N P Q A′ B′ C′ D′

vol. M N P Q M′ N′ P′ Q′ = vol. M N P Q A′ B′ C′ D′ + vol. A′ B′ C′ D′ M′ N′ P′ Q′

et comme

vol. A B C D M N P Q = vol. A′ B′ C′ D′ M′ N′ P′ Q′

on a :

vol. A B C D A′ B′ C′ D = vol. M N P Q M N′ P′ Q′

Or

vol. M N P Q M′ N′ P′ Q′ = aire M N P Q × M M′

et

$$M\,M' = A\,A'$$

donc.

vol. A B C D A′ B′ C′ D′ = aire M N P Q × A A′

Ce qui établit le théorème.

292. Théorème. — *Le volume d'un parallélépipède oblique a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit un parallélépipède A B C D A′ B′ C′ D′ ayant pour bases A B C D et A′ B′ C′ D′ (fig. 147).

Nous savons qu'on peut prendre pour bases deux autres faces quelconques du parallélépipède (282), par exemple A B B′ A′ et D C C′ D′. Menons la section droite M N P Q du parallélépipède considéré de cette manière. D'après le théorème précédent, on peut écrire

(1) vol. A B B′ A′ D C C′ D′ = aire M N P Q × A′ D′

Abaissons du point N la perpendiculaire N H sur P Q.

On a :

$$\text{aire } M\,N\,P\,Q = P\,Q \times N\,H$$

Mais N H est perpendiculaire aux faces A B C D A′ B′ C′ D′ du parallélépipède (245) ; c'est la hauteur relative à ces faces considérées comme bases.

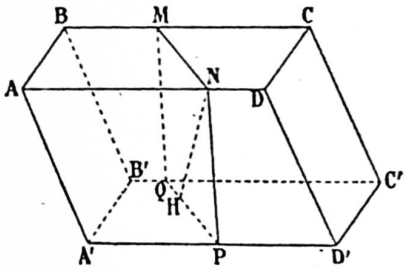


Fig. 147

La relation (1) donne :

$$\text{vol. } A\,B\,C\,D\,A'\,B'\,C'\,D = P\,Q \times N\,H \times A'\,D'$$

$$P\,Q \times A'\,D' = \text{aire } A'\,B'\,C'\,D'$$

$$\text{vol. } A\,B\,C\,D\,A'\,B'\,C'\,D' = \text{aire } A'\,B'\,C'\,D' \times N\,H$$

Ce qui démontre le théorème.

293. Théorème. — *Le volume d'un prisme a pour mesure le produit de la base par la hauteur.*

Si le prisme est triangulaire, on le considère comme la moitié d'un parallélépipède oblique ;

S'il est polygonal, avec un nombre quelconque de faces latérales, on le décompose en prismes triangulaires.

La démonstration est identique à celle qui a été donnée pour le prisme droit.

294. Pyramide. — Définition. — On appelle PYRAMIDE un polyèdre limité par une face polygonale appelée BASE et par des faces LATÉRALES triangulaires ayant pour bases les côtés du polygone et, pour sommet, un même point qu'on appelle SOMMET de la pyramide.

La pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale*, etc., suivant que sa base est un polygone de trois, quatre, cinq côtés, etc. La pyramide triangulaire porte aussi le nom de TÉTRAÈDRE : un tétraèdre a toutes ses faces triangulaires, y compris la base ; aussi peut-on prendre n'importe quel sommet de ce polyèdre comme *sommet* proprement dit de la pyramide.

La perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur la base est la HAUTEUR.

Lorsqu'une pyramide a pour base un polygone régulier et que toutes ses faces latérales sont égales, on dit que cette pyramide est RÉGULIÈRE. Dans ce cas, les faces latérales sont des triangles isocèles égaux et la *hauteur de la pyramide tombe au centre du polygone de base.*

295. Théorème. — *Si on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base : 1° les arêtes latérales et la hauteur sont divisées en parties proportionnelles ; 2° la section est un polygone semblable au polygone de base ; 3° l'aire de la section et l'aire de la base sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet.*

Soit une pyramide : A B C D E (fig. 148).

Coupons-la par un plan parallèle à la base et soit A′ B′ C′ D′ E′ la section ; soient S H′ et S H les distances de la section et de la base au sommet.

1° D'après le théorème (272), on a :

$$(1)\quad \frac{S\,A'}{A\,A'} = \frac{S\,B'}{B\,B'} = \frac{S\,C'}{C\,C'} = \frac{S\,D'}{D\,D'} = \frac{S\,E}{E\,E'} = \frac{S\,H}{H\,H'}$$

2° Les polygones A B C D E et A′ B′ C′ D′ E′ ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens (262) ; par suite, leurs angles sont égaux chacun à chacun (270). Les triangles A′ S′ B′ et A S B sont semblables, comme ayant leurs angles égaux (61). Il en est de même des triangles B′ S C′ et B S C. C′ S D′, et C S D, D′ S E′ et D S E, E′ S A′ et E S A, A′ S H′ et A S H.

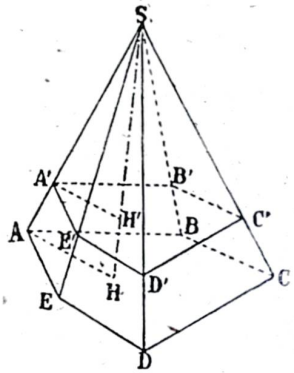


Fig. 148

On peut donc écrire :

$$\frac{S\,A'}{S\,A} = \frac{A'B'}{A\,B} = \frac{S\,B'}{S\,B}$$

$$\frac{S\,B'}{S\,B} = \frac{B'C'}{B\,C} = \frac{S\,C'}{S\,C}$$

$$\frac{S\,C'}{S\,C} = \frac{C'D'}{C\,D} = \frac{S\,D'}{S\,D}$$

.....

$$\frac{S\,A'}{S\,A} = \frac{A'H'}{A\,H} = \frac{S\,H'}{S\,H}$$

D'où on déduit

$$\frac{A'\,B'}{A\,B} = \frac{B'\,C'}{B\,C} = \frac{C'D'}{C\,D} = \frac{D'E'}{D\,E} = \frac{E'\,A'}{E\,A} = \frac{S\,H'}{S\,H}$$

ce qui démontre que les deux polygones sont semblables puisqu'ils ont déjà leurs angles égaux, et que le rapport de similitude est égal à $\frac{S\,H'}{S\,H}$

3° Or, le rapport des aires de deux polygones est égal au carré du rapport de similitude. Dans ce cas il est donc $\frac{\overline{S\,H'}^2}{\overline{S\,H}^2}$

296. Corollaire. — *Si deux pyramides ont même hauteur et des bases équivalentes, des sections faites dans chacune d'elles à la même distance du sommet sont équivalentes.*

297. Théorème. — *Si deux pyramides triangulaires ont même hauteur et des bases équivalentes, elles sont équivalentes.*

Soient deux pyramides triangulaires S A B C et S′ A′ B′ C′ ayant même hauteur et des bases équivalentes (fig. 149).

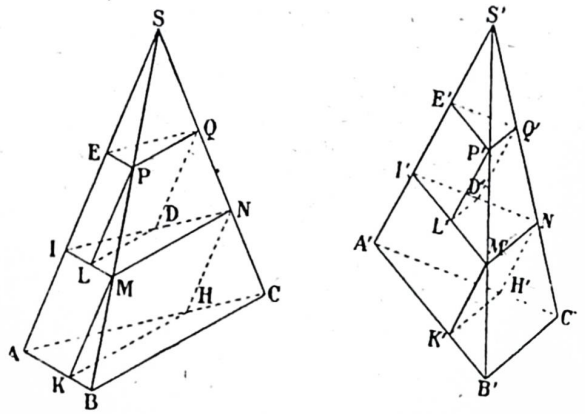


Fig. 149

Divisons l'arête S A et l'arête S′ A′ en un même nombre de parties égales, trois, par exemple.

Par les points de division I, E, I′, E′ faisons passer des sections parallèles aux bases, I M N et E P Q, I′ M′ N′ et E′ P′ Q′.

D'après le théorème (295) les sections I M N et I' M' N' sont équivalentes, ainsi que les sections E P Q et E' P' Q'. Sur ces sections, construisons des prismes triangulaires I M N A K H, E P Q I L D, I' M' N' A' K' H', E' P' Q' I' L' D' en menant par M, N, P, Q, des parallèles à S A et par M' N' P' Q' des parallèles à S' A'.

Les prismes I M N A K H, I' M' N' A' K' A' sont équivalents, car ils ont des bases équivalentes et même hauteur (293). Il en est de même des prismes E P Q I L D E' P' Q' I' L' D'.

Or, imaginons qu'on augmente le nombre des prismes inscrits dans chacune des pyramides, en augmentant dans la même proportion le nombre des sections parallèles à la base. La somme des volumes des prismes ainsi construits reste toujours la même pour chacune des pyramides ; mais cette somme se rapproche de plus en plus du volume de la pyramide, les parties situées en dehors de ces prismes, telles que S E P Q, P Q L M N D, etc., devenant de plus en plus petites.

Autrement dit, *on peut considérer le volume de chacune des deux pyramides comme la limite vers laquelle tend la somme des volumes des prismes inscrits, quand on en fait croître le nombre indéfiniment.* Cette limite est la même pour les deux pyramides, puisque la somme des volumes des prismes inscrits reste constamment la même pour les deux pyramides.

298. Remarque. — Il résulte de ce théorème que si on déplace le sommet d'une pyramide sur une parallèle à la base, le volume de la pyramide ne change pas.

299. Théorème. — *Le volume d'une pyramide triangulaire est égal au tiers du volume d'un prisme qui aurait même base et même hauteur que la pyramide.*

Soit une pyramide triangulaire S A B C. Construisons un prisme en menant par les sommets B et C des parallèles B M et C N à l'arête S A (fig. 150).

Je dis qu'on peut décomposer le prisme S M N A B C en trois pyramides équivalentes à la pyramide donnée. Et, tout d'abord, retranchons du prisme la pyramide donnée S A B C. Il reste une pyramide quadrangulaire S M N C B qu'on peut décomposer en deux pyramides en la coupant par le plan S B N : soient les deux pyramides S B M N et S B N C.

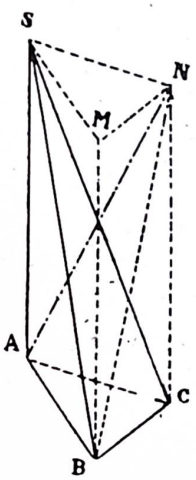


Fig. 150

La pyramide S M N B étant triangulaire, on peut choisir, pour sommet, l'un quelconque des quatre points S, M, N, ou B. Choisissons B. La base S M N de la pyramide B S M N est égale à la base A B C de la pyramide donnée ; d'autre part, la hauteur est la même que celle du prisme, c'est-à-dire que celle de la pyramide donnée. Donc B S M N est équivalente à S A B C (297).

Enfin, on peut déplacer le sommet S de la pyramide S B N C sur une parallèle S A à la base, sans changer le volume de cette pyramide (298 — Remarque). Amenons le sommet S en A. Nous formons ainsi la pyramide A N B C, équivalente à la pyramide S N B C. Si nous plaçons le sommet de cette pyramide en N, nous voyons qu'elle a pour base A B C, base de la pyramide donnée, et pour hauteur la hauteur du prisme, c'est-à-dire de la pyramide donnée ; donc elle est équivalente à cette dernière.

Le prisme est donc décomposable en trois pyramides équivalentes à la pyramide donnée, ce qui démontre le théorème.

On énonce généralement le théorème de la manière suivante :

Le volume d'une pyramide triangulaire est mesuré par le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

300. Théorème. — *Le volume d'une pyramide quelconque est mesuré par le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Il suffit de décomposer la pyramide donnée en pyramides triangulaires pour démontrer le théorème.

Si nous appelons h la hauteur de la pyramide et B sa base, on a :

$$V = \frac{1}{3} B h$$

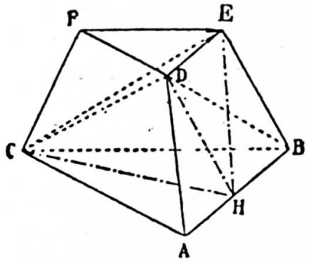


Fig. 151

301. Tronc de pyramide. — Définition. — On appelle TRONC DE PYRAMIDE, le polyèdre obtenu en coupant une pyramide par un plan et en détachant la partie du solide comprise entre le sommet et la section.

On appelle TRONC DE PYRAMIDE A BASES PARALLÈLES, un tronc de pyramide obtenu par une section parallèle à la base. La base de la pyramide et la section sont les BASES du tronc de pyramide ; la perpendiculaire commune aux deux bases est la hauteur du tronc de pyramide.

302. Théorème. — *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant toutes les trois pour hauteur la hauteur du tronc et, pour base : l'une, la grande base ; l'autre, la petite base ; et la troisième, une moyenne proportionnelle entre les deux bases.*

Soit un tronc de pyramide triangulaire, à bases parallèles : A B C D E F (fig. 151). Coupons-le par le plan D C B. Nous détachons ainsi une pyramide D A B C qui a pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la grande base A B C du tronc. C'est la première pyramide de l'énoncé.

Il reste une pyramide quadrangulaire D B E F C qu'on peut décomposer en deux par le plan D E C ; soient les deux pyramides triangulaires C E F D et D B C E. La pyramide C D E F est la seconde pyramide de l'énoncé.

Quant à la dernière, nous pouvons déplacer son sommet D sur une parallèle D H à E B, c'est-à-dire à la base C E B. On obtient ainsi un tétraèdre H C E B, dont on peut prendre le sommet en E. Ce tétraèdre a pour hauteur la hauteur du tronc et pour base B C H.

Les deux triangles B C H et B C A, étant considérés comme ayant leur sommet en C, ont même hauteur ; ils sont entre eux comme leurs bases B H et B A :

$$(1) \qquad \frac{\text{aire } BCH}{\text{aire } BCA} = \frac{BH}{BA} = \frac{DE}{BA}$$

Les deux triangles F D E et C B H ont un côté égal D E = B H, et les angles D E F et H B C égaux, il s'ensuit que les hauteurs abaissées de D et de H sur la base de chaque triangle sont égales. Les deux triangles sont entre eux comme leurs bases E F et B C :

$$(2) \qquad \frac{\text{aire } DEF}{\text{aire } BCH} = \frac{EF}{BC}$$

Et, comme les triangles A B C, E F D sont semblables :

$$\frac{DE}{BA} = \frac{EF}{BC}$$

et par suite :

$$\frac{\text{aire } BCH}{\text{aire } BCA} = \frac{\text{aire } DEF}{\text{aire } BCH}$$

Ce qui prouve que la base de la troisième pyramide est bien moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.

Si nous appelons h la hauteur du tronc, B la grande base, b la petite base, V le volume, on peut écrire la formule :

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$$

Nous avons supposé le tronc de pyramide triangulaire ; s'il ne l'est pas, on construit une pyramide triangulaire de même hauteur que la pyramide de laquelle dérive le tronc donné, et ayant pour base un triangle équivalent à la base polygonale de cette dernière ; on coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base : la section ainsi obtenue est équivalente à la petite base du tronc (296).

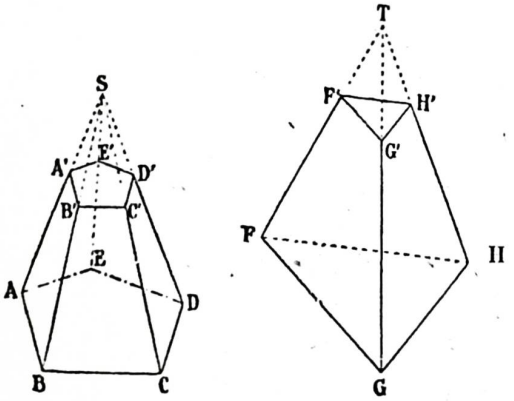


Fig. 152

Soient, par exemple, A' B' C' D' E' A B C D E le tronc de pyramide donné, et F' G' H' F G H le tronc de pyramide construit comme nous venons de l'indiquer (fig. 152).

Ceci posé, il résulte des théorèmes 297 et 300 que les pyramides S A' B' C' D' E' et T F' G' H sont équivalentes, que les pyramides S A B C D E et T F G H sont équivalentes, aussi. On peut donc écrire :

vol. S A B C D E = vol. T F G H
vol. S A B C D E = vol. T F G H

et

vol. S A B C D E — S A B' C' D' E' = vol. T F G H — vol. T F' G' H'

ou, ce qui revient au même :

vol. A' B' C' D' E' A B C D E = vol. F' G' H' F G H

d'où on déduit la conclusion du théorème.

303. Tronc de prisme. — Définition. — On appelle TRONC DE PRISME le polyèdre obtenu en coupant un prisme par un *plan non parallèle à la base* et en supprimant la partie située au-dessus ou au-dessous de la section.

304. Théorème. — *Un tronc de prisme triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides, ayant toutes les trois pour base l'une des bases du tronc et pour sommets respectifs les trois sommets de l'autre base.*

Soit le tronc de prisme A B C D E F (fig. 153). Coupons-le par le plan E A C. Nous séparons ainsi une pyramide E A B C qui a pour base A B C, l'une des bases du tronc, et pour sommet E, l'un des sommets de l'autre base.

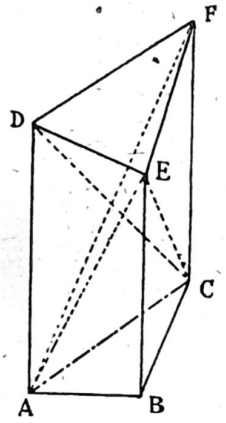


Fig. 153

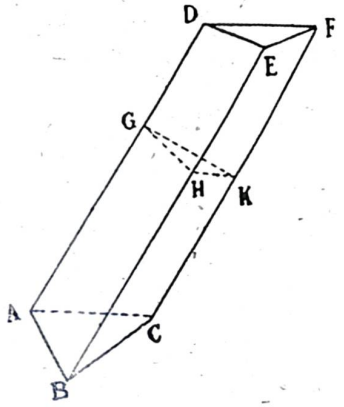


Fig. 154

C'est l'une des pyramides de l'énoncé. Il reste une pyramide quadrangulaire E A C F D. On la divise par le plan D E C. On sépare ainsi, à gauche, la pyramide E D A C et, à droite, la pyramide E D C F. La pyramide E D A C ne change pas de volume si on déplace le sommet E sur E B parallèle à la base A D C. Si on amène E en B, on obtient la pyramide B D A C qu'on peut considérer comme ayant son sommet en D et qui, ayant alors pour base B A C, est la seconde pyramide de l'énoncé.

Reste la pyramide E D C F qu'on peut considérer comme ayant son sommet en D. En déplaçant D sur D A, parallèle à la base E C F, pour amener le sommet de la pyramide en A, on obtient la pyramide A E C F équivalente à D E C F. En reportant le sommet de A E C F en E, et en déplaçant E sur la parallèle E B à la base A C F, de manière à l'amener en B, on obtient la pyramide F A B C qui est la troisième de l'énoncé.

305. Théorème. — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est mesuré par le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes.*

Soit G H K la section droite du tronc de prisme (fig. 154) ; on peut considérer ce dernier comme décomposé en deux troncs de prisme G H K D E F et G H K A B C. Le volume de chacun de ces deux troncs de prisme est exprimé d'après le théorème précédent par :

vol. G H K D E F = vol. pyr. D G H K + vol. pyr. E G H K + vol. pyr. F G H K

vol. G H K A B C = vol. pyr. A G H K + vol. pyr. B G H K + vol. pyr. C G H K

Si nous remarquons que les arêtes G D, H E, etc., sont justement les hauteurs de ces pyramides, puisqu'elles sont perpendiculaires à la base G H K, ces égalités peuvent s'écrire :

$$\text{vol. } GHKDEF = \frac{1}{3} GHK \times (GD + EH + FK)$$

$$\text{vol. } GHKABC = \frac{1}{3} GHK \times (AG + BH + CK)$$

$$\text{vol. } ABCDEF = \frac{1}{3} GHK \times (AG + GD + BH + HE + CK + KF)$$

$$\text{vol. } ABCDEF = HGK \times \frac{AD + BE + CF}{3}$$

Exercices

89. — Quelle est la hauteur d'un parallélépipède rectangle qui a pour base 0 ^{m2}, 85 et pour volume 0 ^{m3}, 170 ?

90. — Un prisme droit a pour base un triangle isocèle dont la base vaut 1 ^{m}, 30 et les côtés égaux 2 ^{m}, 25. La hauteur du prisme est égale à celle du triangle isocèle qui lui sert de base. Trouver le volume du prisme.

91. — Une pyramide régulière a pour base un hexagone régulier de 3 ^{m} de côté et son arête latérale a 13 ^{m}. Trouver son volume.

92. — Un tronc de pyramide a été obtenu en coupant une pyramide d'une hauteur de $0^{m},60$ à $0^{m},15$ du sommet, par un plan parallèle à la base. La section obtenue est un triangle dont les côtés sont respectivement :

$$a = 0^{m},50$$
$$b = 0^{m},42$$
$$c = 0^{m},33$$

Trouver le volume du tronc de pyramide.

93. — Les trois arêtes d'un tronc de prisme triangulaire sont entre elles comme les nombres 4, 5 et 6 ; la plus petite vaut $0^{m},136$. La section droite est un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut $0^{m},09$ et le plus grand côté de l'angle droit $0^{m},07$. Trouver le volume du tronc de prisme.

94. — Calculer le volume du tétraèdre régulier (c'est une pyramide triangulaire dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux). On représentera l'arête par a.

95. — Calculer le volume de l'obélisque de la place de la Concorde à Paris. Cet obélisque a la forme d'un tronc de pyramide à base carrée ; la base inférieure a $2^{m},42$ de côté et la base supérieure $1^{m},54$; la distance des deux bases est $21^{m},6$; enfin, ce tronc est surmonté d'une pyramide régulière de $1^{m},2$ de hauteur.

96. — Démontrer que les quatre diagonales d'un parallélépipède se coupent mutuellement en deux parties égales.

97. — Dans un tétraèdre les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés se rencontrent en un même point, qui est le milieu de chacune d'elles.

Les Corps ronds

CYLINDRE

306. Définition. — Imaginons que l'on fasse tourner autour d'un de ses côtés O O′ un rectangle O O′ A A′. Dans ce mouvement, les points A et A′ engendrent

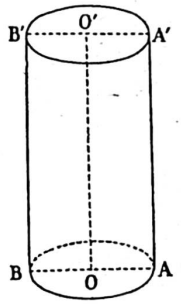


Fig. 155

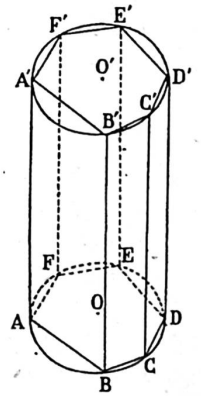


Fig. 156

des circonférences égales. Les côtés O A, O′ A′ engendrent les cercles limités par ces circonférences. Le côté A A′ engendre une surface courbe qu'on appelle *surface cylindrique* (fig. 155).

Le solide, limité par les deux cercles O et O′ et par la surface cylindrique, est un CYLINDRE. On l'appelle plus particulièrement : *cylindre droit à bases circulaires*. Les deux cercles sont les *bases* du cylindre. La droite O O′ est son *axe* ou sa *hauteur*. La droite A A′ est la *génératrice*.

307. Théorème. — *La surface latérale d'un cylindre droit est mesurée par le produit de la circonférence de base par la génératrice.*

Inscrivons dans le cylindre un prisme droit A B C D E F A′ B′ C′ D′ E′ F′ (fig. 156). La surface latérale de ce prisme droit est égale à la somme des surfaces des rectangles qui en constituent les faces. L'aire de l'un de ces rectangles A B B′ A′ par exemple, a pour mesure le produit de sa base A B et de sa hauteur A A′. Les autres rectangles ont tous même hauteur que A B B′ A′. Si, par conséquent, on fait la somme de leurs aires, cette somme est égale au produit du périmètre du polygone de base A B C D E F par l'arête du prisme.

Imaginons maintenant qu'on augmente indéfiniment le nombre des côtés des polygones de base et par suite celui des faces. La surface latérale du prisme tend à se confondre avec la surface latérale du cylindre. Le polygone de base du prisme tend à se confondre avec la circonférence de base du cylindre. Quant à l'arête A A′, elle reste égale à la génératrice du cylindre. Si donc on exprime la surface latérale de la figure limite, on peut écrire :

$$\text{lim. surf. prisme} = \text{lim. A B C D E F} \times \text{A A}'$$
$$\text{surf. cylindre} = \text{circ. de base} \times \text{A A}'$$

Dans le cas du cylindre droit la génératrice A A′ est égale à la hauteur O O′ = h. Appelons R le rayon de la base, la surface latérale du cylindre s'exprime par la formule :

$$\textbf{Surf. latérale cylindre} = 2\,\pi\,R\,h$$

Si on veut avoir la surface totale du cylindre, il faut ajouter à cette expression la surface des deux bases, c'est-à-dire $2\,\pi\,R^2$. La surface totale est donc :

$$\text{Surf. totale cylindre} = 2\,\pi\,R\,h + 2\,\pi\,R^2$$
$$\textbf{Surface totale cylindre} = 2\,\pi\,R\,(R + h)$$

308. Théorème. — *Le volume d'un cylindre a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Le volume du prisme que nous avons inscrit dans ce cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur. Quand on double indéfiniment le nombre des faces du prisme, celui-ci tend vers le cylindre. Le volume du cylindre est donc la limite du volume du prisme.

Or, la hauteur du prisme est égale à la hauteur du cylindre. Quant à sa base, elle a pour limite le cercle de base du cylindre. A la limite, le volume du cylindre a donc pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, c'est-à-dire :

$$V = \pi\,R^2\,h$$

CONE

309. Définitions. — Imaginons un triangle S O B tournant autour d'un des côtés de l'angle droit S O (fig. 157). Le côté O B engendre un cercle et l'hypoténuse S B engendre une surface courbe qu'on appelle SURFACE CONIQUE. La figure limitée par cette surface et par le cercle O porte le nom de CONE. La droite S O est l'AXE ou la *hauteur* de ce cône droit à base circulaire. Le cercle O est la BASE. La droite S A la GÉNÉRATRICE.

Si on mène d'un point O′ de SO la perpendiculaire O′ A′ à S O, cette droite engendre pendant la rotation du triangle rectangle, un cercle O′ dont le rayon est à O A dans le rapport de S O′ à S O.

On appelle TRONC DE CONE A BASES PARALLÈLES le solide compris entre la base d'un cône et un cercle tel que O'. On peut remarquer du reste que le cercle O', qu'on appelle *petite base* du tronc de cône, peut être obtenu en coupant le cône S A B par un plan parallèle à la base.

La distance O O' des deux bases est la *hauteur* du tronc de cône ; A' A est sa *génératrice*.

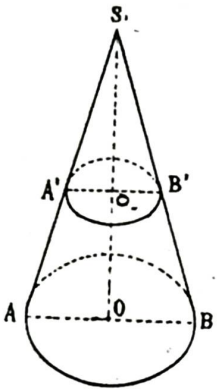


Fig. 157

310. Théorème. — *La surface latérale d'un cône a pour mesure le produit de la circonférence de base par la moitié de la génératrice.*

Nous remarquerons que le cône peut être considéré comme la limite d'une pyramide inscrite dans ce cône et dont on doublerait indéfiniment le nombre des faces. Cette considération nous conduit à un raisonnement tout à fait analogue à celui que nous avons fait pour le cylindre.

Chacune des faces de la pyramide est un triangle qui a pour surface le produit de sa base par la moitié de sa hauteur. La surface latérale de la pyramide est égale à la somme des aires de chacune des faces.

Or, à la limite, la hauteur de chaque face tend à se confondre avec les côtés du triangle et par suite à devenir égale à la génératrice du cône. La somme des bases, c'est-à-dire le périmètre du polygone de base de la pyramide, a pour limite la longueur de la circonférence de la base du cône. De sorte qu'à la limite, la surface latérale du cône a pour mesure la longueur de la circonférence de base, multipliée par la moitié de la génératrice.

Posons : S A = a, O A = R

on a :

$$\text{Surf.} = 2\pi R \times \frac{a}{2} = \pi R a$$

Ainsi : **Surface latérale cône = π R a.**

Si on veut avoir la surface totale, il faut ajouter l'expression de la surface du cercle de base, ce qui donne :

$$\text{surf. totale} = \pi R a + \pi R^2 = \pi R (R + a)$$

Ainsi : **Surface totale cône = π R (R + a).**

311. Théorème. — *La surface latérale d'un tronc de cône a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences de base par la génératrice.*

On peut inscrire dans le tronc de cône un tronc de pyramide. A B C D E F G A' B' C' D' E' F' G' (fig. 158). La surface latérale de ce tronc de cône se compose de la somme des aires des trapèzes tels que A B B' A' qui en constituent les faces. Nous savons que l'aire d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur. En employant la même méthode que pour le cylindre et le cône, c'est-à-dire en doublant indéfiniment le nombre des faces du tronc de pyramide, on trouve que la limite de ce dernier est le tronc de cône. La surface latérale du tronc de pyramide a pour limite la surface latérale du tronc de cône. Les polygones de base du tronc de pyramide ont pour limite les circonférences de base du tronc de cône, et enfin les hauteurs des trapèzes, qui constituent les faces du tronc de pyramide, ont pour limite la génératrice du tronc de cône. Il s'ensuit qu'à la limite la surface latérale du tronc de cône a pour expression :

$$\text{surf.} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times a = \pi (R + r) a$$

Ainsi : **Surface latérale tronc de cône = π (R + r) a**

R étant le rayon de la grande base, r celui de la petite base, et a la génératrice.

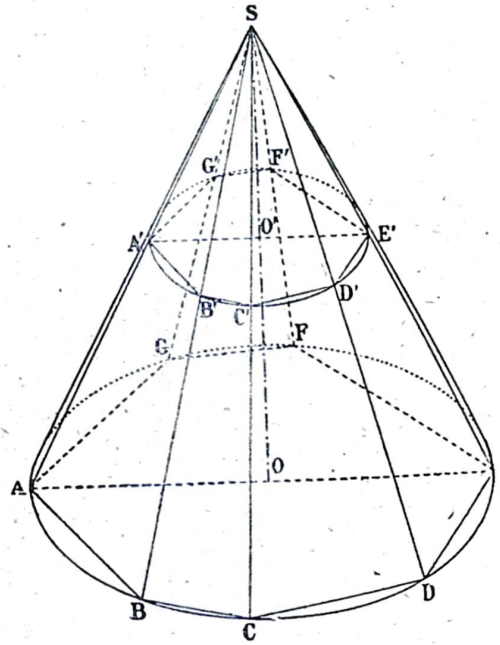


Fig. 158

Si on veut avoir la surface totale, il faut ajouter les surfaces des deux bases, ce qui donne :

$$\text{surf. totale} = \pi (R + r) a + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi (R + r) a + \pi (R^2 + r^2) = \pi [(R + r) a + R^2 + r^2].$$

Ainsi : **Surface totale tronc de cône = π [(R + r) a + R² + r²]**

312. Remarque. — Si on coupe le tronc de cône par un plan parallèle aux deux bases et équidistant de ces deux bases, son intersection avec la surface est une circonférence égale à la demi-somme des circonférences de base. C'est ce qu'on appelle la *circonférence moyenne*. Il est évident que la surface latérale du cône est égale au produit de la circonférence moyenne par la génératrice.

313. Théorème. — *Le volume d'un cône a pour mesure le produit de la surface de base par le tiers de la hauteur.*

Le raisonnement que nous avons appliqué tout à l'heure à la surface latérale du cône (311), s'applique au volume ; celui-ci peut être considéré comme la limite du volume d'une pyramide polygonale inscrite dont on augmente indéfiniment le nombre des faces. Le volume de la pyramide a pour base par sa hauteur. A la limite, la hauteur de la pyramide est égale à la hauteur du cône, la base de la pyramide tend vers la base du cône et, par conséquent, le volume du cône a pour expression le tiers du produit de sa base par sa hauteur

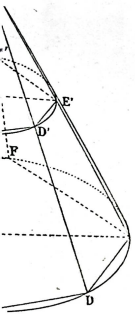
$$V = \pi R^2 \times \frac{h}{3}$$

Le volume d'un tronc de cône à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois cônes qui auraient tous les trois pour hauteur la hauteur du tronc de cône, et pour base :

A

$\times\ a = \pi\ (R + r)\ a$

tronc de cône =
r) a
de base, r celui de la petite



58

totale, il faut ajouter les
ui donne :

$a + \pi R^2 + \pi r^2 =$
$\pi\ (R^2 + r^2)$
$+ R^2 + r^2]$

e tronc de cône
$+ R^2 + r^2]$

coupe le tronc de cône
x bases et équidistant de
n avec la surface est une
somme des circonférences
e la *circonférence moyenne.*
érale du cône est égale au
yenne par la génératrice.

volume d'un cône a pour
de base par le tiers de la

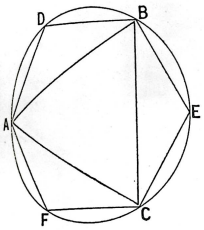
avons appliqué tout à
u cône (311), s'applique
considéré comme la limite
lygonale inscrite dont on
bre des faces. A la limite,
r sa hauteur. A la limite,
gale à la hauteur du cône,
vers la base du cône et,
cône a pour expression le
sa hauteur

$\times\ \frac{h}{3}$

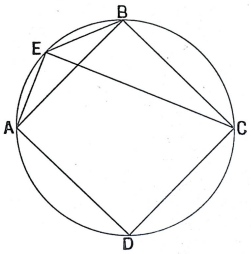
à bases parallèles est égal à
cônes qui auraient tous les
tronc de cône, et pour base :

LONGUEURS, SURFACES ET VOLUMES

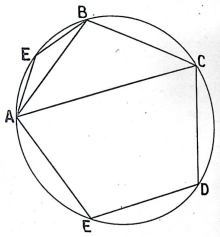
Côtés des polygones réguliers inscrits dans le cercle de rayon R



Triangle équilatéral $R\sqrt{3}$
Hexagone R



Carré $R\sqrt{2}$
Octogone $R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

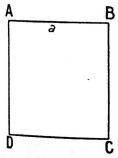


Pentagone $\frac{1}{2} R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
Décagone $\frac{1}{2} R\left(\sqrt{5} - 1\right)$

Exemples : Pour un cercle de 1 m de rayon les côtés des polygones réguliers inscrits sont respectivement :
triangle $1^m,732$; carré $1^m,414$; pentagone $1^m,175$; hexagone 1^m ; octogone $0^m,76$ et décagone $0^m,55$

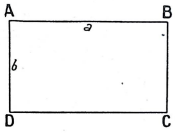
Mesure des surfaces

CARRÉ



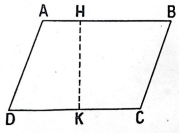
Longueur du côté : a
Surface : a^2
Exemple : si a = 2 mètres, la surface est 4 mètres carrés

RECTANGLE



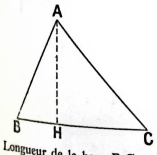
Longueurs des côtés : a et b
Surface : a × b
Exemple : si les côtés sont de 2^m et de 3^m, la surface est $3 \times 2 = 6\ m^2$

PARALLÉLOGRAMME



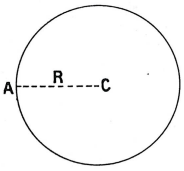
Longueur du côté A B = a
Hauteur h
Surface : a× h
Exemple : $a = 3^m$ et $h = 2^m$
Surface : $3 \times 2 = 6^{m2}$

TRIANGLE



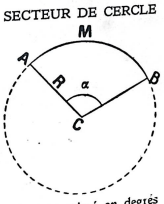
Longueur de la base B C = a
Hauteur A H = h
Surface : $a \times \frac{h}{2}$
Exemple : $a = 3^m$ $h = 2^m$
$S = \frac{3 \times 2}{2} = 3^{m2}$

CERCLE



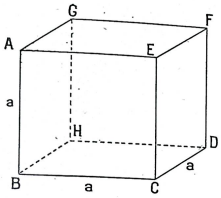
Longueur de la circonférence $2\pi R$
Surface du cercle πR^2
Exemple : Pour un rayon de 2 mètres : long. de la circonférence : $2 \times 3{,}1416 \times 2$
Surface : $3{,}1416 \times 2^2$

SECTEUR DE CERCLE

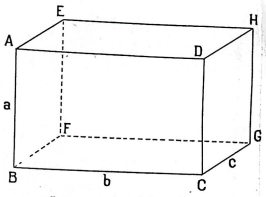


α étant exprimé en degrés
$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$
Exemple : si $\alpha = 60°$ et $R = 2^m$
$S = \frac{3{,}1416 \times 2^2 \times 60}{360} = 2^{m2},09$

Solides

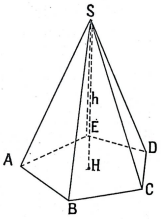


Longueur du côté : a
Volume : a^3
Exemple : Le volume d'un cube de 3 mètres de côté est de : $3 \times 3 \times 3 = 27$ mètres cubes



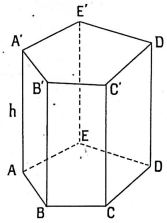
Longueurs des côtés a, b et c
Volume : a × b × c
Exemple : Le volume d'une salle ayant comme côtés 3^m, 4^m et 5^m est : $3 \times 4 \times 5 = 60^{m3}$

PYRAMIDE



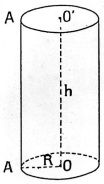
Surface de base B
Hauteur h
Volume : $\frac{B \times h}{3}$
Exemple : Une pyramide à base carrée de 2^m de côté et 3^m de hauteur a un volume de :
$\frac{2 \times 2 \times 3}{3} = 4^{m3}$

PRISME DROIT



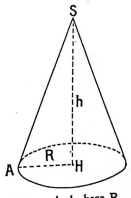
Surface de base
Hauteur h
Volume : B × h
Exemple : Un prisme à base carrée de 2^m de côté et de 3^m de haut a un volume de
$2 \times 2 \times 3 = 12^{m3}$

CYLINDRE



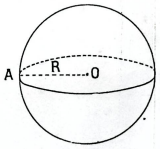
Rayon de la base R
Hauteur h
Volume : $\pi R^2 h$
Exemple : Un cylindre ayant une base de 2^m de rayon et une hauteur de 3^m a un volume de :
$3{,}1416 \times 2^2 \times 3 = 37^{m3},7$

CONE



Rayon de la base R
Hauteur h
Volume $\frac{\pi R^2 h}{3}$
Exemple : Un cône ayant un rayon de base de 2^m et une hauteur de 3^m a un volume de :
$\frac{3{,}1416 \times 2^2 \times 3}{3} = 12^{m3},56$

SPHÈRE



Rayon de la sphère R
Surface : $4\pi R^2$
Volume $\frac{4}{3}\pi R^1$
Exemple : Une sphère de 3^m de rayon a une surface de :
$4 \times 3{,}1416 \times 3^2 = 113^{m2},1$
et un volume de
$\frac{4 \times 3{,}1416 \times 3^3}{3} = 113^{m3},1$

la première, la base inférieure du tronc ; la seconde, la base supérieure du tronc, et la troisième une moyenne proportionnelle entre les deux bases.

La démonstration de ce théorème est fondée sur le même raisonnement que celui du précédent. Il suffit de considérer le cône comme la limite d'un tronc de pyramide inscrit dont on double infiniment le nombre des faces. En se reportant au théorème 302, on trouve pour expression du volume du tronc de cône

$$V = \pi R^2 \times \frac{h}{3} + \pi \times r^2 \times \frac{h}{3} + \pi R r \times \frac{h}{3}$$

ou :

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + R r)$$

SPHÈRE

314. Définition. — Si on fait tourner une demi-circonférence A C B autour de son diamètre A B, cette circonférence engendre une surface qu'on appelle SURFACE SPHÉRIQUE (fig. 159). Il est facile de voir que cette surface est fermée. Le solide limité par elle s'appelle SPHÈRE. Le centre de la demi-circonférence est le CENTRE de la sphère.

Tous les points de la surface jouissent de la propriété d'être équidistants du centre O.

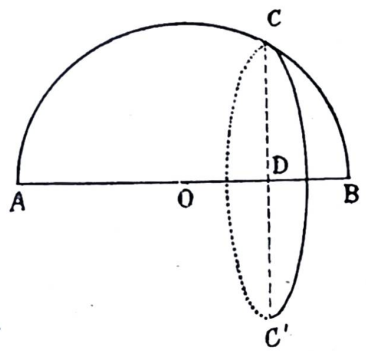


Fig. 159

En effet, on peut toujours amener la demi-circonférence A C B à passer par un point quelconque M de la surface sphérique ; il suffit, par définition, de faire tourner la circonférence autour du diamètre A B. Or, tous les points de la circonférence sont équidistants du point O.

Un point pris à l'extérieur de la sphère est plus éloigné du centre qu'un point de la surface. On le démontre aisément, en amenant le plan de la circonférence génératrice à passer par ce point (86). *Si un point est à l'intérieur de la sphère, il est plus rapproché du centre qu'un point de la surface.*

Ces remarques prouvent que la *surface d'une sphère est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'un point donné.*

Le rayon de la circonférence génératrice, c'est-à-dire la distance d'un point quelconque de la surface sphérique au centre, s'appelle RAYON de la sphère.

On appelle DIAMÈTRE de la sphère une droite passant par le centre et limitée de part et d'autre à la surface. Un diamètre est égal à la somme de deux rayons.

315. Théorème. — *Toute section plane d'une sphère est un cercle.*

1° Supposons que le plan sécant passe par le centre.

Son intersection avec la sphère est une ligne plane dont tous les points sont à une distance du centre égale au rayon. C'est donc une circonférence. Du reste, on voit que cette circonférence est égale à la circonférence génératrice. Dans ce cas, la section porte le nom de grand cercle de la sphère.

2° Le plan sécant ne passe pas par le centre.

Alors on peut abaisser du centre sur ce plan une perpendiculaire dont le pied sera D, par exemple.

L'intersection du plan avec la surface sphérique est une ligne plane dont les points sont à égale distance du centre et, par conséquent, à égale distance du pied D de la perpendiculaire O D (250). C'est une circonférence de centre D.

Dans ce cas, le rayon de la sphère est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le rayon D C du cercle d'intersection est un côté de l'angle droit. Le rayon de la section est donc plus petit que le rayon de la sphère. Pour cette raison, on donne au cercle déterminé par le plan sécant le nom de PETIT CERCLE de la sphère.

316. Pôles. — Considérons un grand cercle ou un petit cercle quelconque D d'une sphère O, et menons le diamètre P D O P′ perpendiculaire au plan de ce cercle. Les points P et P′ où ce diamètre rencontre la sphère s'appellent POLES du cercle.

317. Théorème. — *Le pôle d'un cercle est équidistant de tous les points de la circonférence de ce cercle.*

En effet, si on joint le pôle P à un point quelconque A du cercle, la droite P A est une oblique par rapport au plan du cercle, et elle s'écarte toujours d'une même distance A D du pied D de la perpendiculaire P D (250).

318. Remarque. — Ce théorème fournit une méthode pour tracer des cercles au moyen du compas à la surface d'une sphère solide. Il suffit de donner au compas une ouverture égale à P A et d'appliquer la pointe fixe au pôle P. La pointe mobile parcourra la circonférence A B C (fig. 160).

Le pôle P′ jouit naturellement des mêmes propriétés que le pôle P.

319. Problème. — *Trouver le rayon d'une sphère solide, impénétrable.*

Soit O la sphère donnée. Nous pourrons toujours tracer à sa surface un petit cercle A B C en appliquant en P la pointe fixe d'un compas et nous connaîtrons la distance P A qui nous sera donnée par l'ouverture du compas.

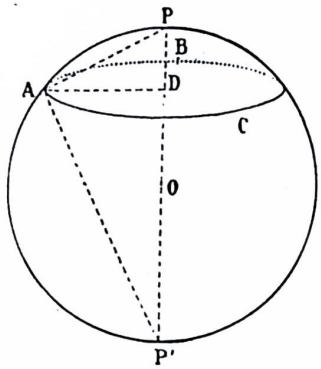


Fig. 160

Si le petit cercle A B C était reporté sur une feuille de papier, nous pourrions construire son rayon A D et le triangle rectangle A P D. Mais le triangle P A P′ est rectangle, lui aussi, parce qu'il est inscrit dans une circonférence. Connaissant A P, A D et l'angle A P P′, il est facile de construire le triangle A P P′.

On réalise cette construction de la manière suivante : on prend sur le petit cercle trois points quelconques A B C. On mesure avec le compas les longueurs A B, B C, C A. Nous savons qu'il est facile de construire un triangle, connaissant ses trois côtés. Nous pouvons donc

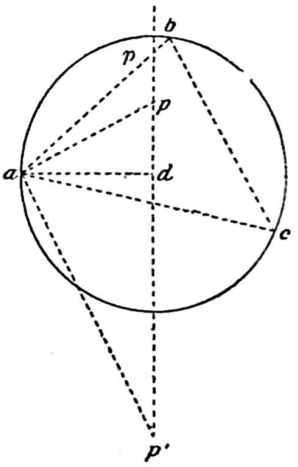


Fig. 161

construire sur le papier le triangle A B C : soit *a b c* cette construction (fig. 161). La circonférence circonscrite à *a b c* est égale au petit cercle que nous avons tracé sur la sphère et a pour rayon *a d*. Menons la perpendiculaire *p p'* à *a d*, au point de *d* et, avec une ouverture de compas égale à A P, construisons l'oblique *a p* égale à A P. Enfin, élevons en *a* sur *a p* une perpendiculaire *a p'*. Le triangle *p a p'* est égal au triangle P A P' et, par conséquent, *p p'* est le diamètre de la sphère.

320. Plan tangent. — On appelle *plan tangent à la sphère* un plan qui n'a qu'un seul point commun avec la sphère. Ce point commun s'appelle *point de contact.*

321. Théorème. — *Si un plan est perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, il est tangent à la sphère.*

En effet, si le plan P est perpendiculaire en A au rayon O A de la sphère, toute autre droite, telle que O B, passant par le centre, est oblique au plan P et, par conséquent, plus longue que O A, c'est-à-dire que

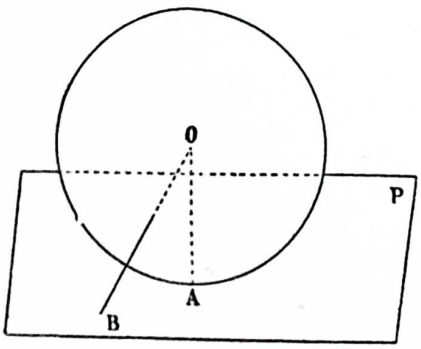


Fig. 162

le rayon (250) (fig. 162). Ainsi, tout point du plan P autre que le point A étant à une distance du centre supérieure au rayon est en dehors de la sphère. Le plan n'a qu'un point commun avec la sphère ; il est tangent en A.

Ce théorème établit l'existence des plans tangents à la sphère.

322. Théorème réciproque. — *Tout plan tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact.*

En effet, A étant le point de contact, tout autre point B du plan P est extérieur à la sphère et, par suite, est à une distance du centre supérieure au rayon. Ainsi, le rayon O A est la droite la plus courte que l'on puisse mener du point O au plan P et, par conséquent, il est perpendiculaire au plan P (250).

323. Théorème. — *Si, en un point d'une sphère, on mène les tangentes à tous les cercles de la sphère qui passent*

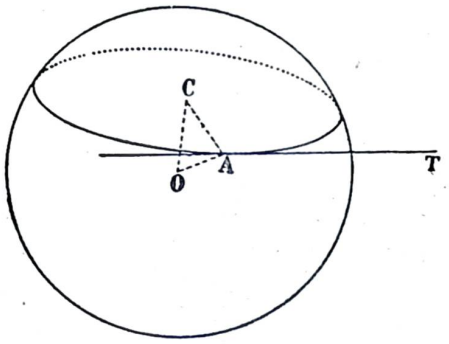


Fig. 163

par ce point, ces tangentes sont situées dans le plan tangent à la sphère en ce point.

Coupons une sphère O par un plan (fig. 163) : soit C le petit cercle de la sphère déterminé par ce plan ; menons dans le plan la tangente A T au petit cercle. A T est perpendiculaire au rayon C A passant par le point de contact. Menons le rayon de la sphère O A. Comme O C est perpendiculaire au plan du petit cercle, O A est perpendiculaire à A T (215). Par suite, A T se trouve dans le plan perpendiculaire à O A au point A (222), c'est-à-dire qu'elle est dans le plan tangent à la sphère en A (321).

324. Cône circonscrit. — Considérons un demi-cercle A C B qui, en tournant autour de son diamètre A B, engendre une sphère. Par un point T situé sur le prolongement du diamètre A B, menons la tangente T M (fig. 164).

Quand on fait tourner la figure autour de A T, T M engendre une surface conique. Toutes les génératrices de cette surface sont tangentes à la sphère et les points

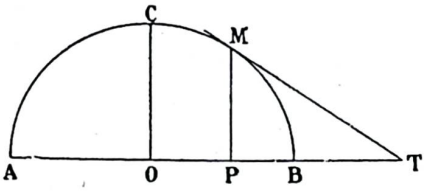


Fig. 164

de contacts se trouvent tous sur le petit cercle engendré par le point M. On dit que le cône engendré par T M est circonscrit à la sphère.

Si on fait passer par le point M le plan tangent à la sphère, il contient la droite M T (323). Les plans tangents aux différents points du petit cercle engendré par M passent tous par T.

SURFACE DE LA SPHÈRE

325. Théorème. — *La surface engendrée par une ligne polygonale régulière, en tournant autour d'un axe qui, situé dans son plan, passe par son centre sans la traverser, est égale au produit de la circonférence inscrite*

dans la ligne polygonale par la projection de la ligne polygonale sur l'axe.

Soit la ligne polygonale régulière A B C D (fig. 165). La surface engendrée par cette ligne est égale à la somme des surfaces engendrées par chacun de ses côtés.

Evaluons la surface engendrée par le côté A B par exemple. C'est la surface latérale d'un tronc de cône,

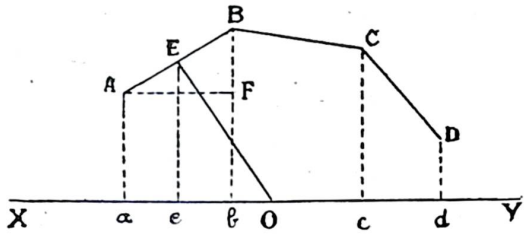


Fig. 165

ayant pour base les cercles engendrés par les perpendiculaires A *a* et B *b* à l'axe X Y. Elle a pour mesure le produit de la circonférence moyenne, de rayon E e, par la moitié de la génératrice A B (312) :

$$2\pi \times E\,e \times A\,B$$

Soit O E l'apothème de la ligne polygonale, pour le côté A B.

Menons A F, parallèle à X Y. Les triangles A B F, E O *e* sont semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, et on a :

$$\frac{A\,B}{O\,E} = \frac{A\,F}{E\,e}$$

D'où on tire :

$$A\,B \times E\,e = O\,E \times A\,F = O\,E \times a\,b$$

En remarquant que A F est égal à la projection *a b* de A B. La surface engendrée par A B s'exprime donc par la formule :

$$\text{Surf. } A\,B = 2\pi\,O\,E \times a\,b.$$

Comme la ligne polygonale est régulière, la valeur de l'apothème est constante et, par suite, la surface engendrée par le côté B C et la surface engendrée par le côté C D sont exprimées par les formules :

$$\text{Surf. } B\,C = 2\pi\,O\,E \times b\,c$$
$$\text{Surf. } C\,D = 2\pi\,O\,E \times c\,d$$

En additionnant membre à membre ces trois expressions, on en déduit :

$$\text{Surf. } A\,B\,C\,D = 2\pi \times O\,E \times (a\,b + b\,c + c\,d)$$
$$= 2\pi\,O\,E \times a\,d.$$

326. Zone. — On appelle ZONE la portion de la surface d'une sphère comprise entre *deux plans parallèles*. Les petits cercles de la sphère suivant lesquels les deux plans coupent celle-ci s'appellent BASES de la zone. La distance des deux plans est la HAUTEUR de la zone.

Si l'un des plans sécants devient tangent, l'une des bases de la zone devient nulle, et la zone se réduit à la surface de la sphère comprise entre un petit cercle et l'un de ses pôles. Dans ce cas, la zone prend le nom de CALOTTE SPHÉRIQUE.

327. Théorème. — *L'aire d'une zone a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle, par la hauteur de la zone.*

En effet, la zone C C′ D D′ peut être considérée comme engendrée par l'arc de cercle C D tournant autour du diamètre A B (fig. 166). Si on inscrit dans l'arc C D une ligne polygonale régulière, la surface engendrée par cette ligne est égale à la longueur de la circonférence inscrite dans cette ligne, multipliée par la projection de celle-ci sur l'axe, c'est-à-dire par I H, la hauteur de la zone. Or, si on double indéfiniment le nombre des côtés de la ligne polygonale régulière, en lui conservant les extrémités D C, sa projection reste toujours I H.

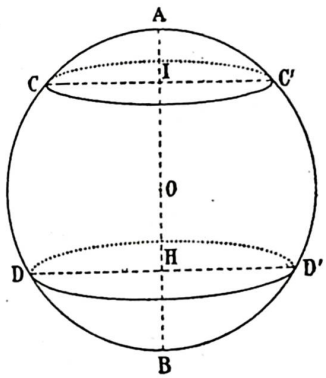


Fig. 166

Quant à la circonférence inscrite, elle se rapproche indéfiniment de la circonférence circonscrite, qui n'est autre que le grand cercle A B C D de la sphère. A la limite, la surface engendrée par la ligne polygonale devient la surface de la zone et en vertu du théorème précédent, on peut écrire :

$$\text{Surf. } D\,C\,C'\,D' = 2\pi\,R \times h.$$

Ainsi : **Aire de la zone** $= 2\pi\,R\,h$.

h représentant la hauteur I H, et R le rayon de la sphère.

328. Théorème. — *L'aire de la sphère est égale à quatre fois celle d'un grand cercle.*

En effet, on peut considérer la sphère comme une zone dont la hauteur est égale au diamètre ; sa surface est exprimée alors par la formule :

$$2\pi\,R \times 2\,R = 4\pi\,R^2$$

Donc : **Aire de la sphère** $= 4\pi\,R^2$.

VOLUME DE LA SPHÈRE

329. Théorème. — *Le volume engendré par un triangle en tournant autour d'un axe qui, situé dans son plan, passe par un de ses sommets sans le traverser, a*

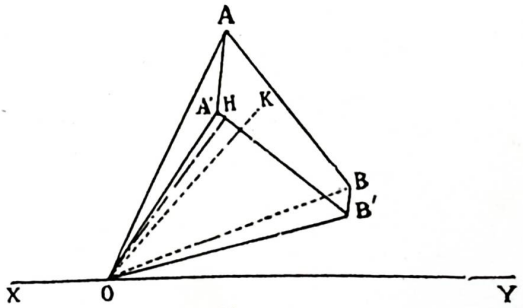


Fig. 167

pour mesure le produit de la surface engendrée par le côté opposé à l'axe, et du tiers de la hauteur correspondante.

Soit le triangle O A B mobile autour de l'axe X Y dans les conditions requises par l'énoncé (fig. 167). Supposons qu'on fasse subir au plan de ce triangle un petit déplacement angulaire égal à α, de manière à l'amener dans une nouvelle position O A′ B′. On conçoit qu'en répétant un certain nombre de fois ce

déplacement, on fasse faire un tour complet au plan du triangle autour de l'axe X Y. Si on joint, dans deux positions successives du triangle, après une rotation correspondant à l'angle α, les sommets A A', B B' par des droites on obtient une pyramide quadrangulaire O A B B' A'. Il est facile de démontrer en effet que la figure A B B' A' est un plan ; car les deux droites A B et A' B' rencontrent l'axe X Y en un même point, en vertu même des hypothèses.

Or, le volume de la pyramide O A B B' A' est égal au produit de la surface de base A A' B' B par le tiers de la hauteur O *X*. Toutes les pyramides, obtenues comme nous venons de le dire par des déplacements successifs du plan du triangle, sont égales à celles que nous venons d'envisager ; et le volume engendré par le triangle O A B, tournant d'un mouvement continu autour de l'axe X Y, peut être considéré comme la limite de la somme des volumes des pyramides telles que O A B B' A'. Lorsque l'angle α tend vers zéro la somme des bases telles que A B B' A' tend vers la surface engendrée par A B tournant d'un mouvement continu, la hauteur O K tend vers la hauteur O H du triangle O A B. Il s'ensuit qu'à la limite le volume engendré par le triangle O A B, tournant d'un mouvement continu, est égal au produit de la surface engendrée par A B, et du tiers de la hauteur O H relative à A B.

330. Théorème. — *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier en tournant autour d'un axe, qui situé dans son plan. passe par son centre et ne le traverse pas, a pour mesure la surface engendrée par la ligne polygonale régulière, multipliée par le tiers de l'apothème.*

Soit le secteur polygonal O A B C D E O tournant autour de l'axe X Y (fig. 168). D'après ce qui précède, le volume engendré par chacun des triangles, tels que

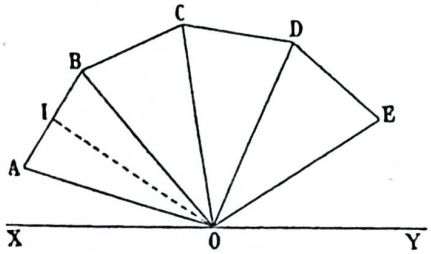


Fig. 168

A O B, a pour mesure la surface engendrée par le côté, tel que A B, opposé à l'axe, multipliée par le tiers de la hauteur, telle que O I, c'est-à-dire par le tiers de l'apothème. On a donc, en remarquant que l'apothème est le même pour tous les côtés :

$$\text{Vol. A O B} = \text{surf. A B} \times \frac{\text{OI}}{3}$$

$$\text{Vol. B O C} = \text{surf. B C} \times \frac{\text{OI}}{3}$$

$$\text{Vol. C O D} = \text{surf. C D} \times \frac{\text{OI}}{3}$$

$$\text{Vol. D O E} = \text{surf. D E} \times \frac{\text{OI}}{3}$$

En additionnant membre à membre on obtient :

$$\text{Vol. O A B C D E O} = \text{surf. A B C D E} \times \frac{\text{O I}}{3}$$

331. Théorème. — *Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon.*

Soit D D' un diamètre de la sphère O, et considérons e secteur circulaire A O B (fig. 169).

Quand ce secteur tourne autour du diamètre D D' situé dans son plan, il engendre un secteur sphérique, l'arc A B engendre une zone.

Si on inscrit dans l'arc A B une ligne polygonale régulière, le secteur polygonal A O B ainsi obtenu engendrera un solide inscrit dans le secteur sphérique et dont le volume peut être calculé d'après le théorème précédent. Si on augmente indéfiniment le nombre des

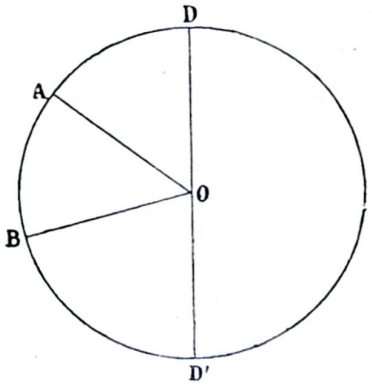


Fig. 169

côtés du secteur polygonal, le volume engendré par celui-ci tendra vers le volume du secteur sphérique, l'apothème tendra vers le rayon de la sphère, et enfin la surface engendrée par la ligne polygonale tendra vers la surface de la zone engendrée par l'arc A B. A la limite, par conséquent, le volume du secteur sphérique sera exprimé par la formule :

$$V = \text{surf. A B} \times \frac{R}{3}$$

R étant le rayon de la sphère. Appelons h la hauteur de la zone ; l'expression devient :

$$V = 2\pi R h \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Ainsi : **Volume du Secteur sphérique**

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

332. Théorème. — *Le volume de la sphère est égal au produit de sa surface par le tiers du rayon.*

En effet, la sphère peut être considérée comme un secteur sphérique engendré par un demi-cercle, tour-

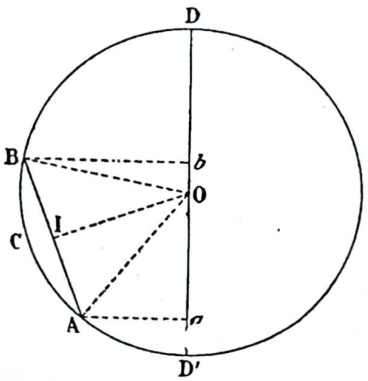


Fig. 170

nant autour de son diamètre. Dans ce cas, la hauteur de la zone devient égale au diamètre 2 R. L'expression du volume est donc :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Donc :

Volume de la sphère : $= \frac{4}{3} \pi R^3$

On remplace souvent cette formule par une autre calculée en fonction du diamètre. Posons :

$$D = 2 R$$

La formule précédente devient :

$$V = \frac{4}{3} \pi \times \frac{D^3}{8} = \frac{3}{24} \pi D^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$$

D'où :

Volume de la sphère $= \frac{1}{6} \pi D^3$

Ces formules montrent que les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons de ces sphères.

333. Théorème. — *Le volume engendré par un segment de cercle en tournant autour d'un diamètre situé dans son plan, et ne le traversant pas, est égal au* $\frac{1}{6}$ *du volume d'un cylindre qui aurait pour rayon la corde du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur le diamètre.*

Soit le segment de cercle A C B (fig. 170). Le volume qu'il engendre en tournant autour du diamètre D D' est la différence des volumes engendrés par le secteur circulaire O A C B O et par le triangle O A B.

Evaluons chacun de ces volumes :

$$\text{Vol. O A C B O} = \frac{2}{3} \pi \times \overline{OA}^2 \times a\,b$$

$$\text{Vol. O A B} = \frac{1}{3} \text{O I} \times \text{surf. A B}$$

Or :

$$\text{Surf. A B} = 2\pi \times \text{O I} \times a\,b$$

D'où on déduit :

$$\text{Vol. O A B} = \frac{2}{3} \pi \times \overline{OI}^2 \times a\,b$$

Enfin :

$$\text{Vol. ABC} = \frac{2}{3} \pi \times a\,b\,(\overline{AO}^2 - \overline{OI}^2) =$$

$$\frac{2}{3} \pi \times ab \times \overline{AI}^2$$

$$\text{Vol. A C B} = \frac{1}{6} \pi \times a\,b \times \overline{AB}^2$$

334. Théorème. — *Le volume d'un segment sphérique est égal à la somme des volumes d'un cylindre ayant,*

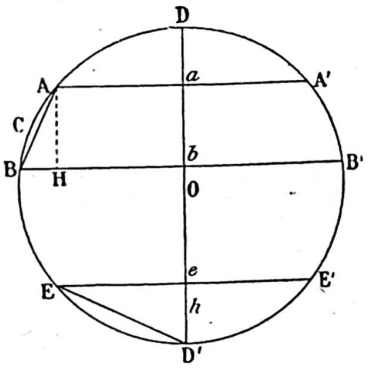


Fig. 171

pour hauteur, la hauteur du segment, et pour base, la demi-somme des bases du segment, et d'une sphère ayant pour diamètre, la hauteur du segment.

Soit le segment sphérique A A' B B', c'est-à-dire le volume compris entre deux plans parallèles perpendiculaires D D' (fig. 171). Les petits cercles A A' B B' suivant lesquels les deux plans coupent la sphère sont les bases du segment.

On peut considérer le volume du segment comme la somme du volume engendré par le trapèze *a* A B *b* (c'est-à-dire le volume d'un tronc de cône) et du volume engendré par le segment de cercle A C B.

Le volume du tronc de cône s'exprime par la formule (314) :

$$(1)\ \text{Vol. A}\,a\,b\,\text{B} = \frac{1}{3} \pi\, ab\, (\overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2 + \text{A}\,a \times \text{B}\,b)$$

D'autre part on a (335) :

$$\text{Vol. A B C} = \frac{1}{6} \pi\, a\, b \times \overline{AB}^2$$

Abaissons A H, perpendiculaire à B B'. A H est égal à *a b*. On a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{ab}^2 + (\text{B}\,b - \text{A}\,a)^2$$

$$= \overline{ab}^2 + \overline{Bb}^2 + \overline{Aa}^2 - 2\,\text{B}\,b \times \text{A}\,a$$

$$(2)\ \text{Vol. A B C} = \frac{1}{6} \pi\, a\, b \times$$

$$(\overline{ab}^2 + \overline{Bb}^2 + \overline{Aa}^2 - 2\,\text{B}\,b \times \text{A}\,a)$$

Ajoutons membre à membre les égalités (1) et (2) ; en opérant les réductions, on obtient :

$$\text{Volume segment} = \frac{1}{6} \pi \overline{ab}^3 + \frac{1}{2} \pi\, ab\, (\overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2)$$

d'où en désignant par *r* et *r'* les rayons des cercles de bases et par *h* la hauteur du segment.

Volume segment sphérique a deux bases

$$\frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h\, (r^2 + r'^2)$$

Supposons que le segment n'ait qu'une base ; c'est alors une calotte sphérique : E D' E'. Comme l'une des bases du segment est nulle, la demi-somme des bases devient la moitié de la base unique. On a :

$$\text{Vol. E D' E'} = \frac{1}{6} \pi \overline{D'e}^3 + \frac{1}{2} \pi \overline{Ee}^2 \times \text{D'}\,e$$

Or :

$$\overline{Ee}^2 = \text{D'}\,e \times e\,\text{D}$$

Et, par conséquent :

$$\text{Vol. E D' E} = \frac{1}{6} \pi \overline{D'e}^2 (\text{D'}\,e + 3\,e\,\text{D})$$

Si on appelle R le rayon de la sphère, *h* la hauteur D' *e* de la calotte, on a :

$$\text{Vol. E D' E'} = \frac{1}{6} \pi h^2 (h + 6\,\text{R} - 3\,h) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3\text{R} - h)$$

Donc :

Volume segment sphérique a une base

$$= \frac{1}{3} \pi h^2 (3\,\text{R} - h)$$

EXERCICES

98. — Trouver la surface d'un cylindre de rayon 0,10 m. et de hauteur 3,50 m.

99. — On connaît la surface latérale d'un cylindre : 4 m², et sa surface totale : 5,25m². Trouver la hauteur et le rayon du cylindre.

100. — Le rayon d'un cylindre est de 0,25 m. Quelle hauteur doit-il avoir pour posséder une capacité de 150 litres ?

101. — Un cône est engendré par un triangle rectangle dont l'angle aigu, au sommet du cône, vaut 30°. Le rayon de la base du cône a 17 cm. Trouver : 1° la surface totale du cône ; 2° son volume.

102. — A quelle distance du sommet faut-il couper le cône défini dans l'énoncé précédent, par un plan parallèle à la base, pour obtenir un tronc de cône dont le volume soit égal au $\frac{1}{5}$ du volume du cône ?

103. — Trouver la surface totale et le volume d'un tronc de cône qui a pour rayon de la grande base, 40 m. ; pour rayon de la petite base, 25 m., et pour hauteur, 33 m.

104. — Quelle est la surface du globe terrestre, sachant que celui-ci a sensiblement la forme d'une sphère dont le rayon est de 6.366 km. ?

105. — Trouver la surface de la zone comprise entre deux parallèles terrestres situés de part et d'autre de l'équateur à 30° de celui-ci.

106. — Trouver le volume d'un secteur sphérique, sachant que le rayon de la sphère a 7 m. et que la hauteur de la zone qui sert de base au secteur est de 3 m.

107. — Trouver le volume d'un segment sphérique, déterminé dans une sphère de rayon 1 mètre, par 2 plans parallèles menés respectivement à 50 cm. et à 75 cm. du centre.

108. — Calculer le volume de la calotte sphérique limitée par le plan le plus éloigné du centre.

109. — Calculer le volume d'une sphère circonscrite à un mètre cube.

110. — Un demi-hexagone régulier de 3 mètres de côté tourne autour de son diamètre. Calculer l'aire du solide qu'il engendre.

111. — Calculer le volume engendré par un hexagone régulier de côté *a* tournant autour de l'un de ses côtés.

112. — Si un cylindre est circonscrit à une sphère, et qu'on coupe les deux figures par des plans parallèles au grand cercle de contact, la zone comprise entre les deux plans est équivalente à l'aire de la portion de cylindre comprise entre les deux mêmes plans.

113. — L'aire de la surface d'une sphère et les aires des surfaces totales du cylindre et du cône équilatéral circonscrits à cette sphère sont proportionnelles aux nombres 4, 6, 9.

Les volumes sont proportionnels aux mêmes nombres.

Corrigé des exercices

LIGNE DROITE

1. — *Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires.* (*Démontrer.*)

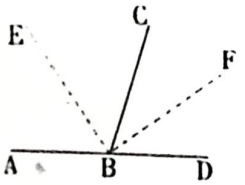


Fig. 172

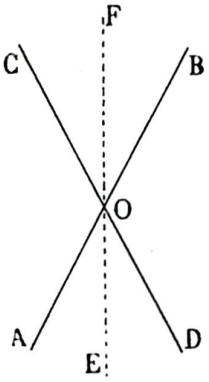


Fig. 173

DÉMONSTRATION : Soient deux angles adjacents supplémentaires A B C, C B D ; je dis que leurs bissectrices B E et B F sont perpendiculaires entre elles.

On a

$$\widehat{EBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

$$\widehat{CBF} = \frac{\widehat{CBD}}{2}$$

d'où :

$$\widehat{EBC} + \widehat{CBF} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{CBD}}{2}$$

ou

$$\widehat{EBF} = \frac{2 \text{ dr.}}{2} = 1 \text{ dr.}$$

2. — *Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont en ligne droite.* (*Démontrer*).

DÉMONSTRATION : Soient O E et O F les bissectrices de deux angles A O D et B O C opposés par le sommet ; je dis qu'elles sont en ligne droite.

Les deux angles A O D et C O B étant égaux, leurs moitiés sont égales d'où A O E = F O B. Les angles adjacents A O E et E O B ayant leurs côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires d'où A O E est le supplément de E O B. Donc F O B est aussi le supplément de E O B. Les angles adjacents F O B et B O E étant supplémentaires ont leurs côtés extérieurs O E, O F en ligne droite.

3. — *L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée dans cet angle par le sommet, est égal à la demi-différence des deux angles que détermine cette droite dans l'angle donné.*

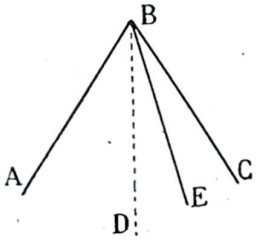


Fig. 174

DÉMONSTRATION : Soient A B C l'angle donné, B D sa bissectrice et B E une droite quelconque menée à l'intérieur de l'angle.

On a :

$$\widehat{DBE} = \widehat{ABE} - \widehat{ABD}$$

$$\widehat{DBE} = \widehat{DBC} - \widehat{EBC}$$

et

$$2\,\widehat{DBE} = \widehat{ABE} - \widehat{EBC}$$

d'où

$$\widehat{DBE} = \frac{\widehat{ABE} - \widehat{EBC}}{2}$$

en additionnant ces égalités membre à membre et en observant que A B D = D B C.

4. — *L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée par le sommet, hors de cet angle, est égal à la demi-somme des angles que détermine cette droite avec les deux côtés de l'angle donné.* (*Démontrer.*)

Démonstration analogue à celle du théorème précédent.

TRIANGLES

5. — *Quand deux triangles ont un côté commun et deux côtés qui se croisent, la somme des côtés qui se croisent est plus grande que la somme des côtés qui ne se croisent pas.* (*Démontrer.*).

DÉMONSTRATION : Soit O le point d'intersection des côtés qui se croisent (fig. 175). Dans les triangles A O B et C O D, on a :

$$AB < AO + BO$$
$$CD < DO + CO$$

d'où

$$AB + CD < AO + DO + BO + CO$$

ou

$$AB + CD < AD + BC$$

6. — *Si l'on joint les trois sommets d'un triangle à un point pris à son intérieur, la somme de ces droites est plus petite que le périmètre du triangle, mais plus grande que le demi-périmètre.* (*Démontrer.*)

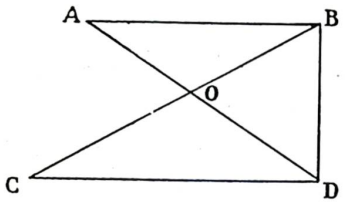


Fig. 175

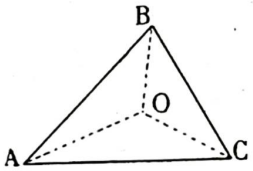


Fig. 176

DÉMONSTRATION : Soit O un point pris dans l'intérieur d'un triangle A B C (fig. 176).

1° On a :

$$AO + OC < AB + BC$$
$$OA + OB < BC + AC$$
$$OB + OC < AC + AB$$

d'où

$$2(AO + OB + OC) < 2(AB + BC + AC)$$

ou

$$AO + OB + OC < AB + BC + AC$$

2° Les triangles A O B, B O C, A O C donnent :

$$OA + OB < AB$$
$$OC + OA < BC$$
$$OB + OC < AC$$

d'où

$$2(OA + OB + OC) < AB + BC + AC$$

ou

$$OA + OB + OC < \frac{AB + BC + AC}{2}$$

7. — *Etant donné un triangle* A B C, *on prolonge la médiane* B D *d'une longueur* D F *égale à* B D, *on joint le point* A *au point* F. *Démontrer que* A F = B C,

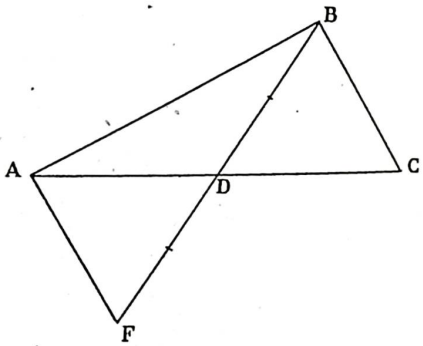


Fig. 177

Considérons les triangles B D C et A D F (fig. 177). ils ont $\widehat{ADF} = \widehat{BDC}$ comme opposés par le sommet, A D = D C par hypothèse et B D = D F pour la même raison. Ces triangles sont égaux (2e cas d'égalité) ; il en résulte que A F = B C.

8. — *Dans un triangle, une médiane est plus petite que la demi-somme des deux côtés qui la comprennent, et plus grande que leur demi-différence.*

DÉMONSTRATION : Soit le triangle A B C et la médiane A D ; il faut prouver que :

$$AD < \frac{AC + AB}{2}$$

et

$$AD > \frac{AC - AB}{2}$$

Prolongeons la médiane d'une longueur égale à elle-même D E et joignons E C (fig. 178).

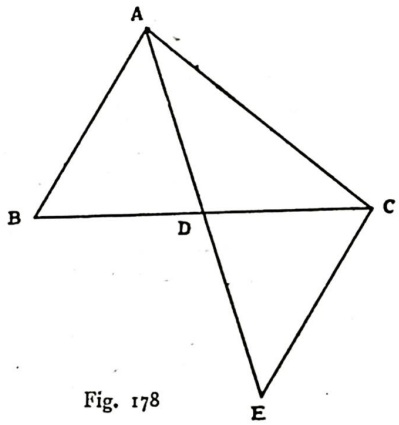


Fig. 178

On voit que (problème 7) E C = A B.

Le triangle A E C donne : A E < A C + C E.

ou

$$2AD < AC + AB$$

et enfin

$$AD < \frac{AC + AB}{2}$$

Le même triangle A E C donne :

$$AE < AC - CE$$

ou

$$2AD < AC - AB$$

et enfin

$$AD < \frac{AC - AB}{2}$$

9. — *Un triangle isocèle a deux médianes égales et deux bissectrices égales.* (*Démontrer.*)

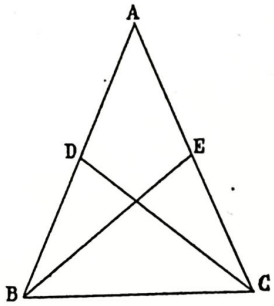


Fig. 179

DÉMONSTRATION : Soit le triangle isocèle A B C. Je dis que les médianes B E, C D relatives aux côtés égaux sont égales (fig. 179). Considérons les triangles B C D et B C E, ils ont le côté B C commun, B D = C E comme moitiés de côtés égaux, et $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ comme angles à la base d'un triangle isocèle.

Les deux triangles sont égaux (2e cas). Donc B E = C D.

Démonstration analogue quand on considère les bissectrices relatives aux côtés égaux.

PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES TRIANGLES RECTANGLES

10. — *Les perpendiculaires abaissées des extrémités de la base d'un triangle isocèle sur les côtés opposés sont égales.*

DÉMONSTRATION : Soient le triangle isocèle A B C et les hauteurs A D, B E relatives aux côtés égaux (fig. 180).

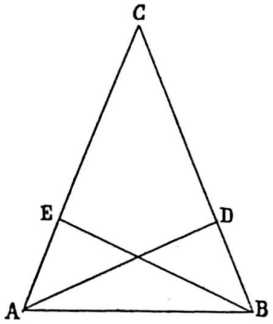


Fig. 180

Les triangles rectangles A B D, A B E ont l'hypoténuse A B commune et les angles C A B, C B A égaux comme angles à la base d'un triangle isocèle. Ces triangles rectangles sont égaux (1er cas), d'où A D = B E.

11. — *Deux points* A *et* B *sont situés d'un même côté d'une droite. Trouver le chemin le plus court pour aller du point* A *au point* B *en touchant la droite.*

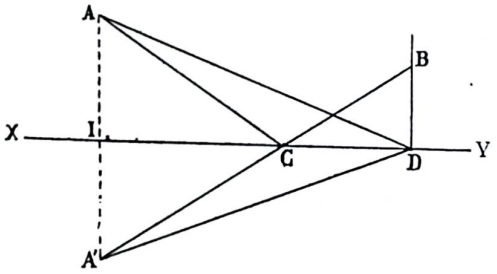


Fig. 181

DÉMONSTRATION : Soit $x\,y$ la droite (fig. 181). Prenons le symétrique A' de A par rapport à $x\,y$. Joignons A' B, le point C de rencontre est le point cherché, tel que A C + C B est le chemin le plus court pour aller de A en B, en touchant $x\,y$. Montrons que tout autre chemin A D + D B par exemple, est plus long.

On a C A = C A' et D A = D A comme obliques s'écartant également du pied I de la perpendiculaire $x\,y$ sur A A'.

Le chemin A C + C B = A' C + C B = A' B et le chemin A D + D B = A' D + D B.

Or dans le triangle A B' D on a :

$$A'B < A'D + DB.$$

Donc A C + C B est le chemin demandé.

12. — *Dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus grande que la droite qui joint deux points quelconques pris respectivement sur les côtés de l'angle droit.*

DÉMONSTRATION : Soit D E la droite joignant deux points quelconques des côtés de l'angle droit (fig. 182). Joignons D C.

Des deux obliques D E, D C à A C, D E est la plus courte d'où D E < D C.

Des deux obliques C D, C B à A B, C D est la plus courte d'où C D < C B.

Donc on a D E < C D < C B et à plus forte raison D E < B C.

13. — *On coupe les côtés d'un angle par une sécante quelconque : on mène les bissectrices des quatre angles qu'elle forme avec les côtés de cet angle ; démontrer que ces bissectrices se coupent deux à deux sur la bissectrice de l'angle donné.*

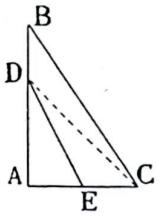


Fig 182

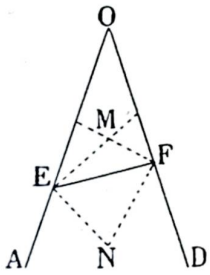


Fig. 183

DÉMONSTRATION : Soit A O D un angle coupé par la sécante E F. Je mène les bissectrices E M, F M, E N, F N des angles O E F, O F E, A E F, D F E (fig. 183). Les deux premières se coupent en M et les deux autres en N ; prouvons que les points M, N sont sur la bissectrice de l'angle O.

Le point M étant sur E M est équidistant de E O et de E F. Le point M appartenant à la bissectrice F M est équidistant de F O et de F E. Donc le point M étant à égale distance de E O et de F O est situé sur la bissectrice de l'angle O.

Pour la même raison, le point N étant équidistant de E A et de F D est sur la bissectrice de l'angle O.

Remarque. — Ce problème fournit le moyen de mener la bissectrice de l'angle formé par deux droites concourantes qui ne se rencontrent pas dans les limites du dessin.

DROITES PARALLÈLES

14. — *La parallèle à l'un des côtés d'un triangle menée par le point de concours des bissectrices est égale à la somme des segments adjacents à ce côté qu'elle détermine sur les deux autres.*

DÉMONSTRATION : Soit D E la parallèle menée au côté A B par le point O d'intersection des bissectrices (fig. 184).

Il s'agit de prouver que D E = A D + B E.

Les angles a et b sont égaux par hypothèse ; les angles b et c sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles A B, D E coupées par la sécante donc a = c.

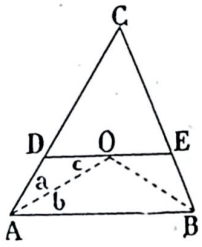


Fig. 184

Par suite le triangle A D O est isocèle et l'on a O D = A D.

On démontrerait de même que O E = B E. Par suite :

$$OD + OE = AD + BE \text{ ou } DE = AD + BE$$

15. — *Etant donné un angle* B A C *et un point* M *sur le côté* A C, *trouver sur* A C *un deuxième point* N *qui soit à égale distance de* M *et du côté* A B.

DÉMONSTRATION : Supposons le problème résolu ; N étant le point cherché (fig. 185). Abaissons des points M et N des perpendiculaires M F, N D sur le côté A B. Traçons M D. Par hypothèse on a N M = N D donc, dans le triangle isocèle N D M, $\widehat{a} = \widehat{b}$. Mais N D et M F étant parallèles les angles $\widehat{b}$ et $\widehat{c}$ sont égaux comme alternes-internes. Donc $\widehat{a} = \widehat{c}$. Il suffit donc,

pour résoudre le problème, d'abaisser M F perpendiculaire sur A B, de mener la bissectrice M D de $\widehat{AMF}$ et d'élever en D la perpendiculaire D N sur A B jusqu'à sa rencontre N avec A C.

On a : N D = N M.

Remarque. — On peut répéter la construction dans l'angle F M C. On obtient un deuxième point N′ qui répond aussi à la question.

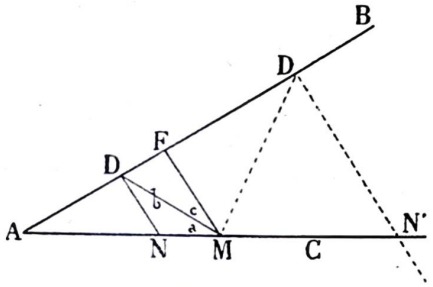


Fig. 185

16. — *Dans un triangle isocèle la somme des distances d'un point de la base aux deux autres côtés est constante.* (*Démontrer*).

Examiner le cas où le point est pris sur le prolongement de la base.

Démonstration : Soient le triangle isocèle A B C, un point D sur la base, et les perpendiculaires D E et D F sur les côtés égaux (fig. 186) ; la somme D E + D F est constante.

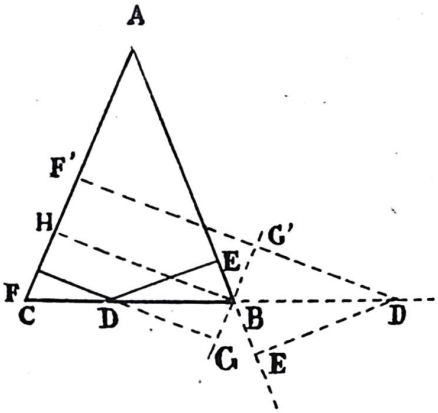


Fig. 186

En effet, menons B G parallèle à A C et prolongeons F D en G ; les triangles B E D et B G D ont l'hypoténuse B D commune ; les angles en B égaux ; car $\widehat{DBG} = \widehat{DCA}$ comme alternes-internes et $\widehat{DCA} = \widehat{DBA}$; donc D G = D E, et la somme D E + D F = F G = B H = constante.

Si le point est pris sur le prolongement, la différence des perpendiculaires est constante.

Soit D′ un point pris sur le prolongement de la base. Menons B G′ parallèle à A C ; les triangles rectangles D′ B E′ et D′ B G′ ont l'hypoténuse D′ B commune, les angles en B égaux, car $\widehat{D'BE} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{D'BG'} = \widehat{ACB}$ comme correspondants ; donc ces triangles sont égaux, et D′ E′ = D′ G′. Donc D′ F′ — D′ E′ = B H = constante.

SOMMES DES ANGLES D'UN TRIANGLE

17. — *Si l'on joint un point intérieur* O *d'un triangle* A B C *aux sommets* A *et* B, *l'angle* A O B *est toujours plus grand que l'angle* A C B *du triangle.* (*Démontrer*).

Démonstration : Dans le triangle A B C (fig. 187) on a :

$$\widehat{ACB} = 2 \text{ dr.} - (\widehat{CAB} + \widehat{CBA}).$$

et dans le triangle A O B,

$$\widehat{AOB} = 2 \text{ dr.} - (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}).$$

Or

$$\widehat{OAB} + \widehat{OBA} < \widehat{CAB} + \widehat{CBA}.$$

Donc

$$\widehat{AOB} > \widehat{ACB}$$

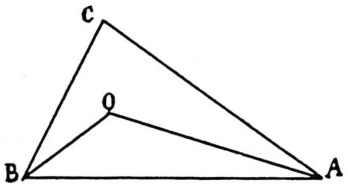


Fig. 187

18. — *Si un angle aigu d'un triangle rectangle est double de l'autre angle aigu, l'hypoténuse est double du plus petit côté, et réciproquement.* (*Démontrer*).

Démonstration : Soit le triangle rectangle A B C dans lequel l'angle C est le double de l'angle B (fig. 188). Traçons A D faisant avec A B un angle $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$; le triangle D A B est isocèle, d'où A D = D B. L'angle A D C extérieur au triangle A C B est double de B ; donc $\widehat{ADC} = \widehat{C}$.

D'autre part $\widehat{CAD}$ est le complément de $\widehat{DAB}$ c'est-à-dire de $\widehat{B}$; par suite $\widehat{CAD} = \widehat{C}$ qui es aussi le complément de $\widehat{B}$. Le triangle $\widehat{ACD}$ est donc équilatéral.

Alors A C = C D = A D = D B.

Donc B C = 2 A C.

Réciproquement, si dans le triangle A B C, le côté A C est la moitié de l'hypoténuse B C, l'angle B est la moitié de l'angle C (fig. 188).

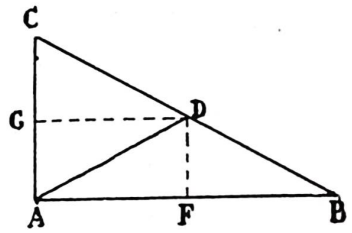


Fig. 188

Montrons que la droite A D, qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse. Menons par D les parallèles D F, D G aux côtés A C, A B.

Les triangles rectangles C G D, D F B ont l'hypoténuse C D égale à l'hypoténuse A D et $\widehat{CDG} = \widehat{DBF}$ comme correspondants ; donc G D = F B.

De même on a G D = A F par suite de l'égalité des triangles rectangles A D G et A D F. Par suite A F = F B.

Les deux triangles A F D, B F D ont donc un angle droit compris entre des côtés égaux ; d'où l'on tire A D = D B = C D.

Il résulte de là que le triangle A D C est équilatéral et que $\widehat{C} = \widehat{CDA}$. Or $\widehat{EDA}$ est extérieur au triangle isocèle A D B ; donc $\widehat{C} = 2\widehat{B}$.

19. — *Dans un triangle* A B C, *l'angle formé par les bissectrices des angles* B *et* C *égale un droit plus la moitié de l'angle* A. (*Démontrer*).

DÉMONSTRATION : Dans le triangle B D C, on a (fig. 189) :

$$\widehat{BDC} = 2 \text{ dr.} - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

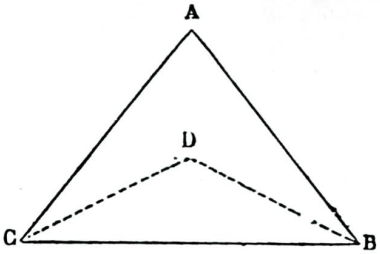


Fig. 189

Or, dans le triangle A B C, on a :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2 \text{ dr.}$$

Donc

$$\widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$$

Comme

$$\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 1 \text{ dr.}$$

il vient :

$$\widehat{BDC} = 1 \text{ dr.} + \frac{\widehat{A}}{2}$$

PARALLÈLOGRAMMES

20. — *Toute droite menée dans un parallélogramme par le point de rencontre des diagonales a ce point pour milieu.* (*Démontrer*).

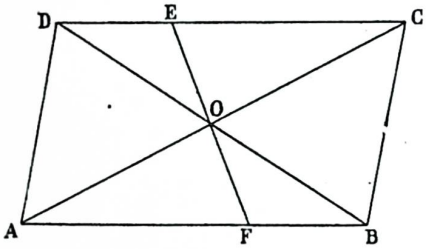


Fig. 190

DÉMONSTRATION : Considérons les triangles O E C, O F A (fig. 190) : ils ont A O = O C, car les diagonales se coupent en leurs milieux, les angles en O égaux comme opposés par le sommet et $\widehat{OCE} = \widehat{OAF}$ comme alternes-internes. Ces deux triangles sont donc égaux (2e cas) ; d'où O E = O F.

Remarque. — Toute droite passant par O, jouit des mêmes propriétés que E F ; aussi le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est dit *centre de figure.*

21. — *Par un point pris à l'intérieur d'un angle, mener une droite qui, limitée aux deux côtés, ait ce point pour milieu.* (*Démontrer*).

DÉMONSTRATION : Soit à mener par le point O, pris dans l'angle A, une droite qui, limitée aux deux côtés de cet angle, ait le point O pour milieu (fig. 191).

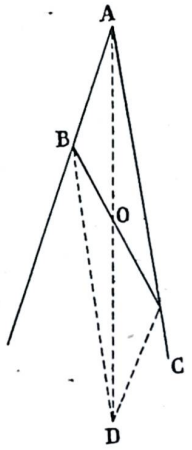
Supposons que la droite B C réponde à la question. Prolongeons A O d'une longueur égale O D et traçons D B, D C. Le quadrilatère A B C D est un parallélogramme car ses diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales ; donc D C est parallèle à A B. De là, la construction :

Joindre le sommet A au point O, prolonger cette droite d'une longueur O D égale à elle-même ; par le point D mener D C parallèle au côté A B de l'angle ; C O B est la droite demandée.

22. — *Si l'on joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on obtient une droite parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.* (*Démontrer*).

DÉMONSTRATION : Soient le triangle A B C et la droite D E joignant les milieux des deux côtés A C, B C (fig. 192).

Prolongeons D E d'une longueur E F = D E et traçons B F. Les triangles C D E, B E F ont E F = D E par construction, E C = E B par hypothèse, $\widehat{DEC} = \widehat{BEF}$ comme opposés par le sommet. Ils sont égaux (2e cas) d'où l'on tire F B = D C = D A. $\widehat{EBF} = \widehat{C}$. Ces angles occupant la position d'alternes-internes par rapport aux droites B F et A C coupées par la sécante B C, on a B F parallèle à A D.



Fig, 191

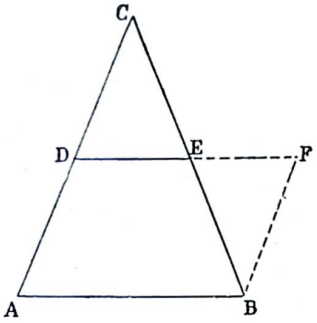


Fig. 192

Le quadrilatère A B F D ayant les côtés F B et D A égaux et parallèles est un parallélogramme. D'où : D E parallèle à A B.

$$D F = A B \text{ et par suite } D E = \frac{AB}{2}.$$

23. — *Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point situé aux deux tiers de leurs longueurs à partir du sommet.* (*Démontrer*).

DÉMONSTRATION : Soit le triangle A B C. Considérons les médianes A D, B E qui se coupent en O (fig. 193). Menons E D et joignons les milieux G de O A et H de O B.

D'après le problème précédent on a, dans le triangle A C B :

$$E D \text{ parallèle à } B \text{ et } E D = \frac{AB}{2}.$$

Et dans le triangle A O B, G H parallèle à A B et $GH = \frac{AB}{2}$.

Les droites E D et G H étant parallèles et égales le quadrilatère E D G H est un parallélogramme. Les diagonales d'un parallélogramme se coupant en parties égales, on a :

$$O D = O G = A G$$

ce qui montre que la médiane B E passe en un point O situé aux deux tiers de A D à partir du sommet A.

On démontrerait de même que la médiane C F passe par ce même point.

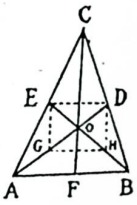


Fig. 192

24. — *Si on joint les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme.* — *Quelles*

sont les conditions à remplir pour que la figure obtenue soit un rectangle, un losange, un carré ?

DÉMONSTRATION : Soient E, F, G, H les milieux des côtés d'un quadrilatère A B C D (fig. 194) ; la figure E F G H est un parallélogramme. Menons les diagonales A C et B D, on voit que dans le triangle D A B, on a H E parallèle à D B et, dans le triangle D C B, G F est aussi parallèle à D B.

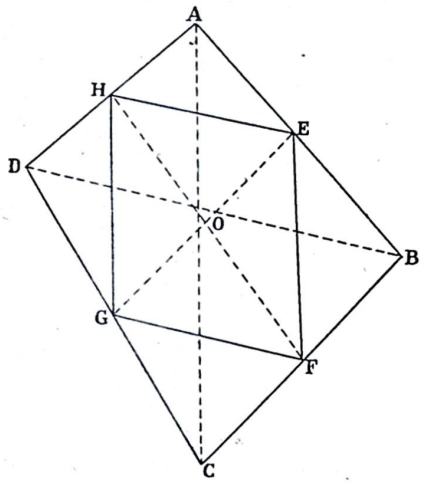


Fig. 194

De même E F et H G sont toutes deux parallèles à A C. Le quadrilatère H E F G ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.

Remarquons que les angles du parallélogramme sont égaux à ceux que forment entre elles les diagonales, et que ses côtés sont les moitiés des diagonales. Par suite :

Pour que E F G H soit un rectangle, il faut que ses angles soient droits ; en d'autres termes, il faut que les diagonales du quadrilatère soient perpendiculaires.

Pour que E F G H soit un losange, il faut que ses côtés soient égaux ; en d'autres termes, il faut que les diagonales du quadrilatère donné soient égales.

Pour que E F G H soit un carré, c'est-à-dire à la fois un rectancle et un losange il faut que les diagonales du quadrilatère soient à la fois perpendiculaires et égales entre elles.

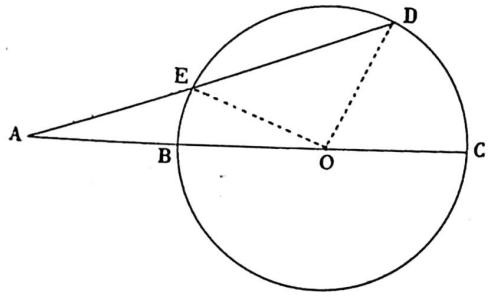


Fig. 195

LE CERCLE

25. — *La ligne la plus courte et la ligne droite la plus longue qu'on puisse mener d'un point à une circonférence passent par le centre.*

DÉMONSTRATION : Soient la circonférence O et le point A (fig. 195) ; la ligne la plus courte qu'on puisse mener de A à la circonférence est A B, et la plus longue est A C.

Menons une autre droite quelconque A E D puis traçons O E, O D.

1° Dans le triangle A E O, on a :

$$A B + B O < A E + E O$$

supprimant B O et O E qui sont des quantités égales, il reste : A B < A E.

2° Dans le triangle A O D on a :

A O + O D > A D ou A O + O C > A D ou enfin A C > A D.

La démonstration est la même quand le point A est à l'intérieur de la circonférence.

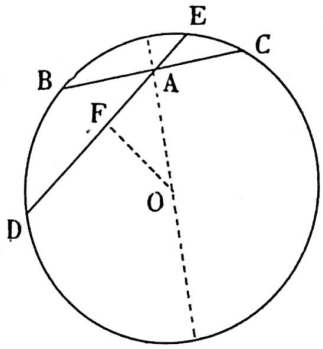


Fig. 196

26. — *La plus petite corde que l'on puisse mener dans un cercle par un point pris à son intérieur, est perpendiculaire au diamètre passant par ce point.*

DÉMONSTRATION : Soit B C la corde menée par le point A perpendiculairement au diamètre passant par A (fig. 196) ; elle est plus petite qu'une autre corde quelconque D E passant aussi par A.

En effet la distance de la corde B C au centre est O A, la distance de D E au centre est O F.

Or O A, oblique sur D E est plus longue que O F perpendiculaire sur la même droite : Or de deux cordes inégalement distantes du centre la plus petite en est la plus éloignée.

Donc B C < D E

27. — *Par un point* A, *extérieur à un cercle, on mène une sécante* A B C *telle que sa partie extérieure* A B *soit égale au rayon, on mène la sécante* A O D *et on joint* O C. *Démontrer que l'angle* C O D *est triple de l'angle* C A D.

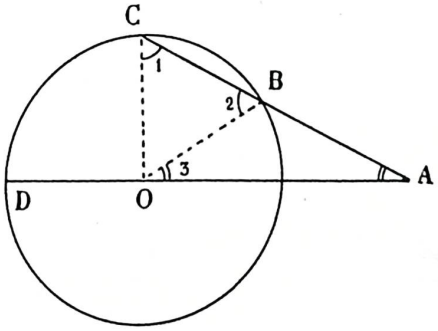


Fig. 197

DÉMONSTRATION : L'angle C O D extérieur au triangle C O A, est égal à la somme des angles 1 et C A D (fig. 197) ; or l'angle 1 est égal à l'angle 2 puisque le triangle B O C est isocèle ; l'angle 2 est égal à la somme des angles 3 et C A D ou à 2 fois l'angle C A D car O B = B A par hypothèse ; donc l'angle C O D est égal à 2 fois $\widehat{CAD} + \widehat{CAD}$, c'est-à-dire à 3 fois $\widehat{CAD}$. Donc $\widehat{COD} = 3\,\widehat{CAD}$.

28. — *Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes égales tracées dans une circonférence donnée.*

DÉMONSTRATION : Traçons deux cordes égales A B et C D dans la circonférence donnée O, puis abaissons du centre sur ces cordes les perpendiculaires O E, O F (fig. 198) ; on sait : 1° que les points E, F sont les milieux des cordes A B, C D ; 2° que les perpendiculaires O E, O F sont égales puisque deux cordes égales sont à égale distance du centre.

Donc les milieux E, F des cordes données sont situés sur une circonférence décrite du point O comme centre avec O E pour rayon.

29. — *Décrire une circonférence de rayon donné passant par un point et tangente à une droite donnée.*

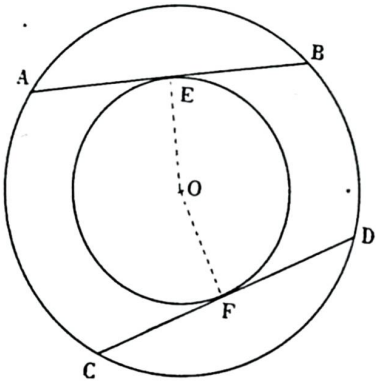


Fig. 198

DÉMONSTRATION : Soit à mener par le point A une circonférence de rayon r tangente à la droite B C (fig. 199).

Cette circonférence doit satisfaire à deux conditions : elle doit passer par le point A ; elle doit être tangente à B C.

Faisons successivement abstraction de chacune de ces conditions, pour ne considérer que l'autre.

1° La circonférence devant passer par le point A, son centre sera situé sur le lieu géométrique des points dont la distance au point A est égale à r, c'est-à-dire sur la circonférence décrite du point A comme centre avec r pour rayon.

2° La même circonférence devant être tangente à la droite B C aura son centre sur le lieu géométrique des points dont la distance à B C est égale à r.

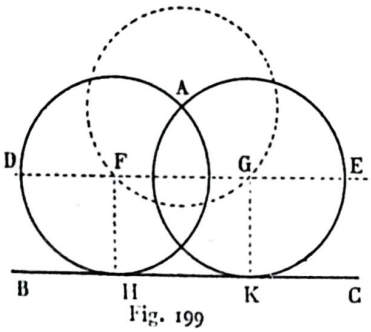


Fig. 199

Ce lieu géométrique se compose de deux parallèles à B C menées de part et d'autre de cette ligne à une distance égale à r. Il est évident que le centre ne peut se trouver que sur celle des deux parallèles qui est située du même côté que le point A par rapport à la droite B C, soit D E. La droite D E coupe la circonférence A en deux points F et G qui sont les centres de deux circonférences répondant à la question. On obtient les points de tangence H et K en abaissant des points F et G des perpendiculaires F H, G K sur B C.

Discussion. — Si l'on désigne par d la distance du point A à la droite B C, le problème n'est possible que si l'on a $d \leqq 2\,r$.

Lorsqu'on a $d < 2\,r$, la droite D E, coupe la circonférence A en deux points et il y a deux solutions ; si $d = 2\,r$, D E est tangente à la circonférence A; il n'y a alors qu'une solution; enfin si $d > 2\,r$, la droite D E n'a aucun point commun avec cette circonférence, et le problème est impossible.

Si l'on avait $d = o$ le point A serait situé sur B C, et la circonférence de centre A toucherait les deux parallèles à B C ; il y aurait alors deux circonférences de rayon r tangentes à B C et situées de part et d'autre de cette ligne.

30. — *Par un point fixe pris dans le plan d'un cercle, on lui mène des sécantes ; trouver le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes interceptées.*

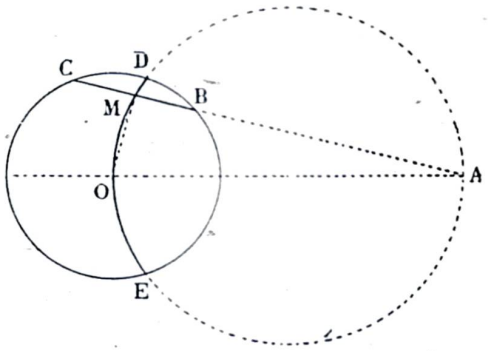


Fig. 200

DÉMONSTRATION : Soient O la circonférence et A le point donnés ; M étant le milieu de la corde B C interceptée par la circonférence sur une sécante A C, il s'agit de trouver le lieu de ce point quand la sécante tourne autour du point A (fig. 200).

Joignons O M ; cette droite est perpendiculaire sur B C ; donc du point M on voit la droite fixe O A sous un angle droit ; le point M est donc sur la circonférence de diamètre O A. La partie de cette circonférence qui répond à la question est l'arc D E qui est le lieu demandé.

Remarquons que D et E sont les points de contact des tangentes à la circonférence O, menées du point A.

ANGLES

31. — *Lorsque deux circonférences sont tangentes extérieurement, et qu'on mène deux sécantes par le point de contact, les cordes qui joignent les extrémités de ces sécantes sont parallèles.*

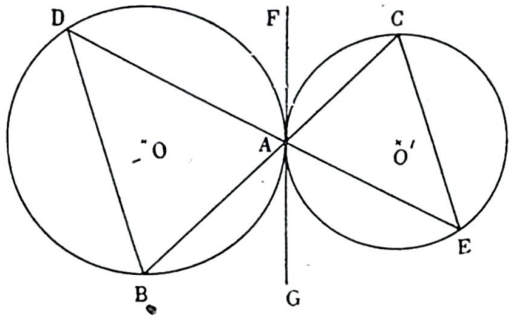


Fig. 201

DÉMONSTRATION : Soient deux circonférences O et O' tangentes extérieurement au point A (fig. 201).

Je mène par A deux sécantes quelconques B C et D E et je dis que les cordes B D et C E qui joignent leurs extrémités, sont parallèles.

Menons la tangente F G commune aux deux circonférences. On a $\widehat{DBA} = \widehat{DAF}$ comme ayant même mesure que $\frac{\widehat{AD}}{2}$.

Pour la même raison, on a :

$$\widehat{ACE} = \widehat{GAE}$$

Or $$\widehat{DAF} = \widehat{GAE}$$

comme opposés par le sommet ; donc $\widehat{DBA} = \widehat{ACE}$. Mais ces angles occupent la position d'alternes-internes par rapport aux droites B D et C E coupées par la sécante B C. Donc B D et C E sont deux droites parallèles.

32. — *Trouver un point d'où l'on voit deux droites données* A B *et* C D *sous des angles donnés* M *et* N.

Démonstration : Le lieu des points d'où l'on voit la droite A B sous l'angle M est l'arc de circonférence capable de M décrit sur A B comme corde (fig. 202) ; le lieu des points d'où l'on voit C D sous l'angle N est l'arc de circonférence capable de l'angle N décrit sur C D comme corde ; le point demandé est donc à la rencontre E de ces deux arcs O et O'.

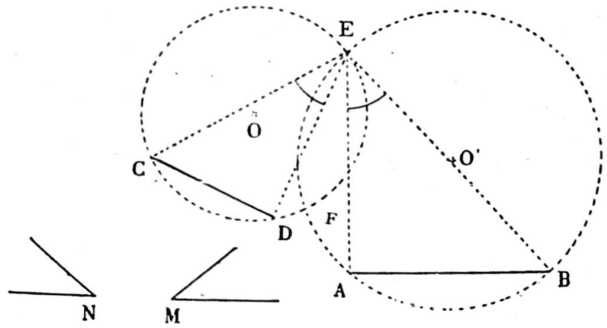


Fig. 202

Ces deux arcs se coupent généralement en deux points E et F qui répondent à la question ; il y a donc en général *deux* solutions. Il y a une solution seulement si les circonférences O et O' sont tangentes, et pas de solution si les circonférences n'ont aucun point commun.

33. — *Une droite de longueur constante se meut en appuyant ses deux extrémités sur les côtés indéfinis d'un angle droit : trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de cette droite.*

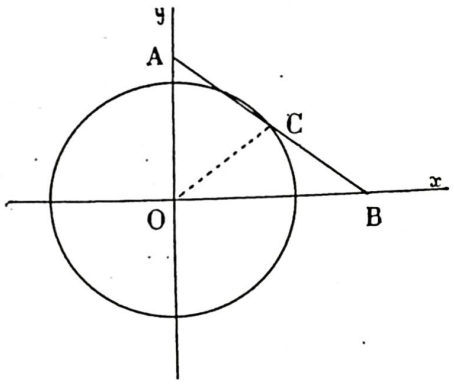


Fig. 203

Démonstration : Soit A B la droite de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur les côtés de l'angle droit x O y ; on cherche le lieu du point C milieu de cette droite (fig. 203).

La droite O C est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle rectangle A O B, elle est égale à $\frac{AB}{2}$; elle est donc de longueur constante ; par suite le point C décrit la circonférence de centre O et de rayon $\frac{AB}{2}$. Cette circonférence est le lieu géométrique demandé.

CONSTRUCTIONS

34. — *Construire un triangle connaissant les milieux des trois côtés.*

Démonstration : Supposons que le triangle A B C ait pour milieux de ses côtés les points D, E et F donnés ; en joignant ces points deux à deux on obtient le triangle D E F dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle A B C (fig. 204). D'où la solution.

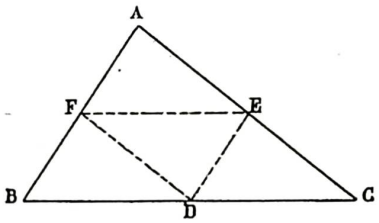


Fig. 204

On joint les trois points donnés deux à deux et par chacun d'eux on mène une parallèle au côté opposé : les trois parallèles déterminent, par leurs intersections, le triangle demandé.

35. — *Construire un triangle connaissant deux côtés et une médiane.*

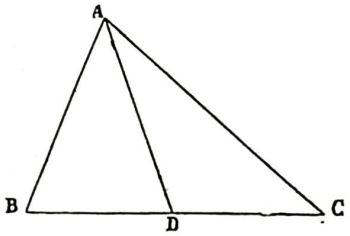


Fig. 205

Démonstration : 1° *La médiane tombe sur l'un des côtés donnés.* — Soit le triangle A B C dans lequel on connaît les côtés A B et B C et la médiane A D qui tombe sur B C (fig. 205).

Dans le triangle A B D on connaît les trois côtés ; puisque $BD = \frac{CB}{3}$ on sait le construire.

Cette construction faite, on portera sur B D prolongée la longueur B C donnée et l'on joindra A C. On aura le triangle demandé.

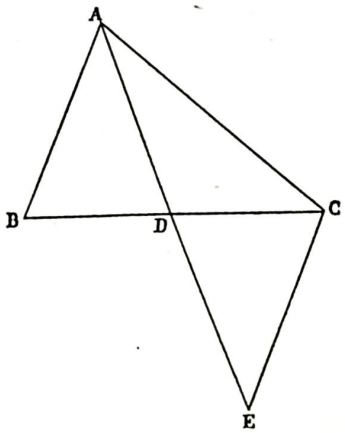


Fig. 206

2° *La médiane tombe sur le troisième côté.* — Supposons que le triangle A B C réponde à la question (fig. 206). Dans ce triangle on connaît A B, A C et la médiane A D. On prolonge A D d'une longueur D E égale à A D et

on joint C E. L'égalité des triangles A B D, D E C qui ont les angles en D égaux, B D = D C par hypothèse A D = D E par construction sont égaux (2e cas) d'où A B = C E. Dès lors le triangle A C E peut être construit puisqu'on connaît les trois côtés. Cette construction faite, on joindra C au milieu D de A E, on prolongera C D d'une longueur égale B D et on tirera A B. On aura le triangle demandé.

36. *Construire un triangle connaissant un côté, un angle adjacent à ce côté et la somme ou la différence des deux côtés.*

Démonstration : Soit A B C un triangle répondant à la question (fig. 207). Dans ce triangle on connaît B C, l'angle B et la somme des côtés A B et A C. Prolongeons B A d'une longueur A D = A C, B D est la somme donnée. En tirant D C on a le triangle D A C qui est isocèle.

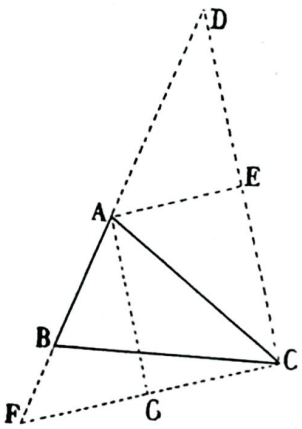


Fig. 207

Dans le triangle D B C on connaît deux côtés et l'angle qu'ils comprennent; on sait le construire. Ce triangle obtenu, on élèvera la perpendiculaire E A au milieu de D C ce qui donnera le sommet A, il ne restera qu'à tracer la droite A C.

2° Dans le triangle A B C, on connaît B C, l'angle B et la différence B F des deux côtés ; si on joint C F on forme le triangle C B F dans lequel on connaît les côtés B C et B F et l'angle compris C B F qui est le supplément de l'angle donné : on peut donc le construire. En élevant la perpendiculaire sur F C en son milieu, on aura le troisième sommet A du triangle A B C demandé.

37. — *Construire un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit et la hauteur abaissée sur l'hypoténuse.*

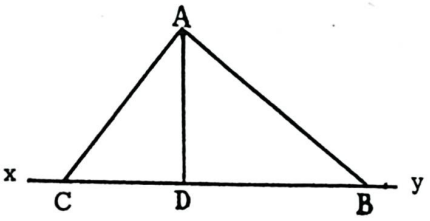


Fig. 208

Démonstration : Sur une droite indéfinie $x\,y$ en un point quelconque D, élever une perpendiculaire D A égale à la hauteur donnée (fig. 208) ; du point A, décrire avec un rayon égal au côté donné, un arc de cercle qui coupe xy en un point B ; élever ensuite une perpendiculaire A C sur A B ; A B C est le triangle demandé.

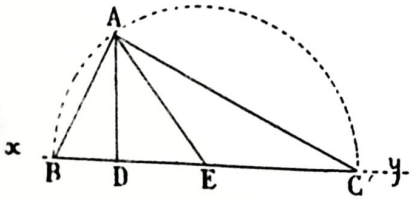


Fig. 209

38. — *Construire un triangle connaissant la médiane et la hauteur relatives à l'hypoténuse.*

Démonstration : Soit A B C le triangle rectangle dans lequel on connaît la médiane A E et la hauteur A D (fig. 209).

Le triangle A D E est déterminé par son hypoténuse A E et son côté A D, on peut donc le construire et comme la médiane est la moitié de l'hypoténuse on aura aisément les points B et C. D'où : on prendra un

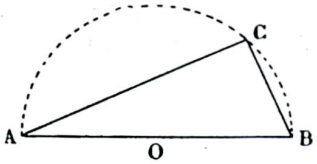


Fig. 210

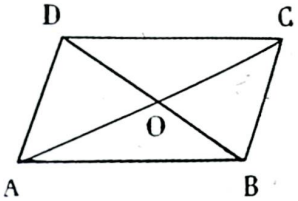


Fig. 211

point quelconque D sur une droite indéfinie $x\,y$ on élèvera en ce point une perpendiculaire D A égale à la hauteur donnée, on portera A E égale à la médiane ; puis, de E comme centre avec E A pour rayon on décrira une demi-circonférence qui donnera les deux sommets B et C. Il ne restera qu'à joindre A B, A C.

39. — *Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et un angle aigu.*

Démonstration : 1re *solution.* — Construire un angle B A C égal à l'angle aigu donné ; faire A B égal à l'hypoténuse et abaisser du point B une perpendiculaire B C sur A C (fig. 210).

2° *solution.* — Sur l'hypoténuse A B comme diamètre, décrire une demi-circonférence (fig. 210) ; tracer par le point A une droite A C, faisant avec A B un angle B A C égal à l'angle donné et joindre les points B et C.

40. — *Construire un parallélogramme connaissant les deux diagonales et leur angle.*

Démonstration : Faire un angle A O D égal à l'angle donné (fig. 211) ; prolonger les côtés de cet angle ; prendre les longueurs O A et O C égales à la moitié de la première diagonale et les longueurs O D, O B égales à la moitié de la deuxième diagonale ; joindre ensuite les quatre points A, B, C, D. On a ainsi un quadrilatère dont les diagonales se coupent en parties égales, c'est-à-dire un parallélogramme.

41. — *Mener par un point pris dans le plan d'un cercle une sécante qui détermine dans le cercle un segment capable d'un angle donné.*

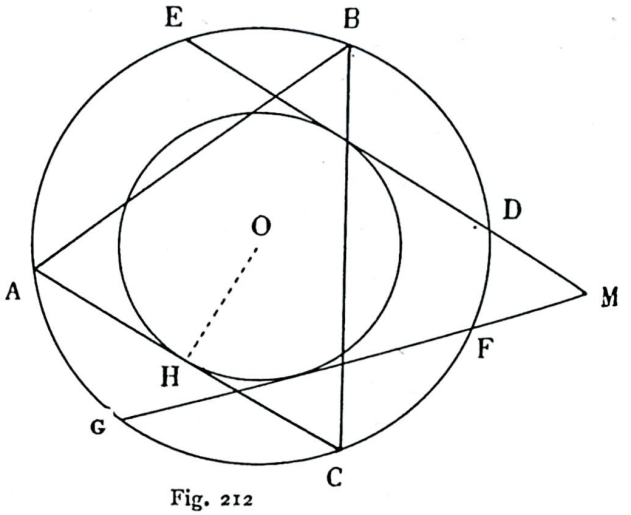


Fig. 212

Démonstration : J'inscris dans le cercle donné O un angle A B C égal à l'angle donné, et je trace la corde A C de l'arc compris entre ses côtés (fig. 212).

Je décris de O comme centre une circonférence ayant pour rayon la distance O H du point O à la corde A C. Les tangentes menées du point M donné à cette circonférence auxiliaire répondent à la question. En effet,

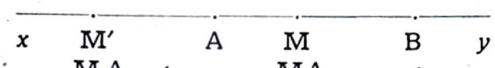
les cordes A C, F G, D E étant à égale distance du centre sont égales. Par suite les segments de cercle A B C, F B G, E A D sont égaux.

LIGNES PROPORTIONNELLES

42. — *Deux points* A *et* B *d'une droite indéfinie x y sont distants de* 100 *mètres ; trouver sur cette droite, un point* M, *dont le rapport des distances aux deux points* A *et* B *soit égal au rapport des nombres* 4 *et* 7.

DÉMONSTRATION : 1° Le point M est situé entre A et B.

On a :



$$\frac{MA}{MB} = \frac{4}{7} \text{ d'où } \frac{MA}{MA + MB} = \frac{4}{4+7}$$

ou

$$\frac{MA}{AB} = \frac{4}{11}$$

Par suite

$$MA = AB \times \frac{11}{4} = 100 \times \frac{4}{11} = 36{,}36 \text{ m.}$$

2° Le point M est à gauche de A.

On a :

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{4}{7} \text{ d'où } \frac{M'A}{M'B - M'A} = \frac{4}{7-4} \text{ ou } \frac{M'A}{AB} = \frac{4}{3}$$

Par suite

$$M'A = AB \times \frac{4}{3} = 100 \times \frac{4}{3} = 133{,}33 \text{ m.}$$

43. — *On donne deux droites x x' et y y', on les coupe par trois parallèles* A B, C D *et* E F, *de manière que* A C = 8 m, C E = 10 m, B D = 9 m. *Que vaut le quatrième segment* D F ?

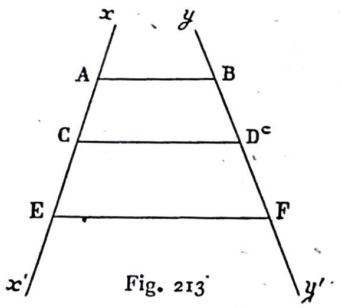


Fig. 213

DÉMONSTRATION : Les segments déterminés par les trois parallèles sur les deux droites *x x'* et *y y'* sont proportionnels (fig. 213) on a donc

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

d'où, en remplaçant les segments par leurs valeurs, on a :

$$\frac{8}{10} = \frac{9}{DF} \text{ d'où } DF = \frac{9 \times 10}{8} = 11{,}3 \text{ m.}$$

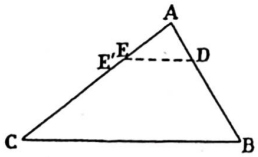


Fig. 214

44. — *Dans un triangle* A B C, *les deux côtés* A B *et* A C *mesurent respectivement* 18m et 24 m ; *on prend sur* A B, *à partir du point* A, *une longueur* A D = 5,40 m, *et sur* A C *la longueur* A E = 7,20 m ; *la droite* D E *est-elle parallèle à* B C ? *Calculer sa valeur quand* B C = 27 m.

DÉMONSTRATION : Si par le point D on mène la parallèle D E' à B C (fig. 214), on a

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE'}{AC}$$

ou en remplaçant les quantités connues par leurs valeurs

$$AE' = \frac{24 \times 5{,}4}{18} = 7{,}20 \text{ m.}$$

Le point E' est donc confondu avec E et D E est parallèle à B C.

Les deux triangles B A et D A E sont donc semblables et on a :

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB} \text{ ou } \frac{DE}{27} = \frac{5{,}4}{18} \text{ ; d'où } DE = \frac{27 \times 5{,}4}{18} = 8{,}10 \text{ m.}$$

45. — *Dans un triangle* A B C, *on donne* a = 4 m, b = 6 m, c = 8 m ; *calculer les segments* D A, D C *et* D' A, D' C *déterminés sur* A C *par la bissectrice de l'angle* B *et celle de l'angle extérieur* C B E.

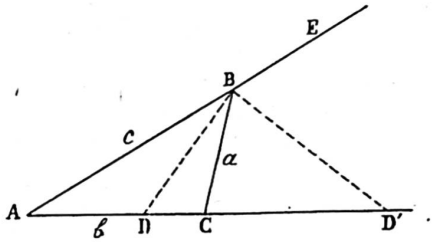


Fig. 215

DÉMONSTRATION : On sait que la bissectrice de l'angle intérieur B divise le côté A C en deux segment additifs D A et D C (fig. 215) ; et que la bissectrice de l'angle extérieur C B E divise le côté A C en deux segments soustractifs D' A et D' C.

Calcul des segments D A, D C. — On a

$$\frac{DA}{DC} = \frac{c}{a}$$

En remarquant que D A + D C = b, on est conduit à remplacer dans chaque rapport le numérateur et le dénominateur par leur *somme.*

On a : 1°

$$\frac{DA + DC}{DC} = \frac{a+c}{a} \text{ ou } \frac{b}{DC} = \frac{a+c}{a}$$

et par suite $DC = \dfrac{ab}{a+c}$.

Application : $DC = \dfrac{4 \times 6}{4+8} = \dfrac{24}{12} = 2$ m.

2° $$\frac{DA}{DA + DC} = \frac{c}{c+a} \text{ ou } \frac{DA}{b} = \frac{c}{c+a}$$

et par suite $DA = \dfrac{bc}{a+c}$.

Application : $DA = \dfrac{6 \times 8}{4+8} = \dfrac{48}{12} = 4$ m.

Calcul des segments D' A, D' C. — On a :

$$\frac{D'A}{D'C} = \frac{c}{a}$$

En remarquant que D' A — D C = b, on est conduit à remplacer successivement dans chaque rapport le numérateur et le dénominateur par leur *différence.* On a :

1° $$\frac{D'A - D'C}{D'C} = \frac{c-a}{a} \text{ ou } \frac{b}{D'C} = \frac{c-a}{a}$$

et par suite $D'C = \dfrac{ab}{c-a}$.

Application : $D'C = \frac{4 \times 6}{8-4} = \frac{24}{4} = 6$ m.

2° $\frac{D'A}{D'A - D'C} = \frac{c}{c-a}$ ou $\frac{D'A}{b} = \frac{c}{c-a}$.

et par suite $D'A = \frac{cb}{c-a}$

Application : $D'A = \frac{8 \times 6}{8-4} = \frac{48}{4} = 12$ m.

POLYGONES SEMBLABLES

46. — *On donne les deux bases* B *et* b *d'un trapèze et sa hauteur* h ; *on demande de calculer les hauteurs des*

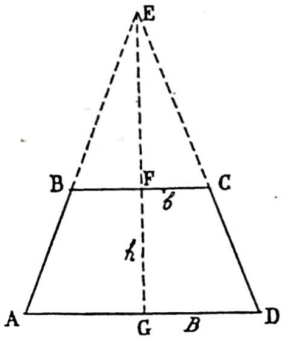


Fig. 216

deux triangles obtenus en prolongeant les côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur point de rencontre.

Application numérique : B = 40 m, b = 24 m, h = 20 m.

Démonstration : Soit le trapèze A B C D dont les côtés non parallèles prolongés se rencontrent en E (fig. 216).

Les deux triangles A E D et B E C sont semblables et par suite leurs bases sont proportionnelles à leurs hauteurs, ce qui donne :

$$\frac{AD}{BC} = \frac{EG}{EF}$$

d'où l'on tire

$$\frac{AD - BC}{BC} = \frac{EG - EF}{EF} \text{ ou } \frac{B-b}{b} = \frac{h}{EF}$$

et par suite $EF = \frac{bh}{B-b}$.

On a immédiatement $EG = EF + h =$

$$\frac{bh}{B-b} + h = \frac{bh + Bh - bh}{B-b} = \frac{Bh}{B-b}$$

Application : $EF = \frac{24 \times 20}{40-24} = \frac{24 \times 20}{16} = 30$ m.

$EG = \frac{40 \times 20}{40-24} = \frac{40 \times 20}{16} = 50$ m.

Vérification : 50 m — 30 m = 20 m.

47. — *Construire les deux points qui divisent un segment de droite* A B *dans le rapport* $\frac{p}{q}$.

p et q étant des longueurs données.

Démonstration : Soit A B un segment de la droite indéfinie $x\,y$ (fig. 217). Par les points A et B je mène deux droites parallèles de direction quelconque ; je prends sur la première la longueur A E = p, et sur la seconde de part et d'autre de B les longueurs B F = BG = q, puis je tire les droites EF, EG qui rencontrent $x\,y$ en C et D.

En effet, les triangles C A E, C B G qui ont leurs angles égaux sont semblables

d'où $\frac{CA}{CB} = \frac{AE}{BG} = \frac{p}{q}$

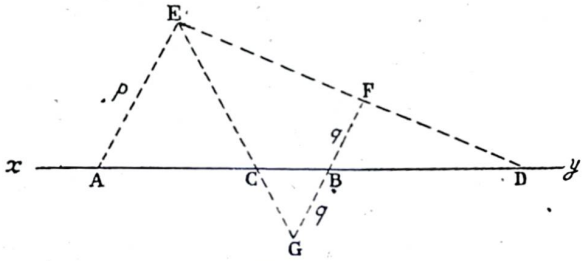


Fig. 217

De même les triangles D A E et D B F donnent :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BF} = \frac{p}{q}$$

On a donc bien

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{p}{q}$$

48. — *Etant donné deux circonférences* O *et* O′ *de rayons différents* R *et* R′ ; 1° *si l'on mène deux rayons parallèles et de même sens, la droite qui joint les extrémités des deux rayons rencontre la ligne des centres en un point fixe* ; 2° *si l'on mène deux rayons parallèles et de sens contraire, la droite qui joint les extrémités des deux rayons rencontre aussi la ligne des centres en un point fixe.*

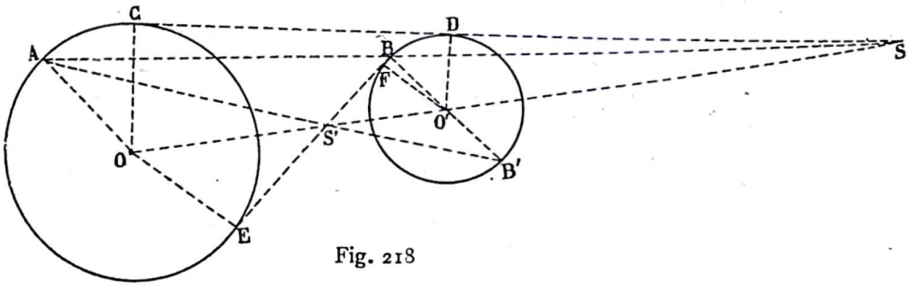


Fig. 218

Démonstration : 1° Soient O A et O′ B deux rayons parallèles, et de même sens, et soit S le point où la droite A B rencontre la ligne des centre O O′ (fig. 218).

Les deux triangles S O A et S O′ B sont semblables, d'où

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{AO}{O'B} = \frac{R}{R'}$$

Le rapport est constant, comme il n'y a qu'un seul point extérieur à O O′ et divisant O O′ dans un rapport donné, il en résulte que le point S est fixe.

Si, en particulier, on mène la tangente commune extérieure C D, elle joint les extrémités des rayons parallèles O C, O′ D ; elle passe donc au point S.

2° Soient O A et O′ B′ deux rayons parallèles et de sens contraire, et soit S′ le point où la droite A B′ rencontre la ligne des centres O O′.

Les deux triangles S′ O A et S′ O′ B′ sont semblables, d'où :

$$\frac{S'O}{S'O'} = \frac{OA}{O'B'} = \frac{R}{R'}$$

Comme il n'existe qu'un seul point entre O et O′ divisant O O′ dans un rapport donné, il en résulte que le point S′ est fixe.

Si, en particulier, on mène la tangente commune intérieure E F elle joint les extrémités des rayons parallèles O E, O′ F ; elle passe donc au point S′.

Remarque. — De ce qui précède on tire un procédé pour construire les tangentes communes à deux circonférences.

Soit à mener une tangente commune extérieure à deux circonférences ; on mène deux rayons parallèles et de même sens O A, O′ B puis on tire A B qui détermine le centre de similitude externe S des deux circonférences. Du point S on mène une tangente à l'une des circonférences, elle le sera aussi à l'autre.

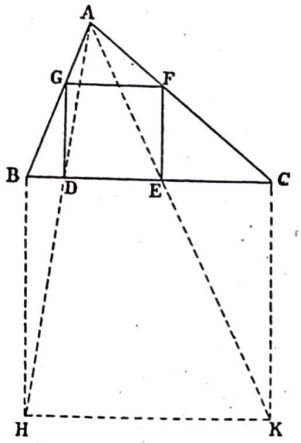


Fig. 219

49. — *Inscrire un carré dans un triangle.*

DÉMONSTRATION : Je suppose le problème résolu et soit D E F G un carré inscrit dans le triangle A B C (fig. 219).

Menons les lignes A D, A E jusqu'à la rencontre des perpendiculaires B H, C K élevées sur B C et traçons H K, nous formons le carré B C K H.

En effet, les triangles semblables A B H et A G D puis A C K et A F E donnent

$$\frac{BH}{GD} = \frac{BA}{GA} = \frac{HA}{DA} \text{ (1) et } \frac{CK}{FE} = \frac{CA}{FA}$$

mais $\frac{BA}{GA} = \frac{CA}{FA}$ puisque G F est parallèle à B C ;

donc $$\frac{BH}{GD} = \frac{CK}{FE}$$

et comme G D = F E on a B H = C K.

Les triangles A H K et A D E donnent

$$\frac{HK}{DE} = \frac{HA}{DA}$$

Comparant à la relation (1) on tire $\frac{HK}{DE} = \frac{BH}{GD}$;

et comme D E = G D, on a B H = H K.

Le quadrilatère B C H K a ses côtés égaux et ses angles droits ; c'est un carré.

D'où la construction :

On trace un carré sur le côté où doit s'appuyer le carré inscrit, on joint les sommets de ce carré au sommet opposé du triangle, ces droites coupent le côté du triangle, ces droites coupent le côté du triangle en deux points qui sont deux des sommets du carré qu'on achèvera facilement.

50. — *Connaissant les projections des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse* $b' = 7{,}2$ m ; $c' = 12{,}8$ m, *calculer l'hypoténuse a, les côtés b et c de l'angle droit, la hauteur h abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.*

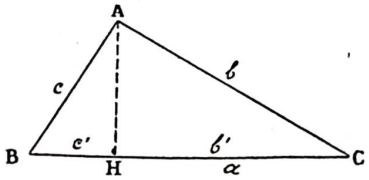


Fig. 220

DÉMONSTRATION : L'hypoténuse est la somme des projections des deux côtés de l'angle droit (fig. 220).

$$a = b' + c' = 7{,}2 \text{ m} + 12{,}8 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

Les relations $b^2 = a\,b'$ et $c^2 = a\,c'$ donnent

$$b = \sqrt{a\,b'} = \sqrt{20 \times 7{,}2} = 12 \text{ m.}$$
$$c = \sqrt{a\,c'} = \sqrt{20 \times 12{,}8} = 16 \text{ m.}$$

La relation $h^2 = b'\,c'$ donne

$$h = \sqrt{b'\,c'} = \sqrt{7{,}2 \times 12{,}8} = 9{,}6 \text{ m}$$

51. — *Dans un cercle de rayon* 6 m, *on mène un diamètre* A B *que l'on partage en* 5 *parties égales et par les points de division on mène des cordes perpendiculaires à* A B ; *calculer les longueurs de ces cordes.*

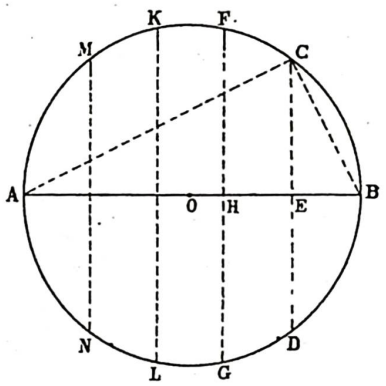


Fig. 221

DÉMONSTRATION : Joignons C A et C B, on forme le triangle rectangle A C B car l'angle C, inscrit dans une demi-circonférence est droit (fig. 221). La hauteur C E qui vaut $\frac{CD}{2}$ est donc moyenne proportionnelle entre les deux segments A E et E B du diamètre.

On a ainsi :

$$\overline{CE}^2 = AE \times EB, \text{ ou } \frac{\overline{CD}^2}{4} = AE + EB.$$

$$\text{Mais } AE = \frac{4}{5}AB = \frac{4 \times 12}{5} = 9{,}6 \text{ m}$$

$$\text{donc} \quad EB = \frac{1}{5}AB = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{CD}^2}{4} = 9{,}6 \times 2{,}4 \text{ et } \overline{CD}^2 = 4 \times 9{,}6 \times 2{,}4$$

$$CD = 2\sqrt{9{,}6 \times 2{,}4} = 9{,}6 \text{ m}$$

On a de même :

$$\frac{\overline{FG}^2}{4} = AH \times HB$$

$$\text{Mais } AH = \frac{3 \times 12}{15} = 7{,}2 \text{ et } HB = \frac{2 \times 12}{5} = 4{,}8$$

$$\text{donc} \quad \frac{\overline{FG}^2}{4} = 7{,}2 \times 4{,}8 \text{ et } \overline{FG}^2 = 4 \times 7{,}2 \times 4{,}8$$

$$FG = \sqrt{7{,}2 \times 4{,}8} = 11{,}76 \text{ m.}$$

Les cordes K L et M N sont respectivement égales aux cordes F G et C D puisqu'elles sont à la même distance du centre de la circonférence.

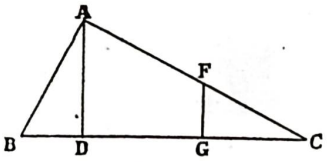


Fig. 222

52. — *Si du milieu d'un des côtés d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, la différence des carrés des segments déterminés sur l'hypoténuse est égale au carré de l'autre côté du triangle.*

DÉMONSTRATION : Soit A B C un triangle rectangle en A (fig. 222).

J'abaisse, du point A et du point F, milieu de A C, des perpendiculaires A D et F G sur l'hypoténuse.

On a $\overline{BG}^2 - \overline{GC}^2 = (BG + GC)(BG - GC)$.

Mais

$BG + GC = BC$ et $BG - GC = BG - DG = BD$

Donc $\overline{BG}^2 - \overline{GC}^2 = BC \times BD = \overline{AB}^2$

53. — *Dans un triangle rectangle, l'inverse du carré de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est égal à la somme des inverses des carrés des deux côtés de l'angle droit.*

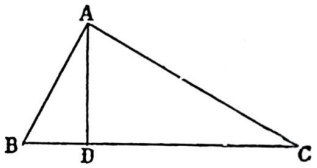


Fig. 223

DÉMONSTRATION : Soit A B C un triangle rectangle en A et soit A D la hauteur relative à l'hypoténuse (fig. 223).

Il faut prouver que $\dfrac{1}{\overline{AD}^2} = \dfrac{1}{\overline{AB}^2} + \dfrac{1}{\overline{AC}^2}$

Dans le triangle rectangle on a

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC$$

Or $\overline{AB}^2 = BC \times BD$ et $\overline{AC}^2 = BC \times DC$

d'où $BD = \dfrac{\overline{AB}^2}{BC}$ et $DC = \dfrac{\overline{AC}^2}{BC}$

par suite $BD \times DC = \dfrac{\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \dfrac{\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$

donc, $\overline{AD}^2 = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$ et par suite

$$\frac{1}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2} \text{ ou}$$

$$\frac{1}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2} = \frac{1}{\overline{AC}^2} + \frac{1}{\overline{AB}^2}$$

54. — *Par les extrémités d'un diamètre A B d'une circonférence on mène deux tangentes, qui sont parallèles, puis une troisième tangente quelconque C D dont le point de contact est E ; démontrer que le rayon est moyen proportionnel entre les deux segments C E et D E.*

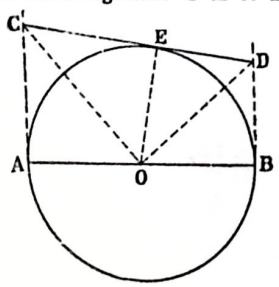


Fig. 224

DÉMONSTRATION : Les angles A C D et B D C du quadrilatère A B D C (fig. 224) sont supplémentaires. Or O C et O D sont les bissectrices de ces angles, donc $\widehat{OCD} + \widehat{ODC} = 1$ droit et $\widehat{COD}$ vaut aussi 1 droit. Le rayon O E perpendiculaire sur l'hypoténuse du triangle rectangle D O C est moyen proportionnel entre C E et D E. Donc $\overline{OE}^2 = CE \times ED$.

Mais C E = A C et D E = B D comme tangentes issues du même point.

Donc, enfin

$$\overline{OE}^2 = AC \times BD$$

55. — *Les côtés d'un triangle valent : $a = 14$ m, $b = 15$ m, $c = 13$ m. Calculer la hauteur h correspondant au côté a.*

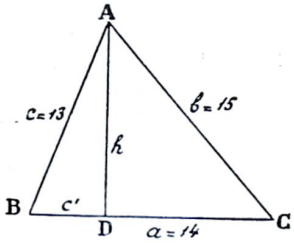


Fig. 225

DÉMONSTRATION : On reconnaît immédiatement que les trois angles du triangle sont aigus.

Dans le triangle rectangle A B D on a :

$$h^2 = c^2 - c'^2 = 169 - c'^2 \quad (I)$$

Le problème revient à calculer la projection c' de A B sur B C. Or dans le triangle A B C on a :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times BD$$

ou $225 = 169 + 196 - 28\,c'$.

d'où l'on tire

$28\,c' = 365 - 225 = 140$ et $c' = \dfrac{140}{28} = 5$ mètres.

En portant cette valeur de c' dans l'égalité (1) on obtient :

$$h^2 = 169 - 25 = 144$$

d'où $h = \sqrt{144} = 12$ mètres.

Remarque. — Etablissons des formules *générales* permettant de calculer les hauteurs d'un triangle connaissant les trois côtés a, b, c.

Soit h la hauteur à calculer et soit c' la projection de A B sur B C.

On a : $h^2 = c^2 - c'^2 \quad (1)$

Calculons c'. Dans le triangle A B C, en supposant l'angle B aigu, on a

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a \times c'$$

d'où l'on tire $2\,a\,c' = a^2 + c^2 - b^2$

et $c' = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

Portant cette valeur de c' dans l'égalité (1) on obtient :

$$h^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

Cette formule peut servir à calculer la hauteur ; les transformations algébriques qui vont suivre ont pour but de la ramener à une autre formule plus commode pour le calcul. On écrit :

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

Le numérateur est une différence de deux carrés ; on peut donc écrire :

$$h^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

remplaçant $2\,a\,c + a^2 + c^2$ par $(a + c)^2$ et $2\,a\,c - a^2 - c^2$ par $-(a - c)^2$ il vient :

$$h^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2)]\,[(b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

Appliquant aux deux différences de carré du numérateur la même transformation que précédemment on a :

$$h^2 = \frac{(a + c + b)\,(a + c - b)\,(b - a + c)\,(b + a - c)}{4a^2}$$

Si l'on pose $a + b + c = 2\,p$, p désignant le demi-périmètre du triangle on a successivement

$$a + c - b = 2\,p - 2\,b = 2\,(p - b)$$
$$b + a - c = 2\,p - 2\,c = 2\,(p - c)$$
$$b + c - a = 2\,p - 2\,a = 2\,(p - a)$$

l'expression précédente devient :

$$h^2 = \frac{16\,p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{4a^2}$$

$$= \frac{4\,p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{a^2}$$

$$h^2 = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

En désignant par h_a, h_b, h_c, les hauteurs relatives aux côtés a, b, c, on a donc

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

56. — *Si dans un triangle* A B C *on mène la médiane* A M *et la hauteur* A H, *démontrer que le carré du plus grand des deux côtés* A B *et* A C *est égal à* $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\,BM \times MH$ *et le carré du plus petit à* $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\,BM \times MH$. *En déduire l'expression de la somme* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ (somme des carrés de deux côtés d'un triangle). *Enoncer le théorème obtenu.*

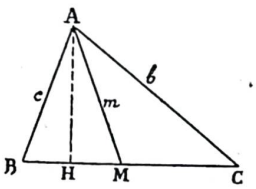


Fig. 226

DÉMONSTRATION. — Soient le triangle A B C et A M la médiane issue du sommet A (fig. 226).

Le triangle A B C étant quelconque, la médiane A M n'est pas perpendiculaire à B C et des deux angles supplémentaires A M B, A M C, l'un est aigu et l'autre obtus.

Je suppose que A M C soit obtus alors $\widehat{AMB}$ est aigu. Soit A H la perpendiculaire menée de A à B C, on a donc le triangle A M C :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 + 2\,BM \times MH$$

Mais M C = M B puisque M est le milieu de B C, on a :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\,MB \times MH \qquad (1)$$

De même, dans le triangle A M B, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\,BM \times MH \qquad (2)$$

ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2$$

La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le carré de la médiane correspondant au troisième côté, plus deux fois le carré de la moitié de ce troisième côté.

La relation précédente peut s'écrire :

$$b^2 + c^2 = 2\,m^2 + \frac{a^2}{2}$$

car si $BM = \frac{a}{2}$, $\overline{BM}^2 = \frac{a^2}{4}$ et $2\,\overline{BM}^2 = \frac{a}{2}$

LIGNES PROPORTIONNELLES DANS LE CERCLE

57. — *Si deux cercles* O *et* O′ *se coupent en* A *et* B, *les tangentes aux deux cercles, issues d'un même point de la corde commune* A B *prolongée, sont égales. Examiner le cas où les circonférences deviennent tangentes.*

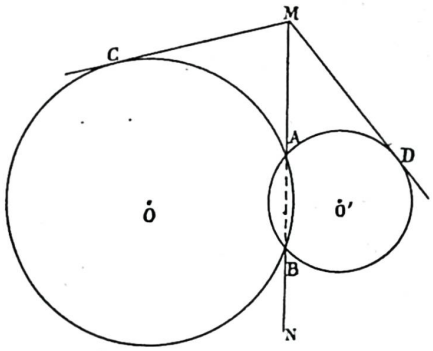


Fig. 227

DÉMONSTRATION : Soient M C et M D deux tangentes issues d'un point M quelconque situé sur le prolongement de B A (fig. 227).

Dans la circonférence O′, on a :

$$\overline{MC}^2 = MA \times MB.$$

Dans la circonférence O′ on a :

$$\overline{MD}^2 = MA \times MB$$

d'où $\overline{MC}^2 = \overline{MD}^2$

ou M C = M D.

Si les circonférences O et O′ deviennent tangentes, la droite M N devient la tangente commune ; les tangentes menées de tous les points de cette droite sont égales.

On peut d'ailleurs remarquer que l'on a des tangentes à une circonférence issues d'un même point ; on sait qu'elles sont égales.

CONSTRUCTIONS

58. — *Construire deux droites connaissant leur somme et leur moyenne proportionnelle.*

DÉMONSTRATION : Soient p et q deux longueurs données. On veut déterminer deux autres longueurs x et y telles que l'on ait :

$$x + y = p$$
$$x\,y = q^2$$

Construction. — 1° sur A B = p comme diamètre, décrire une circonférence O (fig. 228) ;

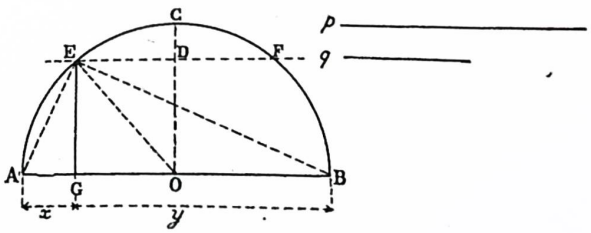


Fig. 228

2° sur O C perpendiculaire à A B prendre O D = q ;

3° par le point D mener E F parallèle à A B ;

4° du point E mener la perpendiculaire E G à A B

Les segments A G et G B déterminés sur A B sont les longueurs cherchées x et y.

En effet : $AG + GB = AB = p$.

Dans le triangle A E B on a

$$AG \times GB = \overline{EG}^2 = \overline{OD}^2 = q^2$$

Pour que le problème soit possible, il faut que O D soit moindre que le rayon, c'est-à-dire que l'on ait

$$OD \leqq OA \text{ ou } q \leqq \frac{p}{2}$$

Si $q = \frac{p}{2}$ le point D est en C et les deux longueurs cherchées sont égales et valent chacune la demi-somme $\frac{p}{2}$

59. — *Construire deux droites connaissant leur différence et leur moyenne proportionnelle.*

DÉMONSTRATION : Soient p et q deux longueurs données (fig. 229). On veut déterminer deux autres longueurs x et y telles que l'on ait :

$$x - y = p$$
$$x\,y = q^2$$

Construction. — 1° sur A B = p comme diamètre, décrire une circonférence O ;

2° par le point A mener A C = q perpendiculairement à A B ;

3° Par C mener la sécante C O qui rencontre la circonférence en D et en E.

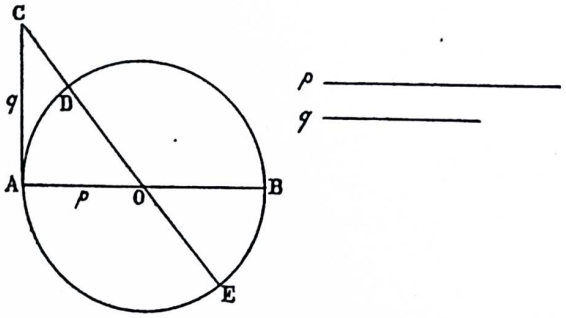


Fig. 229

Les segments C E et C D déterminés sont les longueurs cherchées x et y.

En effet : $CE - CD = DE = AB = p$ et $CE \times CD = CA^2 = q^2$.

POLYGONES RÉGULIERS

60. — *Calculer les côtés et les apothèmes des polygones réguliers de 8 côtés, de 12 côtés inscrits dans un cercle de rayon égal à 3 m.*

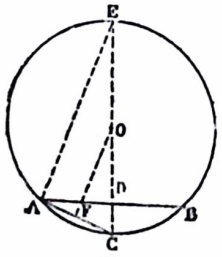


Fig. 230

DÉMONSTRATION : Soit A B le côté du carré inscrit dans le cercle O (fig. 230), abaissons O C perpendiculaire sur A B, A C est le côté de l'octogone régulier. Joignons A E. Dans le triangle rectangle A E C on a :

$$\overline{AC}^2 = CE \times CD$$

or $CE = 2R$ et $CD = OC - OD$.

Mais $OD = R\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{donc } CD = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{d'où } \overline{AC}^2 = 2R \times \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2}) = R^2(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{et } AC = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Application. $AC = 3\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2^m,296$

L'apothème O F est la moitié de A E ; or

$$\overline{AE}^2 = CE \times DE = 2R \times \frac{R}{2}(2 + \sqrt{2}) = R^2(2 + \sqrt{2})$$

$$\text{d'où } OF = \frac{AE}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Application. $OF = \frac{3}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2^m,772$

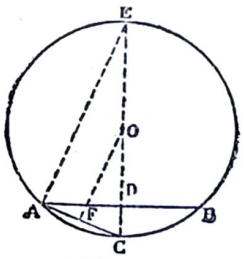


Fig. 231

2° Soit A B le côté de l'hexagone inscrit (fig. 231) ; abaissons O C perpendiculaire sur A B, A C est le côté du dodécagone régulier et O F son apothème. Traçant A E, on forme le triangle rectangle A E C qui donne :

$$\overline{CA}^2 = CE \times CD$$

$$\text{Or } CE = 2R \text{ et } CD = CO - OD = R - R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$$

$$\text{d'où } \overline{CA}^2 = 2R \times \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3}) = R^2(2 - \sqrt{3})$$

$$\text{et } CA = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Application. $CA = 3\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 1{,}553\,\text{m}.$

L'apothème O F est la moitié de A E, or

$$\overline{AE}^2 = CE \times ED = R^2(2 + \sqrt{3})$$

Application. $OF = \frac{3}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2{,}898\,\text{m}.$

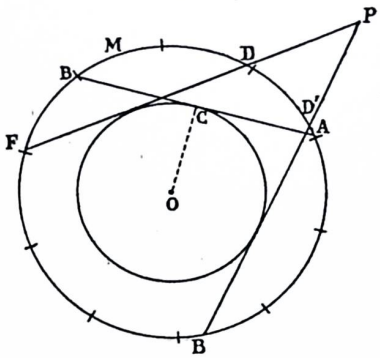


Fig. 232

61. — *Mener par un point une droite qui divise une circonférence donnée dans le rapport de 3 à 7.*

DÉMONSTRATION : Soient O la circonférence et P le point donné (fig. 232). Je divise la circonférence en 3 + 7 ou 10 parties égales et je tire une corde A B qui sous-tend trois divisions. J'abaisse du centre une perpendiculaire sur cette corde, soit O C et je décris la circonférence O C. La tangente P D F, menée du point P à cette circonférence, répond à la question, car les cordes A B et F D qui sont à égale distance du centre sont égales et sous-tendent, par suite des arcs égaux.

On a donc $\dfrac{\text{arc D M F}}{\text{arc D N F}} = \dfrac{3}{7}$

Le problème a deux solutions, une seule, ou est impossible suivant que le point P est en dehors de la circonférence O C, sur cette circonférence, ou à l'intérieur.

AIRES

62. — *Trouver l'aire d'un rectangle connaissant sa base 4 mètres, et sa diagonale 5 mètres.*

DÉMONSTRATION : Soit le rectangle A B C D dans lequel on a (fig. 233) :

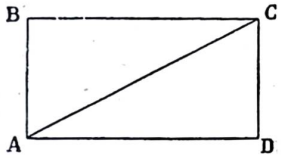


Fig. 233

B C = 4 mètres, A C = 5 mètres.

On sait que $S = b \times h$

Or b = B C = 4 m. Calculons h = A B.

Dans le triangle rectangle A B C on a :

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ ou $\overline{AB}^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

d'où $AB = \sqrt{9} = 3$

Donc $S = 4 \times 3 = 12\,m^2 = 1200\,dm^2 = 120000.\,cm^2$.

Réponses. — 1200 dm², 120000 cm².

63. — *Trouver l'aire d'un rectangle connaissant sa diagonale 35 mètres, et sachant que la base est double de la hauteur.*

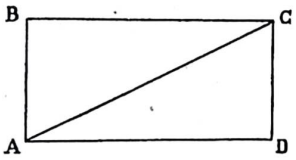


Fig. 234

DÉMONSTRATION : Soit le rectangle A B C D dans lequel la diagonale A C = 35 mètres. Désignons la hauteur A B par h (fig. 234).

Dans le triangle rectangle A B C on a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

Mais B C = 2 A B = 2 h.

d'où $\overline{BC}^2 = 4\,h^2$ et comme $\overline{AB}^2 = h^2$, il vient

$$\overline{AC}^2 = h^2 + 4\,h^2 = 5\,h^2$$

Donc $5\,h^2 = 35^2 = 35 \times 35$ et $h^2 = 35 \times 7$.

Mais $S = b \times h = 2\,h \times h = 2\,h^2$

D'où $S = 35 \times 7 \times 2 = 70 \times 7 = 490\ m^2$.

$S = 490\ m^2 = 4{,}90\ dam^2 = 490$ ca.

Réponses. — 4 dam²,90 ; 490 ca.

64. — *Trouver l'aire du carré inscrit dans la circonférence de rayon 1 mètre.*

SOLUTION. — Nous avons trouvé pour valeur du côté du carré en fonction du rayon R du cercle circonscrit $C_4 = R\sqrt{2}$

Comme $S = C_4^2$ il vient $S = (R\sqrt{2})^2 = 2\,R^2$

Puisque R = 1 on a $S = 2^{m^2}$.

Réponse. — 2^{m^2}.

65. — *Dans un parallélogramme A B C D, on donne le côté A D et la base D C, on sait que l'angle A D C vaut 60°, calculer l'aire du parallélogramme.*

A D = 53 mètres, D C = 107,75 m.

Exprimer l'aire en ares.

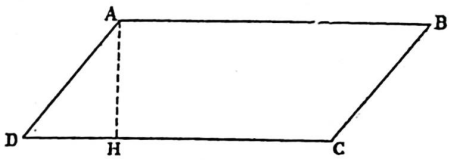


Fig. 235

SOLUTION. — Traçons la hauteur A H du parallélogramme (fig. 235).

On a : $S = D\,C \times A\,H$

On sait que dans un triangle rectangle le côté opposé à un angle de 30° est égal à la moitié de l'hypoténuse.

d'où $D\,H = \dfrac{A\,D}{2}$.

Dans le triangle rectangle A D H on a :

$$\overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DH}^2\ \overline{AD}^2 - \frac{\overline{AD}^2}{4} = \frac{3\,\overline{AD}^2}{4}$$

$$\text{et } A\,H = \frac{A\,D\sqrt{3}}{2}$$

Par suite

$$S = \frac{D\,C \times A\,D\sqrt{3}}{2} = \frac{107{,}75 \times 53 \times 1{,}732}{2}$$

$$= 4945{,}50\ m^2$$

$$S = 4945{,}5\ m^2 = 49{,}455\ a$$

Réponse. — 49,455 a.

66. — *On donne la surface 405m²,60 d'un rectangle A B C D et le rapport de la hauteur A B à la base B C :*

$\dfrac{A\,B}{B\,C} = \dfrac{3}{7}$. *Trouver A B et B C.*

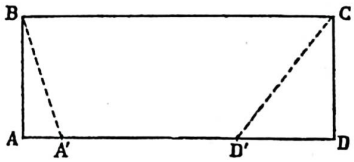


Fig. 236

Sur le côté A D, parallèle à la base B C, on prend deux points A' et D' respectivement à 3 mètres et à 17 mètres de A ; calculer l'aire du trapèze A' B C D'.

SOLUTION. — On a (fig. 236) :

$$S = b\,h = B\,C \times A\,B$$

Mais $\dfrac{A\,B}{B\,C} = \dfrac{3}{7}$, donc $A\,B = \dfrac{3}{7}\,B\,C$

et $S = B\,C \times \dfrac{3}{7}\,B\,C = \dfrac{3}{7}\,\overline{BC}^2$

Mais S = 405,60, par suite $\dfrac{3}{7}\,\overline{BC}^2 = 405{,}60$ et

$\overline{BC}^2 = \dfrac{405{,}60 \times 7}{3} = 135{,}2 \times 7 = 946{,}4$ d'où

$B\,C = \sqrt{946{,}4} = 30{,}76$ m.

Comme $A\,B = \dfrac{3}{7}\,B\,C$; il vient $A\,B = \dfrac{3 \times 30{,}76}{7}$

= 13,18 m.

Dans le trapèze A' B C D' on a pour grande base B C = 30,76 m pour petite base A' D' = 17 — 3 = 14 m et pour hauteur A B = 13,18 m.

Or on sait que surface trapèze $S = \frac{B + b}{2} \times h$, d'où

$$S = \frac{30,76 + 14}{2} \times 13,18 = 22,38 \times 13,18$$
$$= 204,97 \text{ m}^2.$$

Réponses. — A B = 13,18 m ; B C = 30,76 m ; aire A′ B C D′ = 294,97 m².

67. — *Trouver l'aire d'un triangle équilatéral connaissant son côté a = 0,25 m.*

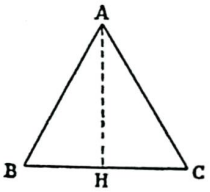


Fig. 237

Solution. — On a (fig. 237) :

$$S = \frac{b\ h}{2} = \frac{B\,C \times A\,H}{2}$$

Or

$$B\,C = a = 0^m, 25. \text{ Calculons A H.}$$

Dans le triangle rectangle A B H on a :

$\overline{A\,H}^2 = \overline{A\,B}^2 = \overline{B\,H}^2$. Mais A B = a et B H $= \frac{a}{2}$.

Donc

$$\overline{A\,H}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3\ a^2}{4} \text{ et } A\,H = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$S = \frac{a \times a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Telle est l'expression de l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.

Application. — $S = \frac{\overline{0,25}^2 \times 1,732}{4} = 0,0270625 \text{ m}^2$
$= 270,625 \text{ cm}^2$

Réponse. — 270,625 cm².

68. — *Quelle est l'aire d'un trapèze isocèle dont les angles aigus valent 60° et dont les bases valent respectivement 36 m. et 22 m.*

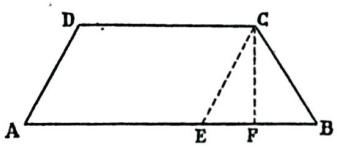


Fig. 238

Solution. — Soit le trapèze isocèle A B C D (fig. 238) dont les angles A et B valent 60°. Menons C E parallèle à A D, le triangle isocèle C B E qui a un angle de 60° est équilatéral.

Comme A E = C D comme côtés opposés d'un parallélogramme, B E = $36^m - 22^m = 14^m$.

La hauteur du triangle équilatéral qui est celle du trapèze égale $\frac{14 \times \sqrt{3}}{2} = 7 \times \sqrt{3}$ donc l'aire du trapèze est :

$$S = \frac{B + b}{2} \times h = \frac{36 + 22}{2} \times 7 \times \sqrt{3} = 351,61 \text{ m}^2.$$

Réponse. — 351,61 m².

69. — *Dans un cercle de 2,4 m de rayon on inscrit : 1° un triangle équilatéral ; 2° un hexagone régulier. Calculer l'aire de chacun de ces polygones. Quel est le rapport qui existe entre ces deux aires ?*

Solution. — Nous avons trouvé que le côté C_3 du triangle équilatéral en fonction du rayon du cercle circonscrit était $C_3 = R\sqrt{3}$ et que le côté de l'hexagone régulier inscrit dans le même cercle était $C_6 = R$. De même on a trouvé pour apothème a_6 du triangle équilatéral :

$a^3 = \frac{R}{2}$ et pour apothème a_6 de l'hexagone régulier :

$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Comme l'aire d'un polygone régulier est égale au demi-produit de son périmètre par son apothème, il vient :

aire du triangle équilatéral $= 3\ R\sqrt{3} \times \frac{R}{4}$

$$= \frac{3\ R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \times \overline{2,4}^2 \times 1,732}{4} = 7,48 \text{ m}^2.$$

aire de l'hexagone régulier $= 6\ R \times \frac{R\sqrt{3}}{4} =$

$$\frac{6\ R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6 \times \overline{2,4}^2 \times 1,732}{4} = 14,96 \text{ m}^2.$$

Rapport des deux aires :

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{6\ R^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\ R^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Réponses. — 7,48 m² ; 14,96 m² ; 2.

70. — *L'aire comprise entre le périmètre d'un hexagone régulier et celui de la circonférence circonscrite étant $9^{m2},78$, calculer le rayon de cette circonférence.*

Solution. — L'aire du cercle est $\pi\ R^2$; celle de l'hexagone régulier inscrit est $\frac{3\ R^2\sqrt{3}}{2}$ (voir problème précédent) ; donc $\pi\ R^2 - \frac{3\ R^2\sqrt{3}}{2} = 9,78$ d'où

$$R^2 = \frac{9,78 \times 2}{2\pi - 3\sqrt{3}} \text{ et } R = \sqrt{\frac{19,56}{2\pi - 3\sqrt{3}}} = 4,242 \text{ m.}$$

Réponse. — 4,242 m.

71. — *Dans un triangle A B C dont la base A C vaut 25 m. et la hauteur B D, 18 m., on inscrit un carré dont un côté s'appuie sur A C ; calculer son aire.*

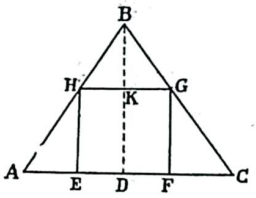


Fig. 239

Solution. — Soient le triangle A B C et le carré E F G H inscrit dans ce triangle (fig. 239), H G est parallèle à A C ; les triangles semblables B H G, B A C donnent :

$$\frac{G\,H}{A\,G} = \frac{B\,K}{B\,D} \text{ ou } \frac{G\,H}{A\,C} = \frac{B\,D - K\,D}{B\,D} = \frac{B\,D - H\,G}{B\,D}$$

puisque K D = H G.

Ajoutons les numérateurs et les dénominateurs entre eux, on a : $\frac{H\,G}{A\,C} = \frac{B\,D}{B\,D + A\,C}$ d'où en remplaçant

$$\frac{HG}{25} = \frac{18}{43} \text{ et } HG = \frac{25 \times 18}{43}$$

L'aire du carré est $\overline{HG}^2 = \frac{\overline{25}^2 \times \overline{18}^2}{43^2} = 109{,}5187\,m^2$.

Réponse. — 109,5187 m².

72. — *L'aire d'un trapèze est égale au produit de l'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu du côté opposé.*

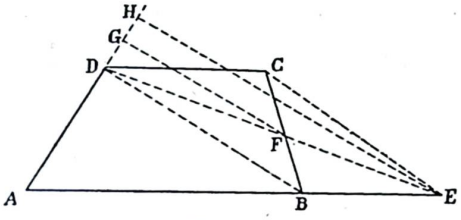


Fig. 240

DÉMONSTRATION : Soit le trapèze A B C D (fig. 240) ; menons par C une parallèle C E à la diagonale B D et traçons D E ; cette droite coupe B C en son milieu F. Les triangles B C D, B D E sont équivalents puisqu'ils ont même base B D et même hauteur.

Le triangle A D E est équivalent au trapèze A B C D.

L'aire de ce triangle est égale au produit de A D par la moitié de la hauteur E H abaissée de E sur A D.

Or, dans le triangle H D E on a $\frac{FG}{EH} = \frac{DF}{HE} = \frac{1}{2}$

d'où $F = \frac{EH}{2}$.

Donc l'aire du trapèze est égale à A D × F G.

73. — *Si sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle comme diamètres, on décrit des demi-circonférences qui soient extérieures au triangle, chacune de ces courbes fait avec la demi-circonférence menée par les sommets du triangle une figure qui a la forme d'un croissant, et qu'on nomme lunule d'Hippocrate. Démontrer que la somme des surfaces des deux lunules est équivalente à la surface du triangle.*

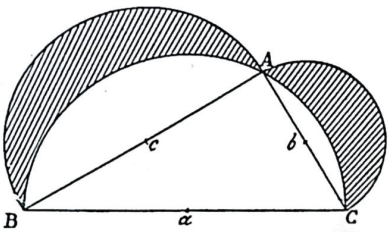


Fig. 241

DÉMONSTRATION : Soient *a*, *b*, *c* les côtés du triangle rectangle A B C sur lesquels on décrit des demi-circonférences (fig. 241).

L'aire S des deux lunules A B et A C se compose de la somme des aires du triangle A B C et de deux demi-cercles décrits sur A B et A C comme diamètres, diminuée de l'aire du demi-cercle décrit sur B C. Donc on a :

$$S = \frac{b\,c}{2} + \frac{\pi\,\overline{AB}^2}{8} + \frac{\pi\,\overline{AC}^2}{8} - \frac{\pi\,\overline{BC}^2}{8} =$$

$$\frac{b\,c}{2} + \frac{\pi}{8}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2\right)$$

Or, dans le triangle A B C on a :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{ d'où } S = \frac{b\,c}{2}$$

c'est-à-dire l'aire du triangle A B C.

74. — *Calculer, à moins de 0,01 m, le rayon d'un cercle tel que le segment correspondant à un arc de 120° soit équivalent à 1 mètre carré.*

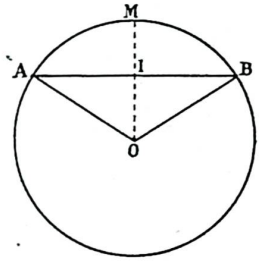


Fig. 242

SOLUTION. — Soient R le rayon du cercle et S la surface du segment A M B correspondant à un arc de 120° (fig. 242). On a :

$$S = \text{secteur } OAMB - \text{triangle } OAB$$

or, $\text{secteur } OAMB = \frac{1}{3}\pi R^2$

$$\text{triangle } OAB = \frac{1}{2} AB \times OI = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \times \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

donc $S = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{4} R^2\sqrt{3}$ et $R = \sqrt{\frac{12\,S}{4\pi - 3\sqrt{3}}}$

Si l'on fait S = 1, on a :

$$R = \sqrt{\frac{12}{4\pi - 3\sqrt{3}}} = 1{,}27 \text{ m à 1 cm. près.}$$

Réponse. — 1,27 m.

75. — *On prend un point quelconque C sur le diamètre A B d'un demi-cercle, et on décrit deux demi-circonférences sur les segments A C et B C; prouver que l'aire comprise*

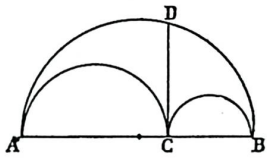


Fig. 243

entre les trois demi-circonférences est équivalente au cercle qui a pour diamètre la moyenne proportionnelle entre A C et B C.

DÉMONSTRATION :

L'aire du demi-cercle décrit sur A B est $\frac{\pi\,\overline{AB}^2}{8}$ (fig. 243) ; celles des demi-cercles décrits sur A C et B C comme diamètres ont pour expression $\frac{\pi\,\overline{AC}^2}{8}$ et $\frac{\pi\,\overline{BC}^2}{8}$. L'aire comprise entre les trois demi-circonférences est donc

$$S = \frac{\pi}{8}\left(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2\right)$$

Or,

$AB = AC + CB$; d'où $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + 2\,AC \times BC + \overline{BC}^2$

d'où

$$S = \frac{\pi}{8} \times 2\,AC \times BC = \frac{\pi\,AC \times BC}{4}$$

expression qui représente l'aire d'un cercle ayant pour diamètre $\sqrt{AC \times BC}$, c'est-à-dire la moyenne proportionnelle C D entre A C et B C.

76. — *Construire un rectangle équivalent à un carré donné et dont les deux côtés aient leur différence égale à une longueur donnée.*

DÉMONSTRATION : Soient a le côté du carré donné, *b* la différence des côtés du rectangle demandé.

Sur A B = b comme diamètre décrivons une circonférence ; au point A menons la tangente A C à la circonférence et prenons A C = a. Joignons C au centre O. La droite C O rencontre la circonférence en D et E ; les longueurs C D et C E sont les deux côtés du rectangle demandé.

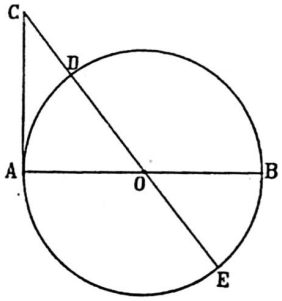


Fig. 244

En effet, on a d'une part :

$$CE - CD = DE = AB = b$$

et d'autre part, la droite A C étant tangente en A :

$$CD \times CE = \overline{CA}^2 = a^2$$

et le rectangle construit sur C E et sur C D satisfait aux conditions demandées. Le problème est toujours possible.

Exprimons C D et C E au moyen des longueurs données a et b.

On a :

$$CD = OC - OD \quad \text{et} \quad CE = OC + OD$$

or, $OD = \frac{b}{2}$, $OC = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$

donc

$$CD = \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2} - \frac{b}{2}, \quad CE = \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2} + \frac{b}{2}.$$

Le problème revient à construire les racines de l'équation du second degré :

$$x^2 - bx - a^2 = o$$

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

DROITES ET PLANS PARALLÈLES

77. — *Par un point* A *quelconque mener une droite qui rencontre deux droites quelconques.*

Démonstration : Nous supposerons les deux droites non situées dans le même plan (fig. 245), soit à mener par A une droite qui rencontre les deux droites B C

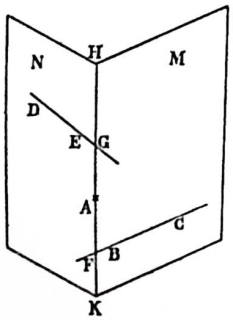


Fig. 245

et D E. Je fais passer un plan M par A et la droite B C, et un autre N par A et la droite D E. Ces deux plans se coupent suivant la droite H K qui rencontre B C en F et D E en G ; H K est donc la droite cherchée.

Le problème n'est possible que si H K rencontre à la fois B C et D E.

78. — *Trouver le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés dans l'espace.*

Le lieu géométrique des points équidistants de deux points A et B est le plan perpendiculaire à la droite A B en son milieu O (fig. 246).

1° Soit M un point du lieu. J'abaisse la perpendiculaire M O sur la droite A B et je mène M A et M B. Puisque M est un point du lieu on a M A = M B ; de sorte que dans le plan M A B, les droites M A et M B sont des obliques égales ; donc elles s'écartent

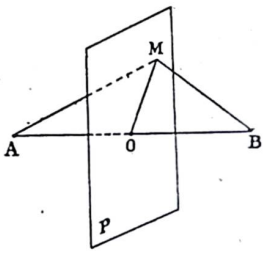


Fig. 246

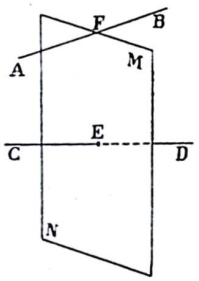


Fig. 247

également du pied de la perpendiculaire M O, et l'on a O A = O B. Donc la droite O M et par suite le point M est dans le plan P perpendiculaire à la droite A B en son milieu O.

2° Réciproquement tout point du plan P fait partie du lieu. En effet, soit le plan P perpendiculaire à la droite A B en son milieu O, et soit M un point quelconque de ce plan. Je mène M A, M O, M B. Puisque la droite A B est perpendiculaire au plan P, elle est perpendiculaire à la droite O M. D'autre part, on a O A = O B ; donc dans le plan M A B les deux droites M A et M B sont deux obliques égales et l'on a bien M A = M B, ce qui démontre que tout point du plan P fait partie du lieu.

79. — *Prendre sur une droite* A B *un point équidistant de deux points donnés quelconques* C *et* D *non situés dans le plan de* A B.

Le lieu géométrique des points de l'espace à égale distance de deux points C et D étant le plan M N perpendiculaire au milieu E de la droite C D (fig. 247), le point cherché est l'intersection F de ce plan et de la droite A B.

80. — *Quel est le lieu des points équidistants de deux plans donnés ?*

1° Soient M et S deux plans parallèles (fig. 248). Toute droite A B perpendiculaire à M est aussi perpendiculaire à S et mesure la distance des deux plans. Le point C milieu de A B, est donc à égale distance de chacun de ces plans.

Le plan R, mené par le point C, perpendiculaire à A B est parallèle aux plans M et S.

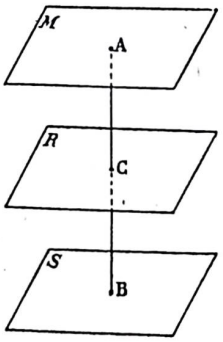


Fig. 248

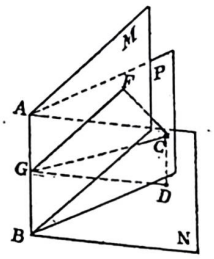


Fig. 249

Les segments déterminés par trois plans parallèles sur des droites quelconques sont proportionnels. Le plan R passe donc par les milieux de toutes les droites comprises entre les plans M et S, et, en particulier par les milieux des perpendiculaires communes à ces plans. On en conclut que le plan R est le lieu des points équidistants des plans donnés M et S.

2° Les deux plans se coupent (fig. 249).

1° Soit un point C à égale distance des plans M et N qui se coupent suivant la droite A B. Les perpendiculaires C F et C D abaissées du point C sur ces plans déterminent un nouveau plan qui coupe M suivant G F et N suivant G D et qui leur est perpendiculaire ainsi qu'à leur intersection A B. Donc G F, G C, G D sont perpendiculaires à A B. Par conséquent le plan P mené par A B et G C est le plan bissecteur du dièdre M A B N car les angles plans F G C et C G D des dièdres M A B P et P A B N sont égaux par suite de l'égalité des triangles rectangles C G F et C G D (ils ont l'hypoténuse G C commune et les côtés C F et C D égaux par hypothèse).

2° Réciproquement, tout point C de ce plan bissecteur est à égale distance des plans M et N car les triangles rectangles C G F et C G D sont égaux comme ayant l'hypoténuse commune et les angles aigus C G F et C G D égaux d'où l'on tire C F = C D.

Le lieu des points équidistants de deux plans qui se coupent est donc l'ensemble des plans bissecteurs des quatre dièdres qu'ils forment entre eux.

81. — *Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur des plans dont les intersections sont parallèles, sont dans un même plan.*

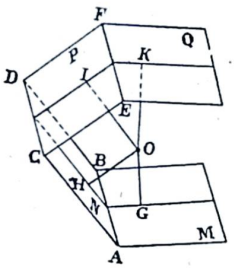


Fig. 250

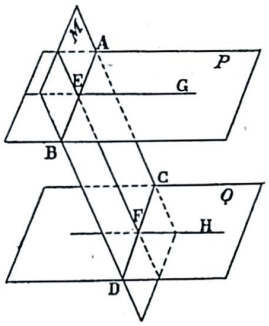


Fig. 251

DÉMONSTRATION : Soient M, N, P. Q plusieurs plans dons les intersections A B, C D, E F sont parallèles (fig. 250). Si d'un point quelconque D on mène un plan perpendiculaire à l'une de ces intersections. il sera aussi perpendiculaire à toutes les autres et, par suite, perpendiculaire à tous les plans donnés. Il contiendra donc toutes les perpendiculaires abaissées du point O sur ces plans.

82. *Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, celui-ci forme avec les deux premiers des angles dièdres alternes-internes, alternes-externes, correspondants égaux.*

DÉMONSTRATION : Si on coupe l'ensemble des trois plans M, P, Q par un quatrième perpendiculaire à A B, intersection de M et de P, il est aussi perpendiculaire à C D qui est parallèle à A B (fig. 251) ; ce plan coupe les dièdres formés suivant leurs angles plans. Quatre de ces angles sont aigus et quatre sont obtus ; or, les angles aigus sont égaux ainsi que les angles obtus, car les droites E G, F H sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un même troisième. Ainsi ces angles sont formés par deux parallèles coupées par une transversale. Les angles plans aigus étant égaux les dièdres aigus sont égaux ; il en est de même des dièdres obtus. Comme les dièdres portent les mêmes noms que leurs angles plans il en résulte que les angles dièdres alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont égaux.

83. — *Si deux dièdres ont leurs arêtes parallèles et leurs faces perpendiculaires chacune à chacune ils sont égaux ou supplémentaires.*

DÉMONSTRATION : Soient deux dièdres M A B N et P C D E ou H C D E qui ont les arêtes A B et C D parallèles et les faces respectivement perpendiculaires (fig. 257).

E F et G H intersections de plans passant par deux parallèles A B et C D sont parallèles à ces droites.

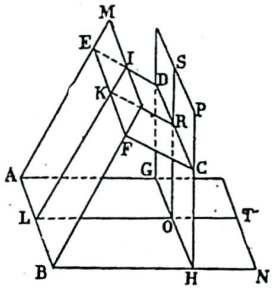


Fig. 252

Par suite tout plan perpendiculaire à A B est aussi perpendiculaire à E F, C D, G H et détermine les angles plans des dièdres donnés. D'ailleurs ce plan sécant est perpendiculaire aux quatre plans qui forment ces dièdres puisqu'il est perpendiculaire à une droite menée dans chacun d'eux. La droite O S intersection de deux plans perpendiculaires au plan A B N est perpendiculaire à ce plan et par suite perpendiculaire à L T qui passe par son pied dans le plan.

La droite R K est, pour la même raison perpendiculaire au plan M A B ainsi qu'à la droite L I.

Par conséquent les angles I L T et K R S ayant les côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires. La même relation existe donc entre les dièdres qui ont pour mesure ces angles plans.

84. — *Démontrer que deux angles trièdres qui ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, sont égaux ou symétriques, suivant que les faces égales sont disposées dans le même sens ou en sens contraire.*

DÉMONSTRATION : Soient les deux trièdres S et S′ qui ont les deux dièdres S B et S′ B′ égaux et les faces A S B, B S C respectivement égales aux faces A′ S′ B′ et B′ S′ C′ (fig. 253). Je dis qu'ils sont égaux.

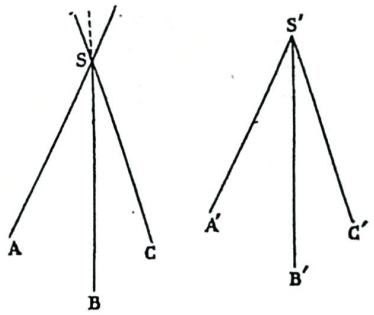


Fig. 253

Transportons le trièdre S′ sur le trièdre S de manière que l'arête S′ B′ coïncide avec S B. Comme les deux dièdres sont égaux, la face B′ S′ A′ coïncidant avec la face B S A son égale, la face B′ S′ C′ coïncidera avec la face B S C son égale et les deux dièdres se recouvrant exactement sont égaux.

Si les deux trièdres avaient la face A S B égale à B′ S′ C′ et la face B S C égale à A′ S′ B′ les deux dièdres S B et S′ B′ étant égaux ; ils ne pourraient coïncider. Mais si nous prolongions les arêtes du trièdre S A B C au delà du sommet nous obtiendrions son symétrique qui serait égal au trièdre S′ A′ B′ C′, donc S′ A′ B′ C′ est, dans ce cas, symétrique de S A B C.

85. — *Démontrer que deux angles trièdres qui ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux sont égaux ou symétriques.*

DÉMONSTRATION : Soient les deux trièdres S et S′ (fig. 253) qui ont les faces A S C et A′ S′ C′ égales, les dièdres S A et S C respectivement égaux aux dièdres S′ A′ et S′ C′ ; ces dièdres étant disposés dans le même sens. Je dis que les trièdres S et S′ sont égaux.

Transportons S′ sur S de manière que la face A′ S′ C′ coïncide avec A S C, le dièdre S′ A′ étant égal au dièdre S A la face A′ S′ B′ prendra la direction de A S B et S′ B′ sera dans A S B ; le dièdre S′ C′ étant égal au dièdre S C la face C′ S′ B′ prendra la direction de C S B et S′ B′ sera contenu dans C S B ; donc l'arête S′ B′ se confond avec l'intersection S B des faces A S B et C S B.

Si le dièdre S′ A′ est égal au dièdre S C et S′ C′ égal à S A on obtiendra un trièdre égal à S′ A′ B′ C′ en prolongeant les arêtes de S A B C au delà du sommet. Ce nouveau trièdre est le symétrique de S A B C donc son égal S′ A′ B′ C′ est aussi, dans ce cas, symétrique de S A B C.

86. — *Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite.*

DÉMONSTRATION : Soit le trièdre S A B C (fig. 254). Les plans bissecteurs des dièdres S A et S B se coupent suivant la droite S D. Or, tous les points de cette droite

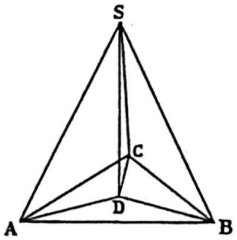


Fig. 254

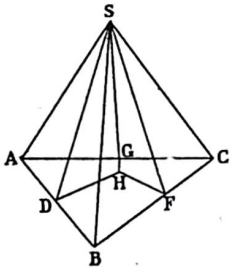


Fig. 255

sont à égale distance des faces A S B et A S C du dièdre S A et à égale distance des faces A S B et B S C du dièdre S B ; ils sont donc à égale distance des faces A S C et B S C du dièdre S C et, par conséquent, situés dans le plan bissecteur de ce dièdre. Donc les trois plans bissecteurs se coupent suivant la même droite S D.

87. — *Dans tout angle trièdre, les plans menés perpendiculairement aux faces par les bissectrices de ces faces, se coupent suivant une même droite.*

DÉMONSTRATION : Soit un trièdre S A B C dont S D, S F, S G sont les bissectrices des faces. Les plans S D H, S F H menés perpendiculairement aux faces S A B et S B C se coupent suivant une droite S H dont tous les points sont à égale distance des arêtes S A, S B, S C, car le lieu des points de l'espace à égale distance de deux droites situées dans un même plan est le plan perpendiculaire mené suivant la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites.

La droite S H est donc tout entière dans le plan perpendiculaire à la face A S C mené suivant la bissectrice S G de l'angle A S C. Donc les trois plans considérés se coupent suivant la même droite S H.

88. — *Quel est le lieu des points à égale distance des trois arêtes d'un trièdre ?*

DÉMONSTRATION : Ce lieu est la droite d'intersection des plans perpendiculaires aux faces de l'angle trièdre donné et passant par les bissectrices de ces faces (problème précédent).

LES POLYÈDRES — LES VOLUMES

89. — *Quelle est la hauteur d'un parallélépipède rectangle qui a pour base* 0,85 m² *et pour volume* 0,170 m³.

SOLUTION. — De la formule $V = B \times h$ on tire

$$h = \frac{V}{B} \text{ d'où } h = \frac{0{,}170}{0{,}85} = 0{,}2 \text{ m.}$$

Réponse. — 0,20 m ou 20 centimètres.

90. — *Un prisme droit a pour base un triangle isocèle dont la base vaut* 1,30 m *et les côtés égaux* 2,25 m. *La*

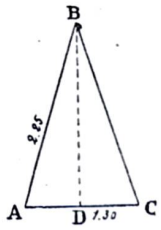


Fig. 256

hauteur du prisme est égale à celle du triangle isocèle qui lui sert de base. Trouver le volume du prisme.

SOLUTION. — Menons la hauteur B D du triangle isocèle de base (fig. 256). Dans le triangle rectangle A B D on a :

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$$

Or, $AB = 2{,}25$ et $\overline{AB}^2 = 2{,}25 \times 2{,}25 = 5{,}0625$

$$AD = \frac{1{,}30}{2} = 0{,}65 \text{ et } \overline{AD}^2 = 0{,}65 \times 0{,}65$$
$$= 0{,}4225,$$

d'où $\overline{BD}^2 = 5{,}0625 - 0{,}4225 = 4{,}64$.

Le volume du prisme est donné par la formule $V = B \times H$ dans laquelle B représente l'aire du triangle isocèle A B C c'est-à-dire $\frac{AC \times BD}{2}$ et H représente B D. On a donc

$$V = B \times H = \frac{AC \times BD}{2} \times BD = \frac{AC \times BD^2}{2}$$

ou en remplaçant A C par 1,30 et $\overline{BD}^2$ par 4,64.

$$V = \frac{1{,}30 \times 4{,}64}{2} = 3{,}016 \text{ m}^3.$$

Réponse. — 3,016 m ou 3016 dm³.

91. — *Une pyramide régulière a pour base un hexagone régulier de* 3ᵐ *de côté et son arête latérale a* 13ᵐ. *Trouver son volume.*

SOLUTION. — Le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} B H$.

Nous savons que la base est l'aire d'un hexagone régulier de côté a ; elle est donnée par la formule

$$S = \frac{3 a^2 \sqrt{3}}{2}$$

La hauteur de la pyramide est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse l'arête latérale 13ᵐ et pour autre côté de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone, soit 3ᵐ.

Donc

$$H = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{169 - 9} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

On a $B = \frac{3 \times 3^2 \times \sqrt{3}}{2}$

Par suite $V = \frac{B\,H}{3} = \frac{3 \times 3^2 \times \sqrt{3} \times 4\sqrt{10}}{3 \times 2}$

$= 3^2\sqrt{3} \times 2\sqrt{10} = 18\sqrt{30}$

et enfin $V = 18 \times 5{,}477 = 98{,}586$ m³.

Réponse. — 98,586 m³.

92. — *Un tronc de pyramide a été obtenu en coupant une pyramide d'une hauteur de 0,60 m à 0,15 m du sommet, par un plan parallèle à la base. La section obtenue est un triangle dont les côtés sont respectivement :*

$a = 0{,}50$ m ; $b = 0{,}42$ m ; $c = 0{,}33$ m.

Trouver le volume du tronc de pyramide.

Démonstration : Le volume d'un tronc de pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} h\,(B + b + \sqrt{B\,b})$$

dans laquelle B et b représentent la grande base et la petite base du tronc et h représente la hauteur du tronc.

On sait que si on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, l'aire de la section et l'aire de la base sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet ; d'où

$$\frac{B}{b} = \frac{60^2}{15^2} = \frac{(4 \times 15)^2}{15^2} = \frac{16 \times 15^2}{15^2} = 16.$$

Ainsi B a une aire 16 fois plus grande que b. On a donc

$$V = \frac{1}{3} h\,(16b + b + \sqrt{16b \times b}) = \frac{1}{3} h\,(16b + b + 4b)$$

$$= \frac{1}{3} h \times 21\,b = 7\,h\,b.$$

Le problème revient donc à trouver l'aire de b. C'est l'aire d'un triangle dont on connat les trois côtés. Cette aire est donnée par la formule $\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ dans laquelle en prenant le cm pour unité

$p = \frac{50 + 42 + 33}{2} = 62{,}5$; $p - a = 62{,}5 - 50 = 12{,}5$;

$p - b = 62{,}5 - 42 = 20{,}5$; $p - c = 62{,}5 - 33 = 29{,}5$.

Donc

$$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = \sqrt{62{,}5 \times 12{,}5 \times 20{,}5 \times 29{,}5}$$

$$= \sqrt{472250{,}9375} = 687{,}35 \text{ cm}^2$$

et $V = 7 \times 45 \times 687{,}35 = 21.6515{,}25$ cm³ ou 216,515250 dm³ ou 0,216515 m³.

Réponse. — 0,216515 m³ ou 216,515 dm³.

93. — *Les trois arêtes d'un tronc de prisme triangulaire sont entre elles comme les nombres 4, 5 et 6 ; la plus petite vaut 0,136 m. Lasection droite est un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 0,09 m et le plus grand côté de l'angle droit 0,07 m. Trouver le volume du tronc de prisme.*

Démonstration : Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est mesuré par le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes.

Désignons par a, b c, les trois arêtes on a :

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$$

et comme $a = 136$ mm. il vient :

$$\frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{136}{4} = 34 \text{ d'où } b = 34 \times 5 = 170$$

$$\text{et } c = 34 \times 6 = 204.$$

La moyenne arithmétique des trois arêtes est en millimètres de $\frac{136 + 170 + 204}{3} = 170$ ou 17 cm.

Le petit côté de l'angle droit du triangle rectangle formant la section droite est mesuré par

$$\sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

l'aire de cette section droite est en centimètres carrés $\frac{7 \times 4\sqrt{2}}{2} = 7 \times 2\sqrt{2} = 14 \times 1{,}414 = 19{,}796$ cm².

Par suite, il vient :

Volume du tronc de prisme = 19,796 × 17 = 336,532 dm³ ou 0,336532 cm³.

Réponse. — 336,532 cm³.

94. — *Calculer le volume du tétraèdre régulier (c'est une pyramide triangulaire dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux). On représentera l'arête par a.*

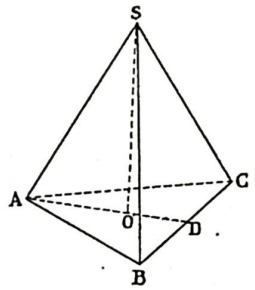


Fig. 257

Démonstration : Soit S A B C un tétraèdre régulier d'arête a (fig. 257). Si nous prenons A B C comme base ce triangle équilatéral a pour aire

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

La hauteur S O du tétraèdre tombe au centre du triangle, point de concours des médianes, d'où $A\,O = \frac{2}{3}\,A\,D$. Dans le triangle rectangle A S O on a $\overline{SO}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AO}^2$

Mais $S\,A = a$ et $A\,O = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\text{d'où } \overline{SO}^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \text{ et } S\,O = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Le volume du tétraèdre régulier est donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

95. — *Calculer le volume de l'obélisque de la place de la Concorde à Paris. Cet obélisque a la forme d'un tronc de pyramide à base carrée : la base inférieure a 2,42 m de côté et la base supérieure 1,54 m ; la distance des deux bases est 21,6 m ; enfin ce tronc est surmonté d'une pyramide régulière de 1,2 m de hauteur.*

Solution. — La base inférieure a pour aire $\overline{2{,}42}^2 = 5{,}8564$ m².

La base supérieure a pour aire $\overline{1{,}54}^2 = 2{,}3716$ m².

La moyenne proportionnelle entre les deux bases est de $\sqrt{\overline{2{,}42}^2 \times \overline{1{,}54}^2} = 2{,}42 \times 1{,}54 =^2 3{,}7268$ m².

Le volume du tronc de pyramide mesure donc :

$$V = \frac{21{,}6}{3}\,(5{,}8564 + 2{,}3716 + 3{,}7268) = 86{,}07456 \text{ m}^3.$$

Le volume de la pyramide terminale est $v = \frac{1{,}2}{3} \times 2{,}3716 = 0{,}94864$ m³.

Volume de l'obélisque : 86,07456 m³ + 0,94864 m³ = 87,023 m³.

Réponse. — 87,023 m³.

96. — *Démontrer que les quatre diagonales d'un parallélépipède se coupent mutuellement en deux parties égales.*

DÉMONSTRATION : Soit le parallélépipède A B C D A′ B′ C′ D′ dans lequel nous traçons A C′ et D B′ deux quelconques des quatre diagonales (fig. 258). Ces droites sont les diagonales du quadrilatère A D C′ B′ qui est un parallélogramme puisque les côtés

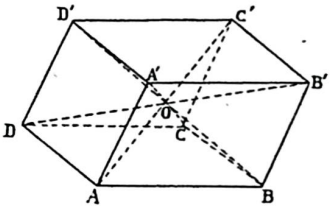


Fig. 258

A D et B′ C′ sont égaux et parallèles ; donc les diagonales A C′ et D B′ se coupent mutuellement en deux parties égales. Les deux autres diagonales partagent de même la diagonale A C′ en deux parties égales ; donc les quatre diagonales se coupent en un même point qui est le milieu de chacune d'elles.

97. — *Dans un tétraèdre, les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés se rencontrent en un même point, qui est le milieu de chacune d'elles.*

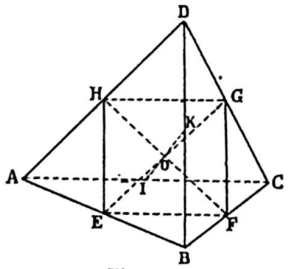


Fig. 259

DÉMONSTRATION : Soit un tétraèdre D A B C. Je dis que E G, droite qui joint les milieux des arêtes opposées A B et D C rencontre F H qui joint les milieux des arêtes opposées A D et B C en son milieu.

En effet, le quadrilatère E F G H est un parallélogramme car les droites E H et F G sont parallèles à B D et égales à sa moitié.

Les diagonales E G, F H se coupent donc en deux parties égales.

De même, la droite I K qui joint les milieux des arêtes opposées A C et B D passe par le milieu O de l'une quelconque des droites E G ou F H et est aussi divisée en O en deux parties égales.

LES CORPS RONDS

98. — *Trouver la surface d'un cylindre de rayon 0,10 m et de hauteur 3,50 m.*

SOLUTION. — La surface latérale du cylindre est donnée par la formule

$$\text{Surface latérale} = 2\,\pi\,R\,H$$

dans laquelle R = 1 et H = 35 si on prend le décimètre pour unité. D'où

$$\text{Surface latérale} = 2 \times 3{,}1416 \times 1 \times 35 = 3{,}1416 \times 70 = 219{,}9120 \text{ dm}^2.$$

La surface totale du cylindre est donnée par la formule

$$\text{Surface totale} = 2\,\pi\,R\,(R + H)$$

d'où en remplaçant les lettres par leurs valeurs

$$\text{Surface totale} = 2 \times 3{,}1416 \times 1\,(1 + 35) = 2 \times 3{,}1416 \times 36 = 3{,}1416 \times 72 = 226{,}1952 \text{ dm}^2.$$

Réponses. — Surface latérale = 2,199120 m².
Surface totale = 2,261952 m².

99. — *On connaît la surface latérale d'un cylindre : 4 m² et sa surface totale 5,25 m². Trouver la hauteur et le rayon du cylindre.*

SOLUTION. — De la formule :

Surface latérale = 2 π R H ; on tire :

$$2\,\pi\,R\,H = 400 \text{ dm}^2 \text{ ; d'où } R\,H = \frac{400}{2\pi} = \frac{200}{\pi} = 200 \times \frac{1}{\pi}$$
$$= 200 \times 0{,}318309 = 63{,}6618$$

De la formule :

Surface totale = 2 π R (R + H) ; on tire :

$$2\,\pi\,R\,(R + H) = 525 \text{ dm}^2 \text{ ; d'où } R\,(R + H)$$
$$= \frac{525}{2\,\pi} = 262{,}5 \times \frac{1}{\pi}$$

ou $R^2 + R\,H = 262{,}5 \times 0{,}318309 = 83{,}5561.$

Par suite $R^2 = 83{,}5561 - 63{,}6618 = 19{,}8943$ et $R = \sqrt{19{,}8943} = 4{,}46$ dm ou 0,446 m

$$H = \frac{63{,}6618}{4{,}19} = 14{,}94 \text{ dm ou } 1{,}494 \text{ m.}$$

Réponses. — Hauteur = 1,494 m ; rayon = 0,446 m.

100. — *Le rayon d'un cylindre est de 0,25 m. Quelle hauteur doit-il avoir pour posséder une capacité de 150 litres ?*

SOLUTION. — Le volume d'un cylindre est donné par la formule

$$V = \pi\,R^2\,H$$

d'où l'on tire $H = \dfrac{V}{\pi\,R^2}$.

Et en remplaçant les lettres par leurs valeurs, le décimètre étant pris pour unité ;

$$H = \frac{150}{\pi \times 2{,}5^2} = \frac{150}{2{,}5 \times 2{,}5\,\pi} = 24 \times 0{,}318309 = 7{,}64 \text{ dm.}$$

Réponse. — Hauteur = 0,764 m.

101. — *Un cône est engendré par un triangle rectangle dont l'angle aigu, au sommet du cône, vaut 30°. Le rayon de la base du cône a 17 m. Trouver : 1° la surface totale du cône ; 2° son volume.*

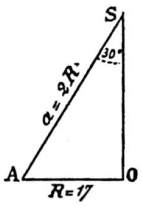


Fig. 260

SOLUTION. — La surface totale d'un cône est donnée par la formule :

$$\text{Surface totale} = \pi\,R\,(a + R)$$

On sait que dans un triangle rectangle, le côté de l'angle droit opposé à un angle de 30° est égal à la moitié de l'hypoténuse.

Donc S A = 2 A O = 2 R = 34 cm.

Donc surface totale = π × 17 (34 + 17) = 3,1416 × 17 × 51 = 2723,76 cm² ou 0,272376 m².

Le volume d'un cône est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\,R^2\,H$$

Dans le triangle rectangle S A O, on a :

$$\overline{SO}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AO}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \text{ et } SO = H$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} = 17\sqrt{3}$$

Donc

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 17^2 \times 17\sqrt{3} = \frac{\pi \times 17^3 \times \sqrt{3}}{3}$$

$$= 1{,}0472 \times 17^3 \times 1{,}732 = 8910{,}955 \text{ cm}^3$$

ou 8,901955 dm³.

Réponses. — Surface totale = 2723,76 cm² ; volume = 8910,955 cm³.

102. — *A quelle distance du sommet faut-il couper le cône défini dans l'énoncé précédent, par un plan parallèle à la base, pour obtenir un tronc de cône dont le volume soit égal au* $\frac{1}{5}$ *du volume du cône ?*

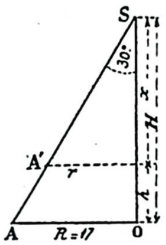


Fig. 261

Solution. — Désignons par v le volume du tronc de cône obtenu en coupant le cône de volume V par un plan parallèle à sa base à une distance x du sommet (fig. 261).

Le volume du tronc de cône est donné par la formule

$$v = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

h étant la hauteur du tronc, on a $h = H - x$.

Les triangles semblables S A O et S A′ O′ donnent

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{x} \quad \text{d'où } r = \frac{Rx}{H}$$

La formule précédente devient

$$v = \frac{1}{3}\pi (H - x)\left(R^2 + \frac{R^2 x^2}{H^2} + \frac{R^2 x}{H}\right)$$

$$\text{ou } \frac{3v}{\pi} = R^2 H - R^2 x + \frac{R^2 x^2}{H} - \frac{R^2 x^3}{H^2} + R^2 x - \frac{R^2 x^2}{H}$$

et après simplification

$$\frac{3v}{\pi} = R^2 H - \frac{R^2 x^3}{H^2}$$

d'où

$$\frac{3vH^2}{\pi} = R^2 H^3 - R^2 x^3 \text{ et } R^2 x^3 = R^2 H^3 - \frac{3vH^2}{\pi}$$

et

$$x^3 = H^3 - \frac{3vH^2}{\pi R^2}$$

comme

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H \text{ on a } v = \frac{1}{15}\pi R^2 H$$

d'où

$$x^3 = H^3 - \frac{3H^2}{\pi R^2} \times \frac{1}{15}\pi R^2 H = H^3 - \frac{H^3}{5} = \frac{4H^3}{5}$$

et

$$x = \sqrt[3]{\frac{4H^3}{5}} = H\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = H\sqrt[3]{0.8}$$

Or

$$H^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \text{ et } H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 17\sqrt{3}$$

Donc $x = 17\sqrt{3}\sqrt{0.8} = 17 \times 1.732 \times 0{,}928 = 27{,}32$ cm.

Réponse. — 27,32 cm.

103. — *Trouver la surface totale et le volume d'un tronc de cône qui a pour rayon de la grande base, 40 cm ; pour rayon de la petite base, 25 cm, et, pour hauteur 33 cm.*

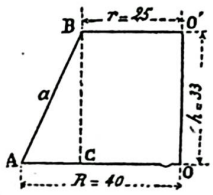


Fig. 262

Solution. — La surface totale d'un tronc de cône (fig. 262) est donnée par la formule :

$$S = \pi [(R + r)\, a + (R^2 + r^2)].$$

Dans le triangle rectangle A B C on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \text{ ou}$$

$$a^2 = 33^2 + 15^2 = 3^2 \times 11^2 + 3^2 \times 5^2$$

$$= 3^2 (11^2 + 5^2) = 3^2 \times 146$$

et $a = \sqrt{3^2 \times 146} = 3\sqrt{146}$.

On a donc

$$S = \pi [(40 + 25)\, 3\sqrt{146} + \overline{40}^2 + \overline{25}^2]$$

$$= \pi (65 \times 3\sqrt{146} + 1600 + 625)$$

$$= \pi (195\sqrt{146} + 2225) = \pi (195 \times 12{,}083 + 2225) = \pi \times 4581 = 14392 \text{ cm}^2 = 1{,}4392 \text{ m}^2$$

Le volume d'un tronc de cône est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + R\,r)$$

$$\text{ou } V = \frac{1}{3}\pi \times 33 (40^2 + 25^2 + 40 \times 25) =$$

$$\pi \times (1600 + 625 + 1000) = \pi \times 11 \times 3225$$

$$= 111448 \text{ cm}^3 \text{ ou } 111{,}448 \text{ cm}^3$$

Réponses. — Surface totale = 14392 cm² ; volume = 111448 cm³.

104. — *Quelle est la surface du globe terrestre, sachant que celui-ci a sensiblement la forme d'une sphère dont le rayon est de 6366 km ?*

Solution. — La surface de la sphère est donnée par la formule $S = 4\pi R^2$

On a donc $S = 4 \times \pi \times \overline{6366}^2 = 4 \times 3.1416 \times 40525956 = 509265373$ km².

Réponse. — 509265373 km².

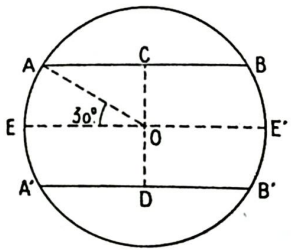


Fig. 263

105. — *Trouver la surface de la zone comprise entre deux parallèles terrestres situés de part et d'autre de l'équateur à 30° de celui-ci.*

Solution. — La surface d'une zone (fig. 263) est donnée par la formule :

$$S = 2\pi R h$$

Or R = 6366 km. Calculons h = C D.

Dans le triangle A O C, le côté de l'angle droit O C opposé à un angle de 30° est égal à la moitié de l'hypoténuse ; d'où $OC = \frac{AO}{2}$ et $h = CD = 2\,OC = AO = 6366$ km.

Par suite $S = 2\pi R^2 = 2 \times 3.1416 \times 6366^2$. C'est la moitié de la sphère terrestre ou $4\pi R^2$

$$S = 254632686 \text{ m}^2.$$

Réponse. — 254632686 km².

106. — *Trouver le volume d'un secteur sphérique, sachant que le rayon de la sphère a 7 m et que la hauteur de la zone qui sert de base au secteur est de 3 m.*

Solution. — Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon.

Or surface de la zone

$$= 2\pi R h = 2\pi \times 7 \times 3.$$

D'où volume secteur sphérique $= 2\pi \times 7 \times 3 \times \frac{7}{3}$

$= 2\pi \times 7^2 = 98\pi = 307{,}877$ cm³.

Réponse. — 307,877 cm³.

107. — *Trouver le volume d'un segment sphérique, déterminé dans une sphère de rayon 1 mètre, par deux plans parallèles menés respectivement à 50 cm et à 75 cm du centre.*

Solution. — Désignons par A a le rayon du cercle mené à 50 cm du centre de la sphère et par B b le rayon du cercle mené à 75 cm du centre. La hauteur h du segment sphérique est de 75 — 50 = 25 cm.

Le volume du segment sphérique est donné par la formule

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h\,(\overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2)$$

Or $\overline{Aa}^2 = \overline{100}^2 - \overline{50}^2 = (100 + 50)\,(100 - 50) = 150 \times 50 = 7500$

et $\overline{Bb}^2 = \overline{100}^2 - \overline{75}^2 = (100 + 75)\,(100 - 75) = 175 \times 25 = 4375$

d'où $V = \frac{1}{6}\pi \times \overline{25}^3 + \frac{1}{2}\pi \times 25\,(7500 + 4375)$

$= 0{,}5236 \times 15625 + 39{,}27 + 11875 = 8181{,}25 + 466331{,}25 = 474512$ cm³ ou 474,512 dm³.

Réponse. — 474512 cm³.

108. — *Calculer le volume de la calotte sphérique limitée par le plan le plus éloigné du centre.*

Solution. — Le volume du segment sphérique à une base est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$$

Or $h = 100 - 75 = 25$ m

d'où $V = \frac{1}{3}\pi \times \overline{25}^2\,(300 - 25) = \frac{1}{3}\pi \times \overline{25}^2 \times 275$

$= 1{,}0471 \times 625 \times 275 = 180000$ cm³ ou 180 dm³.

Réponse. — 180000 cm³.

109. — *Calculer le volume d'une sphère circonscrite à un mètre cube.*

Solution. — Appelons R le rayon de la sphère et a le côté du cube (fig. 264). Soit E le centre de la face A B C D du cube et soit E′ le centre de la face opposée. Le point O milieu de E E′ est équidistant des huit sommets du cube. Donc la sphère ayant O pour centre et O A pour rayon est circonscrite au cube.

Dans le triangle rectangle O A E, on a

$$\overline{OA}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{OE}^2$$

or $OA = R$ et $OE = \frac{a}{2}$

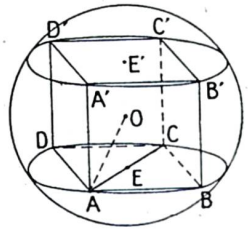


Fig. 264

Dans le triangle A B C, on a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2a^2$$

Mais A C = 2 A E et $AC^2 = AE^2$

d'où $4\overline{AE}^2 = 2a^2$ et $\overline{AE}^2 = \frac{a^2}{2}$

donc $R^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ et $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Comme le cube considéré est un mètre cube, on a $a = 1$

d'où $R = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}73205}{2} = 0{,}866$ m

Le volume de la sphère est $\frac{4}{3}\pi R^3$, ou puisque $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, il vient

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = 2{,}720695 \text{ m}^3.$$

Réponse. — 2,720695 m³.

110. — *Un demi-hexagone régulier de 3 mètres de côté tourne autour de son diamètre. Calculer l'aire du solide qu'il engendre.*

Solution. — Soit A B C D le demi-hexagone donné (fig. 265). On sait que la surface engendrée par la ligne

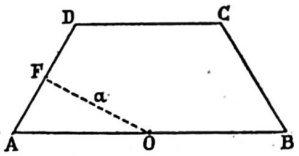


Fig. 265

brisée régulière A D C B tournant autour du diamètre A B, est égale à A B multiplié par la circonférence inscrite.

Soient O A = R et l'apothème O F = a, on a :

$$S = 2R \times 2\pi a$$

or $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ donc $S = 2R \times \frac{2\pi R\sqrt{3}}{2} = 2\pi R^2\sqrt{3}$

pour R = 3, il vient :

$$S = 2\pi \times 9 \times \sqrt{3} = 97{,}9425 \text{ m}^2$$

Réponse. — 97,9425 m².

111. — *Calculer le volume engendré par un hexagone régulier de côté a tournant autour de l'un de ses côtés.*

Solution. — Soit à déterminer le volume engendré par l'hexagone régulier A B C D E F tournant autour de son côté A B (fig. 266). Menons les droites A E, B D et les perpendiculaires F G, C H sur A B.

Le volume cherché est égal au cylindre engendré par le rectangle A B D E, plus les troncs de cône égaux

décrits par les trapèzes B H C D, A E F G, diminués des cônes égaux, décrits par les triangles rectangles B C H, A F G.

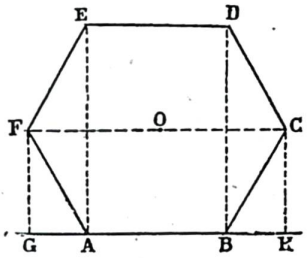


Fig. 266

Si A B $= a$, on a B D, côté du triangle équilatéral inscrit $= a\sqrt{3}$; C H $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$, B H $= \frac{a}{2}$.

Par suite, volume A B D E $= \pi \overline{BD}^2 \times AB = 3\pi a^3$ (1)

2 volumes B H C D $= \frac{2}{3}\pi$ BH $(\overline{BD}^2 + \overline{CH}^2 + BD \times CH) = \frac{2}{3}\pi \times \frac{a}{2}\left(\overline{3a^2} + \frac{\overline{3a^2}}{4} + a\sqrt{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{7\pi a^3}{4}$ (2)

2 volumes BHC $= \frac{2}{3}\pi \times \frac{3a^2}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{4}$ (3)

Ajoutant (1) et (2) puis retranchant (3), il vient

Volume ABCDEF $= 3\pi a^3 + \frac{7\pi a^3}{4} - \frac{\pi a^3}{4} = \frac{9\pi a^3}{2}$

Remarque. — On aurait le même résultat en appliquant le théorème de Guldin qui consiste à multiplier la surface de la figure tournante par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Or surface A B C D E F $= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ et la distance du centre O à A B égale C H $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

d'où $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\pi a\sqrt{3}}{2} = \frac{9\pi a^3}{2}$

Réponse. — $\frac{9\pi a^3}{2}$.

112. — *Si un cylindre est circonscrit à une sphère, et qu'on coupe les deux figures par des plans parallèles au grand cercle de contact, la zone comprise entre les deux plans est équivalente à l'aire de la portion de cylindre comprise entre les deux mêmes plans.*

Démonstration : Appelons H la distance des deux plans et R le rayon de la sphère.

La zone a pour mesure $S = 2\pi R \times H$.

Le cylindre étant circonscrit à la sphère, il a pour base un grand cercle et la partie de ce cylindre comprise entre les deux plans a pour aire $S' = 2\pi R \times H$ d'où $S = S'$.

113. — *L'aire de la surface d'une sphère et les aires des surfaces totales du cylindre et du cône équilatéral circonscrits à cette sphère sont proportionnelles aux nombres 4, 6, 9. Les volumes sont proportionnels aux mêmes nombres.*

Démonstration : Soit un grand cercle A D B C d'une sphère O (fig. 267) ; E F G H est le carré, S I K le triangle équilatéral circonscrit à ce cercle. Les côtés F G, I K sont tangents au cercle au même point B et la perpendiculaire commune menée en B passe par O, par A et par S.

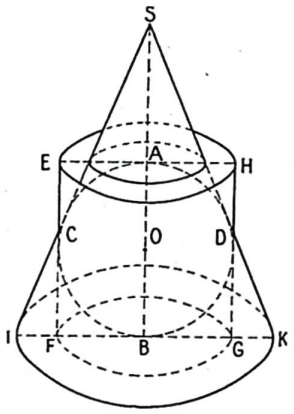


Fig. 267

Si l'on fait tourner la moitié de la figure autour de S B comme axe, le demi-cercle A C B engendra la sphère O, le rectangle A E F B engendrera le cylindre circonscrit et le triangle S I B le cône équilatéral circonscrit à la sphère.

Soit R le rayon de la sphère, on a

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Le cylindre a R pour rayon de base et a 2 R pour hauteur, d'où

$$S' = 2\pi R \times 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 ;$$

$$V' = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3.$$

Le cône a S I pour arête, B I pour rayon et B S pour hauteur. Dans le triangle équilatéral S I K, O S est le rayon et O B l'apothème du cercle circonscrit, donc :

$SI = OS\sqrt{3}$ et $= OB = \frac{OS}{2}$

donc $OS = 2\,OB = 2R$ et $SI = 2R\sqrt{3}$

par suite $BI = \frac{IK}{2} = \frac{SI}{2} = R\sqrt{3}$

$$BS = OS + OB = 3R$$

d'où :

$$S'' = \pi BI \times SI + \pi \overline{BI}^2 = \pi R\sqrt{3} \times 2R\sqrt{3} + 3\pi R^2 = 9\pi R^2$$

$$V'' = \frac{1}{3}\pi \overline{BI}^2 \times BS = \pi R^2 \times 3R = 3\pi R^2$$

On peut donc écrire :

$$\frac{S}{4\pi R^2} = \frac{S'}{6\pi R^2} = \frac{S''}{9\pi R^2} \text{ ou } \frac{S}{4} = \frac{S'}{6} = \frac{S''}{9}$$

De même, on a :

$$\frac{V}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{V'}{2\pi R^3} = \frac{V''}{3\pi R^3} \text{ ou } \frac{V}{4\pi R^3} = \frac{V'}{6\pi R^3} = \frac{V''}{9\pi R^3}$$

$$\text{ou } \frac{V}{4} = \frac{V'}{6} = \frac{V''}{9}$$

Remarque. — On voit que S' est moyen proportionnel entre S et S'' ; que V' est moyen proportionnel entre V et V''.

TRIGONOMÉTRIE

AVERTISSEMENT

La trigonométrie est une application directe de la géométrie et de l'algèbre à la mesure des angles et à la résolution des triangles. La définition des lignes trigonométriques y joue un rôle fondamental. Le lecteur commencera donc par se bien pénétrer de ces définitions, en traçant très exactement les diverses lignes trigonométriques sur un cercle trigonométrique, en les mesurant et en vérifiant les chiffres trouvés avec ceux que donne le calcul

Le lecteur devra apprendre par cœur un certain nombre de formules usuelles dont il aura à faire usage dans la pratique et il donnera toute son attention aux problèmes numériques de la résolution des triangles qui exigera l'emploi des logarithmes et dont l'application est si importante dans les questions d'arpentage.

TRIGONOMÉTRIE

Circonférence trigonométrique
Lignes trigonométriques

La trigonométrie est la partie des mathématiques qui s'occupe particulièrement de la mesure des angles et des relations entre les angles et les côtés des triangles ou des polygones.

1. Circonférence trigonométrique. — Soit une circonférence de rayon R = 1 (fig. 1). Menons par le centre O deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$, de sens positif $x'x$ et $y'y$.

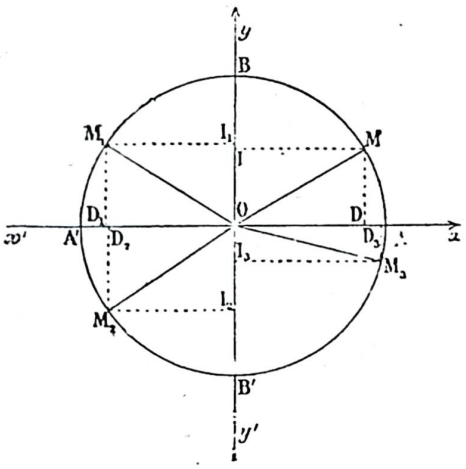


Fig. 1

La circonférence pourvue de ces deux axes constitue la circonférence trigonométrique.

Puisque la circonférence a pour rayon 1 : en vertu des conventions ci-dessus, on a :

$$OA = -1 \qquad OB = +1$$
$$OA' = +1 \qquad OB' = -1$$

en choisissant O pour origine des segments.

La circonférence est partagée par les deux axes $x'x$, $y'y$ en quatre arcs égaux qu'on nomme quadrants. On les distingue les uns des autres en les numérotant :

A B est le 1er quadrant ; B A' le 2e quadrant ; A' B', le 3e ; B' A, le 4e.

La circonférence elle-même est affectée de sens. En mesurant les arcs à partir du point A, origine des arcs, on les compte positivement en tournant en sens contraire des aiguilles d'une montre et négativement en tournant de l'autre côté.

On peut mesurer les arcs soit en degrés, minutes et secondes (360° pour la circonférence entière, 60′ pour 1°, 60″ pour 1′), soit en longueurs d'arcs. Le rayon de la circonférence étant égal à 1, la longueur de la circonférence entière est 2π, la demi-circonférence vaut π, et l'arc d'un quadrant vaut $\frac{\pi}{2}$.

2. Mesure des angles. — Par le point O menons un rayon quelconque O M. L'angle au centre A O M a pour mesure la mesure de l'arc A M (Géom.). On voit donc qu'on pourra faire correspondre à un angle donné quelconque un arc de la circonférence trigonométrique en menant par le point O une droite faisant avec O A un angle égal à l'angle donné.

3. Généralisation de la notion d'angle. — En Géométrie, nous n'avons donné de signification qu'aux angles inférieurs à deux angles droits. Cependant, on conçoit qu'en faisant la somme de plusieurs angles inférieurs à deux droits, on puisse obtenir un angle supérieur à deux droits. Aussi, pour généraliser les résultats et les formules, admet-on, en trigonométrie, qu'un angle puisse avoir une valeur plus grande que deux droits.

Pour des raisons analogues, on est conduit à admettre l'existence d'angles négatifs qui résulteront, par exemple, d'une différence algébrique.

Ainsi l'angle A O M représente sur la figure non seulement le plus petit angle A O M qui vaut, par exemple 30°, mais aussi l'angle mesuré par l'arc A B A' B' A M qui vaut 360° + 30° et, d'une façon générale, l'angle $n \times 360° + 30°$.

Si l'on appelle α le plus petit arc A M, étant donné que la circonférence entière vaut 2π, la formule générale des arcs positifs représentés par A M est

$$AM = 2k\pi + \alpha \qquad (1)$$

k représentant un nombre entier positif.

D'autre part, on peut aussi considérer l'angle A O M comme négatif et mesuré par l'arc A B' A' M qui vaut $-2\pi + \alpha$. La formule générale des arcs négatifs représentés par A M est

$$AM = -2k\pi + \alpha \qquad (2)$$

Si k est supposé implicitement positif ou négatif, les deux formules (1) et (2) deviennent identiques, sous la forme (1).

4. Lignes trigonométriques. — Sinus et Cosinus d'un angle ou d'un arc. — Du point A abaissons une perpendiculaire sur $y'y$ (fig. 1), soit I le pied de cette perpendiculaire. *La projection* O I *du rayon* O M *sur* $y'y$, *mesurée à partir du point* O *sur l'axe de sens positif* $y'y$, *s'appelle* sinus *de l'angle* A O M *ou de l'arc* A M.

Abaissons de M la perpendiculaire M D sur l'axe $x\,x$. *Le segment* O D, *mesuré à partir de l'origine* O *sur l'axe de sens positif* $x'x$, *s'appelle* COSINUS *de l'angle* A O M *ou de l'arc* A M.

Si le rayon de la circonférence est différent de 1, la valeur du sinus de l'angle est donnée par le rapport $\frac{OI}{OM}$; celle du cosinus de l'angle est donnée par le rapport $\frac{OD}{OM}$.

5. Variations du sinus d'un angle. — Si l'extrémité M de l'arc se trouve dans le premier quadrant, le sinus O I est compris entre 0, quand M se confond avec A, et + 1, quand M se confond avec B. Donc, au fur et à mesure que l'angle A O M passe de 0° à 90°, son sinus O I passe de 0 à + 1. L'angle continuant à croître de 90° à 180°, l'extrémité M, de l'arc, passe de B en A′ sur le deuxième quadrant, et si le sinus O I passe de + 1 à 0. On voit de même que si l'arc se termine dans le quatrième quadrant, le sinus O I^2 ou O I^3 est négatif et varie de 0 à — 1 et de — 1 à 0. Ces résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Valeur de l'angle	Valeur de l'arc	Valeur du sinus
0°	0	0
	croît	
croît	$\frac{\pi}{2}$	croît
90°		+ 1
croît	croît	décroît
180°	π	0
	croît	
croît	$\frac{3\pi}{2}$	décroît
270°		— 1
croît	croît	croît
360°	2π	0

Dans tous les cas, on a, x étant un angle ou l'arc correspondant :

$$-1 < \sin x < +1 \qquad (3)$$

6. Variations du cosinus d'un angle. — Des considérations analogues à celles que nous avons faites pour le sinus nous permettront de dresser le tableau suivant :

Valeur de l'angle	Valeur de l'arc	Valeur du cosinus
0°	0	+ 1
	croît	
croît	$\frac{\pi}{2}$	décroît
90°		0
croît	croît	décroît
180°	π	— 1
	croît	
croît	$\frac{3\pi}{2}$	croît
270°		0
croît	croît	croît
360°	2π	+ 1

Dans tous les cas, x étant un angle ou un arc, on a :

$$-1 < \cos x < +1 \qquad (4)$$

Les notions *sin x, cos x*, s'énoncent sinus x, cosinus x et signifient : sinus de l'arc ou de l'angle x, cosinus de l'arc ou de l'angle x.

Nous remarquerons que *le sinus et le cosinus varient en sens inverse l'un de l'autre pour les mêmes valeurs de l'angle.*

7. Relation entre le sinus et le cosinus d'un même arc. — Considérons le triangle rectangle M O D (fig. 2). D M est égal au sinus O I, O D est le cosinus de l'arc. Du reste, on a :

$$\overline{MD}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OM}^2$$

et par suite, en remarquant que

$$MD = \sin x \qquad OD = \cos x \qquad OM = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (1)$$

Les symboles $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ s'énoncent : sinus carré de x, cosinus carré de x. Il ne faut pas les confondre avec les symboles *sin* x^2, *cos* x^2, qui s'énoncent : sinus de x carré (ou : x deux), cosinus de x carré (ou : x deux). Le symbole $\sin^2 x$ signifie qu'on a élevé au carré la longueur du sinus de l'arc x, le symbole $\sin x^2$ signifie qu'on a pris le sinus de l'arc dont la longueur est mesurée par le carré du nombre qui mesure la longueur de l'arc x :

La relation (1) est générale. En effet, si l'on considère le triangle formé par la parallèle au sinus menée par l'extrémité de l'arc, D M ou D M^1, etc., par le cosinus et par le rayon qui passe par l'extrémité de l'arc, si on ne le considère, dis-je, qu'au point de vue purement géométrique en prenant pour chacun des côtés des valeurs absolues, arithmétiques, la relation est toujours vraie. Mais, d'un autre côté, la relation (1), ne contenant que des carrés, ne contient que des quantités positives (Algèbre), identiques à celles de la relation géométrique.

Problème. — La relation (1) permet de calculer le cosinus d'un arc si on connaît le sinus de cet arc et réciproquement.

Supposons, par exemple, qu'on nous donne le sinus et calculons le cosinus. Nous avons :

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

d'où

$$\cos x = \mp \sqrt{1 - \sin^2 x} \qquad (5)$$

La racine a deux valeurs symétriques. Donc, à un sinus donné correspondent deux valeurs de cosinus.

Interprétons ce résultat.

Portons sur l'axe des sinus (fig. 2) un segment dirigé

$$OI = \sin x$$

Par I menons une perpendiculaire M_1M à l'axe B′ B et joignons les points M et M_1 au centre. Les arcs A M et A M_1 ont tous deux pour sinus O I, c'est-à-dire le sinus donné. Mais leurs cosinus O D, O D_1, sont de de sens contraire, du reste ils sont égaux en valeur absolue, car les deux triangles rectangles O M D et O M^1 D^1 sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale

$$OM = OM^1$$

et un côté de l'angle droit égal

$$MD = M_1D_1 = OI$$

Les valeurs algébriques des deux segments OD et O D_1 répondent à la relation (5).

Si on donnait le cosinus, on calculerait de même le sinus :

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} \qquad (6)$$

à un cosinus donné correspondent aussi deux valeurs symétriques du sinus.

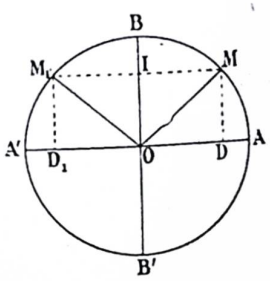


Fig. 2

Remarquons que dans les formules (5) et (6) l'extraction de la racine carrée du second membre n'est possible que si l'on a :

$$1 > \sin^2 x \qquad \text{ou} \qquad 1 > \cos^2 x$$

c'est-à-dire

$$-1 < \sin x < +1 \qquad \text{ou} \qquad -1 < \cos x < +1$$

ce sont justement les relations (3) et (4), qui, nous l'avons vu, doivent toujours être satisfaites pour que les valeurs données aient une signification.

8. Valeur algébrique de la projection d'un segment dirigé sur un axe. — Imaginons un axe $x'x$, de sens positif $x'x$, et un segment dirigé O R de sens positif O R (fig. 3). On appelle projection de O R sur $x'x$ la valeur algébrique du segment déterminé sur $x'x$ par le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O du segment O R sur $x'x$ et par le pied de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité R sur $x'x$. La valeur algébrique de la projection O S de O R est comptée

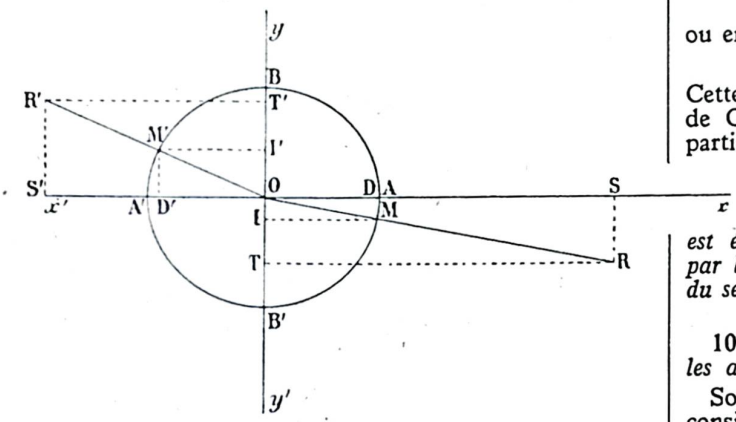


Fig. 3

de O en S. Sur la figure, nous avons placé le point O sur l'axe lui-même pour simplifier le raisonnement. Si cette condition n'était pas réalisée, on mènerait par un point O' de $x'x$ une parallèle au segment donné et on raisonnerait sur cette parallèle ; les résultats s'appliqueraient ensuite au segment donné. Sur la figure, le segment O R a pour projection O S qui est positif, le segment O R' a pour projection O S' qui est négatif.

Décrivons, de O comme centre, la circonférence trigonométrique et traçons ses axes en prenant $x'x$ pour axe des cosinus. Du point M abaissons la perpendiculaire M D sur $x'x$. Les triangles O D M et O S R sont semblables, parce que M D est parallèle à R S. On a donc :

$$\frac{OD}{OS} = \frac{OM}{OR} = \frac{MD}{RS} \qquad (1)$$

Appelons α l'angle S O R = $\widehat{DOM}$, m la valeur algébrique du segment O R, et désignons par le symbole *proj. m* la projection O S de O R. O D est le cosinus de α. La première proportion (1), nous donne :

$$\frac{\cos\alpha}{proj.\ m} = \frac{1}{m} \qquad (2)$$

d'où

$$\text{proj. } m = m \times \cos\alpha \qquad (3)$$

Ainsi *la projection d'un segment* O R *sur un axe* $x'x$ *est égale à la valeur du segment multipliée par le cosinus de l'angle formé par les directions positives du segment et de l'axe.*

Nous avons fait ce calcul en supposant O R à droite de $y'y$ et positif. Dans ce cas la projection O S aussi bien que le cosinus de l'angle α sont positifs et la relation (3) est toujours vraie.

Si nous supposons le segment à gauche de $y'y$ et positif, soit O R', sa projection O S' deviendra négative ; mais le cosinus de α lui-même deviendra négatif et, par conséquent, la relation (3) sera encore vérifiée. Enfin, si on comptait R O ou R' O négatifs, la projection changerait de sens, les deux membres de (3), changeraient de signe en même temps. La relation serait encore vraie.

Le résultat est donc général, si l'on suppose que la direction positive du segment O R ou O R' est O R ou O R'.

Calculons maintenant la projection O T de O R sur l'axe $y'y$. Abaissons la perpendiculaire M I sur l'axe $y'y$, O I est le sinus de α. Les triangles semblables O I M et O T R nous donnent :

$$\frac{OM}{OR} = \frac{OI}{OT} \qquad (4)$$

ou

$$\frac{1}{m} = \frac{proj.\ m}{\sin\alpha}$$

ou enfin

$$\text{proj. } m = m \times \sin\alpha \qquad (5)$$

Cette relation est encore vraie quelle que soit la position de O R, pourvu qu'on compte O R positivement à partir du point O.

9. Théorème. — *La valeur algébrique de la projection sur un axe perpendiculaire au premier est égale à la valeur algébrique du segment multipliée par le sinus de l'angle formé par les directions positives du segment et du premier axe.*

10. Application. — *Relations entre les côtés et les angles aigus d'un triangle rectangle.*

Soit un triangle rectangle A B C (fig. 4). On peut considérer les côtés de l'angle droit comme les projections de l'hypoténuse sur deux axes rectangulaires.

Par exemple A C est la projection de C B sur l'axe $x'x$ et A B est la projection de B C sur un axe perpendiculaire à $x'x$, ou du moins, ce côté est égal à C B' projection de C B sur $y'y$ perpendiculaire à $x\,x$.

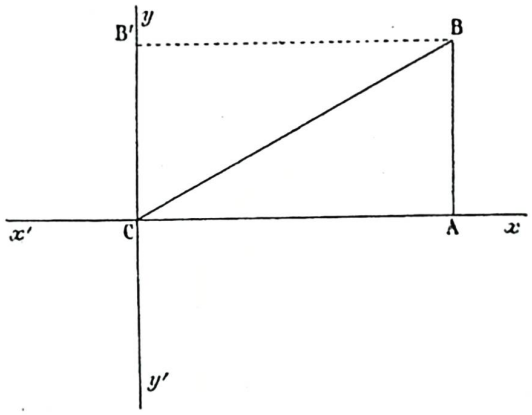


Fig. 4

En conséquence on a (5) :

$$AC = \text{proj. } (CB) \text{ sur } x'x = \overline{CB} \times \cos ACB$$
$$AB = \text{proj. } (CB) \text{ sur } y'y = \overline{CB} \times \sin ACB$$

Posons

$$CB = a \qquad AC = b \qquad AB = c$$

et appelons simplement C l'angle aigu A C B, on peut écrire

$$b = a \text{ Cos } C \qquad (1)$$
$$c = a \text{ Sin } C \qquad (2)$$

En considérant d'abord la projection A B et l'angle C B A, on arriverait de la même façon aux formules :

$$c = a \text{ Cos } B \qquad (3)$$
$$b = a \text{ Sin } B \qquad (4)$$

On peut énoncer le théorème suivant :

11. Théorème. — *Un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce côté ou par le cosinus de l'angle aigu adjacent.*

12. Résolution des triangles rectangles. — *Résoudre un triangle c'est trouver la valeur de tous ses éléments.*

La résolution n'est possible que si on connaît trois des éléments du triangle, dont un côté au moins ; nous savons en effet que c'est dans ce cas seulement que le triangle est déterminé géométriquement.

La résolution des triangles rectangles est particulièrement simple. Pour donner une idée de l'utilité et des applications de la trigonométrie, nous la traiterons dès à présent.

On distingue *quatre* cas ; nous en examinerons trois immédiatement.

1° On donne l'hypoténuse et un angle aigu.

2° On donne l'hypoténuse et un côté de l'angle droit.

3° On donne les deux côtés de l'angle droit.

Nous n'avons énoncé dans chacun de ces trois cas, que deux éléments, le troisième est l'angle droit. Nous conserverons les notations $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ pour les angles, a, b, c pour les côtés ; $\widehat{A}$ est l'angle droit, les côtés, nous l'avons déjà dit, sont opposés respectivement aux angles de même nom ; donc a est l'hypoténuse.

1er cas. — *On donne a et $\widehat{B}$. Il faut calculer b, c et $\widehat{C}$.*

On a d'abord :

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}$$

Puis en appliquant les formules du paragraphe 11 :

$$b = a \sin B$$
$$c = a \cos B$$

Le problème est toujours possible du moment que B est bien un angle aigu.

Il existe des tables qui donnent les lignes trigonométriques des angles ou, plus exactement, les logarithmes de ces lignes : Nous verrons que les logarithmes remplacent avantageusement les lignes elles-mêmes dans les calculs. Les formules ci-dessus permettent donc de trouver les éléments inconnus du triangle.

2e cas. — *On donne a et b ; on cherche c, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.*

On a :

$$b = a \sin B$$
$$b = a \cos C$$

On en tire :

$$\text{Sin } B = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cos } C = \frac{b}{a}$$

Ce résultat nous montre en passant que le *sinus d'un angle est égal au cosinus de l'angle complémentaire.*

On peut au moyen de ces formules, calculer $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ et en déduire l'autre angle.

On calcule ensuite c par l'une des formules

$$c = a \sin C$$
$$c = a \cos B$$

Pour que les valeurs de sin B ou de cos C soient acceptables, il faut qu'elles soient comprises entre — 1 et + 1 (3). Du reste, les angles B et C étant complémentaires, leurs lignes, sinus et cosinus, sont positives, donc on doit avoir :

$$0 < \frac{b}{a} < 1$$

ce qui suppose

$$b < a$$

Le problème n'est possible qu'à cette condition. Et, en effet, nous savons que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est plus grande que chacun des côtés de l'angle droit.

3e cas. — *On donne b et c ; on cherche a, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.*

On a :

$$b = a \sin B$$
$$c = a \cos B$$

d'où on tire, en divisant membre à membre :

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B}$$

Nous verrons plus loin que le rapport $\frac{\sin B}{\cos B}$ permet de trouver l'angle B.

Celui-ci étant connu, on en déduit facilement a et $\widehat{C}$.

Le problème est toujours possible.

13. Lignes trigonométriques auxiliaires. — Tangente, cotangente, sécante, cosécante. — En A sur l'axe des cosinus (fig. 5) élevons une perpendiculaire indéfinie $t' t$. C'est *l'axe des tangentes.* Son sens positif est $t' t$ et son origine A. Elevons en B une perpendiculaire $r' r$ à l'axe des sinus. C'est *l'axe des cotangentes.* Son sens positif est $r' r$ et son origine B.

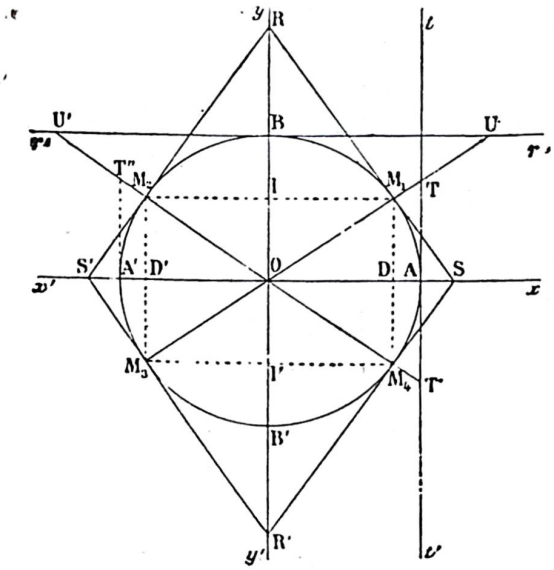


Fig. 5

Soit un arc A M_1 ; prolongeons le rayon O M_1. Le prolongement rencontre en T l'axe des tangentes et en U l'axe des cotangentes. *Le segment* A T *est la* **tangente** *de l'arc* A M_1, *ou de l'angle* A O M_1. *Le segment* B U *est la* **cotangente** *de l'arc* A M_1 *et de l'angle* A O M_1.

Si l'extrémité de l'arc ne se termine pas dans le premier quadrant, il se peut qu'on soit obligé de prolonger le rayon à partir du centre de la circonférence et non à partir de l'extrémité de l'arc. C'est le cas par exemple pour l'arc A M^3. Il faut prolonger M^3 O dans le sens M^3 O T U pour obtenir la tangente A T et la cotangente B U.

A part cette observation, la définition est générale quelle que soit la position du point M sur la circonférence.

La tangente d'un arc x donné se représente par le symbole

$$tg\ x$$

qu'on énonce : tangente x. La cotangente se représente par le symbole

$$\cot x$$

qu'on énonce : cotangente x.

Nous remarquerons que deux arcs dont les extrémités sont diamétralement opposées ont même tangente et même cotangente.

Menons par l'extrémité de l'arc, M_1 par exemple, une tangente à la circonférence. Cette tangente coupe en S l'axe des cosinus et en R l'axe des sinus. *Le segment O S compté sur l'axe x'x, de sens positif x'x et d'origine O, est la* **sécante** *de l'arc* A M. *Le segment* O R *compté sur l'axe des sinus, de sens positif y'y et d'origine* O, *est la* **cosécante** *de l'arc* A M_1.

La définition s'applique aux arcs des quatre quadrants. L'arc A M^2, par exemple, a pour sécante O S' et pour cosécante O R. On écrit :

$$\text{séc}\ x \qquad \text{cosec}\ x$$

qu'on énonce : sécante x, cosécante x.

On voit tout de suite que deux arcs, tels que A M_1 et A M^2, qui ont leurs extrémités M_1 et M^2 sur une même parallèle à $x'x$, c'est-à-dire qui ont même sinus, ont aussi *même cosécante*. Deux arcs ont *même cosinus*, tels que A M_1, A M^4 ou A M^2, A M^3 ont aussi *même sécante*.

14. Variations de la tangente. — Supposons que l'extrémité M de l'arc parcoure la circonférence de A en A, l'arc croissant de o à 2π, et voyons comment varie la tangente.

Quand l'arc est nul, M est en A, et T est lui-même en A, la tangente est nulle. Au fur et à mesure que l'arc augmente de o à $\frac{\pi}{2}$, le point M se rapproche de B et le point T s'éloigne de A, vers le haut : la tangente est positive et elle croît. Elle augmente au délà de toute limite quand le point M est infiniment rapproché de B, et que l'arc vaut $\frac{\pi}{2}$, on dit que la tangente est infiniment grande, elle vaut $+\infty$.

Mais quand l'arc dépasse $\frac{\pi}{2}$, le point M passe entre B et A', le prolongement du rayon ne rencontre plus $t't$ au-dessus de A, mais au-dessous. La tangente passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, c'est une discontinuité. L'arc continuant à augmenter de $\frac{\pi}{2}$ à π, la tangente passe de $-\infty$ à o, elle croît.

Quand l'arc croît de π à 2π la tangente repasse par les mêmes valeurs que précédemment.

L'étude des variations de la cotangente se fait d'une manière identique.

Le tableau suivant fait ressortir les résultats de cette étude :

Valeur de l'arc	o	croît	$\frac{\pi}{2}$	croît	π	croît	$\frac{3\pi}{2}$	croît	2π
Valeur de l'angle.....	o	croît	90°	croît	180°	croît	270°	croît	360°
Tangente	o	croît	$+\infty \mid -\infty$	croît	o	croît	$+\infty \mid -\infty$	croît	o
Cotangente	$+\infty$	décroît	o	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	o	décroît	$-\infty$

15. Variation de la sécante. — L'arc étant nul, le point S se confond avec le point A (fig. 5), la sécante est égale à $+1$. Au fur et à mesure que le point M se déplace de A en B, le point S s'éloigne du côté de x et O S croît de $+1$ à $+\infty$. Quand M passe de l'autre côté du point B, la tangente au point B bascule, pour ainsi dire autour du point B et va rencontrer $x'x$ du côté de x' ; la sécante passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, il y a discontinuité. Puis, M se rapprochant de A', la sécante passe de $-\infty$ à -1. Quand M parcourt la demi-circonférence A' B' A la sécante repasse en sens inverse par les mêmes valeurs.

Le tableau suivant indique des variations de la sécante et de la cosécante :

Valeur de l'arc	o	croît	$\frac{\pi}{2}$	croît	π	croît	$\frac{3\pi}{2}$	croît	π
Valeur de l'angle	o	croît	90°	croît	180°	croît	270°	croît	360°
Sécante	$+1$	croît	$+\infty \mid -\infty$	croît	-1	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	$+1$
Cosécante.....	$+\infty$	décroît	$+1$	croît	$+\infty \mid -\infty$	croît	-1	décroît	$-\infty$

La sécante et la cosécante ne peuvent jamais prendre de valeurs comprises entre -1 et $+1$.

16. Angles complémentaires. — Considérons l'angle A O M (fig. 5).

Il a pour lignes trigonométriques, en posant A O M $= \alpha$:

$$\begin{aligned} OI &= \sin \alpha \\ OD &= \cos \alpha \\ AT &= tg\ \alpha \\ BU &= \cot \alpha \\ OS &= \text{séc}\ \alpha \\ OR &= \text{cosec}\ \alpha \end{aligned}$$

L'angle complémentaire de A O M_1, c'est M_1 O B. Evaluons ses lignes trigonométriques. Pour cela, plions la figure autour de $y'y$, de manière à rabattre la demi-circonférence B A B' sur la demi-circonférence B A' B'. Le point M' se rabat en M^2, S R coïncide avec S' R, O D avec O D'. Prenons $y'y$ comme axe des cosinus et $x'x$ comme axe des sinus ; les lignes trigonométriques de l'angle B O M_2 = M_1 O B, complément de l'angle α, sont, en remarquant que

$$BOM_2 = 90^\circ - \alpha$$

et que A T prend la position A' T''.

$$\begin{aligned} OI &= \cos (90^\circ - \alpha) \\ OD' &= \sin (90^\circ - \alpha) \\ BU' &= tg\ (90^\circ - \alpha) \\ A'T'' &= \cot (90^\circ - \alpha) \\ OR &= \text{séc}\ (90^\circ - \alpha) \\ OS' &= \text{cosec}\ (90^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

Donc, si on tient compte de ce que O D', B U', A' T'', et O S' ne sont autres que les rabattements de O D, B U, A T et O S :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos (90^\circ - \alpha) \\ \cos \alpha &= \sin (90^\circ - \alpha) \\ tg\ \alpha &= \cot (90^\circ - \alpha) \\ \cot \alpha &= tg\ (90^\circ - \alpha) \\ \text{séc}\ \alpha &= \text{cosec}\ (90^\circ - \alpha) \\ \text{cosec}\ \alpha &= \text{séc}\ (90^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

Ainsi le sinus, la tangente et la sécante d'un arc, ou d'un angle, sont égaux au cosinus, à la cotangente et à la cosécante de l'arc ou de l'angle complémentaires. Et réciproquement. C'est ce qu'on a voulu exprimer en faisant commencer par la syllabe co les noms des trois lignes : cosinus, cotangente, cosécante. Le cosinus d'un arc, par exemple, n'est que le sinus de l'arc complémentaire.

Notre démonstration est générale.

17. — Angles supplémentaires. — Considérons l'angle A O $M_1 = \alpha$ (fig. 5). Il a pour supplément l'angle M_1 O A'. Nous ramènerons très simplement l'origine M_1 de ce dernier angle, à l'origine A de la circonférence de la manière suivante :

Abaissons de M_1 la perpendiculaire M_1 I sur O B et prolongeons cette perpendiculaire jusqu'en M_2. Le point M_2 est symétrique du point M_1 par rapport à $y'y$ et comme A' est symétrique de A, l'arc A M_1 est égal à l'arc M_2 A' et l'angle A O M_1 à l'angle M_2 O A'. Par suite l'angle A O M_2 est égal à l'angle M_1 O A'.

Cette démonstration est toujours vraie. Par exemple elle serait vraie pour l'arc A B M_3 qui a pour supplément l'arc négatif M_3 A'. La perpendiculaire M_3 M_4, à $y'y$ donne en M_4 l'extrémité d'un arc négatif A M_4 égal à M_3 A'. Si nous supposons que l'arc A B M_3 ait 210°, on a :

$$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$$

Pour faire 180°, il faut retrancher 30° à 210°, l'arc A M_4 aura — 30°, comme l'arc M_3 A.

Posons

$$A\,O\,M_1 = \alpha \qquad A\,O\,M_2 = 180^\circ - \alpha$$

On a :

$$\begin{array}{llll}
\sin\alpha = OI & \sin(180^\circ-\alpha) = OI \\
\cos\alpha = OD & \cos(180^\circ-\alpha) = OD' \\
\mathrm{tg}\,\alpha = AM & \mathrm{tg}(180^\circ-\alpha) = AT' \\
\cot\alpha = BU & \cot(180^\circ-\alpha) = BU' \\
\text{séc}\,\alpha = OS & \text{séc}(180^\circ-\alpha) = OS' \\
\text{coséc}\,\alpha = OR & \text{coséc}(180^\circ-\alpha) = OR
\end{array}$$

Si on remarque que O D et O D', A T et A T', B U et B U', O S et O S' sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires, on voit que l'on a :

$$\begin{array}{rl}
\sin(180^\circ-\alpha) = & \sin\alpha \\
\cos(180^\circ-\alpha) = & -\cos\alpha \\
\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha) = & -\mathrm{tg}\,\alpha \\
\cot(180^\circ-\alpha) = & -\cot\alpha \\
\text{séc}(180^\circ-\alpha) = & -\text{séc}\,\alpha \\
\text{coséc}(180^\circ-\alpha) = & \text{coséc}\,\alpha
\end{array}$$

Deux angles supplémentaires ont même sinus et même cosécante. Les autres lignes ont des valeurs symétriques.

18. Remarque. — On écrit souvent le complément d'un arc ou d'un angle donné α, sous la forme

$$\frac{\pi}{2} - \alpha$$

et le supplément, sous la forme :

$$\pi - \alpha$$

19. Relations fondamentales entre les lignes trigonométriques d'un même arc. — Nous avons déjà trouvé (7) entre le sinus et le cosinus d'un même arc x la relation fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (1)$$

Considérons maintenant l'arc A $M_1 = x$ (fig. 5) avec toutes ses lignes trigonométriques.

Les triangles M_1 O D, T O A sont semblables et on a :

$$\frac{OD}{OA} = \frac{DM_1}{AT}$$

ou

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{\mathrm{tg}\,x}$$

d'où on tire:

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{(II)}$$

Les triangles semblables O I M_1, O B U nous donnent également :

$$\frac{OI}{OB} = \frac{IM_1}{BU}$$

$$\frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{\cot x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{(III)}$$

En rapprochant les formules (II) et (III) on trouve:

$$\cot x = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x} \qquad \text{(IV)}$$

Dans le triangle rectangle O M_1 S, le côté O M_1 est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière O S et sa projection O D sur l'hypoténuse :

$$\overline{OM_1}^2 = OD \times OS$$

$$1 = \cos x \times \text{séc}\,x$$

$$\text{séc}\,x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{(V)}$$

Du triangle rectangle O M_1 R, on tire de la même façon

$$\overline{OM_1}^2 = OI \times OR$$

$$1 = \sin x \times \text{coséc}\,x$$

$$\text{coséc}\,x = \frac{1}{\sin x} \qquad \text{(VI)}$$

Les six relations que nous venons d'établir et que nous groupons ci-dessous, permettent de calculer les lignes trigonométriques d'un arc, connaissant l'une d'elles.

$$\left\{\begin{array}{ll}
\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{(I)} & \cot x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x} \quad \text{(IV)} \\
\mathrm{tg}\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \text{(II)} & \text{séc}\,x = \dfrac{1}{\cos x} \quad \text{(V)} \\
\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad \text{(III)} & \text{coséc}\,x = \dfrac{1}{\sin x} \quad \text{(VI)}
\end{array}\right.$$

20. Application. — *Calculer les lignes trigonométriques de l'arc x, connaissant sin x.*

De (1) on tire (7) :

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

La relation (II) nous donne alors :

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

La relation (III) :

$$\cot.\,x = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$$

La relation (V) :

$$\text{séc}\,x = \frac{1}{\mp\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

La relation (VI) :

$$\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

On voit qu'il y a deux valeurs pour chacune des lignes trigonométriques : cosinus, tangente, cotangente, sécante. En effet, à un sinus donné O I ou O I', correspondent deux extrémités d'arc M_1, M_2 ou M_3, M_4 symétriques par rapport à l'axe des sinus. Les arcs ainsi déterminés ont leur sinus et leur cosécante égaux, toutes leurs autres lignes ont des valeurs symétriques. C'est justement ce que nous indiquent les relations précédentes.

Il est bien évident qu'il faut prendre le même signe devant le radical dans toutes les relations à la fois, et non le signe + dans certaines et le signe — dans d'autres.

Le problème n'est possible que si

$$-1 < \sin x < +1$$

Nous en avons déjà dit la raison (7).

21. Application. — *Calculer les lignes trigonométriques de l'arc x connaissant* tg *x.*

De la relation (II) on tire :

$$\frac{\text{tg}^2\, x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

ou (Arithmétique 247)

$$\frac{\text{tg}^2\, x + 1}{1} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

et en s'appuyant sur la relation (I) :

$$\frac{\text{tg}^2\, x + 1}{1} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2\, x}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\, x}} \qquad (1)$$

En revenant à la relation (II), on trouve :

$$\sin x = \text{tg}\, x . \cos x$$

$$\sin x = \pm \frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\, x}} \qquad (2)$$

Des autres relations on déduit alors :

$$\cot x = \frac{1}{\text{tg}\, x} \qquad (3)$$

$$\text{séc}\, x = \pm \sqrt{1 + \text{tg}^2\, x} \qquad (4)$$

$$\text{cosec}\, x = \pm \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2\, x}}{\text{tg}\, x} \qquad (5)$$

On doit prendre le même signe dans toutes les formules en même temps.

Comme un carré est toujours positif, $1 + \text{tg}^2\, x$ est toujours positif et par conséquent on peut toujours extraire la racine carrée, le problème est toujours possible.

On voit qu'il y a une double série de valeurs pour les lignes : sinus, cosinus, sécante et cosécante. Ce résultat s'explique géométriquement.

A une tangente donnée A T (fig. 5), correspondent deux arcs A M_1 et A M_3 dont les extrémités sont diamétralement opposées. Il est facile de se rendre compte que ces deux arcs ont même tangente et même cotangente et que toutes leurs autres lignes sont symétriques.

22. Remarque. — Le calcul des lignes de l'arc *x*, au moyen de l'une d'elles, se fait, dans tous les cas, par l'une des deux méthodes que nous venons d'indiquer.

A peu de chose près, le calcul des lignes à partir de sin *x*, séc *x* ou cosec *x* se fait de la même manière.

Le calcul des lignes à partir de cot *x* se fait comme à partir de tg *x*.

Dans la formule $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B}$ du 3e cas de résolution des triangles rectangles, on peut remplacer $\frac{\sin B}{\cos B}$ par tg B.

23. Problème de l'addition des arcs. — *Etant donné les lignes trigonométriques de deux arcs (ou de deux angles) trouver les lignes trigonométriques de la somme de ces deux arcs (ou de ces deux angles).*

Soient deux arcs *a* et *b*, connaissant sin *a*, sin *b*, cos *a*, cos *b*, etc., nous nous proposons de calculer sin $(a + b)$, cos $(a + b)$, etc.

Sur la circonférence trigonométrique (fig. 6) portons l'arc A M = *a* et, à la suite, l'arc M N = *b* ; nous voulons trouver les lignes trigonométriques de l'arc A N qui est la somme de A M et de M N.

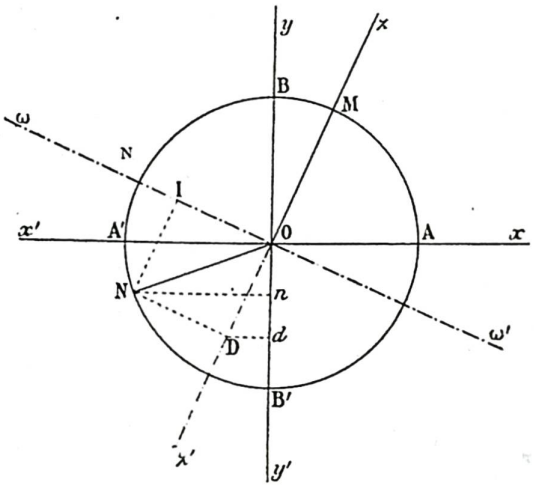


Fig. 6

Pour construire les lignes trigonométriques de l'arc M N, nous prendrons pour origine des arcs le point M, l'axe des cosinus sera *z' z* prolongement de O M, l'axe des sinus sera un axe ω ω' perpendiculaire à *z'z* au point O. Le sinus de l'arc M N est O I et son cosinus est O D ; D N est, du reste, égal à O I. Donc, dans le triangle rectangle O N D, O D représente le cosinus et D N le sinus de l'arc M N.

Supposons qu'un mobile parcoure O N de O en N et qu'on projette à chaque instant la position de ce mobile sur un axe quelconque *y'y* par exemple. Lorsque le mobile aura parcouru entièrement O N, sa projection sur *y'* aura décrit la projection de O N sur *y'y*, c'est-à-dire O*n*.

Mais imaginons maintenant qu'un mobile parcoure le contour O D N de O en N et qu'à chaque instant on projette le mobile sur *y'y*. La projection du mobile parcourra d'abord la projection *od* de O D, puis *dn* de D N. En définitive, la projection du mobile aura parcouru aussi O*n*. Si on désigne par proj. O N, proj. O D, proj. D N les valeurs algébriques positives, négatives ou nulles des trois côtés du triangle O N D sur *y'y* et, en général, sur un axe affecté de sens, on a toujours :

$$\text{proj. O N} = \text{proj. O D} + \text{proj. D N}$$

C'est cette égalité que nous allons appliquer à la résolution du présent problème, en nous appuyant d'autre part sur le théorème (9).

La projection de O N sur $y'y$, c'est le sinus de l'arc A N, c'est-à-dire de $(a + b)$; la projection de O N sur $x'x$, c'est le cosinus de $(a + b)$. Projetons d'abord sur $y'y$:

$$\text{proj. O N} = \sin (a + b)$$

La projection de O D est la même que celle de O I :

proj. O D = valeur algébrique de O D × cos angle zoy

proj. D N = valeur algébrique de D N × cos angle $yo\,\omega$

valeur algébrique de O D = $\cos b$
valeur algébrique de D N = $\sin b$
angle $zoy = xoy - xoz = 90^\circ - a$
angle $yo\,\omega = xoz = a$

Les angles $yo\,\omega$ et xoz sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun.

Donc :

$$\sin (a + b) = \cos b \cos (90^\circ - a) + \sin b \cos a$$

Mais (17) :

$$\cos (90^\circ - a) = \sin a$$

On a donc en définitive

$$\mathbf{\sin (a + b) = \sin a. \cos b + \sin b. \cos a} \qquad \text{(VII)}$$

Projetons sur $x'x$:

$$\text{proj. O N} = (a + b)$$

proj. O D = $\cos b \times \cos xoz = \cos a. \cos b$ car $xoz = a$

proj. D N = proj. O I = $\sin b \times \cos \omega ox$

et comme

$$\omega ox = a + 90$$

$$\text{proj. D N} = \sin b. \cos (90^\circ + a)$$

Donc

$$\cos (a + b) = \cos a. \cos b + \sin b. \cos (90^\circ + a)$$

Appliquons cette dernière formule à $\cos (90^\circ + a)$ en remplaçant partout a par 90° et b par a. On trouve :

$$\cos (90^\circ + a) = \cos 90^\circ. \cos a + \sin a. \cos (90^\circ + 90^\circ)$$

$\cos 90^\circ$ est nul :

$$\cos (90^\circ + a) = 0 \times \cos a + \sin a. \cos 180^\circ$$

mais $\cos. 180^\circ$ vaut -1. Donc $\sin a. \cos 180^\circ$ vaut $-\sin a$:

$$\cos (90^\circ + a) = -\sin a$$

Portons cette valeur dans la formule de $\cos (a + b)$:

$$\mathbf{\cos (a + b) = \cos a. \cos b - \sin a. \sin b} \qquad \text{(VIII)}$$

Les deux formules (VII) et (VIII) permettent de calculer les autres lignes trigonométriques de $(a + b)$, en particulier la tangente.

La formule (II) nous permet d'écrire :

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\sin (a + b)}{\cos (a + b)}$$

d'où, en appliquant (VII) et (VIII) :

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\sin a. \cos b + \sin b. \cos a}{\cos a. \cos b - \sin a. \sin b}$$

Divisons les deux termes de l'expression fractionnaire par $\cos a. \cos b$:

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\dfrac{\sin a. \cos b}{\cos a. \cos b} + \dfrac{\sin b. \cos a}{\cos a. \cos b}}{\dfrac{\cos a. \cos b}{\cos a. \cos b} + \dfrac{\sin a. \sin b}{\cos a. \cos b}}$$

En opérant les réductions dans chaque terme séparément :

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a}{\cos a} \times \dfrac{\sin b}{\cos b}}$$

et enfin, en appliquant la formule (II) :

$$\mathbf{\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a. \operatorname{tg} b}} \qquad \text{(IX)}$$

La formule (IV) nous permet de déduire la $\cot (a + b)$ de ce résultat :

$$\cot (a + b) = \frac{1 - \operatorname{tg} a. \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}$$

en remplaçant $\operatorname{tg} a$ par $\dfrac{1}{\cot a}$, $\operatorname{tg} b$ par $\dfrac{1}{\cot b}$ on peut écrire aussi :

$$\cot (a + b) = \frac{1 - \dfrac{1}{\cot a} \times \dfrac{1}{\cot b}}{\dfrac{1}{\cot a} + \dfrac{1}{\cot b}}$$

multiplions les deux termes du second membre par $\cot a. \cot b$

$$\cot (a + b) = \frac{\cot a. \cot b - 1}{\cot b + \cot a}$$

Ainsi :

$$\mathbf{\cot (a + b) = \frac{\cot a. \cot b - 1}{\cot a + \cot b}} \qquad \text{(X)}$$

On peut établir directement cette formule en partant de (III), et de (VII) et (VIII).

La sécante et la cosécante de $(a + b)$ se déduiraient très facilement de (V) et (VI), et de (VII) et (VIII).

Les formules les plus usitées sont donc :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\mathbf{\sin (a + b) = \sin a. \cos b + \sin b. \cos a} & \text{(VII)} \\
\mathbf{\cos (a + b) = \cos a. \cos b - \sin a. \sin b} & \text{(VIII)} \\
\mathbf{\operatorname{tg} (a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a. \operatorname{tg} b}} & \text{(IX)} \\
\mathbf{\cot (a + b) = \dfrac{\cot a. \cot b - 1}{\cot a + \cot b}} & \text{(X)}
\end{array}\right.$$

24. Multiplication des arcs. — *Connaissant les lignes trigonométriques d'un arc trouver les lignes d'un arc double, triple, etc.*

1° Connaissant les lignes de l'arc a, trouver les lignes de $2a$.

Dans les formules (VII), (VIII), (IX) et (X), faisons $b = a$:

$$\sin 2a = \sin a. \cos a + \sin a. \cos a$$

$$\mathbf{\sin 2a = 2 \sin a. \cos a} \qquad \text{(XI)}$$

$$\cos 2a = \cos a. \cos a - \sin a. \sin a$$

$$\mathbf{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \qquad \text{(XII)}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a. \operatorname{tg} a}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} \qquad \text{(XIII)}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot a. \cot a - 1}{\cot a + \cot a}$$

$$\mathbf{\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}} \qquad \text{(XIV)}$$

2° Connaissant les lignes de a trouver les lignes de $3\,a$, etc.

Dans les formules (VII), (VIII), etc. faisons $a = 2\,a$, $b = a$:

$$\sin 3\,a = \sin 2\,a.\ \cos a + \sin a.\ \cos 2\,a$$

et, en appliquant (XI) et (XII)

$$\sin 3\,a = 2 \sin a.\ \cos a.\ \cos a + \sin a\,(\cos^2 a - \sin^2 a)$$

$$\sin 3\,a = 2 \sin a.\ \cos^2 a + \sin a.\ \cos^2 a - \sin^3 a$$

$$\sin 3\,a = 3 \sin a.\ \cos^2 a - \sin^3 a$$

$$\sin 3\,a = 3 \sin a\,(1 - \sin^2 a) - \sin^3 a$$

enfin

$$\sin 3\,a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

25. Division des arcs. — *Connaissant les lignes de l'arc a, calculer les lignes de l'arc* $\frac{a}{2}$.

Dans la formule (XII) faisons $a = \frac{a}{2}$ et écrivons le second membre le premier :

$$\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \cos a$$

D'autre part nous avons (1) :

$$\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} = 1$$

Additionnons membre à membre ces deux relations, il vient :

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a \qquad (1)$$

Retranchons la première relation de la seconde, il vient :

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire :

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

d'où

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \qquad \text{(XV)}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \qquad \text{(XVI)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \qquad \text{(XVII)}$$

Les formules (XVI) et (XVII) ont chacune un double signe et comme $\cos \frac{a}{2}$ et $\sin \frac{a}{2}$ ne se déduisent pas l'un de l'autre, on peut prendre leurs signes d'une façon quelconque, toutefois le signe de la tangente se déduit de celui des deux autres lignes, car la tangente est le quotient du sinus par le cosinus, elle est positive si ces deux lignes sont de même signe, et négative si ces deux lignes sont de signe contraire. On peut donc prendre les signes des quatre façons suivantes :

	sin	cos	tg
1	+	+	+
2	—	—	+
3	+	—	—
4	—	+	—

Cela fait quatre groupes de valeurs correspondant à quatre arcs différents.

Ce résultat peut être interprété géométriquement. On a calculé les lignes en fonction de cos a.

Soit :

$$O\,D = \cos a$$

(fig. 7). Au cosinus O D correspondent deux extrémités d'arcs M et M'. Or chacun des deux arcs ainsi limités peut être compté soit positivement, soit négativement.

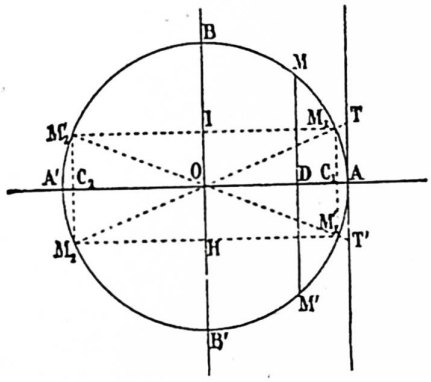


Fig. 7

L'arc positif A M a pour milieu M_1 mais l'arc négatif A M' a pour milieu un point M_2, diamétralement opposé au point M_1. De même l'arc positif A M' a pour milieu M'_2 et l'arc négatif A M' a pour milieu un point M'_1 diamétralement opposé à M'_2. Il est d'ailleurs aisé de voir que M_1 et M'_1, M_2 et M'_2 sont symétriques par rapport à A'A, que M_1 et M'_2, M'_1 et M_2 sont symétriques par rapport à B'B.

Les lignes trigonométriques des angles limités par ces quatre points sont égales en valeur absolue, elles diffèrent par le signe.

Ces signes sont :

	sin	cos	tg
pour l'arc A M_1 :	+	+	+
A M_2 :	—	—	+
A M'_1 :	—	+	—
A M'_2 :	+	—	—

On voit que l'interprétation géométrique concorde bien avec le résultat précédent.

Exercices

1. — Réduire au premier quadrant les arcs

$$8542^\circ\,; \quad -\frac{22\,\pi}{3}\,; \ 1547 \text{ g, } 25$$

2. — Sachant que

$$\text{Cos } a = \frac{2}{3}$$

Calculer à 0,01 près les autres lignes trigonométriques.

3. — Calculer les lignes trigonométriques de l'arc de 75° en remarquant que l'on a

$$75 = 45 + 30$$

4. — Démontrer que le sinus de la somme de deux arcs positifs et inférieurs à 90° est plus petit que la somme de leurs sinus.

5. — Vérifier l'égalité :

$$\frac{2 \sin (a + b)}{\text{Cos } (a + b) + \text{Cos } (a - b)} = \text{tg } a + \text{tg } b$$

6. — Vérifier l'identité :

$$\text{cotg } a - \text{tg } a = 2 \text{ cotg } 2a$$

Résolution des triangles

La résolution des triangles est une des plus importantes applications pratiques de la trigonométrie.

Nous avons déjà vu la résolution de trois cas des triangles rectangles, nous allons examiner la résolution du 4e cas des triangles rectangles et la résolution des triangles quelconques. On se propose toujours de *calculer les éléments d'un triangle connaissant trois éléments dont un côté au moins de ce triangle.*

Les calculs qui concernent la résolution des triangles nécessitent l'emploi des tables de logarithmes qui donnent les logarithmes des lignes trigonométriques des arcs de seconde en seconde. Comme nous avons déjà étudié le calcul des logarithmes en algèbre, nous donnerons les formules logarithmiques correspondant aux divers cas de résolution des triangles.

TRIANGLES RECTANGLES

26. Nous rappelons que a étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, b et c les côtés de l'angle droit, A, B, C les angles opposés aux côtés de même nom, nous avons trouvé (13) pour les triangles rectangles les formules suivantes :

$$\begin{cases} (1)\ b = c \text{ tg } B \\ (2)\ b = a \sin B \\ (3)\ c = a \cos B \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (1')\ c = b \text{ tg } C \\ (2')\ c = a \sin C \\ (3')\ b = a \cos C \end{cases}$$

et nous avons distingué les cas :

1er cas. — *On donne a et* B. *Calculer* C, *b*, *c et* S.

Les formules de résolution sont :

$$C = 90^\circ - B$$
$$(4)\ b = a \sin B$$
$$(5)\ c = a \cos B$$

et la surface S est donnée par :

$$(6) \qquad S = \frac{bc}{2} = \frac{a^2}{2} \sin B \cos B$$

Les trois formules (4), (5) et (6) sont calculables par logarithmes.

$$\log b = \log a + \log \sin B$$
$$\log c = \log a + \log \cos B$$
$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \cos B - \log 2.$$

2e cas. — *On donne a et b (ou c). Calculer c, (ou b),* B, C *et* S.

Les formules de résolution sont :

$$(7) \qquad \text{Sin } B = \frac{b}{a} \qquad C = 90^\circ - B$$

$$(8) \qquad c = \frac{b}{\text{tg } B}$$

$$(9) \qquad S = \frac{b\,c}{2} = \frac{b^2}{2 \text{ tg } B}$$

Ces trois formules sont calculables par logarithmes.

$$\log \sin B = \log b - \log a$$
$$\log c = \log b - \log \text{tg } B$$
$$\log S = 2 \log b - \log 2 - \log \text{tg } B$$

3e cas. — *On donne b et c. Calculer a,* B, C *et* S.

On a :

$$(10) \qquad \text{tg } B = \frac{b}{c} \qquad C = 90^\circ - B$$

$$(11) \qquad a = \frac{b}{\sin B}$$

$$(12) \qquad S = \frac{b\,c}{2}$$

d'où

$$\log \text{tg } B = \log b - \log c$$
$$\log a = \log b - \log \sin B$$
$$\log S = \log b + \log c - \log 2$$

4e cas. — *On donne b (ou c) et un angle aigu* B *(ou* C).

Calculer a, c (ou b), C (ou B) et S.

On a :

$$C = 90^\circ - B$$

$$(13) \qquad a = \frac{b}{\sin B}$$

$$(14) \qquad c = \frac{b}{\text{tg } B}$$

$$(15) \qquad S = \frac{b\,c}{2} = \frac{b^2}{2 \text{ tg } B}$$

Ces formules donnent avec les logarithmes :

$$\log a = \log b - \log \sin B$$
$$\log c = \log b - \log \text{tg } B$$
$$\log S = 2 \log b - \log 2 - \log \text{tg } B$$

TRIANGLES QUELCONQUES

27. Théorème. — *Dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.*

Soit le triangle A B C (fig. 8). Menons la circonférence circonscrite au triangle.

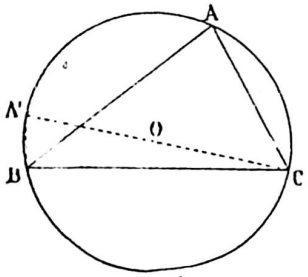


Fig. 8

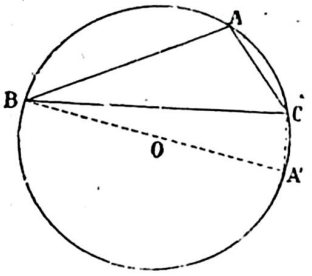


Fig. 9

Par le sommet C du triangle menons le diamètre C O A′ et joignons B A′. Le triangle C A′ B est rectangle en B (115). Les angles A et A′ sont égaux (111).

Or, dans le triangle A′ B C, on a :

$$(1) \qquad B\,C = A'\,C \sin A'$$

Posons :

$A'C = 2R \qquad BC = a \qquad AC = b \qquad AB = c$

L'égalité (1) devient :

(2) $$a = 2R \sin A'$$

mais les angles A et A′ sont égaux comme ayant même mesure, donc :

(3) $$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

En joignant A′A on obtient un triangle rectangle en A dont l'angle A A′ C est égal à B. On trouvera comme ci-dessus :

(4) $$\frac{b}{\sin B} = 2R$$

En menant un diamètre par B, on trouvera encore :

(5) $$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

Des égalités (3), (4) et (5), on déduit :

$$\text{(XVIII)} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

28. Remarque. — Si le centre O de la circonférence est extérieur au triangle, comme dans la figure (fig. 9), l'angle B A C est supplémentaire de l'angle A, mais il a toujours même sinus (14) et par conséquent l'égalité (1) subsiste. La démonstration n'est pas changée.

29. Théorème. — *Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

1° L'angle compris est aigu.

On a (fig. 10) d'après le théorème (156) de géométrie :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}$$

Mais dans le triangle rectangle B C D :

$$\overline{BD} = \overline{BC}.\cos B$$

d'où

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB.\,BC.\cos B$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,a\,c\cos B$$

2° L'angle compris est obtus.

D'après le théorème (158) de géométrie on a (fig. 11) :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BD$$

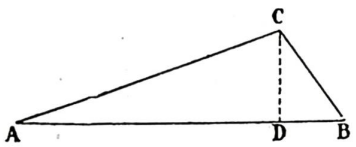


Fig. 10

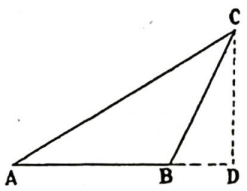


Fig. 11

Dans le triangle rectangle B C D on a :

$$BD = BC \times \cos CBD.$$

Mais (14) :

$$\cos CBD = -\cos CBA$$

d'où :

$$BD = -BC.\cos CBA$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}.\,\overline{BC}.\cos C$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,a\,c.\cos B$$

Pour les trois côtés d'un triangle, on peut donc établir les trois formules :

$$\text{(XIX)} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C \end{cases}$$

30. Premier cas de résolution des triangles quelconques. — *On donne un côté et deux angles d'un triangle, trouver les deux autres côtés et le troisième angle.*

Soient a, B et C les données.

On applique les formules XVIII.

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \\ A + B + C = 180^\circ \quad \text{(géométrie 63).} \end{cases}$$

A est donné par l'égalité :

$$A = 180 - B - C$$

b et c sont donnés par :

(1) $$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

(2) $$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

A et B + C étant les mesures de deux angles supplémentaires on a

$$\text{Sin } A = \sin (B + C)$$

et les formules précédentes peuvent s'écrire

$$b = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)} \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}$$

Quant à la surface, on remarque que la hauteur C D relative au côté A B par exemple peut se calculer dans le triangle C B A (fig. 10 et 11)

$$CD = AC.\sin A$$

formule toujours acceptable, A et son supplément ayant même sinus.

On a donc :

$$S = \frac{AB \times CD}{2} = \frac{AB \times AC \times \sin A}{2} = \frac{b\,c}{2}\sin A$$

$$S = \frac{b\,c}{2}\sin A = \frac{a^2 \sin B.\sin C}{2 \sin A} = \frac{a^2 \sin B.\sin C}{2 \sin (B + C)}$$

Les formules (1), (2) et (3) se calculent par logarithme :

$$\begin{cases} \log b = \log a + \log \sin B - \log \sin (B + C) \\ \log c = \log a + \log \sin C - \log \sin (B + C) \\ \log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \sin C - \log 2 \\ \qquad\qquad + \log \sin (B + C) \end{cases}$$

31. Problème. — *Transformer en un produit la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus.*

Nous nous proposons de faire subir la transformation aux expressions :

$$\sin p + \sin q$$
$$\sin p - \sin q$$
$$\cos p + \cos q$$
$$\cos p - \cos q$$

Posons :

$$\begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases}$$

De ce système d'équation on tire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{p + q}{2} \\ y = \dfrac{p - q}{2} \end{cases}$$

D'autre part on a :

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin (x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

En additionnant et retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\sin y \cos x$$

ou :

$$\text{(XX)} \quad \begin{cases} \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2} \end{cases}$$

Opérons de même pour le cosinus :

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Additionnons et retranchons membre à membre :

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$$

ou :

$$\text{(XXI)} \quad \begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

En divisant membre à membre les égalités XX, on obtient :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}}{\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{p+q}{2}}{\cos\dfrac{p+q}{2}} \times \frac{\cos\dfrac{p-q}{2}}{\sin\dfrac{p-q}{2}}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \operatorname{tg}\frac{p+q}{2} \times \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{p-q}{2}}$$

et enfin :

$$\text{(XXII)} \quad \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{p+q}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{p-q}{2}}$$

On trouve de même en partant de la formule XXI :

$$\text{(XXIII)} \quad \frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = -\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

32. Deuxième cas de résolution des triangles quelconques. — *On donne deux côtés d'un triangle et l'angle compris, trouver le troisième côté et les deux autres angles.*

Soient b et c les côtés donnés, A l'angle donné.

On applique les formules :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin B}$$
$$A + B + C = 180^\circ$$

D'après les propriétés des proportions, on peut écrire (arithmétique) :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C}$$

d'où

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{b+c}$$

et (32) :

$$\frac{2\sin\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}}{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$(1) \quad \frac{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

D'un autre côté, on a :

$$(2) \quad B + C = 180^\circ - A$$
$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

les angles $\dfrac{B+C}{2}$ et $\dfrac{A}{2}$ sont complémentaires et on a :

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \cot\frac{A}{2}$$

La formule (1) devient :

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}}{\cot\dfrac{A}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$(3) \quad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \times \cot\frac{A}{2}$$

(3')

$$\log \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \log(b-c) + \log\cot\frac{A}{2} - \log(b+c)$$

La formule (3) ou (3') et la formule (1) donnent B + C et B — C, ce qui permet de trouver B et C.

Connaissant B et C on peut calculer a :

$$(4) \quad a = \frac{b\sin A}{\sin B}$$

$$(4') \quad \log a = \log b + \log\sin A - \log\sin B$$

Enfin, la surface est donnée par :

$$(5) \quad S = \frac{b\,c\sin A}{2}$$

$$(5') \quad \log S = \log b + \log + \log\sin A - \log 2$$

33. Troisième cas de résolution des triangles quelconques. — *On donne deux côtés d'un triangle et l'angle opposé à l'un d'eux, calculer le troisième côté et les deux autres angles.*

On donne a, b, A.

On applique encore les formules :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \\ A + B + C = 180^\circ \end{cases}$$

De la première formule on tire :

$$(1) \quad \sin B = \frac{b\sin A}{a}$$

équation qui donne B. B étant connu, on a

(2) $$C = 180^\circ - A - B$$

Des premières formules on tire alors

(3) $$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Enfin :

(4) $$S = \frac{a\,b}{2} \sin C$$

Discussion. — Le problème n'est pas toujours possible.

On doit avoir en effet :

$$-1 < \sin B < +1$$
$$0 < C < 180^\circ$$

Comme A et B sont positifs, l'équation (2) donne toujours pour C une valeur inférieure à 180°. D'autre part a, b et sin A sont toujours positifs, par conséquent sin B est toujours positif. Les conditions de possibilité se réduisent donc en définitive :

(5) $$\sin B \leqq 1$$

(6) $$C > 0$$

En rapprochant l'équation (1) de l'inégalité (5) on voit qu'il faut avoir.

$$\frac{b \sin A}{a} \leqq 1$$
$$b \sin A \leqq a$$

Soit le triangle A B C (fig. 12) et sa hauteur C D. On a :

$$C\,D = b \sin A$$

L'inégalité précédente signifie donc que C D doit être inférieur ou au plus égal à B C.

Il suffit de rapprocher la présente discussion de celle que nous avons faite en géométrie (134) pour se rendre compte de leur parfaite identité.

Supposons $\frac{b \sin A}{a} < 1$

1° *L'angle* A *donné est aigu.*

180° — A est supérieur à 90°

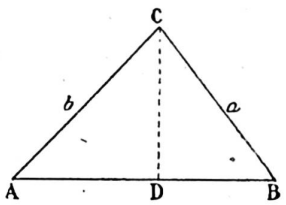


Fig. 12

Or au sin B donné par l'équation (1) correspondent deux angles supplémentaires. Appelons β l'angle aigu correspondant à sin B, on aura deux valeurs de B.

$$B = \beta$$
$$B = 180^\circ - \beta$$

Comme on doit avoir :

$$C > 0$$

il faut qu'on ait :

$$180^\circ - A - B > 0$$

On a certainement :

$$180^\circ - A - \beta > 0$$

Pour qu'on ait :

$$180^\circ - A - 180^\circ + \beta >$$

il faut que :

$$-A + \beta > 0$$

d'où

$$\beta > A$$

ce qui entraîne :

$$\sin B > \sin A$$

ou :

$$\frac{b \sin A}{a} > \sin A$$
$$\frac{b}{a} > 1$$
$$b > a$$

Donc si b est supérieur à a, il y a deux solutions. Si b est inférieur ou égal à a il n'y a qu'une solution.

2° *L'angle* A *est obtus.*

180° — A est inférieur à 90°, il est aigu.

Par suite, la seconde valeur de B, B = 180° — β n'est jamais acceptable. La première β ne convient que si l'on a :

$$180^\circ - A - \beta > 0$$

ou :

$$180^\circ - A > \beta$$

ce qui entraîne :

$$\sin A > \sin \beta$$
$$\sin A > \frac{b \sin A}{a}$$
$$a > b$$

Donc si b est supérieur à a, il n'y a pas de solution. Si b est inférieur à a, il y a une solution.

3° *L'angle* A *est droit.*

180° — A est égal à 90°, c'est un angle droit.

La valeur B = 180° — β n'est pas acceptable. Pour l'autre B = β on doit avoir :

$$180^\circ - A - \beta > 0$$
$$180^\circ - A > \beta$$

ce qui revient à dire que l'angle β doit être aigu. Condition qui est réalisée.

Il y a une solution.

Si l'on a :

$$\frac{b \sin A}{a} = 1$$

on a aussi :

$$\sin B = 1$$

et par suite :

$$B = \beta = 180^\circ - \beta = 90^\circ$$

Les deux angles B sont droits. Il n'y a donc de solution que si A est aigu. Dans ce cas, les deux solutions se confondent en une seule.

On peut résumer cette discussion dans le tableau suivant :

$b \sin A > a$			0 solution
$b \sin A < a$	$A < 90^\circ$	$b > a$	2 solutions
		$b \leqq a$	1 solution
	$A > 90^\circ$	$b < a$	1 solution
		$b \geqq a$	0 solution
	$A = 90^\circ$		1 solution
$b \sin A = a$	$A < 90^\circ$		1 solution
	$A \geqq 90^\circ$		0 solution

34. Quatrième cas de résolution des triangles quelconques. — *On donne les trois côtés d'un triangle, trouver les trois angles.*

On part des formules XIX.

$$(\text{XIX}) \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A & (1) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos B & (2) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C & (3) \end{cases}$$

De la relation (1) on tire :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \qquad (4)$$

Calculons les lignes trigonométriques de l'angle $\frac{A}{2}$ (22) :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

Puis, au moyen de l'équation (4) calculons successivement $1 - \cos A$ et $1 + \cos A$.

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{2\,b\,c - b^2 \quad c^2 + a^2}{2\,b\,c} = \frac{-(b-c)^2 + a^2}{2\,b\,c}$$

ou (algèbre 60) :

$$1 - \cos A = \frac{[a + (b - c)] \quad [a - (b - c)]}{2\,b\,c}$$

$$(5) \quad 1 - \cos A = \frac{(a + b - c) \quad (a + c - b)}{2\,b\,c}$$

On a de même :

$$1 + \cos A = \frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{(b + c^2 - a^2)}{2\,b\,c}$$

$$(6) \quad 1 + \cos A = \frac{(a + b + c) \quad (b + c - a)}{2\,b\,c}$$

ou, en appliquant la notation utilisée en géométrie et posant :

$$a + b + c = 2\,p$$

$$1 - \cos A = \frac{2\,(p - b)\,(p - c)}{b\,c}$$

$$1 + \cos A = \frac{2\,p\,(p - a)}{b\,c}$$

ce qui nous donne enfin :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c)}{b\,c}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{b\,c}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c)}{p\,(p - a)}}$$

En appliquant le même calcul aux deux autres angles on trouve donc les trois systèmes de formules suivants dont chacun donne la solution du problème :

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c)}{b\,c}} \\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - c)}{a\,c}} \\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - b)}{a\,b}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{b\,c}} \\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - b)}{a\,c}} \\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - c)}{a\,b}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c)}{p\,(p - a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - c)}{p\,(p - b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - b)}{p\,(p - c)}} \end{cases}$$

La surface se déduit de la formule

$$S = \frac{b\,c}{2}\sin A$$

ou, en remarquant que (23 : formule XII)

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$S = b\,c\,\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$S = b\,c\sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c) \times p\,(p - a)}{b\,c \times b\,c}}$$

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

Discussion. — On peut discuter la solution du problème au moyen de l'un quelconque des trois groupes de formules. Faisons porter la discussion, par exemple, sur le premier groupe.

Pour que les valeurs soient acceptables il faut qu'on ait :

$$1^\circ \quad \frac{(p - b)\,(p - c)}{b\,c} > 0 \quad \frac{(p - a)\,(p - c)}{a\,c} > 0$$

$$\frac{(p - a)\,(p - b)}{a\,b} > 0$$

$$2^\circ \quad \sin\frac{A}{2} < 1 \qquad \sin\frac{B}{2} < 1 \qquad \sin\frac{C}{2} < 1$$

La première des trois premières inégalités donne, b et c étant positifs :

$$(p - b)\,(p - c) > 0$$

Cette inégalité est satisfaite si l'on a simultanément :

$$(7) \qquad p - b > 0 \text{ et } p - c > 0$$

ou :

$$p - b < 0 \text{ et } p - c < 0$$

Cette dernière hypothèse entraîne :

$$2\,p - 2\,b < 0 \qquad a + b + c - 2\,b < 0$$
$$2\,p - 2\,c < 0 \qquad a + b + c - 2\,c < 0$$
$$a + c < b$$
$$a + b < c$$

hypothèses absurdes, puisque, dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres (géom. 28). Les inégalités précédentes donnent d'ailleurs par addition :

$$2\,a + b + c < b + c$$
$$2\,a < 0$$
$$a < 0$$

donnée manifestement absurde.

Les inégalités (7) sont donc seules à considérer. Elles donnent :

$$a + b + c \quad 2\,b > 0$$
$$a + b + c - 2\,c > 0$$

ou :

$$a + c > b$$
$$a + b > c$$

En discutant de la même manière les deux autres formules $\sin \frac{B}{2}$ et $\sin \frac{C}{2}$, on trouvera en définitive les trois conditions :

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

D'un autre côté $\sin \frac{A}{2} < 1$ entraîne.

$$\frac{(p - b)\ (p - c)}{b\,c} < 1$$

$$(p - b)\,(p - c) < b\,c$$
$$p^2 - pb - p\,c + b\,c < b\,c$$
$$p^2 - p\,(b + c) < 0$$

et comme p est nécessairement positif

$$p - (b + c) < 0$$
$$a + b + c - 2\,(b + c) < 0$$
$$a + b + c - 2\,b - 2\,c < 0$$
$$a - b - c < 0$$
$$a < b + c$$

On arrive aux mêmes conclusions que ci-dessus.

TABLE DES LOGARITHMES

des sinus, des tangentes, des cosinus et des cotangentes des angles de 0° à 90° de dixième de degré en dixième de degré

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
0° 0′	Infini négatif	Infini négatif	Infini positif	0,00000	90°
6′	$\bar{3}$,24188	$\bar{3}$,24188	$\bar{2}$,75812	00000	54′
12′	54291	54291	45,709	00000	48′
18′	71900	71900	28100	$\bar{1}$,99999	42′
24′	84393	84394	15606	99999	36′
30′	$\bar{3}$,94084	94086	2,05914	99998	30′
36′	$\bar{2}$,02002	$\bar{2}$,02004	1,97996	99998	24′
42′	08696	08700	91300	99997	18′
48′	14495	14500	85500	99996	12′
54′	19610	19616	80384	99995	6′
1°	24186	24192	75808	99993	89°
6′	28324	28332	71668	99992	54′
12′	32103	32112	67888	99990	48′
18′	35578	35590	64410	99989	42′
24′	38796	38809	61191	99987	36′
30′	41792	41807	58193	99985	30′
36′	44594	44611	55389	99983	24′
42′	47226	47245	52755	99981	18′
48′	49708	49729	50271	99979	12′
54′	52055	52079	47921	99976	6′
2°	$\bar{2}$,54282	$\bar{2}$,54308	$\bar{1}$,45692	1,99974	88°
6′	56400	56429	43571	99971	54′
12′	58419	58451	41549	99968	48′
18′	60349	60384	39616	99965	42′
24′	62196	62234	37766	99962	36′
30′	63968	64009	35991	99959	30′
36′	65670	65715	34285	99955	24′
42′	67308	67356	32644	99952	18′
48′	68886	68938	31062	99948	12′
54′	70409	70465	29535	99914	6′
3°	71880	71940	28060	99940	87°
6′	73303	73366	26634	99936	54′
12′	74680	74748	25252	99932	48′
18′	76015	76087	23913	99928	42′
24′	77310	77387	22613	99923	36′
30′	78568	78649	21351	99919	30′
36′	79789	79875	20125	99914	24′
42′	80978	81068	18932	99909	18′
48′	82134	82230	17770	99904	12′
54′	83261	83361	16639	99899	6′
4°	$\bar{2}$,84358	$\bar{2}$,84464	$\bar{1}$,15536	$\bar{1}$,99894	86°
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
4°	$\bar{2}$,84358	$\bar{2}$,84464	$\bar{1}$,15536	$\bar{1}$,99894	86°
6′	85429	85540	14460	99889	54′
12′	86474	86591	13409	99883	48′
18′	87494	87616	12384	99878	42′
24′	88490	88618	11382	99872	30′
30′	89464	89598	10402	99866	30′
36′	90417	90557	09443	99860	24′
42′	91349	91495	08505	99854	18′
48′	92261	92414	07586	99847	12′
54′	93154	93313	06687	99841	6′
5°	94030	94195	05805	99834	85°
6′	94887	95060	04940	99828	54′
12′	95728	95908	04092	99821	48′
18′	96553	96739	03261	99814	42′
24′	97363	97556	02444	99807	36′
30′	98157	98358	01642	99800	30′
36′	$\bar{1}$,98937	$\bar{1}$,99145	$\bar{1}$,00855	99792	24′
42′	$\bar{2}$,99704	$\bar{2}$,99919	$\bar{1}$,00081	99785	18′
48′	1,00456	1,00679	0,99321	99777	12′
54′	01196	01427	98573	99769	6′
6°	$\bar{1}$,01923	$\bar{1}$,02162	0,97838	$\bar{1}$,99761	84°
6′	02639	02885	97115	99753	54′
12′	03342	03597	96403	99745	48′
18′	04034	04297	95703	99737	42′
24′	04715	04987	95013	99728	36′
30′	05386	05666	94334	99720	30′
36′	06046	06335	93665	99711	24′
42′	06696	06994	93006	99702	18′
48′	07337	07643	92357	99693	12′
54′	07968	08283	91717	99684	6′
7°	08589	08914	91086	99675	83°
6′	09202	09537	90463	99666	54′
12′	09807	10150	89850	99656	48′
18′	10402	10756	89244	99647	42′
24′	10990	11353	88647	99637	36′
30′	11570	11943	88057	99627	30′
36′	12142	12525	87475	99617	24′
42′	12706	13099	86901	99607	18′
48′	13263	13667	86333	99596	12′
54′	13813	14227	85773	99586	6′
8°	$\bar{1}$,14356	$\bar{1}$,14780	0,85220	$\bar{1}$,99575	82°
6′	14891	15327	84673	99565	54′
12′	15421	15867	84133	99554	48′
18′	15944	16401	83599	99543	42′
24′	16460	16928	83072	99532	36′
30′	16970	17540	82550	99520	30′
36′	17474	17965	82035	99509	24′
42′	17973	18475	81525	99497	18′
48′	18465	18979	81021	99486	12′
54′	18952	19478	80522	99474	6′
9°	19433	19971	80029	99462	81°
6′	19909	20459	79541	99450	54′
12′	20380	20942	79058	99438	48′
18′	20845	21420	78580	99425	42′
24′	21306	21893	78107	99413	36′
30′	21761	22361	77639	99400	30′
36′	22211	22824	77176	99388	24′
42′	22657	23283	76717	99375	18′
48′	23098	23737	76263	99362	12′
54′	23535	24186	75814	99348	6′
10°	1,23967	1,24632	0,75368	$\bar{1}$,99335	80°
6′	24395	25073	74927	99322	54′
12′	24818	25510	74490	99308	48′
18′	25237	25943	74057	99294	42′
24′	25652	26372	73628	99281	36′
30′	26063	26797	73203	99267	30′
36′	26470	27218	72782	99252	24′
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
10° 36′	$\bar{1}$,26470	$\bar{1}$,27218	0,72782	$\bar{1}$,99252	80° 24′
42′	26873	27635	72365	99238	18′
48′	27273	28049	71951	99224	12′
54′	27668	28459	71541	99209	6′
11°	28060	28865	71135	99195	79°
6′	28448	29268	70732	99180	54′
12′	28833	29668	70332	99165	48′
18′	29214	30064	69936	99150	42′
24′	29591	30457	69543	99135	36′
30′	29966	30846	69154	99119	30′
36′	30336	31233	68767	99104	24′
42′	30704	31616	68384	99088	18′
48′	31068	31996	68004	99072	12′
54′	31430	32373	67627	99056	6′
12°	$\bar{1}$,31788	$\bar{1}$,32747	0,67253	$\bar{1}$,99040	78°
6′	32143	33119	66881	99024	54′
12′	32495	33487	66513	99008	48′
18′	32844	33853	66147	98991	42′
24′	33190	34215	65785	98975	36′
30′	33534	34576	65424	98958	30′
36′	33874	34933	65067	98941	24′
42′	34212	35288	64712	98924	18′
48′	34547	35640	64360	98907	12′
54′	34879	35989	64011	98890	6′
13°	35209	36336	63664	98872	77°
6′	35536	36681	63319	98855	54′
12′	35860	37023	62977	98837	48′
18′	36182	37363	62637	98819	42′
24′	36502	37700	62300	98801	36′
30′	36819	38035	61965	98783	30′
36′	37133	38368	61632	98765	24′
42′	37445	38699	61301	98746	18′
48′	37755	39027	60973	98728	12′
54′	38062	39353	60647	98709	6′
14°	$\bar{1}$,38368	$\bar{1}$,39677	0,60323	$\bar{1}$,98690	76°
6′	38670	39999	60001	98671	54′
12′	38971	40319	59681	98652	48′
18′	39270	40636	59364	98633	42′
24′	39566	40952	59048	98614	36′
30′	39860	41266	58734	98594	30′
36′	40152	41578	58422	98574	24′
42′	40442	41887	58113	98555	18′
48′	40730	42195	57805	98535	12′
54′	41016	42501	57499	98515	6′
15°	41300	42805	57195	98494	75°
6′	41582	43108	56892	98474	54′
12′	41861	43408	56592	98453	48′
18′	42140	43707	56293	98433	42′
24′	42416	44004	55996	98412	36′
30′	42690	44299	55701	98391	30′
36′	42962	44592	55408	98370	24′
42′	43233	44884	55116	98349	18′
48′	43502	45174	54826	98327	12′
54′	43769	45463	54537	98306	6′
16°	$\bar{1}$,44034	$\bar{1}$,45750	0,54250	$\bar{1}$,98284	74°
6′	44297	46035	53965	98262	54′
12′	44559	46319	53681	98240	48′
18′	44819	46601	53399	98218	42′
24′	45077	46881	53119	98196	36′
30′	45334	47160	52840	98174	30′
36′	45589	47438	52562	98151	24′
42′	45843	47714	52286	98129	18′
48′	46095	47989	52011	98106	12′
54′	46345	48262	51738	98083	6′
17°	46594	48534	51466	98060	73°
6′	46841	48804	51196	98036	54′
12′	47086	49073	50927	98013	48′
18′	47330	49341	50659	97989	42′
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
17° 18′	$\bar{1}$,47330	$\bar{1}$,49341	0,50659	$\bar{1}$,97989	73° 42′
24′	47573	49607	50393	97966	36′
30′	47814	49872	50128	97942	30′
36′	48054	50136	49864	97918	24′
42′	48292	50398	49602	97894	18′
48′	48529	50659	49341	97870	12′
54′	$\bar{1}$,48764	$\bar{1}$,50919	49081	$\bar{1}$,97845	6′
18°	$\bar{1}$,48998	$\bar{1}$,51178	0,48822	$\bar{1}$,97821	72°
6′	49231	51435	48565	97796	54′
12′	49462	51691	48309	97771	48′
18′	49692	51946	48054	97746	42′
24′	49920	52200	47800	97721	36′
30′	50148	52452	47548	97696	30′
36′	50374	52703	47297	97670	24′
42′	50598	52953	47047	97645	18′
48′	50821	53202	46798	97619	12′
54′	51043	53450	46550	97593	6′
19°	51264	53697	46303	97567	71°
6′	51484	53943	46057	97541	54′
12′	51702	54187	45813	97515	48′
18′	51919	54431	45569	97488	42′
24′	52135	54673	45327	97461	36′
30′	52350	54915	45085	97435	30′
36′	52563	55155	44845	97408	24′
42′	52775	55395	44605	97381	18′
48′	52986	55633	44367	97353	12′
54′	$\bar{1}$,53196	$\bar{1}$,55870	44130	$\bar{1}$,97326	6′
20°	$\bar{1}$,53405	$\bar{1}$,56107	0,43893	$\bar{1}$,97299	70°
6′	53613	56342	43658	97271	54′
12′	53819	56576	43424	97243	48′
18′	54025	56810	43190	97215	42′
24′	54229	57042	42958	97187	36′
30′	54433	57274	42726	97159	30′
36′	54635	57504	42496	97130	24′
42′	54836	57734	42266	97102	18′
48′	55036	57963	42037	97073	12′
54′	55235	58191	41809	97044	6′
21°	55433	58418	41582	97015	69°
6′	55630	58644	41356	96986	54′
12′	55826	58869	41131	96957	48′
18′	56021	59094	40906	96927	42′
24′	56215	59317	40683	96898	36′
30′	56408	59540	40460	96868	30′
36′	56599	59762	40238	96838	24′
42′	56790	59983	40017	96808	18′
48′	56980	60203	39797	96778	12′
54′	57169	60422	39578	96747	6′
22°	1,57358	$\bar{1}$,60641	0,39359	$\bar{1}$,96717	68°
6′	57545	60859	39141	96686	54′
12′	57731	61076	38924	96655	48′
18′	57916	61292	38708	96624	42′
24′	58101	61508	38492	96593	36′
30′	58284	61722	38278	96562	30′
36′	58467	61936	38064	96530	24′
42′	58648	62150	37850	96498	18′
48′	58829	62362	37638	96467	12′
54′	59009	62574	37426	96435	6′
23°	59188	62785	37215	96403	67°
6′	59366	62996	37004	96370	54′
12′	59543	63205	36795	96338	48′
18′	59720	63414	36586	96305	42′
24′	59895	63623	36377	96273	36′
30′	60070	63830	36170	96240	30′
36′	60244	64037	35963	96207	24′
42′	60417	64243	35757	96174	18′
48′	60589	64449	35551	96140	12′
54′	60761	64654	35346	96107	6′
24°	1,60931	1,64858	0,35142	1,96073	66°
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
24°	$\bar{1}$,60931	$\bar{1}$,64858	0,35142	$\bar{1}$,96073	66°
6′	61101	65062	34938	96039	54′
12′	61270	65265	34735	96005	48′
18′	61438	65467	34533	95971	42′
24′	61606	65669	34331	95937	36′
30′	61773	65870	34130	95902	30′
36′	61939	66071	33929	95868	24′
42′	62104	66271	33729	95833	18′
48′	62268	66470	33530	95798	12′
54′	62432	66669	33331	95763	6′
25°	62595	66867	33133	95728	65°
6′	62757	67065	32935	95692	54′
12′	62918	67262	32738	95657	48′
18′	63079	67458	32542	95621	42′
24′	63239	67654	32346	95585	36′
30′	63398	67850	32150	95549	30′
36′	63557	68044	31956	95513	24′
42′	63715	68239	31761	95476	18′
48′	63872	68432	31568	95440	12′
54′	64028	68626	31374	95403	6′
26°	$\bar{1}$,64184	$\bar{1}$,68818	0,31182	$\bar{1}$,95366	64°
6′	64339	69010	30990	95329	54′
12′	64494	69202	30798	95292	48′
18′	64647	69393	30607	95254	42′
24′	64800	69584	30416	95217	36′
30′	64953	69774	30226	95179	30′
36′	65104	69963	30037	95141	24′
42′	65255	70152	29848	95103	18′
48′	65406	70341	29659	95065	12′
54′	65556	70529	29471	95027	6′
27°	65705	70717	29283	94988	63°
6′	65853	70904	29096	94949	54′
12′	66001	71090	28910	94911	48′
18′	66148	71277	28723	94871	42′
24′	66295	71462	28538	94832	36′
30′	66441	71648	28352	94793	30′
36′	66586	71833	28167	94753	24′
42′	66731	72017	27983	94714	18′
48′	66875	72201	27799	94674	12′
54′	67018	72384	27616	94634	6′
28°	$\bar{1}$,67161	$\bar{1}$,72567	0,27433	$\bar{1}$,94593	62°
6′	67303	72750	27250	94553	54′
12′	67445	72932	27068	94513	48′
18′	67586	73114	26886	94472	42′
24′	67726	73295	26705	94431	36′
30′	67866	73476	26524	94390	30′
36′	68006	73657	26343	94349	24′
42′	68144	73837	26163	94307	18′
48′	68283	74017	25983	94266	12′
54′	68420	74196	25804	94224	6′
29°	68557	74375	25625	94182	61°
6′	68694	74554	25446	94140	54′
12′	68829	74732	25268	94098	48′
18′	68965	74910	25090	94055	42′
24′	69100	75087	24913	94012	36′
30′	69234	75264	24736	93970	30′
36′	69368	75441	24559	93927	24′
42′	69501	75617	24383	93884	18′
48′	69633	75793	24207	93840	12′
54′	69765	75969	24031	93797	6′
30°	$\bar{1}$,69897	$\bar{1}$,76144	0,23856	$\bar{1}$,93753	60°;
6′	70028	76319	23681	93709	54′
12′	70159	76493	23507	93665	48′
18′	70288	76668	23332	93621	42′
24′	70418	76841	23159	93577	36′
30′	70547	77015	22985	93532	30′
36′	70675	77188	22812	93487	24′
42′	70803	77361	22639	93442	18′
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
30° 42′	$\bar{1}$,70803	$\bar{1}$,77361	0,22639	$\bar{1}$,93442	60° 18′
48′	70931	77533	22467	93397	12′
54′	71058	77706	22294	93352	6′
31°	71184	77877	22123	93307	59°
6′	71310	78049	21951	93261	54′
12′	71435	78220	21780	93215	48′
18′	71560	78391	21609	93169	42′
24′	71685	78562	21438	93123	36′
30′	71809	78732	21268	93077	30′
36′	71932	78902	21098	93030	24′
42′	72055	79072	20928	92983	18′
48′	72177	79241	20759	92936	12′
54′	72299	79410	20590	92889	6′
32°	$\bar{1}$,72421	$\bar{1}$,79579	0,20421	$\bar{1}$,92842	58°
6′	72542	79747	20253	92795	54′
12′	72663	79916	20084	92747	48′
18′	72783	80084	19916	92699	42′
24′	72902	80251	19749	92651	36
30	73022	80419	19581	92603	30
36	73140	80586	19414	92555	24
42	73259	80753	19247	92506	18
48	73377	80919	19081	92457	12
54	73494	81086	18914	92408	6
33°	73611	81252	18748	92359	57°
6	73727	81418	18582	92310	54
12	73843	81583	18417	92260	48′
18′	73959	81748	18252	92211	42′
24′	74074	81913	18087	92161	36′
30′	74189	82078	17922	92111	30′
36′	74303	82243	17757	92060	24′
42′	74417	82407	17593	92010	18′
48′	74531	82571	17429	91959	12′
54′	74644	82735	17265	91908	6′
34°	1,74756	$\bar{1}$,82899	0,17101	$\bar{1}$,91857	56°
6′	74868	83062	16938	91806	54′
12′	74980	83225	16775	91755	48′
18′	75091	83388	16612	91703	42′
24′	75202	83551	16449	91651	36′
30′	75313	83713	16287	91599	30′
36′	75423	83876	16124	91547	24′
42′	75533	84038	15962	91495	18′
48′	75642	84200	15800	91442	12′
54′	75751	84361	15639	91389	6′
35°	75859	84523	15477	91336	55°
6′	75967	84684	15316	91283	54′
12′	76075	84845	15155	91230	48′
18′	76182	85006	14994	91176	42′
24′	76289	85166	14834	91123	36′
30′	76395	85327	14673	91069	30′
36′	76501	85487	14513	91014	24′
42′	76607	85647	14353	90960	18′
48′	76712	85807	14193	90906	12′
54′	76817	85967	14033	90851	6′
36°	1,76922	$\bar{1}$,86126	0,13874	$\bar{1}$,90796	54°
6′	77026	86285	13715	90741	54′
12′	77130	86445	13555	90685	48′
18′	77233	86603	13397	90630	42′
24′	77336	86762	13238	90574	36′
30′	77439	86921	13079	90518	30′
36′	77541	87079	12921	90462	24′
42′	77643	87238	12762	90405	18′
48′	77744	87396	12604	90349	12′
54′	77846	87554	12446	90292	6′
37°	77946	87711	12289	90235	53°
6′	78047	87869	12131	90178	54′
12′	78147	88027	11973	90120	48′
18′	78246	88184	11816	90063	42′
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
37° 18′	$\bar{1}$,78246	1,88184	0,11816	$\bar{1}$,90063	53° 42′
24′	78346	88341	11659	90005	36′
30′	78445	88498	11502	89947	30′
36′	78543	88655	11345	89888	24′
42′	78642	88812	11188	89830	18′
48′	78739	88968	11032	89771	12′
54′	78837	89125	10875	89712	6′
38°	$\bar{1}$,78934	1,89281	0,10719	$\bar{1}$,89653	52°
6′	79031	89437	10563	89594	54′
12′	79128	89593	10407	89534	48′
18′	79224	89749	10251	89475	42′
24′	79319	89905	10095	89415	36′
30′	79415	90061	09939	89354	30′
36′	79510	90216	09784	89294	24′
42′	79605	90371	09629	89233	18′
48′	79699	90527	09473	89173	12′
54′	79793	90682	09318	89112	6′
39°	79887	90837	09163	89050	51°
6′	79981	90992	09008	88989	54′
12′	80074	91147	08853	88927	48′
18′	80166	91301	08699	88865	42′
24′	80259	91456	08544	88803	36′
30′	80351	91610	08390	88741	30′
36′	80443	91765	08235	88678	24′
42′	80534	91919	08081	88615	18′
48′	80625	92073	07927	88552	12′
54′	80716	92227	07773	88489	6′
40°	$\bar{1}$,80807	1,92381	0,07619	$\bar{1}$,88425	50°
6′	80897	92535	07465	88362	54′
12′	80987	92689	07311	88298	48′
18′	81076	92843	07157	88234	42′
24′	81166	92996	07004	88169	36′
30′	81254	93150	06850	88105	30′
36′	81343	93303	06697	88040	24′
42′	81431	94357	06543	87975	18′
48′	81519	93610	06390	87909	12′
54′	81607	93763	06237	87844	6′
41°	81694	93916	06084	87778	49°
6′	81781	94069	05931	87712	54′
12′	81868	94222	05778	87646	48′
18′	81955	94375	05625	87579	42′
24′	82041	94528	05472	87513	36′
30′	82126	94681	05319	87446	30′
36′	82212	94834	05166	87378	24′
42′	82297	94986	05014	87311	18′
48′	82382	95139	04861	87243	12′
54′	82467	95291	04709	87175	6′
42°	$\bar{1}$,82551	$\bar{1}$,95444	0,04556	$\bar{1}$,87107	48°
6′	82535	95596	04404	87039	54′
12′	82719	95748	04252	86970	48′
18′	82802	95901	04099	86902	42′
24′	82885	96053	03947	86832	36′
30′	82968	96205	03795	86763	30′
36′	83051	96357	03643	86694	24′
42′	83133	96510	03490	86624	18′
48′	83215	96662	03338	86554	12′
54′	83297	96814	03186	86483	6′
43°	83378	96966	03034	86413	47°
6′	83459	97118	02882	86342	54′
12′	83540	97269	02731	86271	48′
18′	83621	97421	02579	86200	42′
24′	83701	97573	02427	86128	36′
30′	83781	97725	02275	86056	30′
36′	83861	97877	02123	85984	24′
42′	83940	98029	01971	85912	18′
48′	84020	98180	01820	85839	12′
54′	84098	98332	01668	85766	6′
44°	$\bar{1}$,84177	$\bar{1}$,98484	0,01516	$\bar{1}$,85693	46°
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

ANGLE	SINUS	TANGENTE	COTANGENTE	COSINUS	ANGLE
44°	$\bar{1}$,84177	$\bar{1}$,98484	0,01516	$\bar{1}$,85693	46°
6′	84255	98635	01365	85620	54′
12′	84334	98787	01213	85547	48′
18′	84411	98939	01061	85473	42′
24′	84489	99090	00910	85399	36′
30′	84566	99242	00758	85324	30′
36′	84643	99394	00606	85250	24′
42′	84720	99545	00455	85175	18′
48′	84796	99697	00303	85100	12′
54′	84873	$\bar{1}$,99848	00152	85024	6′
45°	$\bar{1}$,84949	0,00000	0,00000	$\bar{1}$,84949	45°
ANGLE	COSINUS	COTANGENTE	TANGENTE	SINUS	ANGLE

Résolution numérique des triangles

35. Tables de trigonométrie. — On a construit des tables qui donnent les lignes trigonométriques des arcs de 0° à 90°, ou plutôt les logarithmes de ces lignes.

La recherche et le calcul de ces logarithmes se font de la même façon que pour les nombres ordinaires.

Les tables contiennent en général les logarithmes des lignes trigonométriques des angles de minute en minute ; elles permettent de calculer ces angles à un dixième de seconde près ou à une approximation encore plus grande.

Nous donnons ici une table abrégée contenant les logarithmes des lignes trigonométriques des angles de 6 minutes en 6 minutes, c'est-à-dire de dixième de degré en dixième de degré. Elle permettra de calculer les lignes trigonométriques à 1 seconde près, ce qui suffit dans la plupart des cas de la pratique.

Cette table donne dans la première ou dans la dernière colonne la valeur de l'angle. Les angles inscrits dans la colonne de gauche vont en croissant de *haut en bas* ; les noms des lignes trigonométriques correspondantes se lisent en haut de la page. Les angles inscrits dans la colonne de droite vont en croissant de *bas en haut* ; les noms des lignes trigonométriques correspondantes se lisent en bas de la page. On n'a pas répété à chaque ligne le nombre de degrés ; celui-ci compte pour les dix lignes suivantes *dans le sens croissant*. Par exemple on lira 88° 42′ à la huitième ligne à droite à partir du bas ; 1° 6′ à la douzième ligne à gauche à partir du haut.

Dans les colonnes des lignes trigonométriques, on n'a pas répété la caractéristique du logarithme à chaque ligne, quand elle est la même pour une série d'angles ; on s'est contenté de l'inscrire à la première et à la dernière ligne de la série.

Ainsi pour avoir la caractéristique d'un logarithme, si elle n'est pas indiquée sur la ligne même, il suffit de prendre la première que l'on rencontre dans la colonne, soit en montant, soit en descendant. La caractéristique de log tg 54′ par exemple est —2.

La mantisse est toujours inscrite en entier avec cinq décimales.

La table ne donne que les angles de 0° à 90° ; mais elle permet de calculer les lignes d'un angle quelconque x, à l'aide des formules :

$$\sin\ (x - 180^\circ) = -\sin x$$
$$\cos\ (x - 180^\circ) = -\cos x$$
$$\mathrm{tg}\ (x - 180^\circ) = -\mathrm{tg}\ x$$
$$\cot\ (x - 180^\circ) = -\cot x$$

$$\sin\ (x - 90^\circ) = -\cos x$$
$$\cos\ (x - 90^\circ) = -\sin x$$
$$\mathrm{tg}\ (x - 90^\circ) = -\cot x$$
$$\cot\ (x - 90^\circ) = -\mathrm{tg}\ x$$

36. Recherche du logarithme d'une ligne trigonométrique d'un angle donné. — Si l'angle est contenu dans la table, cette recherche ne présente aucune difficulté. S'il n'y est pas contenu, on calcule l'accroissement du logarithme de l'angle le plus rapproché de l'angle donné, et contenu dans la table.

Soit par exemple à calculer le logarithme du sinus de l'angle.

$$5^\circ\ 13'\ 4''$$

qui n'est pas contenu dans la table.

Nous cherchons le logarithme du sinus de l'angle le plus voisin de l'angle donné et qui est contenu dans la table, c'est-à-dire de

$$5^\circ\ 12'$$

nous trouvons :

$$\bar{2},\ 95\ 728$$

Nous admettons alors que dans l'intervalle de sin 5° 12′ et du sinus de l'angle inscrit ensuite dans la table, c'est-à-dire du sin 5° 18′, le logarithme varie proportionnellement à l'angle, ce qui, sans être rigoureux, nous donne une approximation suffisante dans la pratique. Or, nous trouvons

$$\log \sin 5^\circ\ 18' = \bar{2},\ 96\ 553$$

La différence de ce logarithme et du précédent est 825 unités du cinquième ordre décimal. On raisonne de la manière suivante :

Pour une augmentation de l'angle égale à 6′, c'est-à-dire à 360″, le logarithme du sinus augmente de 825 unités du cinquième ordre décimal ; pour 1″, le logarithme du sinus augmente de $\frac{825}{360}$, et pour 1′ 4″, c'est-à-dire 64″, il augmente de $\frac{825 \times 64}{360}$, ce qui équivaut sensiblement à 147 unités du cinquième ordre décimal.

Le logarithme cherché est :

$$2,\ 96\ 553 + 0,\ 00\ 147.$$

On peut disposer le calcul de la manière suivante :

pour sin 5° 12′	$\bar{2}$, 95 728
1′ 4″	147
pour sin 5° 13′ 4″	$\bar{2}$, 95 875

car $\Delta = 825$
$\alpha = 1' \; 4'' = 64''$

et $$d = \frac{825 \times 64}{360} = 146{,}66$$

On remarquera que les sinus et les tangentes, et par conséquent leurs logarithmes croissent avec l'angle, tandis que les cosinus et les cotangentes décroissent. Il faut éviter de faire des soustractions sur les logarithmes ; quand on a à calculer le logarithme d'un cosinus ou d'une cotangente, dont l'angle n'est pas contenu dans la table, il faut donc prendre la ligne de l'angle, inscrit dans la table, immédiatement supérieur à l'angle donné ; puis on fait le calcul des parties proportionnelles en retranchant à l'angle trouvé le nombre de minutes ou de secondes nécessaire.

Exemple : *Calculer la cotangente de l'angle* 76° 33′ 26″.

Comme la cotangente va en décroissant quand l'angle augmente, je prends dans la table la cotangente de l'angle immédiatement supérieur à l'angle donné, soit

$$\log \cot 76^\circ \; 36' = \bar{1},\; 37\;700$$

La différence de ce logarithme avec log cot 76° 30′ est de 335 unités du cinquième ordre décimal. D'autre part, il faut retrancher à l'angle 76° 36′, 2′ 34″ ou 154″ pour le ramener à la valeur donnée 76° 33′ 26″ ; l'augmentation du logarithme de la cot 76° 33′ 26″ sur le logarithme cot 76° 36′ est donc de $\frac{335 \times 154}{360}$ unités du cinquième ordre décimal, soit sensiblement 143.

Nous disposerons le calcul de la manière suivante :

pour cot	76° 36′	$\bar{1}$, 37 700
	2′ 34″	143
pour cot	76° 33′ 26″	$\bar{1}$, 37 843

car $\Delta = 335$
$\alpha = -2' \; 34'' = -154''$

et $$d = \frac{335 \times 154}{360} = 143{,}3$$

37. Recherche de l'angle correspondant à un logarithme donné d'une ligne donnée. — Si le logarithme est dans la table, la recherche ne présente aucune difficulté.

Soit à trouver l'angle correspondant à

$$\log \operatorname{tg} x = \bar{1},\; 38\;778$$

qui ne se trouve pas dans la table.

Je cherche dans la colonne des tangentes le logarithme le plus rapproché, par défaut, du logarithme donné. Je trouve en cherchant, de haut en bas, dans la colonne marquée *tangente* en haut, le logarithme $\bar{1}$, 38 699, qui correspond à l'angle 13° 42′, inscrit dans la colonne de gauche. Quand on passe de l'angle 13° 42′ à l'angle 13° 48′ inscrit ensuite dans la table, le logarithme de la tangente passe de $\bar{1}$, 38 699 à $\bar{1}$, 39 027 ; il augmente donc de 328 unités du cinquième ordre décimal. D'autre part, entre le logarithme donné $\bar{1}$, 38 778 et le logarithme $\bar{1}$, 38 699, il y a une différence de 79 unités du cinquième ordre décimal. On raisonne de la manière suivante :

Quand le logarithme augmente de 328 unités du cinquième ordre décimal, l'angle augmente de 6′ = 360″ ; si le logarithme augmente seulement de 79 unités du cinquième ordre, l'angle augmente de $\frac{360 \times 79}{328}$ = 87,3. Il faut donc ajouter à l'angle 87″ = 1′ 27″.

On peut disposer le calcul de la manière suivante :

pour	$\bar{1}$, 38 699	13° 42′
	79	1′ 27″
pour	$\bar{1}$, 38 778	13° 43′ 27″

car $\Delta = 328$
$d = 79$

et $$a = \frac{360 \times 79}{328} = 87{,}3 = 1' \; 27'' \; 3.$$

38. Résolution numérique des triangles. — Exemples.

I. — *Résoudre un triangle rectangle connaissant :*

$b = 53{,}78$ m $\qquad c = 26{,}40$ m

On veut calculer a, B et C.

B est donné par la formule :

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

C par :

$$C = 90^\circ - B \qquad (2)$$

et a par :

$$a = \frac{b}{\sin B} \qquad (3)$$

Calcul de B :

De (1) on tire

(1′) $\log \operatorname{tg} B = \log 53{,}7 - \log 26{,}4$

Dans la table des logarithmes donnée en algèbre pour les nombres, nous trouvons

$\log 53{,}7 = 1{,}72\;997$
$\log 26{,}4 = 1{,}42\;160 \qquad \operatorname{colog} 26{,}4 = 2{,}57\;840$

On a donc :

(2′) $\log \operatorname{tg} B = 1{,}72\;997 + 2{,}57{,}840$
$\log \operatorname{tg} B = 0{,}30\;837$

pour	0, 30 798	63° 48′
	39	1′ 13″
pour	0, 30 837	63° 49′ 13″

car $\Delta = 192$
$d = 39$

et $$a = \frac{360 \times 39}{192} = 7{,}1 = 1' \; 13'' \; 1$$

$B = 63^\circ \; 49' \; 13''$

Calcul de C :

On a immédiatement

$$\begin{aligned} C &= 90^\circ - 63^\circ \; 49' \; 13'' \\ &\; 89^\circ \; 59' \; 60'' \\ &\; \underline{63^\circ \; 49' \; 13 \text{ m}} \\ &\; 26^\circ \; 10' \; 47'' \\ C &= 26^\circ \; 10' \; 47'' \end{aligned}$$

Calcul de a :

De (3) on tire :

(3) $\log a = \log 53{,}7 - \log \sin 63^\circ \; 49' \; 13''$
$\log 53{,}7 = 1{,}72\;997$

pour sin	63° 48′	$\bar{1}$, 95 292
	1′ 13″	8
pour sin	63° 49′ 13″	$\bar{1}$, 95 300

car $\Delta = 7{,}5$
$a = 1' \; 13'' = 73''$

et $$d = \frac{37 \times 73}{360} = 37$$

$$\text{colog} \sin 63^\circ\ 49'\ 13'' = 0,\ 04\ 700$$
$$\log a = 1,\ 72\ 997 + 0,\ 04\ 700$$
$$\log a = 1,\ 77\ 697$$

pour	77 670	598	$\Delta = 73$
	27	037	$d = 27$
pour	1,77 697	59,837	$n = \frac{27}{73} = 0{,}369$

$$a = 59^{m},837$$

II. — *Résoudre un triangle quelconque connaissant les trois côtés :*

$$a = 62{,}75 \text{ m}$$
$$b = 89{,}53 \text{ m}$$
$$c = 115{,}45 \text{ m}$$

On part des formules :

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

$$\text{tg}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

$$\text{tg}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

D'où on tire :

$$\log \text{tg}\,\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\,[\log(p-b) + \log(p-c) - \log p - \log(p-a)]$$

$$\log \text{tg}\,\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\,[\log(p-a) + \log(p-c) - \log p - \log(p-b)]$$

$$\log \text{tg}\,\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\,[\log(p-a) + \log(p-b) - \log p - \log(p-c)]$$

$$\log S = \frac{1}{2}\,[\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)]$$

Posons :

$$\log r = \frac{1}{2}\,[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) - \log p]$$

Les formules deviennent :

$$\log \text{tg}\,\frac{A}{2} = \log r - \log(p-a)$$

$$\log \text{tg}\,\frac{B}{2} = \log r - \log(p-b)$$

$$\log \text{tg}\,\frac{C}{2} = \log r - \log(p-c)$$

$$\log S = \log r + \log p$$

Calculs :

$$p = 133,\ 865$$
$$p - a = 71{,}115 \qquad p - b = 44{,}335 \qquad p - c = 18{,}415$$

$\log p$:

pour	133	12 385	$\Delta = 325$
	0,865	281	$n = 0{,}865$
pour	133,865	2,12 666	$d = 325 \times 0{,}865$
			$d = 281{,}125$

$\log p = 2.\ 12\ 666 \qquad \text{colog}\ p = \bar{3},\ 87\ 334$

$\log (p - a)$:

pour	711	85 187	$\Delta = 61$
	0,15	9,15	$n = 0{,}15$
pour	71,115	1,85 196	$d = 61 \times 0{,}15 = 9{,}15$

$\log (p - a) = 1{,}85\ 196 \qquad \text{colog}\ (p - a) = \bar{2},14\ 804$

$\log (p - b)$:

pour	443	64 640	$\Delta = 98$
	0,35	34	$n = 0{,}35$
pour	44,335	1,64 674	$d = 98 \times 0{,}35 = 34{,}30$

$\log (p - b) = 1{,}64\ 674 \qquad \text{colog}\ (p - b) = \bar{2},35\ 326$

$\log (p - c)$:

pour	184	26,482	$\Delta = 235$
	0,15	35	$n = 0{,}15$
pour	18,415	1,26 517	$d = 235 \times 0{,}15 = 35{,}25$

$\log (p - c) = 1{,}26\ 517 \qquad \text{colog}\ (p - c) = \bar{2},73\ 483$

log r :

$$\log r = \frac{1{,}85\ 196 + 1{,}64\ 674 + 1{,}26\ 517 + \overline{3}{,}87\ 334}{2}$$

$$\log r = 1,\ 31\ 861$$

tg $\frac{A}{2}$:

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1,\ 31\ 861 + \overline{2},\ 14\ 804$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \overline{1},\ 46\ 665$$

pour	$\overline{1}{,}46\ 601$	16°	$18'$	$22''$	$\Delta = 280$	
pour	64		$1'$	$22''$	$d = 64$	
pour	$\overline{1}{,}46\ 665$	16°	$19'$	$22''$	$a = \frac{360 \times 64}{280}$	
					$a = 82{,}28 = 1'\ 22''\ 28$	

$$\widehat{A} = 2 \times 16^\circ\ 19'\ 22''$$

$$\widehat{A} = 32^\circ\ 38'\ 44''$$

tg $\frac{B}{2}$:

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1,\ 31\ 861 + \overline{2},\ 35\ 326$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \overline{1},\ 67\ 187$$

pour	$\overline{1},\ 67\ 065$	25°	$6'$	$43''$	$\Delta = 197$	
pour	122		$3'$	$43''$	$d = 122$	
	$\overline{1},\ 67\ 187$	25°	$9'$	$43''$	$a = \frac{360 \times 122}{197}$	
					$a = 222{,}9 = 3'\ 42'',\ 9$	

$$\widehat{B} = 2 \times 25^\circ\ 9'\ 43''$$

$$\widehat{B} = 50^\circ\ 19'\ 26''$$

$\widehat{C}$:

On pourrait calculer tg $\frac{C}{2}$ et en tirer C, par la même méthode ; mais on peut aussi recourir à la formule

$$\widehat{C} = 180^\circ - A - B$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 82^\circ\ 58'\ 10''$$

$$\widehat{C} = 97^\circ\ 1'\ 50''$$

S :

$$\log S = 1,\ 31\ 861 + 2,\ 12\ 666$$

$$\log S = 3,\ 44\ 527$$

pour	44	404	278	$\Delta = 156$
		123	$0\ 79$	$d = 123$
pour	$3{,}44$	527	$2787{,}9$	$n = \frac{123}{156}$

$$S = 2787{,}9\ m^2$$

39. Applications de la trigonométrie au lever des plans. — I. *Mesure de la hauteur d'une tour dont le pied est accessible* : Soit A B la tour (fig. 13). D'un point C, choisi à une certaine distance de la tour, on vise le sommet B de manière à mesurer l'angle de la droite C B avec l'horizontale C A. Puis on mesure C A.

Dans le triangle rectangle A B C, on connaît alors l'angle C et le côté A C ; on peut calculer A B.

$$\overline{AB} = \overline{AC}.\ \operatorname{tg} \widehat{ACB}$$

Si le graphomètre qui a servi à mesurer l'angle B C A s'élève en C à une certaine hauteur au-dessus de l'horizontale A C, il faut ajouter cette hauteur à la hauteur trouvée.

II. — *Mesurer la hauteur d'une montagne ou d'une tour dont le pied est inaccessible.* Soit O A la hauteur à mesurer (fig. 14). En un endroit plan convenablement choisi, on mesure une droite horizontale B C.

Au point C, on mesure l'angle A C B ; au point B, on mesure les angles A B C et A B O.

Dans le triangle A B C, on connaît le côté B C et les angles adjacents, on peut donc calculer A B.

Alors, dans le triangle rectangle A O B, on connaît l'hypoténuse A B et un angle aigu A B O ; on peut calculer O A, la hauteur cherchée.

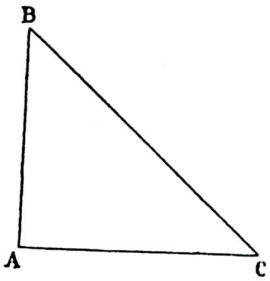


Fig. 13

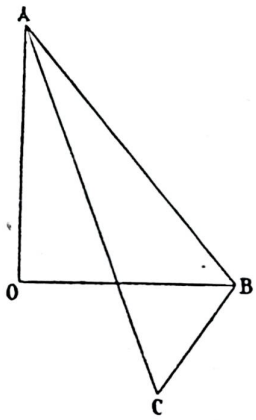


Fig. 14

III. — *Trouver la distance d'un point accessible à un point inaccessible.* Soient A un point accessible, B un point inaccessible (fig. 15). En un endroit plan convenablement choisi, on mesure une distance horizontale A C. Du point A et du point C, on vise le point B pour mesurer les angles B A C et B C A.

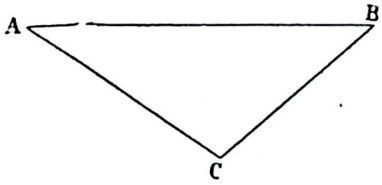


Fig. 15

Dans le triangle A B C, on connaît A B, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$; on peut calculer les éléments de ce triangle, et, en particulier, le côté A B.

IV. — *Trouver la distance de deux points inaccessibles.* Soient A et B deux points inaccessibles. On veut mesurer la distance A B (fig. 16).

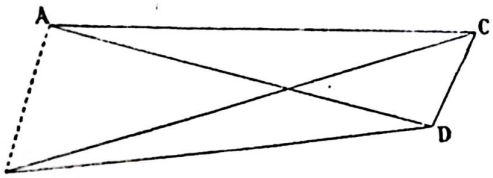


Fig. 16

Sur le terrain, en un endroit convenablement choisi, on mesure une distance C D. On détermine avec le graphomètre la valeur des angles A C B, A C D, C D A, C D B.

Dans le triangle B C D, on connaît C D, les angles B C D = A C D — A C B et C D B ; on peut calculer B C.

Dans le triangle A D C, on connaît C D, les angles C D A, A C D ; on peut calculer A C.

Alors, dans le triangle A B C, on connaît A C, B C et l'angle A C B, on peut calculer A B.

Exercices

7. — Résoudre un triangle quelconque connaissant un côté et les deux angles adjacents :

$$a = 432{,}72 \text{ m}$$
$$B = 72{,}4835 \text{ g}$$
$$C = 34{,}7854 \text{ g}$$

8. — Résoudre un triangle quelconque connaissant deux côtés et l'angle compris :

$$a = 482{,}75 \text{ m}$$
$$b = 124{,}52 \text{ m}$$
$$c = 67^\circ\ 25'\ 46''$$

9. — Résoudre un triangle quelconque connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :

$$a = 172{,}84 \text{ m}$$
$$b = 204{,}28 \text{ m}$$
$$A = 12{,}4732 \text{ g}$$

10. — Résoudre un triangle quelconque connaissant les trois côtés :

$$a = 324{,}84 \text{ m}$$
$$b = 483{,}54 \text{ m}$$
$$c = 284{,}36 \text{ m}$$

11. — Placé à une certaine distance du pied d'une tour, on voit cet édifice sous un angle de 60° ; en s'éloignant de 100 mètres du premier point d'observation, on voit la tour sous un angle de 30°. Quelle est la hauteur de la tour, les deux postes d'observation étant en ligne droite avec son pied ?

Corrigé des Exercices

1. — *Réduire au premier quadrant les arcs :*

$$8542^\circ,\ -\frac{22\ \pi}{3},\ 1547^g{,}25$$

1° Nous avons $8542^\circ = 360 \times 23 + 262$.

Les lignes trigonométriques de l'arc 8542° sont donc les mêmes que celles de l'arc de 262° qui est terminé dans le troisième quadrant.

D'où :

$$\sin 8542^\circ = \sin 262^\circ = -\sin(262^\circ - 180^\circ) = -\sin 82^\circ$$
$$\cos 8542^\circ = \cos 262^\circ = -\cos(262^\circ - 180^\circ) = -\cos 82^\circ$$
$$\operatorname{tg} 8542^\circ = \operatorname{tg} 262^\circ = \operatorname{tg}(262^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg} 82^\circ$$

2° Remarquons que $\frac{22}{3} = 7 + \frac{1}{3}$

d'où :

$$\sin\left(-\frac{22\pi}{3}\right) = -\sin\frac{22\pi}{3} = -\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$$
$$\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) = -\cos\frac{22\pi}{3} = -\cos\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{22\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$$

3° Nous avons $1547^g{,}25 = 3 \times 400 + 347^g{,}25$. Les lignes trigonométriques de l'arc de $1547^g{,}25$ sont les mêmes que celles de l'arc de $347^g{,}25$ terminé dans le quatrième quadrant. D'où

$$\sin 1547^g{,}25 = \sin 347^g{,}25 = -\sin(400 - 347^g{,}25) = -\sin 52^g{,}75$$

$$\cos 1547^g,25 = \cos 347^g,25$$
$$= \cos (400^g - 347^g,25) = \cos 52^g,75$$
$$\operatorname{tg} 1547^g,25 = \operatorname{tg} 347^g,25$$
$$= \operatorname{tg} (400^g - 347^g,25) = - \operatorname{tg} 52^g,75$$

2. — *Sachant que* $\cos a = \frac{2}{3}$ *calculer à 0,01 près les autres lignes trigonométriques.*

Nous avons, les doubles signes se correspondant :

$$\sin a = \pm \sqrt{1 - \cos^2 a}$$
$$= \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} = \pm 0,74$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \pm \frac{0,74}{\frac{2}{3}} = \pm 1,11$$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \pm \frac{1}{1,11} = \pm 0,90$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = \pm \frac{1}{0,74} = \pm 1,35$$

3. — *Calculer les lignes trigonométriques de l'arc de 75° en remarquant que l'on a*

$$75 = 45 + 30$$

Le sinus d'un arc positif et plus petit qu'un quadrant est égal à la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double.

Nous connaissons les côtés du carré et de l'hexagone inscrit dans un cercle de rayon R :

$$C_4 = R\sqrt{2}, \quad C_6 = R$$

En faisant R = 1 ; il vient $C_4 = \sqrt{2}$ et $C_6 = 1$. Nous avons par suite, en prenant la moitié des arcs sous-tendus.

$$\sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

D'où : $\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$.

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$$

$$\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{8}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{3-1}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

On aura facilement les autres lignes trigonométriques d'après les formules connues :

$$\sec 75^\circ = \frac{1}{\cos 75^\circ}, \operatorname{cosec} 75^\circ = \frac{1}{\sin 75^\circ}, \operatorname{cotg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ}$$

4. — *Démontrer que le sinus de la somme de deux arcs positifs et inférieurs à 90° est plus petit que la somme de leurs sinus.*

Soient a et b deux arcs positifs et inférieurs à 90° ; nous savons que l'on a :

$$(\sin a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Or, d'après l'hypothèse faite, nous avons :

$$0 < \cos a < 1 ; \quad \sin a > 0$$
$$0 < \cos b < 1 ; \quad \sin b > 0$$

donc

$$0 < \sin a \cos b < \sin a$$

et

$$0 < \sin b \cos a < \sin b$$

par suite

$$0 < \sin a \cos b + \sin b \cos a < \sin a + \sin b$$

ou

$$0 < \sin (a + b) < \sin a + \sin b$$

5. — *Vérifier l'égalité :*

$$\frac{2 \sin (a + b)}{\cos (a + b) + \cos (a - b)} = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b.$$

Le dénominateur du premier membre est égal à :

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b$$

et le premier membre devient ainsi :

$$\frac{2 \sin (a + b)}{2 \cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b} =$$
$$\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b} = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$$

6. — *Vérifier l'identité :*

$$\operatorname{cotg} a - \operatorname{tg} a = 2 \operatorname{cotg} 2a$$

Nous avons :

$$\operatorname{cotg} a - \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin a}{\cos a} =$$
$$\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a} = \frac{2 \cos 2a}{\sin 2a} = 2 \operatorname{cotg} 2a$$

7. — *Résoudre un triangle quelconque connaissant un côté et les deux angles adjacents :*

$$a = 432^m,72$$
$$\widehat{B} = 72^g,4835$$
$$\widehat{C} = 34^g,7854$$

Les inconnues sont $\widehat{A}$, b et c.

On part des formules :

$$A = 200 \text{ g} - (\widehat{B} + \widehat{C})$$
$$b = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)}$$
$$c = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}$$

Ajoutons la recherche de la surface. On a :

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

Calculs auxiliaires :

$$\widehat{B} = 72,4835$$
$$\widehat{C} = 34,7854$$
$$\widehat{B} + \widehat{C} = 107,2689$$

Calcul de log a

$$\log a = \log 432,72$$

pour 4327 = 63619 $\quad \Delta = 10$

pour 2 = 2

432,72 = 2,63621

Calcul de log sin B

log sin B =	log sin	72,4835	
pour 72,48		1,95809	Δ = 3
pour	35	1	
log sin 72,4835 =		$\bar{1}$,95810	

Calcul de log sin C

log sin C =	log sin	34,7854	
pour	34,78	1,71563	Δ = 11
pour	54	6	
pour sin	34,7854	$\bar{1}$,71569	

Calcul de log sin (B + C)

log sin (B + C) =	log sin	107,2689	
	= log sin	92,7311	
pour	92,73	1,99716	= Δ 1
pour	11		
pour sin 92,7311		= $\bar{1}$,99716	

Calculs définitifs

Calcul de A

$$A = 200 - 107,2689 = 92^{g}7311$$

Calcul de b

$$\log c = 2,63621$$
$$\log \sin B = 1,95810$$
$$\text{colog} \sin (B + C) = 0,00284$$
$$\log b = 2,59715$$

pour 59715 3955

$$b = 395,5$$

Calcul de *c*

$$\log a = 2,63621$$
$$\log \sin C = \bar{1},71569$$
$$\text{colog} \sin (B + C) = 0,00284$$
$$\log c = 2,35474$$

pour 35468 2263 Δ = 20
pour 6 3
pour 35474 22633

$$c = 226,33$$

Calcul de S

$$2 \log a = 5,27242$$
$$\log \sin B = \bar{1},95810$$
$$\log \sin C = \bar{1},71569$$
$$\text{colog } 2 = 1,69897$$
$$\text{colog} \sin (B + C) = 0,00284$$
$$\log S = 4,64802$$

pour 64797 4446 Δ = 10
pour 5 0,5
pour 64802 4446,5

$$S = 44465$$

Réponses. — $\widehat{A} = 92,7311$ g, $b = 395,5$ m, $c = 226,33$ m, $S = 44465^{m^2}$.

8. — *Résoudre un triangle quelconque connaissant deux côtés et l'angle compris :*

$$a = 482,75 \text{ m}$$
$$b = 124,52 \text{ m}$$
$$\widehat{c} = 67^{\circ}\, 25'\, 46''.$$

Les inconnues sont $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et *c*.

On part des formules :

$$\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 90^{\circ} - \frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\text{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \text{tg} \left(90^{\circ} - \frac{C}{2}\right)$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

La surface est donnée par :

$$S = \frac{a\, b \sin C}{2}$$

Calculs auxiliaires

$$a - b = 358,23$$
$$a + b = 607,27$$

Calcul de log (*a* — *b*)

log (*a* — *b*) =	log	358,23	
pour 3582		55413	Δ = 12
pour	3	4	
pour 358,23		2,55417	

Calcul de log (*a* + *b*)

log (*a* ± *b*) =	log	607,27	
pour 607,2		78333	Δ = 7
pour	7	5	
pour 607,27		= 2,78338	

Calcul de $\log \text{tg} \left(90 - \frac{C}{2}\right)$

$$\log \text{tg} \left(90 - \frac{C}{2}\right) = \log \text{tg } 56^{\circ}\, 17'\, 7''$$

pour 56° 17′		0,17565	Δ = 28
pour	7′	3	
pour tg 56° 17 7		= 0,17568	

Calcul de log *a*

log *a* =	log	482,75	
pour 4827		68368	Δ = 9
pour	5	5	
pour 482,75		= 2,68373	

Calcul de log sin C

log sin C =	log sin	67° 25′ 46″	
pour 67° 25′		$\bar{1}$,96535	Δ = 6
pour	46″	4,6	
pour sin 67° 25′ 46″		= 1,96540	

Calcul de log sin A

log sin A =	log sin	97° 45′ 48″	
	= log sin	82° 14′ 12″	
pour 82° 14′		$\bar{1}$,99600	Δ = 1
pour	12″	02	
pour log sin 82° 14′ 12″		= 1,99600	

Calcul de log *b*

log *b* =	log	624,52	
pour 124,5		09517	Δ = 35
pour	2	7	
pour 124,52		= 2,09524	

Calculs définitifs

Calcul de $\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$

On a : $90^\circ = 89^\circ\ 59'\ 60''$

$$\frac{\widehat{C}}{2} = 33^\circ\ 42'\ 53''$$

$$\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = 56^\circ\ 17'\ 7''$$

Calcul de $\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}$

$$\log\ (a-b) = \bar{2},55417$$
$$\text{colog}\ (a+b) = \bar{3},21662$$
$$\log \text{tg}\left(90 - \frac{C}{2}\right) = 0,17568$$
$$\log \text{tg}\ \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} = \bar{1},94647$$

pour	$\bar{1},94630$	$41^\circ\ 28'$	$\Delta = 25$
pour	17	$41''$	
pour	$\bar{1},94647$ = log tg	$41^\circ\ 28^\circ\ 41''$	

Calcul de A et B

$$\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = 56^\circ\ 17'\ 7''$$
$$\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} = 41^\circ\ 28'\ 41''$$
$$\widehat{A} = 97^\circ\ 45'\ 48''$$
$$\widehat{B} = 14^\circ\ 48'\ 26''$$

Calcul de c

$$\log a = 2,68373$$
$$\log \sin C = \bar{1},96540$$
$$\text{colog} \sin A = 0,00400$$
$$\log c = 2,65313$$

pour	65312	4499	$\Delta = 9$
pour	1	01	
pour	65313	44991	

$$c = 449,91$$

Calcul de S

$$\log a = 2,68373$$
$$\log b = 2,09524$$
$$\log \sin C = \bar{1},96540$$
$$\text{colog}\ 2 = \bar{1},69897$$
$$\log S = 4,44334$$

pour	44326	2775	$\Delta = 16$
pour	8	0,5	
pour	44334	27755	

$$S = 27755\ m^2$$

Réponses. — $A = 97^\circ\ 45'\ 48$; $B = 14^\circ\ 48'\ 26''$; $c = 449,91$ m ; $S = 27755$ m².

9. — *Résoudre un triangle quelconque connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :*

$$a = 172,84\ m$$
$$b = 204,28\ m$$
$$\widehat{A} = 12,4732\ g$$

Les inconnues sont $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et c

On part des formules : $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$

$$\widehat{C} = 200 - (A + B)\ C' = 200 - (A + B')$$
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \qquad c' = \frac{a \sin C'}{\sin A}$$

La surface est donnée pas $S = \frac{a\,b \sin A}{2}$

Calculs auxiliaires

Calcul de log b

	log b = log	204, 28	
pour	204 2	31006	$\Delta = 21$
pour	8	17	
pour	204,28	2,31023	

Calcul de log sin A

	log sin A = log	12,4732	
pour	12,47	$\bar{1},28921$	$\Delta = 31$
pour	32	11	
pour	12,4732	$\bar{1},28932$	

Calcul de log a

	log a = log	172,84	
pour	172 8	23754	$\Delta = 25$
pour	4	10	
pour	172,84	2,23764	

Calcul de log sin C

$$\log \sin C = \log \sin (200 - 172,7461)$$
$$= \log \sin 27,2539$$

pour	27,25	$\bar{1},61814$	$\Delta = 15$
pour	39	6	
pour	27,2539	1,61820	

Calcul de log sin C'

	log C' = log sin	$\bar{2},3072$	
pour	2,30	2,55775	$\Delta = 136$
pour	72	137	
pour	2,3072	$\bar{2},55912$	

Calculs définitifs

Calcul de $\widehat{B}$ et $\widehat{B}'$

$$\log b = 2,31023$$
$$\log \sin A = \bar{1},28932$$
$$\text{colog}\ a = \bar{3},76236$$
$$\log \sin B = \bar{1},36191$$

pour	1,36189	14,87	$\Delta = 23$
pour	2	07	
pour	1,36191 log sin	14,7807	

d'où $\widehat{B} = 14,7807$

$$\widehat{B}' = 200 - 14,7807 = 185,2193$$

Calcul de $\widehat{C}$ et $\widehat{C}'$

$$\widehat{A} = 12,4732 \qquad \widehat{A} = 12,4732$$
$$\widehat{B} = 14,7807 \qquad \widehat{B}' = 185,2193$$
$$\widehat{C} = 200 - 27,2539 = 172,7461$$
$$\widehat{C}' = 200 - 197,6925 = 2,3075$$

Calcul de c

$$\log a = 2{,}23764$$
$$\log \sin C = 1{,}61820$$
$$\text{colog} \sin A = 0{,}71068$$
$$\log C = 2{,}56652$$

pour 56644 — 3685 — $\Delta = 12$
pour 8 — 7
pour 56652 — 36857

$$c = 368{,}57$$

Calcul de c'

$$\log a = 2{,}23764$$
$$\log \sin C' = 2{,}55912$$
$$\text{colog} \sin A = 0{,}71068$$
$$\log c' = 1{,}50744$$

pour 50732 — 3216 — $\Delta = 13$
pour 12 — 9
pour 50744 — 32169

$$c' = 32{,}169$$

Calcul de S.

$$\log a = 2{,}23764$$
$$\log b = 2{,}31023$$
$$\log \sin C = 1{,}61820$$
$$\text{colog } 2 = 1{,}69897$$
$$\log S = 3{,}86504$$

pour 86504 — 7329

7329^{m^2}

Calcul de S'

$$\log a = 2{,}23764$$
$$\log b = 2{,}31023$$
$$\log \sin C' = 2{,}55912$$
$$\text{colog } 2 = 1{,}69897$$
$$\log S' = 2{,}80596$$

pour 80591 — 6396 — $\Delta = 7$
pour 5 — 0,7
pour 80596 — 63967

$$S' = 639{,}67$$

Réponses. — $\widehat{B} = 14{,}7807$ g ; $\widehat{B} = 185{,}2193$ g ; $\widehat{C} = 172{,}7461$ g ; $\widehat{C'} = 2^g{,}3075$; $c = 368{,}57$m ; $c' = 32{,}169$ m ; $S = 7329$ m² ; S' 639,67 m².

10. — *Résoudre un triangle quelconque connaissant les trois côtés :*

$$a = 324{,}62 \text{ m}$$
$$b = 483{,}54 \text{ m}$$
$$c = 284{,}36 \text{ m}$$

Les inconnues sont $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

On part des formules :

$$\text{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p\ (p-a)}}$$

$$\text{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{p\ (p-b)}}$$

$$\text{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ (p-c)}}$$

$$S = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$$

Ces formules deviennent en posant

$$\log r = \frac{1}{2} [\log (p-a) + \log (p-b) + \log (p-c) - \log p$$

$$\log \text{tg} \frac{A}{2} = \log r - \log (p-a)$$

$$\log \text{tg} \frac{B}{2} = \log r - \log (p-b)$$

$$\log \text{tg} \frac{C}{2} = \log r - \log (p-c)$$

$$\log S = \log r + \log. p$$

Calculs auxiliaires

$$2\ p = 1092{,}52$$
$$p = 546{,}26$$
$$p - a = 221{,}64$$
$$p - b = 62{,}72$$
$$p - c = 261{,}90$$

Calcul de $\log p$

$$\log p = \log 546{,}26$$

pour 5462 — 73735 — $\Delta = 8$
pour 6 — 5
pour 546,26 — 2,73740

Calcul de $\log (p - a)$

$$\log (p - a) = \log 221{,}64$$

pour 2216 — 34557 — $\Delta = 20$
pour 4 — 8
pour 221,64 — 2,34565

Calcul de $\log (p - b)$

$$\log (p - b) = \log 62{,}72$$
$$\log 62{,}72 = 1{,}79741$$

Calcul de $\log (p - c)$

$$\log (p - c) = \log 261{,}90$$
$$\log 261{,}9 = 2{,}41814$$

Calcul de $\log r$

$$\log (p - a) = 2{,}34565$$
$$\log (p - b) = 1{,}79741$$
$$\log (p - c) = 2{,}41814$$
$$\text{colog } p = 3{,}26260$$
$$2 \log r = 3{,}82380$$
$$\log r = 1{,}91190$$

Calculs définitifs

Calcul de $\widehat{A}$

$$\log r = \bar{1}{,}91190$$
$$\text{colog } (p - a) = 3{,}65435$$
$$\log \text{tg} \frac{A}{2} = \bar{1}{,}56625$$

pour $\bar{1}{,}56609$ — 22,46 — $\Delta = 21$
pour 16 — 76
pour $\bar{1}{,}56625$ = log tg 22,4676

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{A}}{2} \times 2 = 44{,}9352 \text{ g}$$

Calcul de $\widehat{B}$.

$$\log. r = 1{,}91190$$
$$\text{colog}\,(p - b) = 2{,}20259$$
$$\log \text{tg}\,\frac{B}{2} = 0{,}11449$$

Pour 11441 58,29 $\Delta = 14$
Pour 8 57
Pour 0,11449 = log tg 58,2957

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{B}}{2} \times 2 = 116{,}5914 \text{ g}$$

Calcul de $\widehat{C}$.

$$\log r = 1{,}91190$$
$$\text{colog.}\,(p - c) = \overline{3}{,}58186$$
$$\log \text{tg}\,\frac{C}{2} = \overline{1}{,}49376$$

Pour $\overline{1}{,}49360$ 19,23 $\Delta = 21$
Pour 16 67
Pour $\overline{1}{,}49376$ = log tg 19,2367

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{C}}{2} \times 2 = 38{,}4734 \text{ g}$$

Calcul de S.

$$\log. r = 1{,}91190$$
$$\log. p = 2{,}73740$$
$$\log. S = 4{,}64930$$

Pour 64924 4459 $\Delta = 9$
Pour 6 0,66
Pour 64930 4459,66
S = 44596,6

Réponses. — $\widehat{A}$ = 44,9352 g ;
$\widehat{B}$ = 116,5914 g ; $\widehat{C}$ = 33,1731 g ;
S = 44596 m³.

11. — *Placé à une certaine distance du pied d'une tour, on voit cet édifice sous un angle de 60° ; en s'éloignant de 100 mètres du premier point d'observation, on voit la tour sous un angle de 30°. Quelle est la hauteur de la tour, les deux postes d'observation étant en ligne droite avec son pied ?*

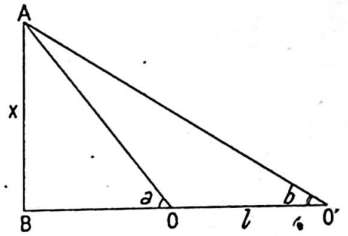


Fig. 17

Soit x la hauteur de la tour AB qui est vue du point O sous l'angle a et du point O′ sous l'angle b tel que l'on ait OO′ = l

On a : l = B O′ — B O

Les triangles rectangles ABO, ABO′ donnent

$$BO = x \text{ cotg } a \qquad BO' = x \text{ cotg. } b$$

d'où

$$l = x\,(\text{cotg } b - \text{cotg } a)$$
$$= x\left(\frac{\cos b}{\sin b} - \frac{\cos a}{\sin a}\right)$$
$$= x\,\frac{\sin (a - b)}{\sin a \sin b}$$

et

$$x = l\,\frac{\sin a \sin b}{\sin (a - b)}$$

Pour l = 100ᵐ, a = 60°, b = 30°

on a :

$$x = \frac{100 \sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin (60^\circ - 30^\circ)} = 100\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 50 \times 1{,}73 = 86{,}5 \text{ m}$$

Réponse. — 86,5 m.

PHYSIQUE

AVERTISSEMENT

La physique et la chimie sont deux sciences liées entre elles par de nombreux points communs. Elles sont dépendantes l'une de l'autre et leur étude ne doit pas être séparée, on les désigne communément sous le nom de « **sciences physico-chimiques** ».

Leur certitude n'est pas absolue comme celle des sciences mathématiques ; elles n'ont pu être créées de toutes pièces par le raisonnement, mais se sont formées au cours des siècles par l'observation et la répétition expérimentale des phénomènes observés. Elles sont donc sous la dépendance de nos sens et de nos instruments de mesure qui peuvent nous tromper, mais nous donnent cependant une vérité relative.

Sciences expérimentales, ces sciences devraient être étudiées expérimentalement, c'est-à-dire en répétant au laboratoire les principales expériences faites par les savants qui les ont édifiées. Notre enseignement étant purement livresque, nous avons obvié à cet inconvénient en multipliant le nombre des figures ou des schémas qui permettent au lecteur de comprendre parfaitement l'esprit de ces sciences.

Cependant un grand nombre d'expériences simples sont à la portée de chacun dans la vie de tous les jours. Nous conseillons vivement au lecteur d'observer ce qui l'entoure. Nous ne doutons pas que, grâce à son travail et à notre ouvrage, beaucoup de phénomènes lui soient expliqués.

Fidèles à l'esprit qui nous a guidés dans cette encyclopédie, nous avons proposé au lecteur de très nombreuses applications pratiques et numériques qui devront être faites complètement et dont du reste, la solution raisonnée est donnée. A ce propos l'une des difficultés des problèmes de physique, est l'emploi exact des unités s'appliquant aux différentes grandeurs. Si, par exemple, dans un calcul, une force est exprimée en kilogrammes, il faut que toutes les autres le soient également et non pas en grammes ou en milligrammes. Si une longueur est donnée en mètres, il ne faut pas exprimer une vitesse qui est le quotient d'une longeur par un temps, en centimètres. Nous conseillons vivement à nos lecteurs de refaire tous les exercices que nous leur proposons en modifiant pour chacun les unités données dans l'énoncé. Pour faciliter la tâche, il devra, au début, avoir devant les yeux le chapitre réservé aux systèmes d'unités.

PHYSIQUE

INTRODUCTION

La physique étudie les lois qui régissent les phénomènes naturels; c'est la plus importante des sciences d'observation, car la partie expérimentale en est très développée.

On la divise en un certain nombre de parties qui correspondent aux propriétés générales que l'on étudie :

I° la **pesanteur** qui s'occupe de l'attraction exercée sur tous les corps par la terre ;

II° la **statique des gaz et des liquides** ;

III° la **chaleur** ;

IV° l'**acoustique** ;

V° l'**optique** ;

VI° l'**électricité et le magnétisme.**

Nous admettons en chimie que les corps sont composés de molécules indivisibles par les procédés physiques; ces molécules laissent entre elles des intervalles appelés *pores moléculaires*; l'*élasticité* tend à les écarter la *cohésion* les retient associées.

Les molécules d'un corps peuvent être comparées à des boulets entassés. L'espace libre entre ces boulets donne une idée des pores moléculaires (fig. 1).

Les corps solides ont une forme et un volume déterminés tant qu'on ne les soumet pas à des actions mécaniques puissantes. Ex : le bois, le marbre, le fer sont des solides.

Selon l'hypothèse moléculaire, la force de cohésion l'emporte, dans les corps solides, sur la force d'élasticité. Pour séparer les molécules d'un corps solide, il faut le briser, c'est-à-dire vaincre une résistance plus ou moins considérable.

Les corps liquides ont un volume déterminé mais leur forme dépend de la forme du corps solide (vase) dans lequel ils sont contenus. La force de cohésion et la force d'élasticité se font équilibre.

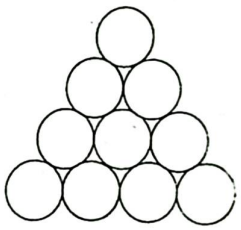


Fig. 1

Les corps gazeux n'ont ni forme, ni volume déterminés, en outre, leur volume n'est pas limité et ils tendent toujours à occuper le plus de place possible. La force élastique l'emporte sur la force de cohésion.

En général, un même corps, s'il ne se décompose pas lorsqu'on élève sa température peut exister sous les trois états : solide, liquide et gazeux.

C'est ainsi que la vapeur d'eau se condense en eau qui se solidifie elle-même en glace.

NOTIONS DE MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPE DE L'INERTIE — FORCES

Avant d'étudier les lois et les phénomènes physiques, il est nécessaire de posséder certaines notions de mécanique.

Repos et mouvement. — *Un corps est au repos par rapport à d'autres corps quand sa distance à chacun de ces corps reste invariable.*

Un corps est en mouvement par rapport à d'autres corps lorsque sa distance à chacun des corps varie.

Notons que le repos et le mouvement ne sont que relatifs à la surface de la terre puisque celle-ci entraîne avec elle tous les corps dans son double mouvement de rotation et de révolution.

Principe de l'inertie. — *On admet qu'un corps ne peut modifier de lui-même son état de repos ou de mouvement.*

Un corps étant en équilibre et immobile dans une certaine position, il restera indéfiniment dans cette position si aucune cause extérieure à lui n'entre en action.

Un corps étant animé d'un mouvement rectiligne, ni la vitesse ni la direction de ce mouvement ne changeront sans l'intervention d'une cause extérieure au corps.

Exemples :

Une pièce de 2 fr. posée sur un carré découpé dans une carte de visite reste sur le bout du doigt lorsque d'une chiquenaude on fait partir le carré de carton qui s'interposait entre elle et le doigt (fig. 2).

Applications. — *Emmanchement d'un marteau.* Le manche, passé dans l'ouverture pratiquée dans le fer et frappé fortement sur une pierre, se trouve arrêté

dans son mouvement, tandis que le fer continuant le sien s'engage plus avant dans le manche (fig. 3).

Arrêt brusque du tramway ou de l'autobus. — Les voyageurs sont projetés les uns sur les autres dans le sens de la marche.

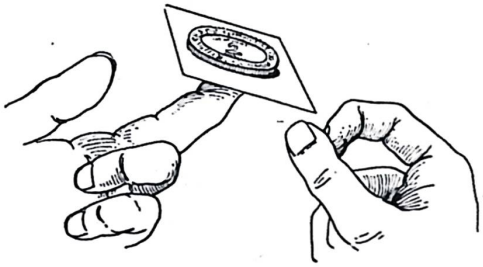


Fig. 2

Descente d'une voiture en marche. — Il faut se pencher en arrière d'autant plus que la vitesse est plus grande (fig. 4).

Remarque : Pratiquement on constate qu'un corps en mouvement ne tarde pas à s'arrêter, ce qui paraît en contradiction avec le principe de l'inertie. C'est qu'en effet dans les conditions où sont placés les corps qui nous environnent, on ne peut les soustraire ni à l'action de la pesanteur, ni à la résistance de l'air ni à la force de frottement.

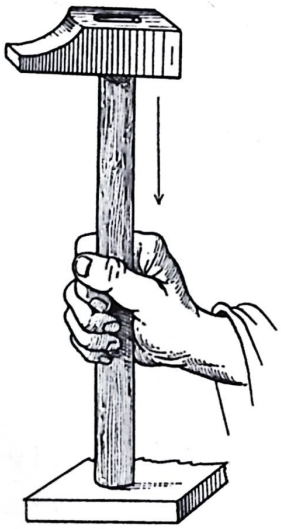


Fig. 3

Forces. — *On appelle force toute cause capable de modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps.*

Nous avons tous la notion de la force. L'action de la pesanteur, la résistance que nous éprouvons quand nous voulons tirer, pousser ou briser un objet, nous la font acquérir dès la plus tendre enfance.

Une force est définie par 3 éléments :

1° *Son point d'application* qui est le *point* du corps sur lequel elle s'exerce.

2° Sa *direction* c'est-à-dire le *sens* dans lequel elle entraîne le corps.

3° Son *intensité* c'est-à-dire sa *grandeur*.

Si on tire un poids au bout d'une ficelle, le point où la ficelle est attachée est le point d'application; la direction de la ficelle est la direction de la force; l'effort de traction représente l'intensité.

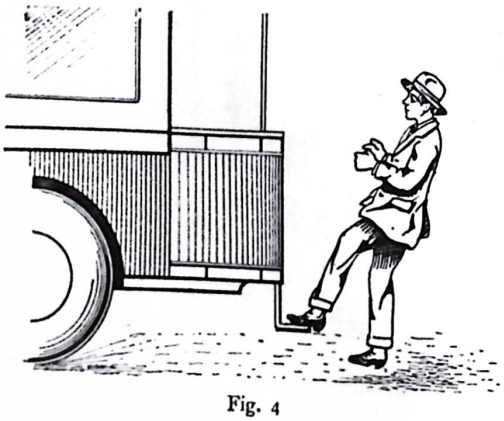


Fig. 4

Représentation d'une force. — On représente une force au moyen d'un **vecteur géométrique**, c'est-à-dire un segment de droite de longueur définie et dirigé dans un certain sens. Le sens est indiqué par une flèche.

La longueur OF du vecteur est proportionnelle à l'intensité de la force (fig. 5). Son origine O est le point d'application de la force ; sa direction OF est la direction de la force.

Fig. 5

Si plusieurs forces agissent sur un même point, on les représente par plusieurs vecteurs OF, OF', OF'' (fig. 6). L'ensemble de plusieurs forces agissant sur un même point ou sur des points liés entre eux par une figure rigide, indéformable, constitue un système de forces.

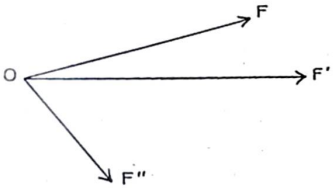


Fig. 6

Il résulte de la notion même de la force que, si une force OF agit sur un point O d'une droite XY et dans la direction de cette droite, l'effet sur la droite ne change pas quand on remplace OF par une force OF' égale et de même direction, appliquée en un autre point O' de la droite (fig. 7). C'est ce qu'on exprime d'une manière abrégée en disant : *On peut déplacer le point d'application d'une force dans la direction de cette force sans changer l'effet du système.*

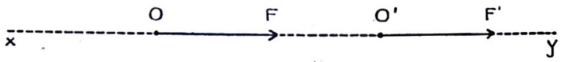


Fig. 7

Equilibre. — Si un corps soumis à un système de forces *reste immobile*, on dit que le système est en équilibre ou que les forces se font *équilibre*.

Le cas le plus simple est celui où le système se compose de deux forces. Dans ce dernier cas, il est évident que deux forces qui se font équilibre doivent avoir la *même intensité* et des directions *opposées* sur une même droite, telle que OF et O'F' (Fig. 8).

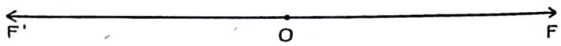


Fig. 8

Egalité des forces. — *On dit que deux forces sont égales quand elles font équilibre à la même force.*

Il résulte de ce qui précède que deux forces égales ont la même intensité et la même direction.

Autrement dit : *Deux forces sont égales lorsqu'appliquées à un même corps, elles produisent sur lui les mêmes effets.*

Addition des forces. — On additionne deux forces en les appliquant au même point.

En particulier, on additionne des forces égales en les appliquant au même point dans la même direction.

On dit qu'une force est double, triple, quadruple, etc., d'une autre, lorsqu'elle peut faire équilibre à deux, trois, quatre, etc., forces égales à celle qui fait équilibre à l'autre.

Ou encore *lorsque appliquées à un même corps, elles produisent sur lui les mêmes effets que* 2, 3 et 4 forces égales.

Dynamomètre. — Pour mesurer les forces, on se sert du dynamomètre.

Cet appareil se compose essentiellement d'un *ressort* qui fléchit sous l'action de la force. En fléchissant, il déplace un index sur une graduation. Si deux forces

appliquées successivement à l'appareil amènent l'index au même point de la graduation, on admet qu'elles sont égales.

Le dynamomètre le plus simple consiste en un ressort BCD (fig. 9) à chaque branche duquel est assujetti un arc BD et EF. L'arc métallique BD est fixe en D soudé à la branche CD du ressort et mobile en B par rapport à la branche BC. L'arc EF est au contraire soudé en E et libre en F. Si on suspend l'appareil en A au moyen d'un anneau fixé à l'arc BD et qu'on applique une force en F par l'intermédiaire d'un crochet fixé à l'arc EF les deux branches du ressort tendront à se rapprocher. Une graduation tracée sur l'arc BD permet de comparer les efforts.

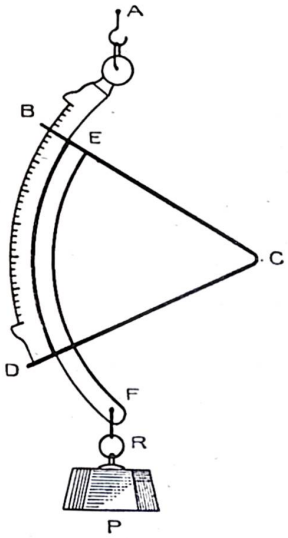


Fig. 9

Composition des forces. Résultante. — On *appelle résultante d'un système de forces appliquées à un même corps une force qui appliquée à ce corps produit sur lui un effet identique à celui de toutes les forces du système agissant simultanément.*

L'*équilibrante* est la force qui appliquée à ce corps fait équilibre à la Résultante.

Il s'en suit que la résultante et l'équilibrante sont deux forces égales et directement opposées.

Comparer des forces, c'est chercher leur Résultante.

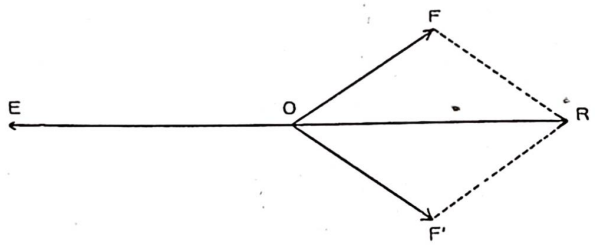


Fig. 10

$$OR = OE$$

Composition des forces concourantes 1° *Forces ayant même direction.* Plusieurs forces ayant même direction se composent par addition ou soustraction.

a) Si les forces agissent dans le même sens leur résultante est une force ayant même direction et égale en intensité à la somme des composantes.

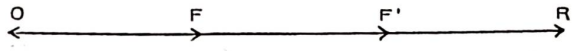


Fig. 11

$$OR = OF + OF'$$

b) Si les forces agissent en sens inverse, leur résultante est une force ayant même direction et égale en intensité à la différence des composantes.

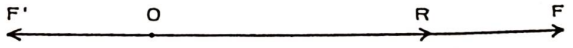


Fig. 12

$$OR = OF - OF'$$

2° *Forces de directions quelconques*

a) Cas de 2 forces.

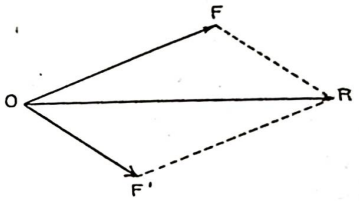


Fig. 13

La résultante de 2 forces concourantes est représentée en grandeur et direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les valeurs réprésentant ces forces.

On peut vérifier cette règle avec l'appareil de Delaunay.

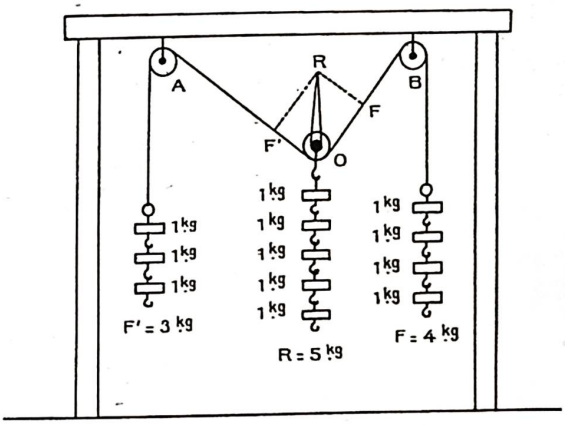


Fig. 14

b) Cas de plusieurs forces. — Elle peut être obtenue en combinant ces forces deux à deux suivant la règle du parallélogramme. Mais on obtient plus rapidement cette résultante en menant par l'extrémité de OF un vecteur

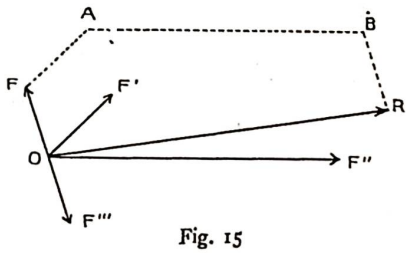


Fig. 15

$$FA = OF'$$

Par A un vecteur $AB = OF''$, par B un vecteur $BR = OF''$. OR est la résultante du système.

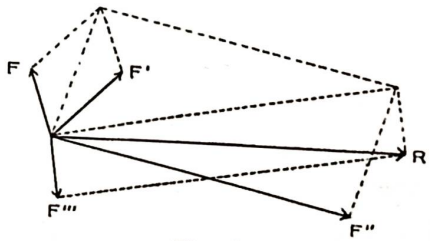


Fig. 16

Décomposition des forces. — De même qu'on peut remplacer un système de forces par une résultante, on peut remplacer une seule force par un système dont cette force serait la résultante.

Le problème est indéterminé. Par exemple, pour décomposer une force OF en deux autres (fig. 17), il suffira de mener par O, dans un même plan avec OF, deux directions OA, OB et, par F, des parallèles FA, FB à ces directions. OA, OB représentant un système de deux forces équivalant à la force OF.

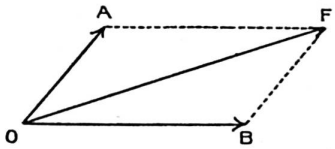


Fig. 17

Le problème est déterminé si, outre OF, on connaît deux éléments du triangle OFB, par exemple la direction et l'intensité de l'une des forces, ou la direction des deux forces, ou la direction de l'une et l'intensité de l'autre.

Les deux forces OB et OA s'appellent *les composantes* de la force O F.

Composition de forces parallèles. — Quand les forces parallèles sont appliquées en un système de points indissolublement liés et formant un ensemble rigide, on peut en général les remplacer par une force unique, qui est la *résultante* du système de forces parallèles.

Deux forces parallèles et de même sens AM, BN ont *pour résultante une force OR parallèle et de même sens égale à leur somme et appliquée en un point O situé entre A et B* et *tel que*

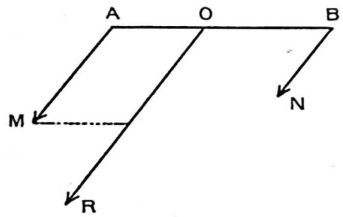


Fig. 18

$$OA \times AM = OB \times BN$$

Démonstration expérimentale. — Elle se fait avec l'appareil de Delaunay (fig. 19).

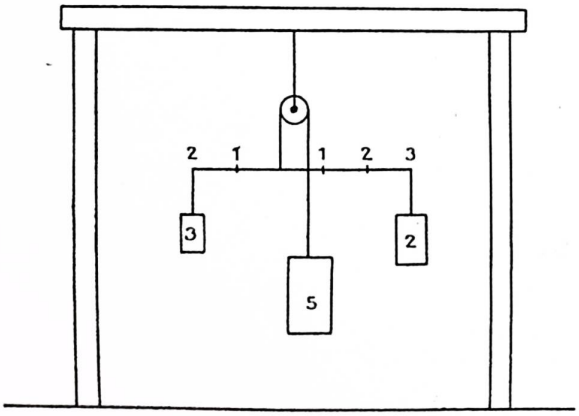


Fig. 19 — Démonstration expérimentale

Démonstration géométrique. — Soient les deux forces parallèles AM et BN appliquées aux deux extrémités d'une droite rigide A B (fig. 20).

Nous pouvons, sans changer l'équilibre du système, appliquer aux deux extrémités de la droite et dans le prolongement de cette droite deux forces égales et opposées AF, BF'. Si nous construisons la composante AO du système AF, AM, et la composante BH du système BN, BF', le système formé par ces deux composantes est équivalent au système AMBN.

Les directions de AK et BH se rencontrent en un point O ; si nous supposons le point O indissolublement lié à la droite A B, nous pouvons y transporter le point d'application de chacune des forces BH et AK qui prennent les positions OH_1 et OK_1

Mais on peut maintenant décomposer chacune des forces OH_1 et OK_1, en deux forces égales à celles du système dont elle est la résultante, soient :

$$OF_1 = AF \quad OM_1 = AM \quad OF'_1 = BF' \quad ON_1 = BN$$

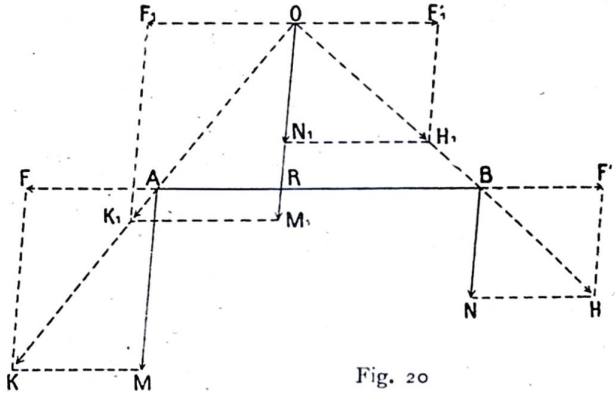


Fig. 20

Les forces OK_1 et OM_1 étant parallèles à deux forces parallèles et étant appliquées en un même point O se trouvent sur une même direction, elles s'ajoutent. Quant aux forces OF_1 et OF'_1 égales et opposées, elles s'annulent.

Le système donné est donc équivalent en définitive à une force appliquée au point O, parallèle aux forces données et égale en intensité à leur somme.

On démontre que le point R de la droite A B par lequel passe cette résultante est plus rapproché de la plus grande force que de la plus petite et qu'on a la relation de grandeur :

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BN}{AM}$$

Deux forces parallèles et de sens opposés A F et BF' ont pour résultante une force parallèle OR dirigée dans le sens de la plus grande égale à leur différence et appliquée en un point O pris sur le prolongement de AB du côté de la plus grande et tel que

$$AO \times AF = OB \times BF'$$

Couple. — *Un couple est un système de deux forces parallèles et de sens contraire, égales en intensité* (fig. 21). Un pareil système n'a pas de *résultante*, pourtant les deux forces tendent à faire tourner la droite A B dans le sens de la flèche. Ce mouvement persiste jusqu'à ce que les deux forces et la droite soient venues se placer dans le prolongement les unes des autres. Si la direction des forces change en même temps que celle de la droite AB, le mouvement continue. C'est ce qui arrive par exemple dans un manège formé d'une poutre tournant autour d'un pivot et aux deux bouts de laquelle, de part et d'autre du pivot, sont attelés deux chevaux.

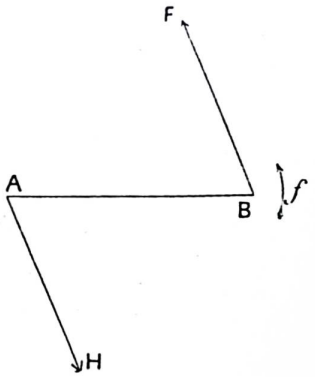


Fig. 21

Rotation sous l'action d'une force. — Si une droite AB est assujettie à passer par un point fixe A et si une force BF agit sur cette droite en un autre point B, la droite BA prend, sous l'action de cette force, un mouvement de rotation autour du point A jusqu'à ce que FB soit dans le prolongement de BA.

Bras de levier d'une force. — *On appelle bras de levier de la force FB la longueur de la perpendiculaire AH* abaissée du point fixe sur la direction de la force (fig. 22). Si FB est dans le prolongement de BA, le bras de levier est nul.

Si plusieurs forces parallèles agissent sur une figure assujettie à tourner autour d'un point fixe, pour que cette figure soit en équilibre, il faut que la résultante passe par le point fixe, autrement dit, que le bras de levier de la résultante soit nul.

Moment d'une force. — On appelle *moment d'une force le produit de cette force par son bras de levier.*

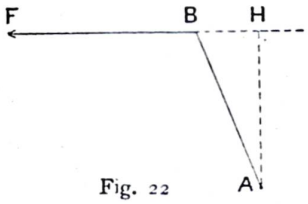


Fig. 22

Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles est égal à la différence de la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner la figure dans un sens inverse.

On peut remarquer que le produit de FB (fig. 22) par la perpendiculaire AH représente le double de la surface du triangle ABF. Ainsi le moment d'une force est mesuré par le double de la surface du triangle qui joint les deux extrémités du vecteur de cette force au centre de rotation.

Pour qu'un corps possédant un point fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments, par rapport au point fixe des forces qui sont appliquées au corps, soit nulle.

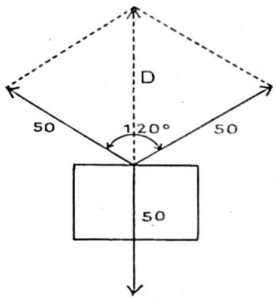


Fig. 23

Problèmes.

1. — Deux hommes soutiennent en équilibre une pierre par 2 cordes également inclinées par rapport au sol et attachées au même point de la pierre. Chacun exerce une force de 50 kg et les cordes font entre elles un angle de 120°. On demande le poids P de la pierre.

Solution

Le parallélogramme des forces est un losange dont les angles ont 120°, 60°, 120°, 60°.

Par suite la diagonale D = 50 kg. ; donc P = 50 kg. Réponse : 50 kg.

2. — Deux forces parallèles $F_1 = 3$ kg. $F_2 = 7$ kg. sont appliquées normalement aux extrémités d'une ligne droite de 10 cm. de longueur.

Tracer leur résultante :

1° dans le cas où les forces sont de même sens;

2° dans le cas où elles sont de sens contraires.

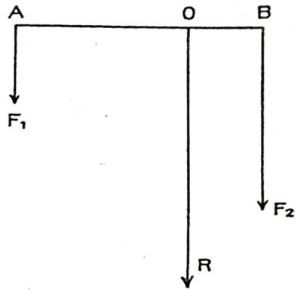


Fig. 24

Solution

$$OR = 3 + 7 = 10$$
$$\frac{OA}{OB} = \frac{7}{3}$$

$$OR = 7 - 3 = 4$$
$$\frac{OA}{OB} = \frac{7}{3}$$

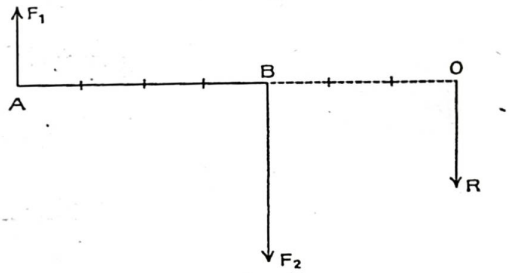


Fig. 25

3. — Déterminer la résultante de 3 forces rectangulaires dont les intensités sont 4, $2\sqrt{3}$ et 2.

Solution

Soient les 3 forces rectangulaires

$$OA = 4$$
$$OB = 2\sqrt{3}$$
$$OC = 2$$

Nous commençons par composer O C et O B suivant O D et enfin en composant O D et O A nous obtenons la résultante demandée O R.

Dans O B D nous avons :

$$\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BD}^2$$
$$= (2\sqrt{3})^2 + 2^2$$
$$= 16$$

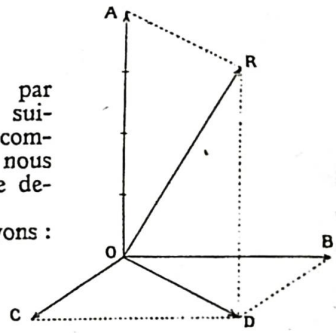


Fig. 26

D'où : O D = 4

Dans le triangle rectangle O R D. On a

$$\overline{OD}^2 + \overline{RD}^2 = OR^2$$
$$4^2 + 4^2 = OR^2$$
$$OR = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

CHAPITRE II

MOUVEMENT — VITESSE — ACCÉLÉRATION

L'action d'une force se traduit par la mise en mouvement d'un corps au repos.

Mobile, trajectoire. — On donne le nom de *mobile* à un corps en mouvement. La ligne décrite par le mobile dans l'espace s'appelle la *trajectoire.*

Si la trajectoire est une ligne droite, on dit que le mouvement est *rectiligne.* Si la trajectoire est courbe, on dit que le mouvement est *curviligne.*

Mouvement rectiligne uniforme. — On appelle mouvement *uniforme* celui dans lequel le mobile parcourt *des espaces égaux en des temps égaux* quelconques. L'*espace* parcouru est mesuré sur la trajectoire.

Vitesse. — *On appelle vitesse d'un mouvement uniforme l'espace parcouru pendant l'unité de temps.*

Lois du mouvement uniforme. — 1° Dans le mouvement uniforme, par définition, *la vitesse est constante ;*

2° *Les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

Soit v la vitesse ; l'espace parcouru au bout d'un certain nombre de secondes t est exprimé par le produit $v \times t$. En appelant e l'espace parcouru, on peut donc écrire l'équation :

$$e = vt$$

Exemple de mouvement uniforme : une locomotive qui parcourt 50 kilomètres à l'heure et pendant toutes les heures aura parcouru au bout de 6 heures un espace

$$e = 50 \times 6 = 300 \text{ km.}$$

L'unité de temps est la **seconde** qui vaut $\frac{1}{86.400}$ du jour solaire moyen.

L'unité de vitesse est celle d'un mobile qui parcourt l'unité de longueur pendant l'unité de temps.

Dans le système (M. K. S.) (mètre, kilogramme, seconde) et M. T. S. (mètre, tonne, seconde) l'unité de vitesse est le *mètre par seconde.*

Dans le système C. G. S. (centimètre, gramme, seconde) elle est le *centimètre par seconde.*

Remarque. — De la formule $e = vt$ on tire

$$v = \frac{e}{t}$$

La vitesse est donc égale au quotient de l'espace parcouru par le temps employé à le parcourir.

Mouvement varié. — On appelle mouvement varié celui d'un mobile qui parcourt des *espaces inégaux dans des temps égaux.*

Mouvement uniformément varié. — On appelle mouvement *uniformément varié* celui dans lequel les espaces parcourus dans des temps égaux croissent ou décroissent de quantités égales à chaque unité de temps.

Si les espaces vont en croissant, on dit que le mouvement est *uniformément accéléré.*

Si les espaces vont en décroissant, le mouvement est *uniformément retardé.*

Vitesse. — Nous appellerons *vitesse moyenne* du mouvement varié pendant un temps donné, le quotient de l'espace parcouru par le temps employé à le parcourir.

On appelle *vitesse* du mouvement *à un instant donné* la valeur vers laquelle tend la vitesse moyenne lorsque l'on fait tendre vers zéro l'intervalle de temps dans lequel est compris cet instant.

Dans un langage imagé, on peut dire que la vitesse à un instant donné est celle que conserverait le mobile si à cet instant le mouvement devenait uniforme.

On appelle accélération la quantité constante dont varie la vitesse pendant chaque unité de temps.

Formules du mouvement uniformément accéléré. — Soit v_0 la vitesse du mobile à l'origine des temps ; soient γ l'accélération, v_t la vitesse au bout du temps t: Au bout d'une seconde la vitesse est $v_0 + \gamma$, au bout de deux secondes $v_0 + 2\gamma$, au bout de t secondes $v_0 + t \times \gamma$

$$v_t = v_0 + \gamma t$$

En particulier, si v_0 est nul, c'est-à-dire si le mobile est parti de l'état de repos on a :

$$v_t = \gamma t$$

La vitesse est proportionnelle au temps.

On démontre que l'espace parcouru pendant le temps t est donné par la formule

$$e = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

v_0 étant la vitesse à l'instant o et γ l'accélération. En particulier si l'on fait coïncider l'origine des temps avec l'origine des espaces et si le corps part de l'état de repos, l'équation devient

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

On peut donc dire dans ce cas *que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps mis à les parcourir.*

Formules du mouvement uniformément retardé.

Elles sont :

$$v_t = v_0 - \gamma t$$

$$e = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$$

Telles sont les équations du mouvement d'un corps lancé de bas en haut.

Proportionnalité des forces aux accélérations. — Lorsqu'un objet matériel n'est soumis à aucune force, il peut se présenter deux cas : ou il est immobile, ou il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Nous avons admis par le principe de l'inertie que cet état de repos ou de mouvement uniforme ne pouvait être modifié que par l'action d'une force.

Une force constante en grandeur et direction agissant sur un corps libre, lui imprime un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Ex. le poids d'un corps tombant en chute libre.

Lorsque des forces agissent successivement sur un même objet matériel, elles lui impriment des accélérations qui sont proportionnelles aux forces.

Soient F, F',F'' des forces ; γ, γ', γ'', les accélérations que chacune d'elles imprime à un même corps, le quotient de la force par l'accélération est constant :

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = M$$

Masse d'un corps. — Ce quotient M, constant pour un corps donné, à la condition que sa température demeure constante, est une caractéristique de ce corps ; il prend le nom de **masse** du corps.

De la formule

$$\frac{F}{\gamma} = M$$

on déduit :

$$\frac{F}{M} = \gamma \qquad (1)$$

La masse d'un corps étant connue, pour trouver l'accélération imprimée à ce corps par une force quelconque F, il suffira de prendre le quotient de F par la masse M.

La force F agissant sur un autre corps de masse M lui communiquera une autre accélération γ'

$$\frac{F}{M'} = \gamma' \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on déduit :

$$\frac{F}{M} : \frac{F}{M'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

ou

$$\frac{M'}{M} = \frac{\gamma}{\gamma'} \qquad M'\gamma' = M\gamma$$

Si une même force agit sur des corps de masses différentes, elle leur communique des accélérations inversement proportionnelles aux masses. La masse de l'un des corps étant 2, 3, 4... *fois plus grande* que celle de l'autre , l'accélération imprimée à ce corps sera 2, 3, 4... *fois plus petite* que l'accélération imprimée à l'autre corps.

Enfin, si la masse devenant 2, 3, 4... fois plus grande ou plus petite, la force devient elle-même,2, 3, 4... fois plus grande ou plus petite, l'accélération reste toujours la même :

$$\frac{F}{M} = \frac{2F}{2M} = \frac{3F}{3M} = \frac{4F}{4M} = \ldots\ldots = \gamma$$

Pour que l'accélération imprimée à des corps de masses différentes soit la même, il faut et il suffit que les forces agissant sur ces corps soient proportionnelles à leurs masses.

Unités de masse. — Dans le système M.T. S. c'est tonne-masse qui vaut 1000 kilogrammes-masse.

Le kilogramme-masse est la masse du prototype international en platine iridié déposé au pavillon de Breteuil à Sèvres.

C'est à très peu de chose près la masse d'un décimètre cube d'eau distillée à 4° centigrades et sous la pression de 760 mm. de mercure.

Dans le système C. G. S. l'unité de masse est le *gramme-masse* qui vaut la millième partie du kilogramme-masse.

Unités de force. — Dans la formule (1) :

$$\frac{F}{\gamma} = M$$

on tire $$F = M\gamma$$

Dans cette équation faisons $M = 1$ $\gamma = 1$

il vient $F = 1$

L'unité de force est donc la force, qui agissant sur l'unité de masse, lui communique une accélération égale à l'unité.

Dans le système M. T. S. c'est le **sthène** (sn).

Le sthène est la force qui agissant sur la masse d'une tonne lui communique une accélération d'un mètre par seconde.

Dans le système C. G. S. c'est la **dyne**.

La dyne est la force, qui agissant sur la masse d'un gramme lui communique une accélération d'un centimètre par seconde à la seconde

$$1sn = 1.000.000 \text{ gr.} \times 100 \text{ cm.} = 10^8 \text{ dynes.}$$

Dans le système M. K. S. l'unité de force est le *kilogramme-poids* qui sera défini plus loin.

CHAPITRE III

TRAVAIL — PUISSANCE — ÉNERGIE

Notions experimentales du travail. — On dit *qu'une force travaille, quand sous son action, son point d'application se déplace.*

Un cheval qui tire une voiture, un homme qui déplace un fardeau, un poids qui fait tourner les rouages d'une horloge, travaillent.

Le charbonnier qui monte un sac de 50 kilogrammes au premier étage d'une maison effectue un travail, si le même charbonnier monte un sac de 50 kilogrammes au deuxième étage, il effectue un travail double du premier, au troisième il fournit un travail triple (fig. 27).

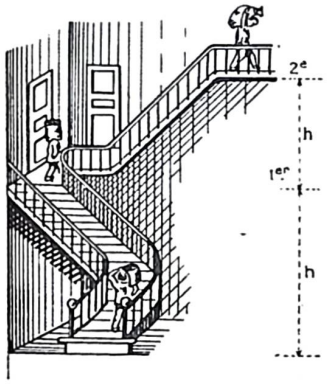


Fig. 27

On conçoit aisément que si au lieu de monter un sac de 50 kilogrammes au deuxième étage il montait deux sacs de 50 kg. au premier étage le travail serait le même.

On peut dire que le travail est proportionnel au poids soulevé, c'est-à-dire à la force qui agit, et proportionnel au chemin parcouru, c'est-à-dire au déplacement.

Travail d'une force constante en grandeur et direction.

1° *Le travail et la force ont même direction.*

Par définition le travail A est égal au produit de l'intensité de la force par le déplacement.

Soit OF une force d'intensité F qui déplace son point d'application de O en A (fig. 28).

Fig. 28

Le travail est $A = F \times OA$.

Si le déplacement à lieu dans le même sens que la force

$$A = F \times OA$$

Si le déplacement à lieu dans le sens opposé à la force, on a (fig. 29)

$$A = -F \times OA$$

Fig. 29

Dans le premier cas le travail est dit *moteur*, dans le deuxième cas il est dit *résistant*.

Exemple de travail résistant : Un cheval, qui dans une forte côte, essaie en vain de faire avancer un tombereau que son poids et la pente entraînent en arrière (fig. 30).

Fig. 30

2° *Le travail et le déplacement de la force font un angle α.*

Le travail est alors égal au produit de la force par la projection du déplacement sur la direction de la force, ou encore au produit du déplacement par la projection de la force sur la direction du déplacement.

Dans le cas des figures (31 et 32), on a

$$A = F \times Ab \text{ (fig. 31)}$$
$$A = Af \times AB \text{ (fig. 32)}$$

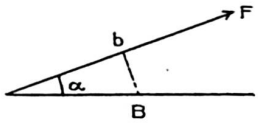


Fig. 31

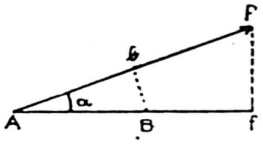


Fig. 32

La similitude des triangles AbB et AfF, permet d'écrire

$$\frac{Ab}{Af} = \frac{AB}{AF}$$

Donc

$$Ab \times AF = Af \times Ab$$

Si le déplacement n'est pas une droite, le théorème subsiste.

Si sous l'action de la force F un corps se déplace suivant la courbe AMB.

Le travail $A = F \times Ab$.

b étant la projection du point B sur la direction O F.

Travail d'une force quelconque. — Il arrive souvent que la direction et l'intensité d'une force varient lorsque celle-ci se déplace. Pour calculer le travail total, il faut décomposer le déplacement AB en espaces

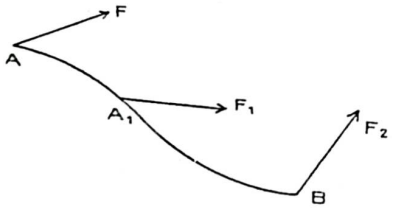


Fig. 33

suffisamment petits pour que la force soit sensiblement constante pour chaque déplacement. Puis on fait la *somme des travaux effectués* (fig. 33).

Unités de travail. — Dans la formule $A = F \times e$

faisons $F = 1$ dyne $e = 1$ cm.

il vient $A = 1$ erg.

Dans le *système C. G. S.* l'unité de travail *est l'erg*, c'est le travail fourni par la force d'une dyne qui déplace son point d'application de 1cm. dans sa direction. Dans la pratique, cette unité est trop petite, aussi on a pris comme unité pratique le *joule* qui vaut 10^7 ergs.

Dans le *système M. T. S.* l'unité de travail est égale au travail fait par une force d'un sthène déplaçant un point d'application de 1 mètre dans sa direction

$$A = 10^5 \text{ dy} \times 100 \text{ cm} = 10^{10} \text{ ergs.}$$

C'est le kilojoule.

10^{10} étant étant égal à $10^7 \times 1000$.

Dans le système M. K. S. on se sert du *kilogrammètre* qui est le travail d'une force de 1 kilogramme déplaçant son poids d'application de 1 mètre dans sa direction.

Nous reviendrons sur la valeur de cette unité qui vaut à Paris :

$$981.000 \times 100 = 9{,}81 \times 10^7 \text{ ergs} = 9{,}81 \textit{ joules.}$$

Puissance. — Nous venons de considérer le tratravail sans tenir compte du temps employé à l'effectuer. Mais ce qu'il importe de connaître, c'est la quantité de travail qu'une machine peut fournir en une seconde.

On appelle *puissance d'une machine le travail qu'elle peut fournir pendant l'unité de temps.*

Unité. — Dans le système C. G. S. c'est l'*erg* par seconde et le *watt* qui vaut 1 joule par seconde.

Remarque : 1 watt = 1 joule par seconde.

mais le watt désigne la puissance alors que le joule désigne seulement le travail.

Dans le système M. T. S. c'est le *kilowatt.*

Dans le système M.K.S. c'est le kilogrammètre par seconde

On se sert encore du *cheval vapeur* qui vaut 75 kilogrammètres par seconde.

Exemple : Un cheval qui traîne une voiture avec une force de 60 kilogrammes sur un parcours de 100 mètres pendant 2 minutes produit un travail de

$$60 \times 100 = 6.000 \text{ kilogrammètres.}$$

sa puissance est de :

$$\frac{6.000}{120} = 50 \text{ kilogramètres par seconde.}$$

6.000 (kgm = 9,81 × 6.000) joules = (9,81 × 6000 × 10^7) ergs
50 kgm p. sec. = (9,81 × 50) watts = (9,81 × 50 × 10^7) ergs par seconde.

Energie. — *Energie potentielle.* — Soient deux réservoirs A et B (fig. 34) à des niveaux différents et soit *h*

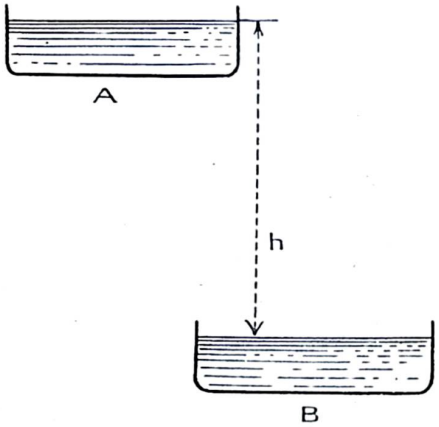


Fig. 34

leur distance verticale ; prenons 1 kilogramme d'eau dans A pour la transporter dans B, la force qui entre en jeu est la pesanteur, le travail fourni est

$$A = 1 \times h \text{ kilogrammètres}$$

L'eau en passant de A en B peut donc fournir un travail ; on exprime ce fait en disant que l'eau de A possède de l'*énergie potentielle* par rapport à celle en B.

D'une façon générale, *on dit qu'un système de corps possède de l'énergie lorsqu'il est capable de fournir du travail.*

Energie cinétique. — Considérons un corps G (fig. 35) roulant le long d'un plan incliné A B sous l'action de son poids P. Arrivé en B, il possède une certaine vitesse *v* et en vertu de cette vitesse, il remonte le long d'un autre plan incliné BC.

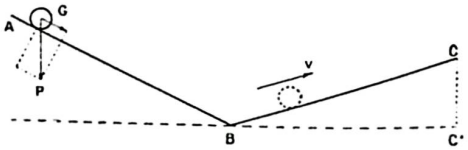


Fig. 35

En allant jusqu'en C, son poids fournit un travail résistant

$$A = P \times CC'$$

Par conséquent, le corps au point B a perdu l'énergie potentielle qu'il possédait en A, mais il possède une certaine énergie qui lui permet de fournir un travail, c'est de l'*énergie cinétique*.

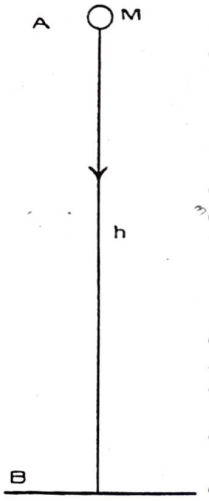


Fig. 36

Nous montrerons que cette énergie cinétique E dépend de la masse du corps M et de sa vitesse V

$$E = \frac{1}{2} MV^2$$

Théorème des forces vives. — On appelle force vive d'un corps en mouvement le produit de sa masse par le carré de sa vitesse.

$$\text{Force vive} = MV^2$$

Théorème. — *La demi-variation de la force vive d'un corps en mouvement pendant un intervalle de temps déterminé est égal à la somme des travaux des forces appliquées au corps en mouvement.*

Considérons par exemple un corps de masse M (fig. 36) tombant en chute libre d'une hauteur h en un lieu où l'accélération de la pesanteur est g.

Nous verrons en étudiant la pesanteur que la force agissant sur ce corps est son poids $P = Mg$.

Le travail fourni pendant le déplacement est donc :

$$A = M g h.$$

Au départ A la vitesse étant nulle

On a $\qquad M_A = 0$

A l'arrivée B la vitesse est $v = \sqrt{2gh}$ donnée par les équations du mouvement uniformément accéléré appliqué à la pesanteur

$$v = gt$$
$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

La force vive est donc en B

$$M_B = M \times 2gh = 2\,M\,gh$$

D'après l'énoncé du théorème des forces vives le travail doit être égal à

$$\frac{1}{2}(M_B - M_A) = \frac{2\,M\,g\,h - 0}{2} = M\,g\,h$$

C'est en effet le résultat obtenu précédemment.

Conservation de l'énergie mécanique totale dans un système mécaniquement isolé. On appelle *énergie mécanique totale d'un système la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.* Nous dirons que ce système est mécaniquement isolé lorsque les forces extérieures agissant sur ce système ne produisent aucun travail, quelles que soient les modifications apportées dans le système.

Dans un tel système l'énergie totale reste constante. Dans le cas d'un corps qui tombe par exemple, il nous sera facile de démontrer qu'à tout moment de sa chute son énergie mécanique totale est Mgh.

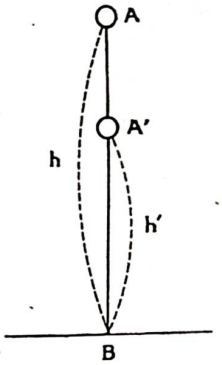


Fig. 37

En effet : (fig. 37)

Lorsque le corps est en A

son énergie potentielle est Mgh ;

son énergie cinétique $\quad \frac{1}{2} MV^2 = 0$

son énergie totale est donc $\quad M\,g\,h.$

Lorsque le corps est en A'

son énergie potentielle est $M\,g\,h'$

son énergie cinétique

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} M \left(\sqrt{2g\,(h - h')}\right)^2 = Mg\,(h - h')$$

son énergie totale est donc :

$$M\,g\,h' + M\,g\,h - M\,g\,h' = M\,g\,h$$

Lorsque le corps est en B :

son énergie potentielle est 0

son énergie cinétique

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} M \times 2\,g\,h = M\,g\,h$$

son énergie totale est donc $M\,g\,h$.

Nous verrons ultérieurement d'autres formes d'énergie, énergie calorifique, énergie chimique, énergie électrique etc....

CHAPITRE IV

MACHINES SIMPLES

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DU TRAVAIL

Définition. — On appelle **machine** un appareil dont les organes mobiles sont gênés dans leur mouvement par des obstacles fixes et au moyen desquels on peut mettre en équilibre des forces de grandeur et de direction quelconques.

Pour que les forces agissant sur les différentes parties d'une machine se fassent équilibre, il n'est pas nécessaire que leur résultante soit nulle ; il suffit qu'elles soient dirigées vers les obstacles qui les détruisent par leur résistance.

On appelle *machine simple* celle qui se compose d'un corps solide.

Levier. — *C'est la plus simple de toutes les machines.* Il est constitué par une barre rigide dont les extrémités sont sollicitées par deux forces et qui est mobile autour d'un point fixe appelé *point d'appui.*

Le point d'appui peut être situé entre les deux forces ou se trouver sur le prolongement de la ligne qui joint les points d'application des deux forces. Dans la pratique, les deux forces sont, l'une, une *résistance* à vaincre, par exemple le poids d'un corps à soulever ; l'autre, l'effort exercé par un homme, une bête de somme ou une machine pour vaincre la résistance, cette dernière prend le nom de *puissance.*

Il y a trois cas à considérer :

1° *Le point d'appui est entre la puissance et la résistance* (inter-appui) ;

2° *La résistance est entre le point d'appui et la puissance* (inter-résistant) ;

3° *La puissance est entre la résistance et le point d'appui* (inter-puissant).

Selon ces trois cas on distingue trois genres de leviers.

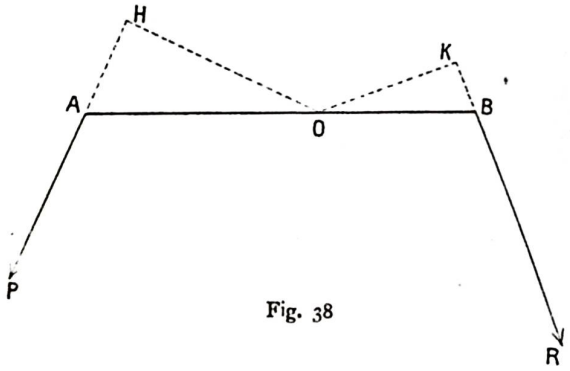


Fig. 38

Levier du premier genre (fig. 38) : Soient O le point d'appui, P la puissance et R la résistance. Pour que les deux forces s'équilibrent, il faut et il suffit que leurs *moments par rapport à* O soient égaux.

Nous aurons donc :

$$P \times OH = R \times OK$$

ou

$$\frac{P}{R} = \frac{OK}{OH}$$

Les forces doivent donc être inversement proportionnelles à leurs bras de levier.

Vérification expérimentale (fig. 39). — Une règle de poids négligeable A B divisée en 10 parties égales est suspendue par un fil fixé à la division 7; Si en A, on attache un poids de 300 grammes on constate que pour qu'il y ait équilibre, il faut attacher en B un poids de 700 grammes.

On peut écrire que

$$300 \times 7 = 700 \times 3.$$

Autrement dit que

$$P \times AO = R \times OB$$

ou

$$\frac{P}{R} = \frac{OB}{OA}$$

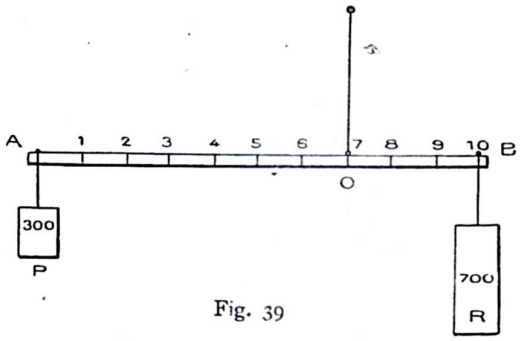


Fig. 39

Il résulte de là qu'une résistance quelconque étant donnée, on pourra toujours la vaincre avec une puissance donnée, aussi petite que l'on voudra, pourvu qu'on puisse déplacer le point d'appui. Si la puissance est par exemple de 30 kilogrammes et qu'il faille vaincre une résistance de 300 kilogrammes, il faudra disposer le point d'appui de telle sorte que le bras de levier de la résistance soit dix fois plus petit que le bras de levier de la puissance.

Il faut remarquer, d'autre part, que la distance parcourue par le point B ou par le point A quand on fait tourner le levier autour de O, est proportionnelle à la distance du point à l'axe O. C'est-à-dire que les distances parcourues sont inversement proportionnelles aux forces. Pour soulever un poids de 300 kilogrammes à 1 centimètre de hauteur au moyen d'une puissance de 30 kilogrammes, il faudra déplacer de 10 centimètres le point d'application de la puissance.

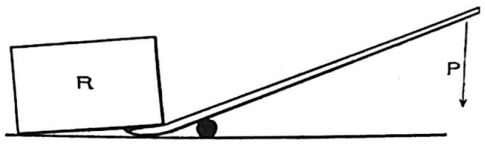


Fig. 40

On exprime ceci en disant que le travail moteur de la puissance est égal au travail résistant de la résistance. C'est là le principe de la conservation du travail.

Le travail n'a donc été que transformé. On perd en chemin ce qu'on gagne en force. Il en est ainsi en toute machine. Une machine *ne crée* donc aucun travail, elle ne fait que *transformer* du travail.

Principaux leviers du premier genre. Levier des carriers (fig. 40). — Ciseaux (fig. 41). — Tenailles.

Levier du deuxième genre (fig. 42). Dans le levier du deuxième genre, la résistance R étant placée entre le point d'appui O et la puissance P, les deux forces agissent en sens contraire. Pour que l'équilibre soit réalisé, il faut encore que la différence des moments soit nulle. Les conditions sont les mêmes que pour le levier du premier genre ; la puissance est toujours inférieure à la résistance.

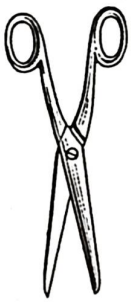


Fig. 41

Parmi ces leviers citons le casse-noisettes (fig. 43), la brouette (fig. 44).

Levier du troisième genre. — La puissance est entre le point d'appui et la résistance. *Elle est toujours supérieure à la résistance.* Ce genre de levier est employé surtout pour les machines à pédale.

Citons la pince à sucre (fig. 45), la pédale du rémouleur (fig. 46).

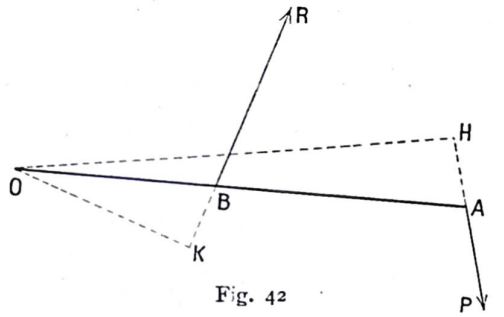


Fig. 42

Levier composé.— On peut aussi imaginer plusieurs leviers agissant les uns sur les autres.

Cette combinaison de leviers est utilisée dans les grandes bascules à peser les voitures. Imaginons une semblable bascule vue en dessous (fig. 47). La plateforme AA repose sur les extrémités *c c c c* de deux pièces métalliques rigides qui s'appuient elles-mêmes sur quatre points fixes *a a a a*. En *b* ces deux leviers triangulaires portent sur l'extrémité d'un levier du premier genre dont le point d'appui est en *d*. L'extrémité libre de ce dernier levier supporte un plateau *e* sur lequel on peut poser des poids.

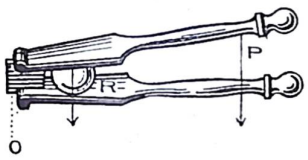


Fig. 43

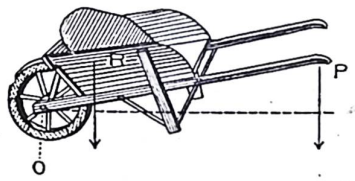


Fig. 44

Fig. 45

Le poids de la voiture placée sur la plateforme AA se transmet au point *b* dans le rapport de *a c* à la longueur de la perpendiculaire abaissée de *a* sur *b e*, c'est-à-dire que *b* n'en supporte qu'une faible part. D'un autre côté l'effort qui s'exerce, en *b* se transmet en *e* dans le rapport de *b d* à *d e*, c'est-à-dire que l'effort supporté par le point *e* se trouve encore plus faible que l'effort supporté par le point *b*.

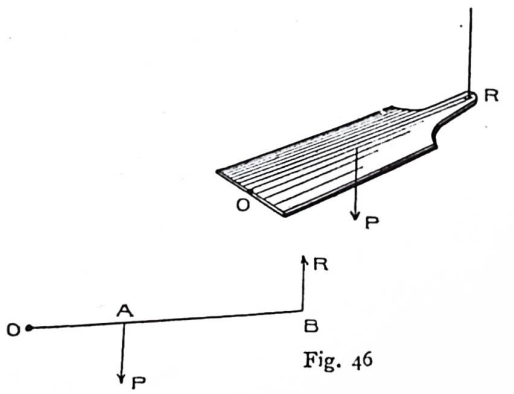


Fig. 46

On voit que, dans ces conditions, on peut établir une bascule permettant d'équilibrer un fardeau *de cent kg.* avec un poids de *quatre kg.* par exemple.

Treuil. — Le treuil consiste en un cylindre monté sur un axe qui coïncide avec son axe géométrique. Celui-ci fait corps avec une manivelle dont la poignée est plus éloignée de l'axe que la surface du cylindre. Une corde, fixée à l'une de ses extrémités en un point du cylindre, s'enroule sur la surface de ce dernier et supporte un poids à l'autre extrémité. Pour élever le poids, il suffit de faire tourner le cylindre dans un sens convenable.

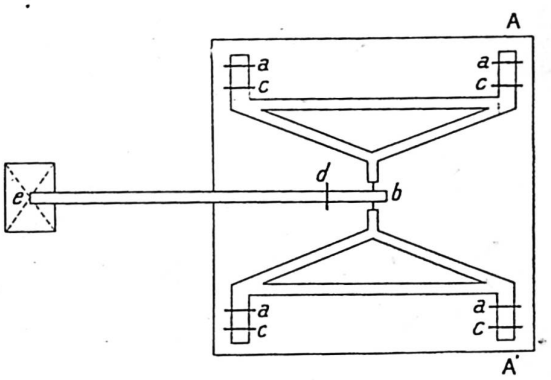


Fig. 47

La théorie du treuil se déduit de celle du levier. Soient deux cylindres fixes, l'un par rapport à l'autre, et assujettis à se mouvoir ensemble autour de leur axe C. Supposons qu'une puissance P s'exerce sur le grand cylindre par l'intermédiaire d'une corde et que le petit cylindre supporte une résistance R (fig. 48), la droite ACB constitue un levier du premier genre dont le point d'appui est C, la puissance P et la résistance R. Il suffit d'appliquer les conditions d'équilibre du levier : il faut et il suffit que la puissance et la résistance soient inversement proportionnelles aux distances de leur point d'application à l'axe C.

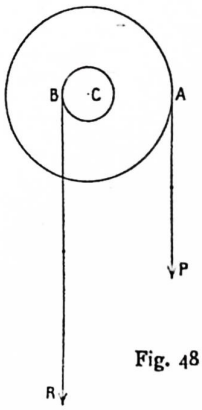


Fig. 48

Là encore ce qu'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru.

Lorsque le levier a tourné d'un angle α on a :

$$P \times AA' = R \times BB' \text{ (fig. 49)}$$

Quand on fait mouvoir le treuil au moyen d'une manivelle, cette conclusion n'est plus absolument exacte, parce que l'effort de l'ouvrier ne s'exerce pas toujours tangentiellement à la surface du cylindre décrit par la manivelle.

Pour permettre à l'ouvrier de se reposer et pour éviter la chute du fardeau si la puissance vient à faiblir, on peut *établir un cliquetage* qui empêche le treuil de tourner en sens inverse.

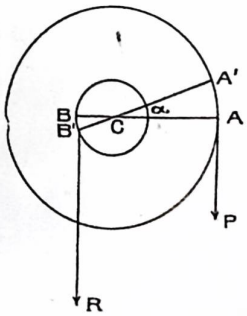


Fig. 49

On peut imaginer un treuil composé : plusieurs roues à engrenage, agissant les unes sur les autres, permettront d'enlever un poids W considérable avec une puissance P relativement faible. La théorie est la même que pour les leviers composés. Les différents treuils peuvent aussi être réunis par des courroies (fig. 50).

Une application courante du treuil est la roue du gouvernail des navires (fig. 51). Une chaîne enroulée

un certain nombre de fois sur le cylindre du treuil, s'attache par ses extrémités aux deux bouts d'une barre, perpendiculaire à l'axe et au plan du gouvernail, et faisant corps avec eux. Selon que le timonier tourne la roue dans un sens ou dans l'autre en agissant sur les manettes, il entraîne le gouvernail à droite ou à gauche.

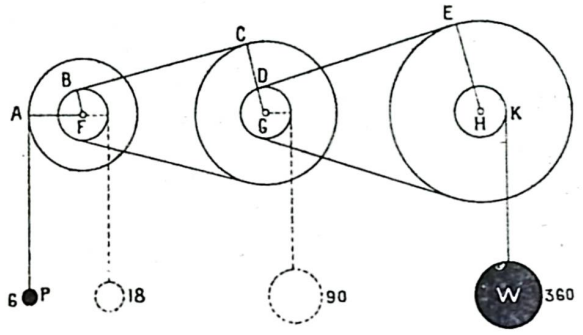


Fig. 50

Le rapport de la puissance à la résistance variant dans un treuil en raison inverse du rapport des diamètres, on peut calculer le diamètre du cylindre sur lequel s'applique la résistance de manière que celle-ci fasse équilibre à une puissance donnée. Si la puissance varie, le mouvement du treuil est lui-même varié; mais, si on fait varier en même temps le diamètre du treuil, on peut corriger les variations de la puissance. Il est possible de réaliser pratiquement une semblable disposition dans le cas où la puissance est exercée par un

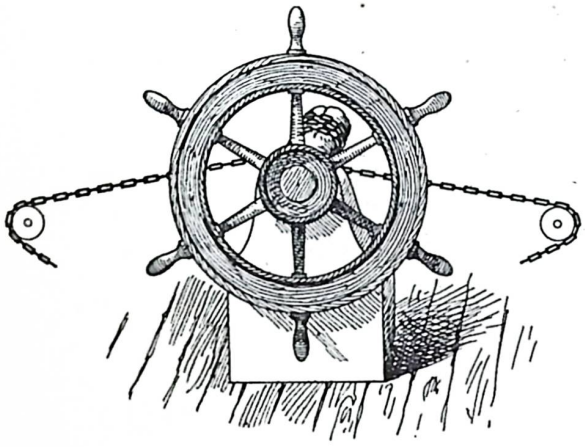


Fig. 51

ressort. En se détendant, le ressort B développe une puissance de plus en plus faible. Cette diminution graduelle de la force du ressort peut être corrigée au moyen d'un treuil en spirale A sur lequel la chaîne s'enroule en suivant les tours de spire (fig. 52). Au fur et à mesure que le ressort B se détend, la chaîne se déroule et agit sur des spires de plus en plus larges. Le bras de levier de la puissance augmente et le moment de la puissance reste constant.

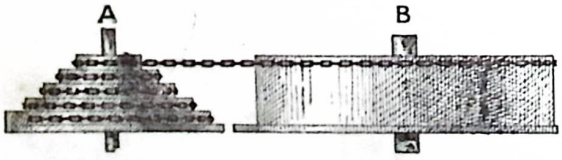


Fig. 52

Poulie. — La poulie se compose d'un plateau cylindrique, plein ou évidé, qui présente sur la tranche et dans tout son contour une rainure appelée gorge, sur laquelle on passe une corde ou une chaîne. Elle est assujettie à tourner autour de son axe.

La **poulie fixe** (fig. 53) est supportée par une ferrure appelée chape, que traverse l'axe de la poulie, et à l'aide de laquelle on la suspend à un point fixe.

Cette disposition est adoptée pour tirer de l'eau d'un puits, pour élever un fardeau. A l'une des extrémités de la corde est appliqué le fardeau W ; à l'autre extrémité, la puissance P.

Dans ce cas, les deux bras de levier AC et BC sont égaux ; pour se faire équilibre, les deux forces doivent être égales. La poulie fixe ne sert donc *qu'à changer la direction d'une force.*

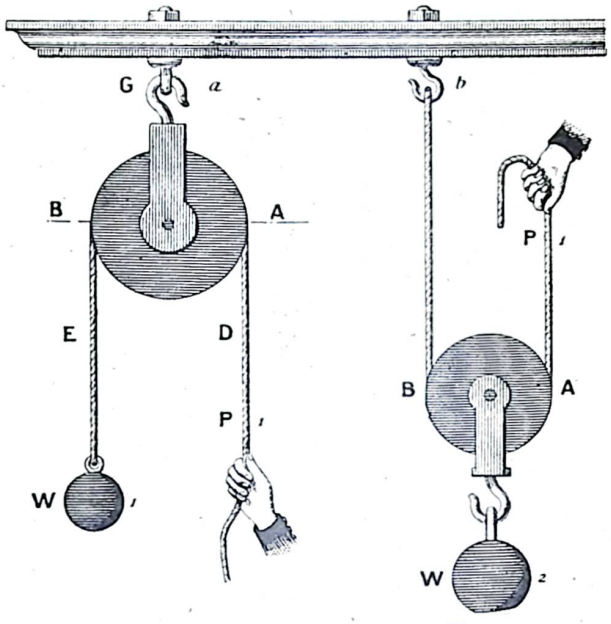


Fig. 53 Fig. 54

Dans la **poulie mobile** (fig. 54) le point d'application A de la puissance se trouve deux fois plus éloigné du point d'appui B que le point d'application C de la résistance. Par conséquent l'équilibre est réalisé avec une *résistance double de la puissance.* Dans ce cas, le chemin parcouru par le point d'application de la résistance est la moitié du chemin parcouru par le point d'application de la puissance.

Moufle. — Palan. — On peut encore diminuer le rapport de la puissance à la résistance en utilisant les moufles et les palans.

Une **moufle** (fig. 55) se compose de plusieurs poulies montées sur une même chape. L'ensemble de deux moufles réunies par une corde constitue un palan.

On fixe la moufle supérieure à l'aide du crochet qui la termine (fig. 57); une corde attachée par une de ses extrémités à la chape de cette moufle s'enroule sous la première poulie de la moufle mobile, remonte et passe sur la première de la moufle fixe, redescend sous la seconde poulie de la moufle inférieure et ainsi de suite jusqu'à ce que, ayant ainsi embrassé par leur moitié toutes les poulies, elle se détache de la dernière poulie supérieure. C'est à l'extrémité de cette corde, en P, qu'est appliquée la force de traction destinée à élever le poids suspendu au crochet de la moufle inférieure. La figure 56 représente un palan équipé à quatre brins. Si le fardeau s'élève d'un mètre, il en

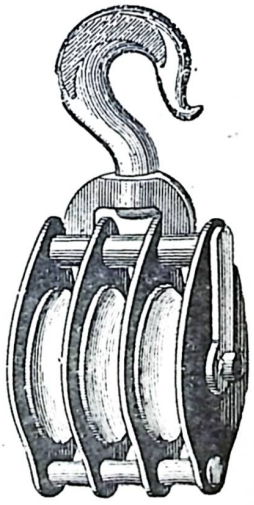
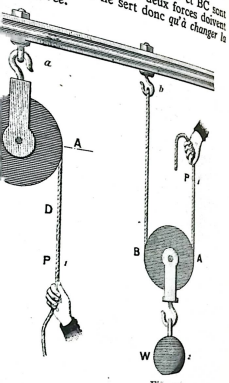


Fig. 55

ie fixe (fig. 53) est supportée par une ferrure
ape, que traverse l'axe de la poulie, et à l'aide
on la suspend à un point fixe.
position est adoptée pour tirer de l'eau d'un
élever un fardeau. A l'une des extrémités
est appliqué le fardeau W ; à l'autre extrémité,
e P.
La poulie fixe ne sert donc qu'à changer la
cas, les deux bras de levier AC et BC sont
r se faire équilibre, les deux forces doivent
une force.



g. 53

Fig. 54

ulie mobile (fig. 54) le point d'applica-
uissance se trouve deux fois plus éloigné
pui B que le point d'application C de la
r conséquent l'équilibre est réalisé avec
double de la puissance. Dans ce cas, le
uru par le point d'application de la résis-
moitié du chemin parcouru par le point
de la puissance.

Palan. — On peut encore diminuer le
puissance à la résistance en utilisant les
palans.
e (fig. 55) se com-
urs poulies mon-
e même chape,
e deux moufles
e corde constitue

oufle supérieure
ochet qui la ter-
; une corde at-
de ses extrémités
le cette moufle
s la première
moufle mobile,
asse sur la pre-
oufle fixe, redes-
seconde poulie
inférieure et
jusqu'à ce que,
brassé par leur
les poulies, elle
dernière poulie
st à l'extrémité
, en P, qu'est
rce de traction
er le poids suspendu au crochet de la
e. La figure 56 représente un palan équipé
Si le fardeau s'élève d'un mètre, il en

Fig. 55

TABLEAU DES UNITÉS

L'unité est multipliée par	Préfixe à mettre devant le nom de l'unité	Symbole	GRANDEURS	SYSTÈME CGS Unités	SYSTÈME CGS Unités pratiques	SYSTÈME MTS	SYSTÈME MKS	MESURES DIVERSES
10^6	Méga	M	*Longueur*	Centimètre cm		*mètre* (m) = 10^2 cm	*mètre*	lieue commune = 4 kilomètres
10^5	hectokilo	hk	*Masse*	gramme g		*tonne* (t) = 10^6 g		lieue marine = 5555m,555
10^4	myria	ma	*Temps*	seconde s	Multiples et sous-multiples décimaux	*seconde*	*seconde*	mille marin = 1852 mètres
10^3	kilo	k	Surface	centimètre carré cm^2		mètre carré (m^2) = 10^4 cm^2	mètre carré	nœud marin = 15m,43
10^2	hecto	h	Volume	centimètre cube cm^3		mètre cube (m^3) = 10^6 cm^3	mètre cube	nœud à l'heure = 1852 m à l'heure
10	déca	da	Vitesse	centimètre-seconde		mètre-seconde = $10^2 \frac{cm}{s}$	mètre-seconde	Un are vaut 100 m^2
1	»	»	Accélération	centimètre-sec. sec.		mètre-sec. sec, = $10^2 \frac{cm}{s.s.}$	mètre-sec. sec.	Le litre vaut 1000 cm^3
10^{-1}	déci	d	Force	dyne d	1 cop = 10^5 dynes	sthène (sn) = 10^8 d	*kilogramme poids* = 931.000 d	Le stère vaut 1 m^3
10^{-2}	centi	c	Travail et énergie	erg e	1 joule (J) = 10^7 e	kilojoule (kj) = 10^3 j	kilogrammètre = 98.100.000 e	1 kilomètre à l'heure vaut $0\frac{m}{s},265$ environ
10^{-3}	milli	m						1 carat vaut 2 dg
10^{-4}	décimilli	dm	Puissance	erg-seconde $\frac{e}{s}$	1 watt (w) = $10^7 \frac{e}{s} = 1 \frac{J}{s}$	kilowatt (kw) = 10^3 w	kilogramme seconde = 9w,81	Le cheval-vapeur (c. v.) vaut 75 $\frac{kgm}{s}$ ou 736 watts
10^{-5}	centimilli	cm	Pression	barye b	Mégabarye = 10^6 b	Pièze (pz) = 10^4 b	kilogramme par m^2	On utilise plutôt le kilogr. par cm^2
10^{-6}	micro	μ	Quantité de chaleur	calorie c	Multiples décimaux	Thermie (th) = 10^6 c	grande calorie	1 atmosphère vaut 1,013 hpz.

UNITÉS ÉLECTRIQUES		
Résistance	Ohm ω	colonne de mercure S = 1 mm^2 ; l = 106^{cm}:30
Intensité	Ampère A	courant qui déplace 0g,001118 d'argent en 1 sec.
Force électro-motrice	Volt V	
Quantité d'électricité	Coulomb C	(1 ampère-heure = 3,6 kilocoulombs)
Capacité	Farad fd	(unité pratique : microfarad)
Energie	Joule J	1 hectowatt-heure vaut 360.000 joules
Puissance	Watt W	

UNITÉS OPTIQUES

Intensité bougie décimale bd

1 carcel = 9,61 bd

Flux lumineux lumen lu

Eclairement lux lx

1 phot = 10000 lx

1 foot candle = $\frac{1}{1076}$ phot

Puissance des verres d'optique
dioptrie (δ)
(puissance d'un système optique de distance focale 1 mètre)

UNITÉS ANGLAISES

Mesures de longueur

1 mille = 1609m,3149
1 mille = 8 furlongs
1 furlong = 10 chain = 201m,164
1 chain = 4 pole = 20m,1164
1 pole = 5 1/2 yards = 5m,0211
1 yard = 3 foot = 0m,91438
1 foot = 12 inch = 0m,30479
1 inch = 0m,02539954

Mesures de poids

1 ton = 20 cwts = 1 tonne,016048
1 cwt = 4 quarters = 50802 grammes
1 qr = 2 stones = 12700g,58
1 st = 14 livres = 6350g,29
1 lb = 16 onzes = 453g,59
1 oz = 16 drachms = 28g,349
1 dr = 27,344 grains = 1g,7718
1 grain = 0g,06479895

sera de même de la moufle inférieure et chacun des quatre brins se raccourcira d'un mètre ; il passera donc quatre mètres de corde dans les mains de l'homme qui exerce la traction. L'équilibre sera établi pour une résistance 4 fois plus grande que la puissance.

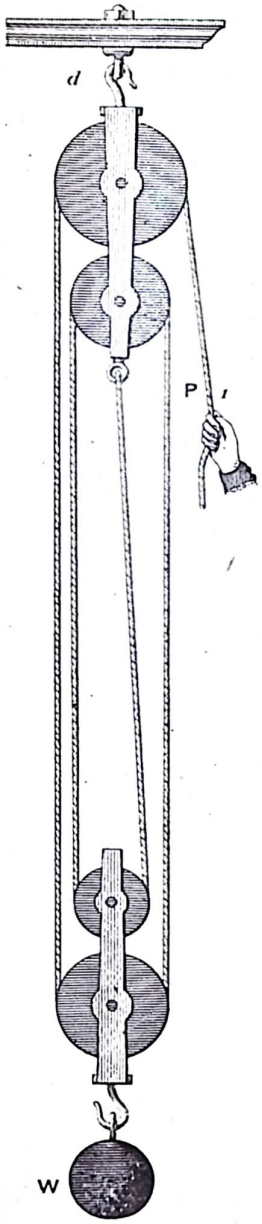


Fig. 56

Combinaison du treuil et de la poulie. — La puissance peut s'exercer par l'intermédiaire d'une machine quelconque, en particulier par l'intermédiaire d'un treuil (fig. 57 et 58).

Soit un treuil dont la puissance s'exerce en P à l'extrémité du rayon FA.

Ce treuil se compose de deux cylindres juxtaposés sur le même axe, de rayons différents et fixes l'un par rapport à l'autre. Une corde portant la poulie mobile, s'enroule par une de ses extrémités sur le grand cylindre et par l'autre extrémité sur le petit cylindre en sens contraire. Si le treuil tourne sous l'action de la puissance, le brin BH s'enroule tandis que le brin CB se déroule, comme le premier s'enroule plus vite que l'autre ne se déroule, la poulie mobile s'élève en soulevant le fardeau.

Cette machine se nomme treuil différentiel.

Coin. — Le coin est un corps solide ayant la forme

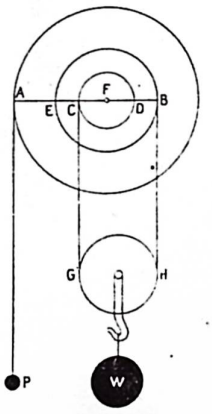


Fig. 57

d'un prisme triangulaire à l'aide duquel on écarte les surfaces entre lesquelles on l'introduit.

L'arête par laquelle on introduit le coin s'appelle le tranchant ; la face opposée s'appelle la tête.

Dans le coin isocèle, en équilibre, la puissance est à la pression exercée perpendiculairement aux faces du coin comme la surface de la tête est à la surface des côtés.

Vis. — La vis se compose d'un cylindre appelé *noyau* sur lequel sont ménagés des *filets* rectangulaires ou triangulaires.

Les filets forment sur le noyau des spires d'hélice régulières.

Lorsqu'on fait tourner la vis sans faire tourner l'écrou, ou réciproquement, les deux pièces se déplacent l'une par rapport à l'autre ; l'écrou avance ou recule par rapport à la vis. L'extrémité de la vis, ou son écrou, avance à chaque tour dans le sens de l'axe d'une quantité égale au pas de l'hélice et à chaque fraction de tour de la même fraction du même pas. La théorie se déduit de celle du plan incliné ; car à chaque instant et en chaque point, le filet de la vis se comporte comme un plan incliné par rapport à des plans perpendiculaires à l'axe de la vis.

Lorsque l'équilibre est atteint, la puissance et la résistance sont entre elles dans le même rapport que le pas de la vis et le rayon de l'outil avec lequel on fait tourner la vis ou l'écrou.

On peut vaincre avec la vis des résistances énormes, surtout si on la fait tourner au moyen d'une barre passée dans la tête de la vis ou d'une manivelle qui jouent le rôle de levier.

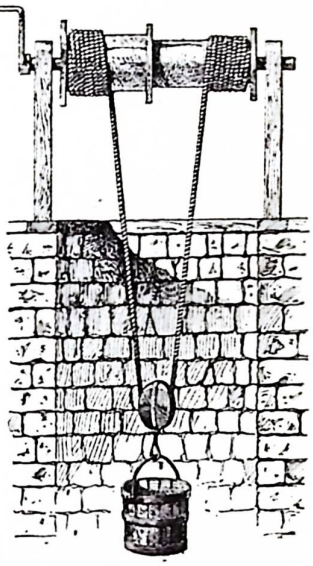


Fig. 58

Combinaison du treuil et de la vis (fig. 59). — Si on fait entraîner le treuil par une roue dentée FD, actionnée elle-même au moyen d'une vis montée sur un axe CB, et qu'enfin on fasse tourner l'axe CB au moyen d'une manivelle BA, on obtient une machine capable de soulever des poids très lourds. La vis ne subissant pas de déplacement latéral (vis sans fin) se présente toujours en face des dents de la roue qui joue, par rapport à la vis, le rôle d'écrou mobile.

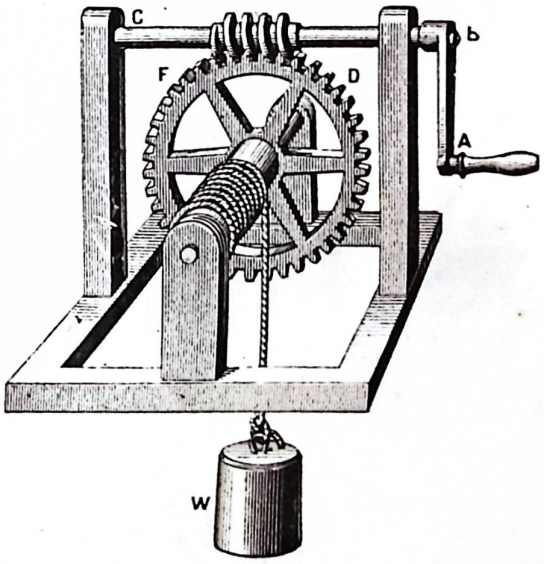


Fig. 59

Supposons par exemple que la manivelle ait 32 cm. de long et le pas de la vis, 2 cm. D'après ce que nous venons de dire, la puissance P s'exerçant sur la manivelle fera équilibre à une résistance R telle que :

$$\frac{P}{R} = \frac{2}{32 \times 3{,}14}$$

ce qui donne sensiblement $\frac{1}{50}$. Si le rayon de la roue dentée est lui-même le triple du rayon du cylindre du treuil, la résistance R sera trois fois plus faible que le

poids du fardeau W ; la puissance nécessaire pour soulever ce dernier sera donc en définitive de $\frac{1}{15}$. On ferait équilibre à un poids de 1.500 kg. avec un effort de 10 kg. en A.

Problèmes

1. — Une règle A B de 0,50 m. bien homogène et pesant 20 gr. s'appuie par son extrémité A sur un couteau horizontal. L'extrémité B presse sur l'extrémité C d'une règle identique à la première reposant sur un couteau A' placé à 0,30 m. de C. Au milieu de A B on place une charge de 0,200 kg. Quelle charge x faut-il en D pour que le système reste en équilibre ? Les règles sont horizontales.

Réponse : x = 0,170 (fig. 60).

2. — Un cheval traîne une voiture du poids de 900 kg. sur une route qui monte de 2 cm. par mètre. Quelle force doit-il exercer sur la voiture ? Quel travail a-t-il accompli au bout de 4 km.? Quelle puissance a-t-il développée, s'il a mis 50 minutes pour accomplir le trajet ?

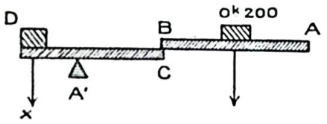


Fig. 60

Réponses : 18 kg. ; 72.000 kg. ; 0,32 ch.

3. — Un treuil dont le rayon est R = 3 m. sert à enrouler le câble supportant la cage d'un puits de mine. La profondeur du puits est h = 750 m., et la cage, dont le poids total est P = 4.000 kg. met un temps t = 400 secondes pour remonter. La machine agit sur la tête

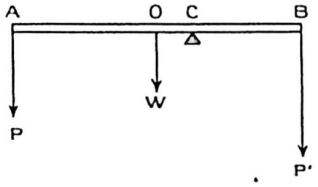


Fig. 61

M d'une manivelle O M de longueur R' = 1 m. On admet qu'il y a conservation du travail. Quelle est la puissance de la machine en chevaux-vapeur et en kilowatts ? Quel est l'effort avec lequel la machine agit sur la manivelle, effort perpendiculaire à cette manivelle ? Quel est l'espace parcouru en une seconde par la tête de cette manivelle ?

Réponses : 100 ch. = 73,6 KW. ; 12.000 kg. ; 0,625 mètres.

4. — Sur le tranchant d'un couteau C (fig. 61) on pose horizontalement une tige pesante homogène A B portant à ses extrémités A et B des poids P et P'. Indiquer la position de C pour que la tige soit en équilibre.

Application : A B = $z + y$ = 0 m., 60 ; P = 19 kg. ; Q = 39 kg. ; W (poids de la tige) = 2 kg.

Solution

Soient

$$AC = x$$
$$BC = y$$
$$AB = l$$

Nous avons l'équation d'équilibre :

$$P \times x + \omega\left(x - \frac{l}{2}\right) - P' \times y = 0$$

d'où le système d'équations :

(1) $19x + 2(x - 30) - 39y = 0$

(2) $x + y = 60$

d'où nous tirons :

$$x = 40^{cm}$$
$$y = 20^{cm}$$

5. — Un seau rempli d'eau et pesant 20 kg. est remonté du fond d'un puits dont la profondeur est de 5 mètres. Le rayon du treuil est de 10 cm., celui de la manivelle de 40 cm. ; on demande d'évaluer : 1° la force qui fera équilibre au seau d'eau ; 2° le travail de cette force ; 3° le travail direct qu'il faudrait effectuer pour remonter le seau verticalement à l'aide d'une corde. On ne tiendra compte ni du poids de la corde ni des frottements.

Solution

1° Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme des moments des forces par rapport à O soit nulle, où :

P × O H = R × O B (fig. 62)

Ce qui donne :

$$20 \times 0{,}1 = x \times 0{,}4$$

d'ou :

$$x = \frac{20}{4} = 5 \text{ kg.}$$

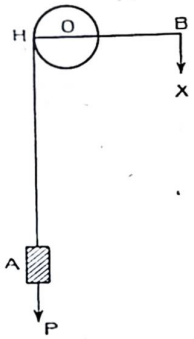


Fig. 62

2° Lorsque le seau parcourt une distance verticale de 5 m. le point H décrit :

$$\frac{5}{2\pi \times 0{,}1} \text{ circonférences.}$$

Le point B fera donc un parcours de :

$$\frac{5 \times 2\pi \times 0{,}4}{2\pi \times 0{,}1} = 20 \text{ mètres.}$$

Travail : 5 × 20 = 100 kilogrammètres.

3° Travail direct pour remonter le seau :

20 × 5 = 100 kilogrammètres.

Le travail moteur est égal au travail résistant.

PESANTEUR

Si nous prenons un corps solide, une boule de plomb par exemple, notre main tend à se rapprocher de la terre et nous sommes obligés de faire un effort pour la tenir élevée et pour ne pas lâcher la boule. Celle-ci est attirée par la terre, *on nomme* **pesanteur** *la cause générale qui sollicite les corps à tomber vers la terre.*

La force de la pesanteur sur la boule est le *poids de* celle-ci.

Le poids d'un corps étant une force est caractérisé par sa *direction*, un point d'*application* et son *intensité*.

Direction de la pesanteur. — Suspendons à un point fixe, au bout d'un fil léger et flexible, une balle de plomb ou un poids quelconque ; le fil, après avoir oscillé un certain temps, s'arrête dans une position d'équilibre. Si le fil s'arrête, c'est, nous le savons, que la direction de la force qui agit sur son extrémité libre, passe par son extrémité fixe. C'est-à-dire que la direction de la pesanteur est justement celle du fil.

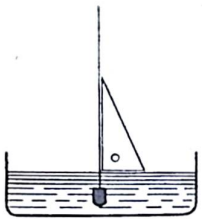


Fig. 63

L'appareil ainsi constitué se nomme *fil à plomb. Les observations astronomiques montrent qu'il se dirige suivant la verticale du lieu où l'on fait l'expérience.*

Donc l'action de la pesanteur s'exerce suivant la *direction des rayons terrestres.* Les corps tendent à tomber vers le centre de la terre.

Toute droite *perpendiculaire* à la direction du fil à plomb est appelée *horizontale.*

Un *plan horizontal* est un plan perpendiculaire à la verticale.

C'est la surface d'un liquide au repos (fig. 63).

Remarques. — Deux verticales rapprochées nous semblent parallèles, en réalité ce sont deux obliques,

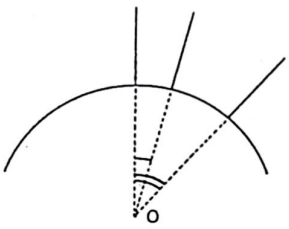


Fig. 64

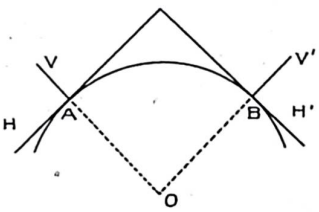


Fig. 65

qui, si on pouvait les prolonger se rencontreraient au centre de la terre.

L'angle qu'elles forment est *d'autant plus grand* qu'elles sont *plus éloignées* l'une de l'autre (fig. 64).

De même la surface de l'eau n'est un plan horizontal qu'autant qu'elle occupe une petite étendue. Dans le cas contraire c'est une surface sphérique.

Deux horizontales H et H' en des points différents A et B forment *un angle qui est le supplément* de l'angle des verticales en ces deux points (fig. 65).

Cause de la pesanteur. — La pesanteur n'est qu'un cas particulier de la *gravitation universelle* dont les lois ont été découvertes par *Newton* : les corps s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de leur distance, d'après la formule :

$$F = k \frac{m\,m'}{d^2}$$

m et m' étant les masses des corps et d leur distance.

La force qui agit sur les corps placés à la surface de la terre n'est pas localisée au centre du globe, elle se répartit dans toute sa masse.

Le fil à plomb au voisinage d'une grande montagne dont l'attraction, en vertu des lois de Newton, n'est pas négligeable, ne prend pas exactement la direction de la verticale. Il est légèrement dévié du côté de la montagne.

Cavendish a prouvé dans une expérience remarquable que tous les corps placés à la surface de la terre exercent les uns sur les autres des attractions. Il a suspendu, au bout d'un fil métallique AB (fig. 66) très fin, une baguette légère terminée par deux balles de plomb PP', se faisant équilibre. L'appareil étant au repos, si on approche de la balle P une grosse boule de plomb dans la direction oblique par rapport à la baguette PP' on voit l'appareil tourner légèrement sur lui-même en tordant le fil AB. Cette déviation est produite par l'attraction de la grosse boule de plomb.

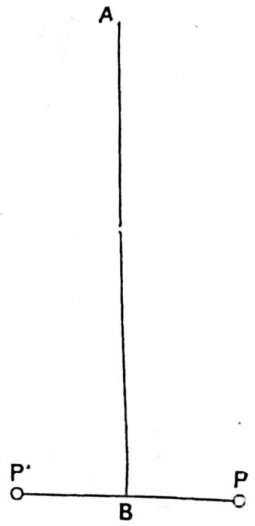


Fig. 66

Point d'application des poids. — D'après ce que nous venons de dire, on peut déjà supposer que l'action de la pesanteur s'exerce sur toutes les parties d'un corps et non pas en un point donné de ce corps. L'expérience démontre cette hypothèse, car si on réduit un corps pesant en fragments, chacun de ceux-ci reste soumis à l'action de la pesanteur.

Toutefois les forces qui s'exercent sur les différents d'un objet matériel sont toutes de même sens et sensi-

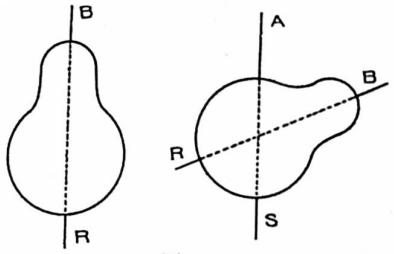


Fig. 67

blement parallèles ; il s'en suit qu'elles possèdent *une résultante qui est le poids du corps, appliquée au centre de gravité.*

Le centre de gravité est donc le point d'application du poids d'un corps.

Détermination du centre de gravité. — On suspend d'abord le corps par le point B (fig. 67). Sous

l'action de la pesanteur, il prend une certaine position d'équilibre. On note la direction de la verticale BR passant par le point de suspension, Puis on suspend le corps par un autre point A et, quand l'équilibre est établi, on relève la direction AS de la verticale. L'intersection C, des droites BR et AS donne le point d'application du poids. On sait, en effet, que le point de suspension, le point d'application de la force et la force elle-même sont en ligne droite dans les deux cas. Il s'ensuit que le point d'application du poids vient nécessairement se placer sur la verticale passant par le point de suspension. Conséquence : les deux droites BR et AS se coupent au *centre de gravité.*

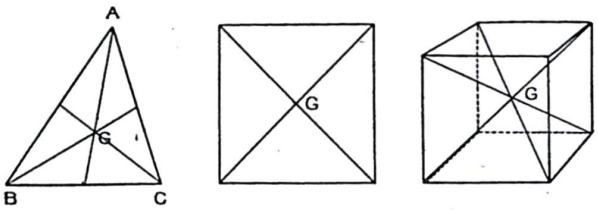


Fig. 68

Dans un certain nombre de cas, on peut déterminer par le raisonnement le centre de gravité d'un corps. En particulier, quand ce corps affecte une forme géométrique simple et que sa composition est homogène.

Si le corps homogène possède un centre de symétrie, ce centre est le centre de gravité du corps ; par exemple, le centre de gravité d'un carré, d'un rectangle, d'un parallélogramme est au point de concours des diagonales ; il en est de même pour un cube, un parallélépipède, etc. (fig. 68).

Le centre de gravité d'un triangle est au point de concours des médianes (fig. 68).

Equilibre d'un corps solide. — Un corps est en équilibre lorsqu'il est au repos.

Différents cas d'équilibre. — Un corps est en *équilibre stable* lorsque dérangé un peu de sa position d'équilibre il *tend à y revenir.*

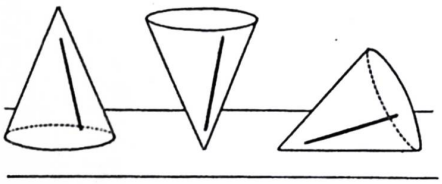


Fig. 69a Fig. 69b Fig. 69c

C'est l'équilibre d'un cône reposant sur sa base (fig. 69a). Un corps est en *équilibre instable* lorsque dérangé un peu de sa position d'équilibre, il n'y revient pas *mais en adopte une autre.* C'est l'équilibre d'un cône reposant sur sa pointe (fig. 69b).

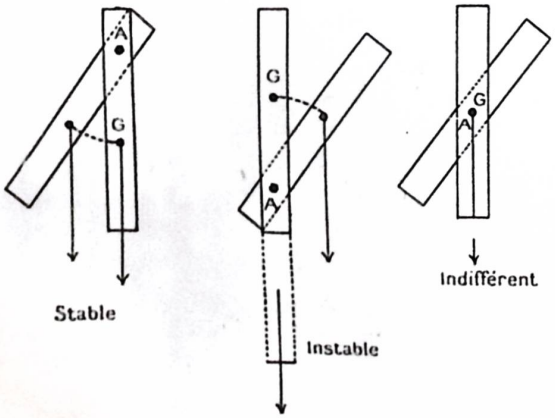


Fig. 70

Un corps est en *équilibre indifférent* quand ayant été dérangé de sa position d'équilibre d'une quantité très faible, *il reste* dans la nouvelle position qu'on lui a donnée.

C'est l'équilibre d'un cône reposant suivant une génératrice — d'une sphère — (fig. 69c).

Equilibre d'un corps qui a un point ou un axe fixe (fig. 70). — La condition d'équilibre d'un corps mobile autour d'un axe horizontal est que la verticale qui passe par le centre de gravité rencontre l'axe. Dans le cas de l'équilibre stable le centre de gravité G est au dessous de l'axe A.

Dans le cas de l'équilibre instable le G est le plus haut possible au dessus de l'axe.

Dans le cas de l'équilibre indifférent le G et l'axe A coïncident.

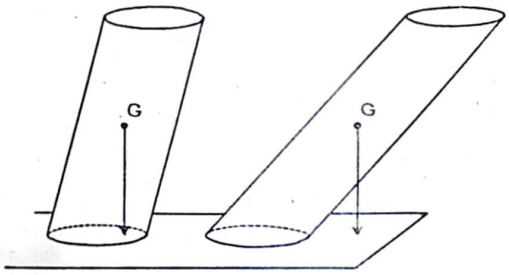


Fig. 71

Equilibre d'un corps reposant sur un plan horizontal. (fig. 71) — Un corps repose sur un plan horizontal par un certain nombre de points *qui joints forment un polygone appelé polygone de sustentation ou polygone d'appui.*

Le poids est annulé par la résistance du plan et ne sert qu'à appliquer l'objet sur ce plan.

Le corps est en équilibre quand la verticale passant par le centre de gravité tombe à l'intérieur du polygone de sustentation.

Si cette verticale tombe à l'extérieur du polygone de sustentation le corps tend à tourner autour du côté de ce polygone le plus rapproché de la verticale.

La *stabilité* d'un corps est d'autant plus grande que le polygone d'*appui est plus grand* et le *centre de gravité situé plus bas* (fig. 72 et 73).

Application. — Les meubles, les chandeliers, les lampes doivent leur stabilité à l'étendue de leurs bases et à son poids. Une voiture sera d'autant plus stable que son centre de gravité sera placé plus bas.

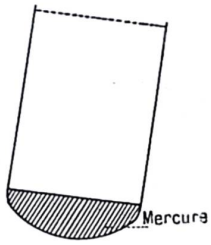


Fig. 72

Intensité de la pesanteur. — *C'est l'action qu'exerce la pesanteur sur l'unité de masse.*

Pour la calculer, il faut d'abord démontrer que la pesanteur est une force constante en grandeur et direction.

Cette démonstration nous sera fournie par l'étude de la chute du corps.

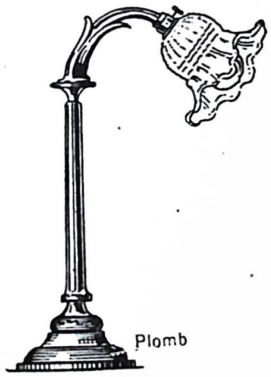


Fig. 73

Problème :

1. — Une canne homogène et cylindrique ayant une longueur de 1 mètre pèse 60 grammes; elle est terminée par une boule métallique pesant 100 grammes et dont le rayon est 2 cm. On demande :

1° Quel est le centre de gravité de la canne entière ;

2° Quel serait le rayon de la boule, son poids restant le même pour que le centre de gravité soit à la jonction de la tige et du métal.

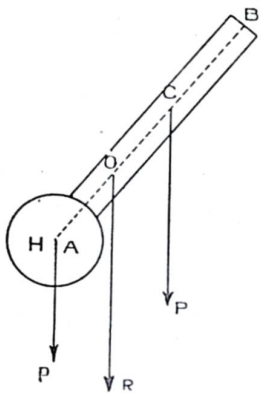


Fig. 74

Solution

1° Soient P et p les poids de la tige et de la boule, ces deux poids étant appliqués aux points G et H, il faut trouver la résultante de ces deux forces parallèles.

D'où :

$OR = P + p = 60 + 100 = 160\,g$

et

$$P \times \overline{OG} = p \times \overline{OH}$$

mais

$$\overline{OH} = \overline{GH} - \overline{GO} = (50 + 2) - \overline{GO}$$

Il vient donc en posant $OG = x$:

$$P \times x = p\,(52 - x)$$

ou :

$$60 \times x = 100\,(52 - x)$$

Ce qui donne :

$$x = 32{,}5 \text{ cm.}$$

Donc la distance du centre de gravité de la canne entière au bout B de cette canne sera :

$$32.5 + 50 = 82{,}5 \text{ cm.}$$

2° Nous aurions :

$$P \times GA = p \times HA$$

d'où :

$$60 \times 50 = 100 \times HA \quad AH = \frac{60 \times 50}{100} = 30^{cm}$$

CHAPITRE I

LOIS DE LA CHUTE DES CORPS

Elles ont d'abord été étudiées par Galilée et plus tard précisées par Newton.

1° Laissons tomber une feuille de papier et un morceau de craie, nous constatons que le morceau de craie tombe beaucoup plus vite que le papier. Recommençons l'expérience en pliant la feuille de papier ; elle tombe plus vite qu'avant. Plions-la encore ; elle finit par tomber aussi vite que la craie. Nous voyons donc que la vitesse de la chute dépend de la surface extérieure du corps qui tombe.

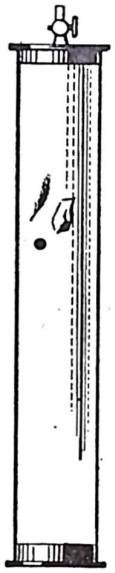


Fig. 75

2° On recommence cette expérience dans le vide : à cet effet, on emploie un long tube de verre dans lequel sont disposés une balle de plomb, quelques morceaux de papier et un fragment de plume ; le tube est fermé à ses extrémités par des garnitures métalliques dont l'une est munie d'une tubulure à robinet permettant de fixer le tube sur un appareil à faire le vide (fig. 75). L'appareil ainsi réalisé est connu sous le nom de tube de Newton.

Le vide étant fait dans le tube, tous les corps tombent également vite ; si on laisse entrer un peu d'air ils tombent inégalement et après chaque entrée d'air la différence s'accentue.

On peut donc énoncer :

Première loi de la chute des corps : Dans le vide, tous les corps tombent également vite quels que soient leur nature et leur poids.

Il en résulte que pour étudier les lois de la chute des corps il suffit d'étudier la chute d'un *seul corps choisi arbitrairement* puisque ni la nature ni le poids du corps n'influent sur la chute.

D'autre part si les corps tombent avec des vitesses différentes dans l'air il faut attribuer cette inégalité de vitesse à l'air ; on dit que l'air offre *une résistance à la chute des corps*. Il est donc absolument indispensable, dans les expériences, d'éliminer la résistance de l'air, ou de la rendre pratiquement négligeable. On y parvient :

1° Soit en ralentissant le mouvement de chute (plan incliné de Galilée, machine d'Atwood) ;

2° Soit en étudiant le mouvement de chute d'un corps pendant un temps très court (machine du général Morin).

Plan incliné de Galilée (fig. 76). — Il se compose d'un long madrier sur lequel est creusée une rigole

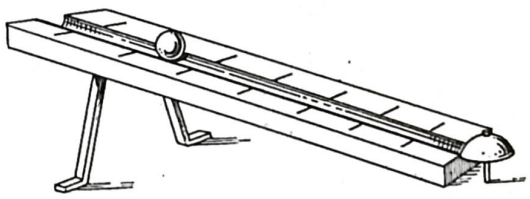


Fig. 76

parfaitement polie dans laquelle peut rouler une bille aussi ronde que possible. Les bords de la rigole sont gradués et un timbre fixé à l'extrémité reposant

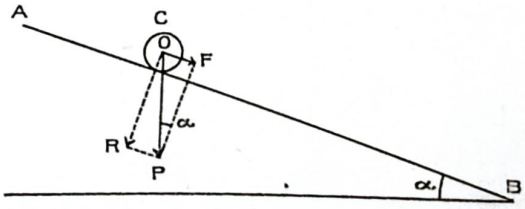


Fig. 77

sur le sol permet de mieux apprécier l'instant où la bille a terminé sa chute. Un métronome est placé bien en vue.

Voyons d'abord l'inflence de l'inclinaison du plan sur la durée du mouvement.

Considérons le plan incliné AB (fig. 77) faisant un angle α avec l'horizontale, la bille C est soumise à l'action de son poids OP appliqué en son centre $o\,c$.

Cette force OP peut être décomposée d'après la règle du parallélogramme en 2 autres : l'une OR dont l'effet est nul à cause de la réaction du plan, l'autre O F, parallèle à AB qui seule entraîne la bille de A vers B.

Il est facile d'évaluer cette force OF.

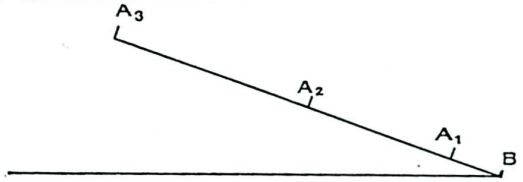


Fig. 78

Dans le triangle rectangle DFP on peut écrire

$$OF = OP \sin \alpha,$$

or sin α varie de 0 à 1 lorsque α varie de o à 90°.

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AB} = \text{pente du plan}$$

$$OF = OP \times \text{pente du plan}$$

Il en résulte donc que OF sera d'autant plus petit que le plan sera plus incliné.

Par suite le mouvement de C pourra être *aussi lent que possible.*

Faisons maintenant fonctionner l'appareil. Pour cela, cherchons par tâtonnement sur quelles divisions de AB il faut placer la bille pour que les durées de chute soient 1 seconde, 2 secondes, 3 secondes.

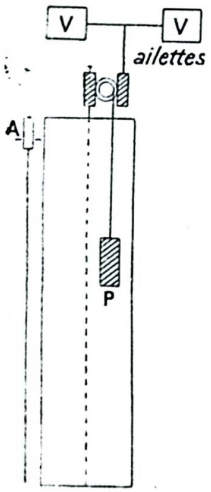


Fig. 79

Soient A_1, A_2, A_3 ces points (fig. 78) ; en les mesurant, on trouve que si

$$A_1 B = 20 = 20 \times 1$$
$$A_2 B = 80 = 20 \times 2^2$$
$$A_3 B = 160 = 20 \times 3^2$$

ou mieux des nombres suffisamment approchés pour nous permettre d'énoncer :

Deuxième loi de la chute des corps : Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.

Autrement dit

$$e = \gamma t^2$$

équation du mouvement uniformément accéléré.

Remarque. — Cette loi n'a pas été énoncée après une seule expérience, mais après plusieurs faites sous diverses inclinaisons.

Machine du général Morin. — C'est un appareil disposé de telle façon qu'un corps tombant en chute libre *inscrive lui-même son mouvement sur un plan.*

Elle se compose (fig. 79) d'un cylindre vertical mobile autour de son axe ; un poids moteur P et des transmissions dentées fournissent le mouvement qui est uniformisé par la résistance de l'air sur des ailettes V dépendant du sytême tournant.

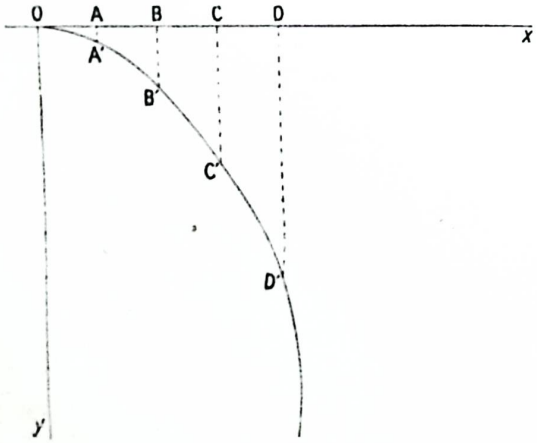


Fig. 80

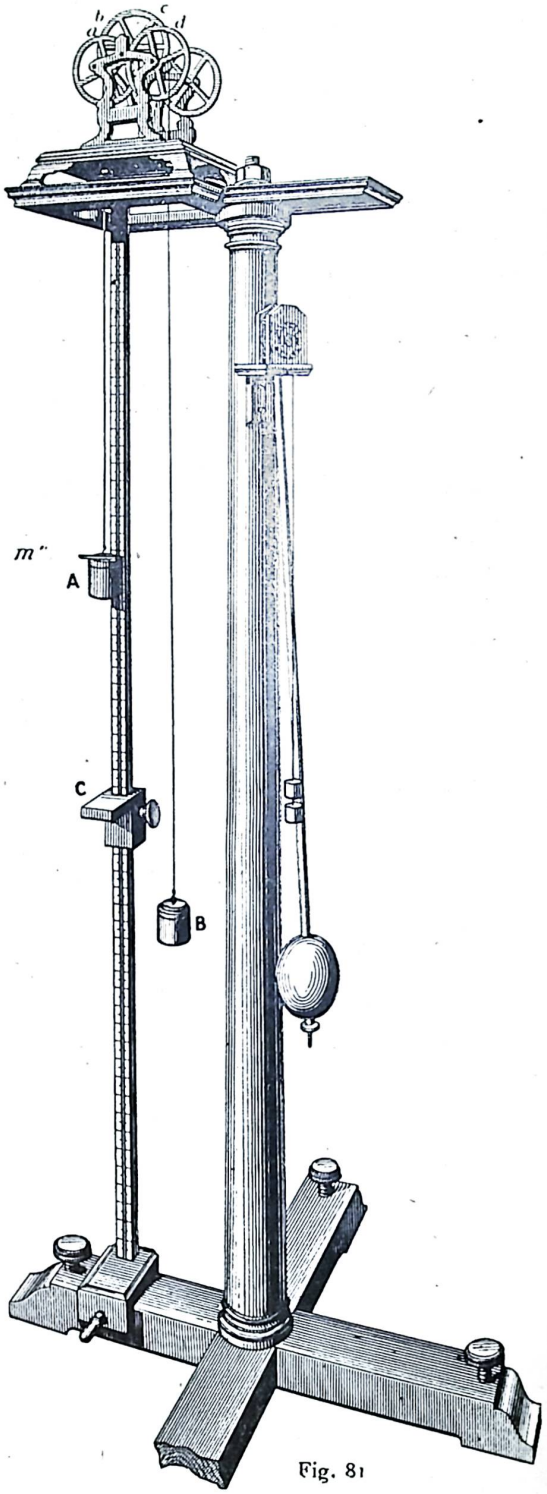


Fig. 81

Parallèlement à l'axe du cylindre tombe un corps pesant A guidé dans sa chute par deux fils métalliques tendus ; ce corps est de forme cylindro-conique afin de diminuer la résistance que l'air exerce sur lui et il porte un crayon horizontal qu'un léger ressort appuie sur le cylindre.

On enroule une feuille de papier sur celui-ci, on laisse tomber le poids P et, quand aux deux-tiers environ de la chute de ce poids, le mouvement devient uniforme, on abandonne le corps A à lui-même. Il tombe et trace une courbe sur la feuille de papier dont est recouvert le cylindre. L'experience est alors terminée.

On coupe la feuille suivant une génératrice du cylindre et on obtient une courbe analogue à la courbe ci-contre (fig. 80) ; si nous portons sur l'horizontale O x des longueurs égales OA, AB, BC... à partir de l'origine O de la courbe, ces espaces correspondent à des temps égaux : t, $2t$, $3t$, etc... AA', BB', CC', etc..., représentent les espaces parcourus pendant ces temps ; mesurons-les, nous voyons que BB' = 4 AA' ; CC' = 9 AA', etc., d'où :

$$\frac{AA'}{1^2} = \frac{BB'}{2^2} = \frac{CC'}{3^2} = \frac{DD'}{4^2} = \ldots = \frac{e}{t^2}$$

Nous retrouvons la deuxième loi de la chute des corps.

Machine d'Atwood. — La machine d'Atwood (fig. 81, 82 et 83) se compose essentiellement d'une potence supportant une poulie *a b c d*. L'axe de la poulie se meut sur un système de roues qui est destiné à

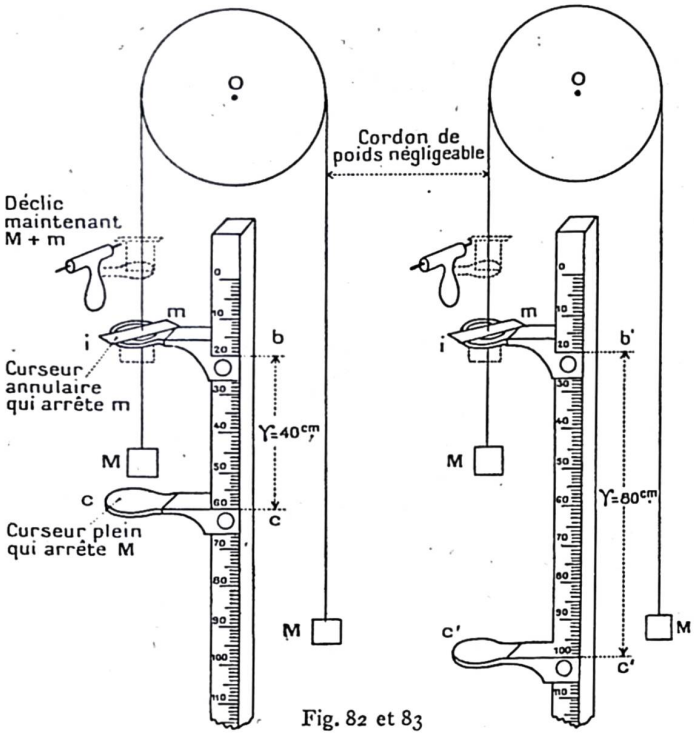


Fig. 82 et 83

supprimer presque entièrement le frottement. Sur la poulie s'enroule un fil aux deux bouts duquel sont suspendus deux poids égaux A et B.

L'un des poids A se déplace le long d'une règle graduée de 2 mètres environ de longueur et munie d'un curseur plein et de 2 ou 3 curseurs creux (le diamètre intérieur de ces derniers leur permet de se laisser traverser par A). Enfin un pendule battant la seconde complète l'installation.

Le poids du fil étant négligeable, les deux poids A et B se font équilibre et il n'y a aucune raison pour que l'appareil se mette en mouvement. Mais, si on ajoute un poids supplémentaire au poids A, celui-ci descend le long de la règle graduée.

Désignons par P et M le poids et la masse de chacun des corps A et B et par p et m le poids et la masse du corps supplémentaire encore appelé corps additionnel.

Le corps qui produit le mouvement est le corps additionnel sous l'action de son poids p. En se déplaçant, il entraîne un système de masse

$$M + M + m = 2M + m.$$

Désignons par γ l'accélération du mouvement de ce corps ; d'après la formule :

$$\frac{F}{\gamma} = M$$

on a

$$\frac{p}{\gamma} = 2M + m$$

d'où

$$\gamma = \frac{p}{2M + m} \qquad (1)$$

Si donc, nous désignons par g l'accélération du mouvement d'un corps tombant en chute libre on pourra écrire :

$$\frac{p}{g} = m$$

d'où

$$g = \frac{p}{m}$$

Mais de (1) on tire

$$p = (2M + m)$$

d'où

$$(2) \qquad g = \frac{2M + m}{m}\gamma$$

Connaissant γ on peut donc calculer g.

De plus m pouvant être aussi petit que l'on veut, on peut faire tomber le corps aussi doucement que possible à la vitesse désirée et rendre négligeable la résistance de l'air.

Première expérience (fig. 84). — Le poids A étant placé en face de la division O de la règle, on déclanche l'appareil et on note les divisions en face desquelles se trouve A au bout de 1 seconde, 2 secondes, 3 secondes, etc.

On trouve, là encore, des nombres proportionnels aux carrés des temps.

Par exemple :

20 — 80 — 180

Deuxième expérience (fig. 84). — Supposons qu'au bout d'une seconde le corps A passe en face de la division 20, on amène le curseur creux au niveau de cette dernière division puis on recommence l'expérience, la masse additionnelle dont le diamètre est supérieur à celui de A est arrêtée au passage tandis que A continue à se déplacer d'un *mouvement uniforme* dont la vitesse est 40 divisions.

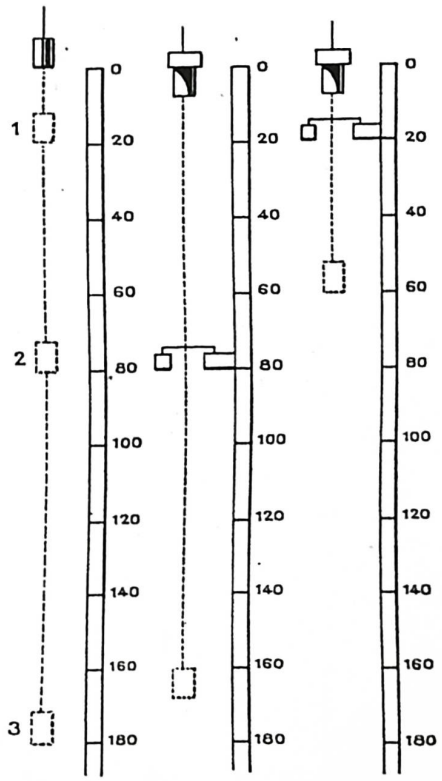


Fig. 84

Le corps A est encore une fois ramené au O et le curseur cette fois est placé à la division 80; on déclanche l'appareil et on constate que cette fois A prend en D un mouvement uniforme dont la vitesse est 80.

On peut donc en conclure que :

1° *Un corps libre soustrait à l'action de la force qui lui communique un mouvement uniformément accéléré,*

conserve la vitesse qu'il avait au moment que la force a cessé d'agir et se déplace d'un mouvement uniforme.

Ainsi se trouve vérifié le principe de l'Inertie.

2° *La vitesse d'un corps animé d'un mouvement uniformément accéléré croît à chaque instant et est proportionnelle au temps.*

Nous retrouvons le résultat indiqué précédemment

$$v = \gamma t.$$

(3e loi de la chute des corps).

La vitesse d'un corps tombant en chute libre est proportionnelle à la durée de la chute.

Autrement dit

$$v = gt.$$

Remarque. — La machine d'Atwood prouve qu'au bout d'une seconde

$v = 40$ ou 40×1
$e = 20$ ou $\frac{40}{2} \times 1$

Au bout de 2 secondes :

$v = 80$ ou 40×2
$e = 80$ ou $\frac{40}{2} \times 4$

Au bout de 3 secondes :

$v = 120$ ou 40×3
$e = 180$ ou $\frac{40}{2} \times 9$

En généralisant

$$v = \gamma t$$
$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

Telles sont les équations du mouvement uniformment accéléré établies par le calcul.

On remarque en outre que :

l'accélération est donnée par la vitesse au bout de l'unité de temps ou par le double de l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

Fig. 85

3° **Expérience** (fig. 85). — Faisons maintenant en sorte que le système matériel soit mis en mouvement par des forces variables ; à cet effet, disposons sur A et B 3 corps additionnels de poids égaux p, on pourra ainsi faire varier la force d'entraînement sans changer la masse totale du système.

Portons un corps additionnel de B sur A, la force d'entraînement sera $2p$ et notons la valeur de l'accélération γ_1.

Plaçons un nouveau corps additionnel de B sur A, la force d'entraînement sera $4p$, notons l'accélération γ_2.

Enfin plaçons le dernier corps additionnel de B sur A, la force d'entraînement sera $6p$, notons l'accélération γ_3.

On constate que :

$$\gamma_2 = 2\gamma_1$$
$$\gamma_3 = 3\gamma_1$$

ou

$$\frac{2p}{\gamma_1} = \frac{4p}{\gamma_2} = \frac{6p}{\gamma_3}$$

Voici donc démontrée expérimentalement la proportionnalité des accélérations aux forces.

En résumé nous venons de voir que la chute des corps obéit aux lois suivantes :

Loi qualitative. — *Tous les corps tombent dans le vide avec la même vitesse.*

Loi des espaces. — *Les espaces parcourus par un corps qui tombe en partant du repos sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.*

Loi des vitesses. — *Les vitesses acquises par un corps qui tombe en partant du repos sont proportionnelles au temps de chute.*

Le mouvement d'un corps qui tombe en chute libre est un mouvement uniformément accéléré défini par les formules suivantes :

$$v = gt$$
$$e = \frac{1}{2}gt^2$$

et le poids d'un corps est donné par la formule

$$p = mg.$$

Si nous faisons $m = 1$
il vient $p = g$

L'intensité de la pesanteur est donc exprimée par le même nombre que son accélération, mais tandis que celle-ci *s'exprime en cm*, l'intensité *est évaluée en dynes.*

Variation de l'accélération de la pesanteur (g). — En déterminant g en plusieurs endroits de la terre on a constaté que g et par suite le poids d'un corps varient d'*un point à l'autre* du globe terrestre.

Variation de g avec l'altitude. — Nous avons vu, en effet, que la pesanteur n'est qu'un cas particulier de l'attraction universelle.

Si donc nous appelons M la masse de la terre, m la masse d'un corps situé à une distance h de la terre la loi de Newton nous donne :

$$F = k\frac{Mm}{(R+h)^2} = \left[\frac{kM}{(R+h)^2}\right]m$$

R étant le rayon terrestre.

Par analogie avec la formule

$$P = mg.$$

on voit que

$$g = \frac{kM}{(R+h)^2} \qquad (1)$$

Cette égalité nous montre que g diminue avec l'altitude. C'est en effet ce que l'expérience vérifie.

On établit que l'accélération g_h à une altitude h est très sensiblement donnée par la formule :

$$g_h = g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

Variation de g avec la latitude. — A cause de l'*aplatissement* de la terre aux pôles, R est plus petit aux pôles qu'à l'équateur, g doit donc être plus grand aux pôles qu'à l'équateur. L'expérience le vérifie.

Une autre cause fait encore que g croît de l'équateur aux pôles, c'est *l'action de la force centrifuge* due au mouvement de rotation de la terre. Notons que si la terre tournait 17 fois plus vite, g serait nul à l'Equateur.

La valeur de $g_{\lambda,h}$ à l'altitude h et à la latitude λ est donnée en fonction de $g_{45,0}$ à l'altitude 0 et à la latitude 45° par :

$$g_{\lambda,h} = g_{15,0}\ (1 - 0{,}00259 \cos 2\lambda)\ (1 - 0{,}0000000314\ h)$$

A Paris : $g = 980{,}96$ cm. s.

à l'équateur : $g = 978{,}10$
au pôle $g = 983$

Problèmes.

1. — Dans un lieu où l'accélération de la pesanteur est : $g = 9$ m. 80, on lance verticalement un corps pesant. On constate que ce corps retombe 5 secondes après qu'on l'a lancé. On demande à quelle hauteur il s'est élevé et quelle était sa vitesse initiale. On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air.

Solution

Soit Vo la vitesse initiale et h la hauteur. En montant, le corps est animé d'un mouvement uniformément retardé donné par les formules :

$$v = v_0 - gt$$
$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Lorsque le corps s'arrête, la vitesse est nulle :

$$v_0 = gt$$

d'où $$h = gt^2 - \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} gt^2$$

En descendant, les équations sont :

$$v = gt'$$
$$h = \frac{1}{2} gt'^2$$

Mais les hauteurs de chute étant les mêmes :

$$\frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} gt'^2$$

donc : $$t = t' = \frac{5}{2}$$

d'où : $$h = \frac{1}{2} \times 9{,}80 \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 30{,}60 \text{ m.}$$

$$v_0 = 9{,}80 \times \frac{5}{2} = 24{,}50 \text{ m.}$$

2. — Un avion laisse tomber une bombe qui met 8 secondes pour arriver au sol. On demande à quelle hauteur se trouve l'avion et quelle est la vitesse de la bombe en arrivant au sol. On négligera la résistance de l'air ($g = 9{,}80$ m.).

Réponses : (h = 1.587,6 m.
(v = 160,2 m.

3. — Un mobile de poids P tombe librement d'une hauteur h. A ce moment on lui appliquera une force F en sens inverse de P. On demande :

1° La vitesse qu'a le mobile au moment de l'application de la force ;

2° La vitesse qu'il aurait, t secondes après l'application de la force ;

3° La valeur que devrait avoir F pour qu'après t secondes d'application, le mobile soit au repos.

Application numérique :

P = 132 gr. h = 100 mètres
g = 981 cm. t = 5 secondes.

Donner F en dynes : (*Baccalauréat*).

4. — Un pilon ayant une masse de 5 t. tombe en chute libre de 1,50 m. Calculer :

1° la vitesse de la masse tombante au bas de sa course ;

2° Son énergie cinétique au bas de sa course, dans les trois systèmes d'unités ; on précisera, dans chaque cas, les unités employées. La masse tombe sur un bloc de fer de masse 30 kg. On suppose que toute l'énergie du pilon est employée à élever la température de ce bloc de fer ;

3° Quelle serait cette élévation de température pour un coup de pilon ? Accélération de la pesanteur : 981 cm., équivalent mécanique de la petite calorie : $4{,}18 \times 10^7$ ergs ; chaleur spécifique du fer : 0,11.

A. et M., 1921.

Solution

Le mouvement est uniformément accéléré :

$$v = gt$$
$$e = \frac{1}{2} gt^2$$

$$1{,}5 = \frac{1}{2} 9{,}81 \times t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{1{,}5 \times 2}{9{,}81}}$$

$$v = 9{,}81 \sqrt{\frac{11{,}5 \times 2}{9{,}81}} = \sqrt{2 \times 1{,}5 \times 9{,}81} = 5{,}425 \text{ m}$$

par seconde.

L'énergie cinétique au bas de la course est :

$$c = \frac{1}{2} m V^2$$

$$c = \frac{1}{2} \times 5 \times (5{,}425)^2$$

$$c = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 \times 1{,}5 \times 9{,}81 = 73{,}575 \text{ kg.}$$

Dans le système M. K. S.

$$c = \frac{1}{2} \times \frac{5.000}{9{,}81} (5{,}425)^2 = 7500 \text{ kgm.}$$

Dans le système C. G. S.

$$c = \frac{1}{2} \times 5.000.000\,(542{,}5)^2 = 73575 \times 10^7 \text{ ergs.}$$

Quantité de chaleur produite :

$$Q = \frac{T}{J} = \frac{73575 \times 10^7}{4{,}18 \times 10^7} = 17600 \textit{ calories.}$$

Elévation de température x :

$$0{,}11 \times 30.000\,x = 17600$$

$$x = \frac{17600}{0{,}11 \times 30.000} = \underline{5^\circ 33}$$

Réponses : 5°33, 17.600 *calories*, 73575×10^7 ergs. 7500 kgm. — 73,575 kg.

5. — De quelle hauteur faut-il laisser tomber un morceau de glace à 0° pour quand arrivant au sol, il soit transformé en eau à 0° ; toute la chaleur produite étant employée à le fondre. Chaleur de fusion de la glace 80 c. Equivalent mécanique : J = 425 kilogrammètres. g = 9,8 m.

Réponse : 34.000 mètres.

(Ce problème ne sera fait qu'après l'étude de la fusion).

6. — Un corps pesant lancé de bas en haut dans le vide avec une vitesse initiale de 20 mètres par seconde, parvient à une hauteur de 20,40 m. avant de redescendre. On demande : 1° quelle a été la durée de l'ascension ; 2° quelle est l'accélération de la pesanteur au lieu de l'expérience.

Solution

Nous avons :

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

et $$v = v_0 - gt.$$

Lorsque le corps parvient à la hauteur maxima (22 m., 40), sa vitesse est nulle, d'où les deux équations :

(1) $$20{,}4 = 20 \times x - \frac{1}{2} g x^2$$

(2) $$0 = 20 - g x.$$

De la deuxième équation nous tirons :

$$g = \frac{20}{x}$$

et en portant cette valeur dans l'équation (1)

$$20{,}4 = 20 \times x - \frac{1}{2} \frac{20}{x} x^2$$

d'où :

$$20\,x - 10\,x = 20{,}4$$

et

$$x = 2^s{,}04$$

ce qui nous donne :

$$g = \frac{20}{2{,}04} = 9{,}804^{m/s}$$

7. — On lance un mobile de bas en haut avec une vitesse initiale v_0; calculer cette vitesse initiale sachant que la hauteur atteinte est de 1 854 mètres et qu'au lieu de l'expérience $g = 9{,}81$ m.

Solution

Nous avons :

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

et

$$v = v_0 - g t.$$

A l'instant considéré la vitesse est nulle, d'où les deux équations :

$$(1) \qquad h = v_0 x - \frac{1}{2} g x^2$$

$$(2) \qquad 0 = v_0 - g x.$$

Ce qui donne : $x = \frac{v_0}{g}$

et en portant dans l'équation (1) :

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

d'où :

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1\,854} = 196{,}3^{m}/_{s}$$

8. — Un corps de masse $m = 300$ gr. placé sur un plan incliné est tiré parallèlement au plan par un cordon qui passe par une poulie et qui porte à son extrémité une masse de 100 gr. On demande quel sera le sens du mouvement et quelle est l'accélération sachant que l'angle du plan avec le plan horizontal est de 30° ; on ne tiendra pas compte des frottements.

Solution

Les deux masses sont soumises à l'action de la pesanteur, donc nous aurons les deux forces P et P'. P' tire directement sur le fil (fig. 86).

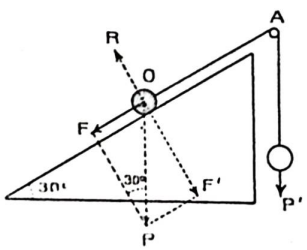


Fig. 86

Décomposons P suivant O A et la normale au plan en deux forces F et F'.

F tire le fil et F' tend à appliquer le mobile sur le plan et fait équilibre à la réaction R de celui-ci. Dans le triangle O F P l'angle F P O = 30° d'où :

$$F = \frac{P}{2} = \frac{Mg}{2}$$

Donc le fil sera soumis à l'action de deux forces :

$$\frac{Mg}{2} \quad \text{et} \quad M'g$$

Ce qui donne :

$$f = g\left(\frac{M}{2} - M'\right)$$

et l'accélération :

$$\gamma = \frac{f}{m} = \frac{g\left(\frac{M}{2} - M'\right)}{M + M'}$$

Application numérique :

$$\gamma = \frac{981\left(\frac{300}{2} - 100\right)}{300 + 100} = 122{,}625^{cm}/_{s}$$

Le mouvement aura lieu dans le sens O F, uniformément accéléré.

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{122{,}625}{2} t^2$$

9. — Le curseur annulaire et le curseur plein d'une machine d'Atwood sont placés respectivement le premier à 32 cm. et le deuxième à 1 mètre 50 de l'origine. La masse commune de deux cylindres est 100 grammes ; on surcharge l'une de ces masses de deux masses additionnelles valant chacune 10 grammes et dont l'une est à ailettes permettant son arrêt sur le curseur annulaire. Le système est abandonné à lui-même sans vitesse initiale. On demande :

1° Les temps nécessaires pour l'enlèvement de la masse additionnelle à ailettes et le parcours total 1,50 m. ;

2° La vitesse d'arrivée sur le curseur plein.

On prendra $g = 981$ cm/s., ; on négligera les masses de la poulie et du fil et la résistance de l'air.

Solution

I. — Soient M la masse de chaque cylindre, m celle de chaque surcharge, e l'espace compris entre l'origine et le premier curseur, e' l'espace compris entre l'origine et le deuxième curseur, γ et γ' les accélérations des mouvements d'abord entre l'origine et le premier curseur puis entre l'origine et le deuxième curseur.

Nous avons :

$$\gamma = \frac{2m \times g}{2M + 2m} = \frac{mg}{M + m}$$

$$\gamma' = \frac{mg}{2M + m}$$

$$e = \frac{1}{2}\gamma x^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{M + m} x^2$$

d'où :

$$x = \sqrt{\frac{2e(M + m)}{mg}}$$

En arrivant au 2e curseur le système a une vitesse

$$v = \gamma x = \sqrt{\frac{2emg}{M + m}}$$

soit y le temps que met le mobile à passer d'un curseur à l'autre :

$$e' - e = vy + \frac{1}{2}\gamma' y^2$$

ou

$$e' - e = \sqrt{\frac{2emg}{M + m}}\, y + \frac{1}{2}\frac{mg}{2M + m} y^2$$

Ce qui donne :

$$y = \frac{-\sqrt{\frac{2emg}{M + m}} + \sqrt{\frac{2emg}{M + m} + (e' - e)\frac{mg}{2M + m}}}{\frac{mg}{2M + m}}$$

Enfin : vitesse d'arrivée sur le curseur plein :

$$z = v + \gamma' y.$$

Application numérique :

$$x = \sqrt{\frac{2 \times 32\,(100 + 10)}{10 \times 981}} = 0{,}80 \text{ s.}$$

Les temps de chute demandés sont donc 0,80 s. et 1,45 s. Vitesse : $z = 79{,}5$ cm.

$y = 0{,}65$ s.

Vitesse :

$z = 79{,}5$ cm/s

10. — Les deux masses égales d'une machine d'Atwood ont chacune un poids équivalent à 39 240 dynes, l'accélération de la pesanteur étant égale au lieu de l'expérience à 9,81 m. par seconde :

1° On surcharge l'une d'elles d'une masse cylindrique de 1 gramme et d'une masse à ailettes de 1 gr. ; on demande quelle est l'accélération du système mobile et quel est l'espace parcouru au bout de 4 secondes de chute ;

2° A l'endroit atteint au bout de 4 secondes, on place un curseur annulaire qui arrête le poids à ailettes. On demande de calculer l'espace parcouru pendant la seconde suivante (5e seconde de chute) et la vitesse du système mobile au bout de cette 5e seconde.

Solution

II. — Soit γ l'accélération du système mobile, nous avons :

$$\gamma = \frac{2 \times m \times g}{2M + 2m} = \frac{mg}{M + m}$$

L'espace parcouru pendant 4 secondes de chute sera :

$$l = \frac{1}{2}\gamma \times 4^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{M + m} \times 16$$

Nous savons que :

$$M = \frac{39240}{981} = 40 \text{ grammes et } m = 1 \text{ gramme.}$$

d'où :

$$e = \frac{1}{2} \times \frac{1 \times 981}{40 + 1} \times 16 = 191{,}4 \text{ cm}$$

A ce moment la vitesse est :

$$v = \gamma \times 4 = \frac{4mg}{M + m}$$

le mouvement continue mais l'accélération devient :

$$\gamma' = \frac{mg}{2M + m}$$

et l'espace parcouru pendant 1 seconde :

$$e' = v \times 1 + \frac{1}{2}\gamma' \times 1^2 = \frac{4mg}{M + m} + \frac{mg}{(2M + m)} =$$

95,7 cm + 6,05 cm = 101,75 cm.

La vitesse sera :

$$v' = v + \gamma' = 95{,}7 + 12{,}1 = 107{,}8 \text{ cm/s.}$$

CHAPITRE II

PENDULE

La mesure de g peut être également donnée par la formule du pendule.

On appelle pendule tout corps solide pesant indéformable assujetti à tourner autour d'un axe fixe appelé axe de suspension ne passant pas par le centre de gravité.

Chaque point du pendule décrit, dans son mouvement, un arc de cercle dont le centre est sur l'axe de suspension.

Le pendule est en équilibre lorsque son centre de gravité est au-dessous du point de suspension. Si on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre, il tend à y revenir en décrivant de part et d'autre une série d'oscillations.

Pendule simple. — On appelle ainsi un pendule idéal constitué par un point pesant suspendu à l'extrémité d'un fil impondérable et inextensible.

Soit le pendule simple OM (fig. 87) ; supposons qu'on l'écarte de sa position d'équilibre pour l'amener en OM'

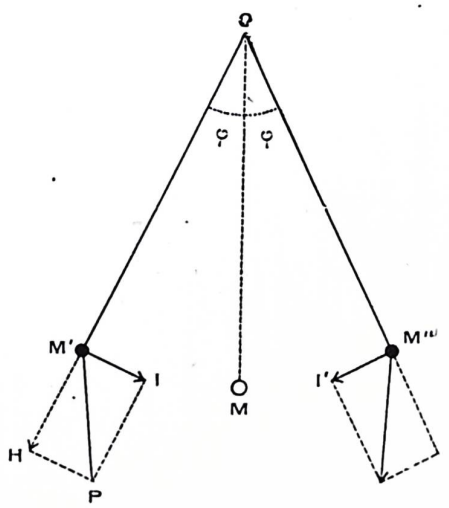


Fig 87

et qu'on l'abandonne à lui-même. Le point M' est alors sollicité par une force M' P égale à son poids et dirigée suivant la verticale passant par M'. Cette force peut être décomposée en deux autres M' H et M' I l'une M' H dirigée suivant le prolongement du fil et annulée par la résistance de celui-ci, l'autre M' I dirigée suivant la perpendiculaire au fil OM' et dont l'effet est d'entraîner le pendule vers la position OM. Au fur et à mesure que le point M' se rapproche du point M, la force M' I décroît, parce que M'F tend à se placer dans le prolongement du fil ; cependant, comme M' I ne devient nulle qu'au moment où M' arrive en M, le point M' constamment sollicité par une force qui l'entraîne vers M, prend un mouvement accéléré et arrive en M avec une vitesse maxima. A ce moment, la force M' I change de sens ; au lieu de continuer à entraîner le pendule, elle le retient. Par raison de symétrie, elle détruit en chaque point l'effet de la force qui s'exerçait au point symétrique par rapport à O M. Il s'ensuit que le pendule s'arrête quand il a atteint la position O M'' symétrique de OM' par rapport à OM. Il commence alors à se mouvoir en sens inverse, repasse par les mêmes positions, revient en M' et ainsi de suite.

La résistance de l'air et les frottements de l'axe de suspension empêchent le mouvement d'oscillation de se prolonger indéfiniment.

On appelle *oscillation simple* le passage du pendule de la position O M' à la position O M'' et *oscillation double* le mouvement du pendule de la position O M' à cette même position, soient deux oscillations simples.

La durée d'une oscillation double se nomme période. L'angle φ que fait chaque position extrême O M' et O M'' avec la position d'équilibre O M s'appelle amplitude du mouvement pendulaire.

Pendule composé. — On ne peut réaliser de pendule simple. Lorsqu'un pendule se compose d'une tige de suspension ou d'un fil pesant et d'un corps de dimensions non négligeables qui remplit l'office du point matériel M, on dit que c'est un *pendule composé*.

Longueur du pendule simple, synchrone du pendule composé. — On appelle ainsi la longueur d'un pendule simple qui oscillerait dans le même temps qu'un pendule composé donné.

Elle est donnée par la formule (fig. 88)

$$l = a + \frac{k^2}{a}$$

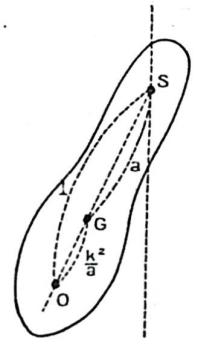


Fig. 88

Fig. 89

a étant la distance du point de suspension S au centre de gravité G.

k le rayon de giration ou bras d'inertie du corps. Cette quantité est liée avec ce qu'on appelle moment d'inertie du corps par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension et mené par le centre de gravité.

Le point o déterminé par l s'appelle *centre d'oscillation.*

Cas d'une sphère suspendue à un fil (fig. 89). — Pour une sphère de rayon 1 cm. suspendue à un fil de longueur SO = 1 mètre. On a :

$$a = 100 \text{ cm.} \quad k^2 = \frac{2}{5}p^2 = \frac{2}{5}$$

d'où $$l = 100 + \frac{2}{5 \times 100}$$

Fig. 90

Réciprocité des axes de suspension et d'oscillation. — Huyghens a démontré qu'on peut intervertir, sans changer la durée d'oscillation, l'axe de suspension et l'axe d'oscillation d'un pendule composé. On en a déduit une méthode expérimentale permettant de déterminer la longueur du pendule simple équivalent à un pendule composé donné :

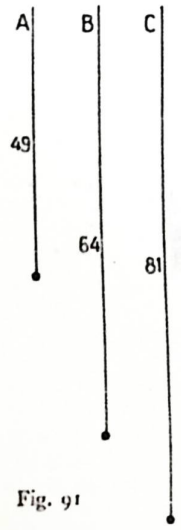


Fig. 91

Soit (fig. 90) un pendule composé auquel sont assujettis deux couteaux a et b dont l'écartement correspond grossièrement à la longueur du pendule simple *synchrone* du pendule composé donné. On suspend tour à tour le pendule par le couteau a et par le couteau b et on fait en sorte que les oscillations soient d'égale durée, en déplaçant des poids v et w mobiles à frottement dur sur la tige du pendule. Quand le synchronisme est réalisé, a et b représentent l'un, l'axe de suspension ; l'autre, l'axe d'oscillation du pendule. Leur distance est égale à la longueur du pendule simple synchrone du pendule donné.

Lois du pendule. — 1° *Isochronisme des petites oscillations.* — Mesurons le temps que met un pendule pour effectuer 25 oscillations, soit t_1 ; mesurons celui qu'il mettra pour faire les 25 oscillations suivantes, soit t_2 et ainsi de suite; nous trouvons que :

$$t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_n$$

à condition que l'amplitude de ces oscillations soit faible, (moins de 5°)

D'où la loi :

Les petites oscillations d'un pendule sont isochrones (c'est-à-dire sont d'égale durée).

La durée d'oscillation, c'est-à-dire la période est indépendante de la masse et de la nature de la matière qui constitue le pendule.

En effet, si nous faisons osciller 3 pendules de même longueur, l'un en ivoire, l'autre en ébonite et le troisième en plomb, ces pendules oscillent dans le même temps.

3e *loi.* — *La durée d'oscillation d'un pendule est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de ce pendule.*

Prenons 3 pendules constitués par des sphères identiques suspendus par des fils de manière que les distances respectives des points de suspension aux centres des trois sphères soient de 49 cm., 64 cm. et 81 cm. (fig. 91).

Nous constaterons que si la durée d'oscillation du premier pendule est de 0 sec., 7, celle du 2e sera de 0 sec., 8 et celle du 3e de 0 sec., 9

$$\frac{l_1}{t_1} = \frac{l_2}{t_2} = \frac{l_3}{t_3} = \ldots = \frac{l}{t}$$

4e *loi.* — *La durée d'oscillation d'un pendule est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'accélération de la pesanteur.*

Formule du pendule. — Nous pouvons résumer les lois précédentes par la formule

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Le calcul montre que la constante K est égale à π pour une oscillation simple d'où la durée d'une oscillation est donnée par la relation :

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

La durée d'une période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Application du pendule aux horloges. — Une des principales applications du pendule est celle que Huyghens en a faite aux horloges en 1658.

Le mouvement des horloges est produit par la détente d'un ressort ou la descente d'un poids. Ce mouvement est transmis de proche en proche par l'intermédiaire de roues dentées à un pendule dont les oscillations isochrones régularisent le mouvement du ressort ou du poids qui tendrait à retarder ou à s'accélérer s'il agissait seul (fig. 92).

Le dispositif qui relie le mouvement des rouages au balancier ou pendule s'appelle l'*échappement.*

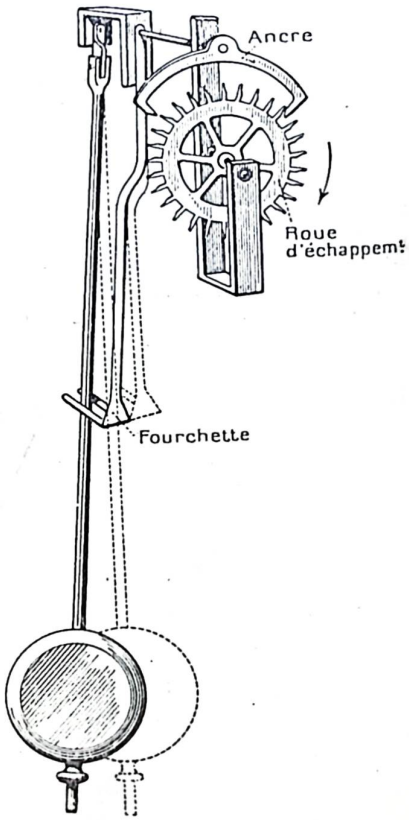


Fig. 92

Il est constitué par une roue munie de dents biseautées entre lesquelles peuvent alternativement s'engager les extrémités d'une pièce métallique appelée *ancre* mobile autour d'un axe O (fig. 93). Cet axe entraîne une fourchette *f* dans laquelle s'engage la tige du balancier dont l'axe de suspension coïncide avec O.

La roue d'échappement entraînée par le ressort presse sur l'extrémité A de l'ancre qui oscillant avec le pendule se relève laissant libre la roue d'échappement. Celle-ci après s'être déplacée d'une dent se trouve arrêtée à nouveau par l'extrémité A′ de l'ancre.

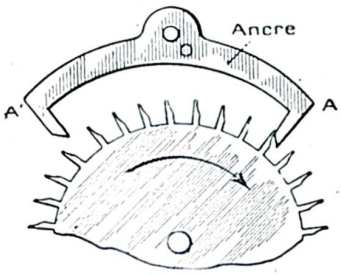


Fig. 93

A chaque oscillation du pendule la roue avance donc d'une dent et par conséquent un même nombre de tours en un temps donné. Le petit choc de la dent sur l'extrémité de l'ancre suffit à donner une impulsion au pendule.

Dans les montres destinées à fonctionner dans tous les sens, on utilise un balancier constitué par un ressort en spirale qui forme un pendule élastique (fig. 94).

Autres applications. — Le pendule sert à déterminer la mesure de *g*.

Enfin à l'aide du pendule de Foucault on peut vérifier le mouvement de rotation de la terre, les oscillations du pendule se faisant constamment dans un même plan.

Problèmes

1. — Le balancier d'une horloge bat la seconde lorsque l'horloge est en un lieu situé sous l'équateur et au niveau de la mer. On demande :

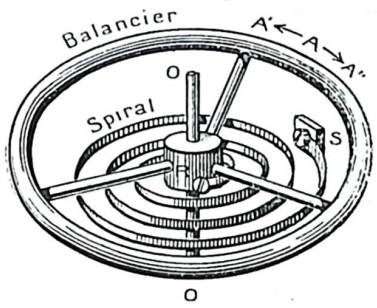


Fig. 94

1° Quelle serait la durée d'une oscillation simple de ce balancier si, l'horloge restant en ce lieu, la terre cessait de tourner sur elle-même ;

2° Par quel nombre N la vitesse de rotation de la terre devrait se trouver multipliée pour que la durée d'oscillation devînt infinie ;

3° De combien l'horloge avancerait par 24 heures si on la transportait au pôle.

L'accélération de la pesanteur au niveau de la mer est donnée en unités C. G. S. par la formule :

$$g = 980{,}6056 - 2{,}5028 \cos 2\lambda,$$

λ désignant la latitude.

La durée de la rotation terrestre est de 86164 secondes de temps moyen.

(Bacc. 2e partie, Alger.).

2. — Deux pendules de longueurs 0 m. 90 et 1 m. 60 passent à un moment donné devant un repère déterminé. On demande au bout de combien de temps ils repasseront simultanément devant le même repère. (Bacc. Nancy).

Solution

Nous savons que les durées d'oscillations des pendules sont proportionnelles à la racine carrée de la longueur des pendules.

Soient T_1 et T_2 les durées d'oscillations des pendules de longueur l_1 et l_2 nous avons :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{90}{160}} = \frac{3}{4}$$

Le pendule T_2 fait donc 3 oscillations pour 4 du pendule T_1 ; ils se rencontreront donc au bout de 3 oscillations de T_1.

$$t = 3\,T_1 = 3 \times \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 3 \times \pi \sqrt{\frac{160}{981}}$$

$$t = 3^s \frac{6}{10}$$

3. — Calculer la longueur du pendule qui bat la seconde en un lieu où un corps qui tombe dans le vide parcourt 34,3308 m pendant la 4e seconde de la chute.

Solution

Un corps tombant dans le vide possède un mouvement uniformément accéléré :

$$e = \frac{1}{2} g t^2$$

Donc : espace parcouru pendant la 4e seconde de chute :

$$34{,}3308 = \frac{1}{2} g (4^2 - 3^2) = \frac{7}{2} g$$

d'où : $$g = \frac{34{,}3308 \times 2}{7}$$

Le pendule qui bat la seconde aura une longueur x telle que :

$$1 = \pi \sqrt{\frac{x}{g}}$$

d'où : $$x = \frac{g}{\pi^2} = \frac{34{,}3308 \times 2}{7 \times 3{,}1416^2} = 0{,}971 \text{ m}$$

CHAPITRE III

BALANCE

Nous avons vu précédemment que l'intensité de la pesanteur varie aux différents points de la terre ; il s'en suit qu'un corps donné n'a pas le même poids suivant qu'il se trouve sous une latitude ou sous une autre ; P étant le poids du corps, M sa masse et *g* l'accélération de la pesanteur, on a :

$$P = M \times g$$

Pour un autre corps de masse M′, on aurait au même point $$P' = M' \times g$$

Nous en tirons :

$$\frac{P}{P'} = \frac{M \times g}{M' \times g} = \frac{M}{M'}$$

Le rapport des poids est égal à celui des masses: il est indépendant de l'accélération. Cette constatation est importante, car ce qu'on désire connaître, en général, n'est pas le poids absolu du corps, mais plutôt le nombre de fois que ce corps pèse de plus ou de moins qu'un objet donné dont le poids est pris pour unité ; la com-

paraison donne un résultat invariable quel que soit le point de la terre choisi.

La balance permet d'effectuer cette comparaison. Elle se compose essentiellement d'une barre rigide appelée fléau PP' (fig. 95), assujettie à se mouvoir autour d'un arc fixe A. Les deux extrémités P et P' supportent par l'intermédiaire de crochets mobiles, deux plateaux S et S'.

Pour effectuer une pesée, on se contente souvent de placer le corps à peser sur l'un des plateaux et de mettre des masses marquées dans l'autre jusqu'à ce que le fléau soit horizontal. Cette méthode suppose que les masses placées dans les deux plateaux sont égales, ce qui n'est vrai que dans certaines conditions.

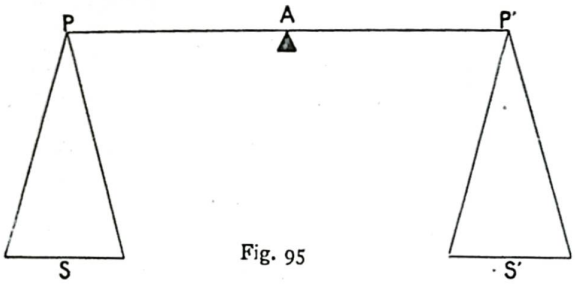


Fig. 95

Lorsqu'une balance oscille autour de son point de suspension A, les plateaux S et S', grâce à leur mode de suspension, conservent toujours la même position par rapport à la verticale. Leur poids s'applique toujours aux points P et P'. En conséquence, on peut remplacer dans les raisonnements la balance par le fléau PAP' considéré comme doué d'un poids propre et soumis en outre à l'action de forces de direction verticale appliquées à ses extrémités P et P'.

Pour que le fléau soit horizontal quand la balance est vide, *il faut et il suffit que son centre de gravité soit sur la perpendiculaire au fléau menée par le point de suspension.* En effet, d'après les lois de la mécanique, le centre de gravité et le point de suspension du système se placent, en position d'équilibre, sur une même verticale. Si cette verticale est justement perpendiculaire au fléau, celui-ci est horizontal dans sa position d'équilibre.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que le centre de gravité soit au-dessous du point de suspension.

Pour que des poids égaux placés dans les plateaux de la balance se fassent équilibre, c'est-à-dire ne dérangent pas l'horizontalité du fléau, *il faut et il suffit que les longueurs AP et AP' des deux bras du fléau soient égales.*

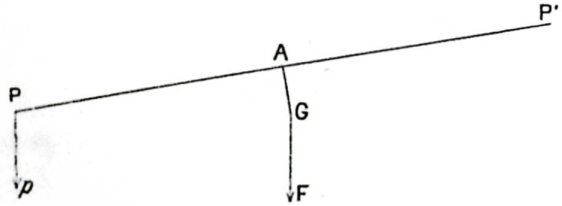


Fig. 96

En effet, les forces, étant égales et parallèles, ont une résultante appliquée au milieu de la droite PP' ; si les bras de levier du fléau sont égaux, la résultante est appliquée au point de suspension qui en annule les effets.

Ces conditions étant réalisées, on dit que la balance est *juste*.

Mais il ne suffit pas qu'elle soit juste. Il faut aussi qu'elle soit *sensible*, c'est-à-dire que le fléau s'incline d'une façon appréciable quand on met un très petit poids dans l'un des plateaux.

Quand le fléau s'incline (fig. 96), le centre de gravité G cesse de se trouver sur la verticale passant par le point de suspension A. Le poids F de la balance tend à l'y ramener. La surcharge *p* placée dans l'un des plateaux s'oppose au retour de AG sur la verticale. Pour que la force *p* fasse équilibre à la force *F*, il suffit que les moments des deux forces par rapport à A soient égaux.

Pour que la balance s'incline sensiblement sous l'action de *p*, il faut que les deux termes du moment de F par rapport à A, c'est-à-dire l'intensité de F et la longueur de la perpendiculaire abaissée de A sur le prolongement de F, soient aussi petites que possible. Il faut donc :

1° *Que la balance soit légère* ;

2° *Que son centre de gravité soit très rapproché de son point de suspension.*

On remarquera que, au fur et à mesure que la balance s'incline, le moment de *p* diminue et celui de F augmente. Si *p* n'est pas trop grand, il arrive donc un moment où les deux forces s'équilibrent pour une certaine inclinaison de la balance.

D'un autre côté, la balance n'est légère que si les plateaux S et S' ne sont pas trop chargés. Donc la sensibilité d'une balance diminue quand la valeur des poids à comparer augmente.

Enfin le moment de *p* est d'autant plus grand que la distance de *p* au point *A* est plus grande, c'est-à-dire que les bras du fléau sont plus longs. La troisième condition de sensibilité est donc :

3° *Que le fléau soit long.*

Méthode de la double pesée de Borda. — Les conditions de sensibilité sont plus faciles à réaliser que les conditions de justesse. Aussi le constructeur s'attache-t-il surtout aux premières, étant donné surtout que la justesse n'est pas indispensable à l'exactitude des pesées.

On peut, en effet, déterminer exactement le poids d'un corps au moyen d'une balance sans justesse pourvu qu'elle soit sensible. On applique la méthode de la double pesée.

On place le corps à peser dans l'un des plateaux de la balance et on rétablit l'horizontalité du fléau en chargeant l'autre plateau d'une substance pesante appropriée quelconque (poids marqués, limaille de fer, sable, etc.). Cette opération se nomme faire la tare du corps. On enlève ensuite le corps à peser, sans toucher à la tare, et on rétablit l'horizontalité du fléau, en mettant, à la place du corps, des poids marqués. Ceux-ci et le corps, faisant équilibre à la même tare dans le même plateau et dans des conditions identiques, représentent évidemment le même poids. Les poids marqués par lesquels on a remplacé le corps, indiquent donc son poids exact.

Différents types de balances

Les balances de précision utilisées dans les laboratoires sont suspendues grâce à un prisme triangulaire ou couteau ; le fléau porte une aiguille se déplaçant le long d'un cadran gradué et est limité dans sa course par deux butoirs (fig. 97).

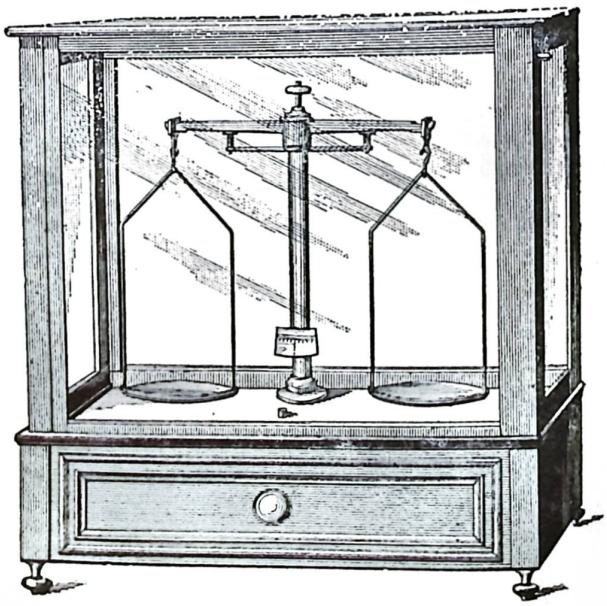


Fig. 97

La *balance Roberval* est très répandue ; elle est robuste et peut supporter une charge assez forte ; le fléau est constitué par une double tige articulée en deux points fixes (fig. 98).

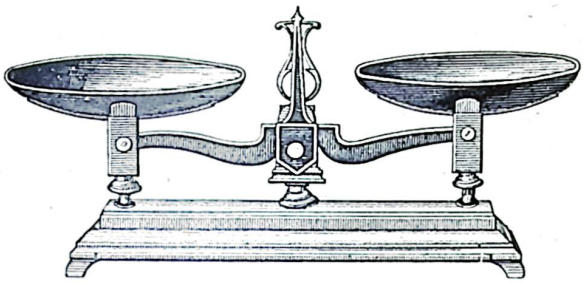


Fig. 98

La *balance romaine* est un levier du premier genre ; un bras qui supporte le corps à peser est fixe ; l'autre bras porte un poids fixe P qui peut glisser le long d'une graduation (fig. 99).

Cette balance est très commode parce qu'elle permet de mesurer des poids très différents et parfois considérables avec un même poids P relativement faible.

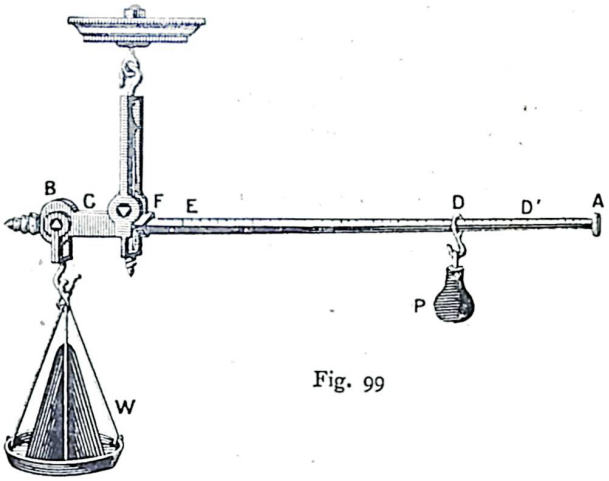


Fig. 99

Problèmes

1. — On met dans le plateau A d'une balance à bras de levier inégaux un corps que l'on pèse et on lui fait équilibre à l'aide d'un poids de 504 g., mis sur le plateau B. On met ensuite le corps dans le plateau B et on lui fait équilibre avec l'aide d'un poids de 503 g. mis dans le plateau A. On demande le poids du corps.

Solution

Représentons par x le poids du corps et par l et l' les 2 bras inégaux du fléau.

Dans la première pesée on a :

$$x \times l' = 504 \times l \qquad (1)$$

Dans la deuxième pesée on a :

$$x \times l = 503 \times l' \qquad (2)$$

Multiplions 1 par 2. On a :

$$x^2 \times ll' = 504 \times 503 \times ll'$$

ou en divisant par ll' il vient :

$$x^2 = 504 \times 503.$$

D'ou le poids du corps :

$$x = \sqrt{504 \times 503} = 503{,}43 \text{ g.}$$

2. — Les deux bras du fléau d'une balance ont l'un et l'autre 25 cm. de longueur, mais le centre de gravité du fléau maintenu horizontal est éloigné de 0 mm 5 de la verticale du point d'appui. On pèse un corps en le mettant successivement dans les deux plateaux et les poids qui lui font équilibre sont 24 g. et 26 g. ; quel est le poids vrai et quel est le poids du fléau ?

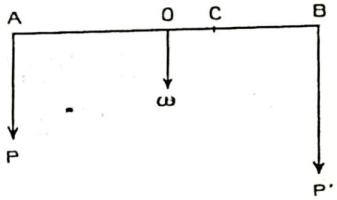


Fig. 100

Solution

Soient ω le poids du fléau, *a*, *b* et *c* les longueurs CA, CB et OC (fig. 100), si nous mettons des poids P et P' dans les plateaux de la balance, nous aurons à l'équilibre :

$$P \times a + \omega \times c - P' \times b = 0$$

Appliquons cette équation aux deux parties du problème, il vient :

$$(1) \quad 24 \times 25 + \omega \times 0{,}05 - x \times 25 = 0$$
$$(2) \quad 2 \times 25 + \omega \times 0{,}05 - 26 \times 25 = 0$$

De ces deux équations nous tirons :

$$x = 25 \text{ g}$$

et

$$\omega = 500 \text{ g}$$

CHAPITRE IV

RÉSISTANCE DES FLUIDES AU MOUVEMENT DES CORPS

Nous avons montré que si tous les corps tombent également vite dans le vide, il n'en est pas de même dans l'air ; les corps lourds qui ont une grande masse sous un faible volume, tombent plus vite que les corps légers.

On dit que l'air oppose une résistance à la chute des corps.

Tous les fluides (liquides ou gaz) présentent une résistance analogue, due aux couches de fluide que le solide doit pousser ou écarter de part et d'autre pour passer.

Cette résistance croît avec la vitesse du mobile ; plus la vitesse d'un cycliste devient grande plus la résistance augmente. On démontre que pour les vitesses qui ne sont ni trop petites ni trop grandes, la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

La surface intervient aussi ; un corps de 1m² de surface subit une résistance deux fois moins grande qu'un corps de 2m².

Enfin la forme du corps intervient ; l'influence de la forme est difficile à déterminer ; on cherche, autant que possible, à donner au corps qui doit vaincre la résistance une forme telle qu'il écarte facilement le fluide et qu'il ne se produise pas de remous en arrière et sur les côtés. C'est ainsi que les bateaux ont une étrave en forme de coin, des côtés incurvés et l'arrière avec une forme particulière.

Existence d'une vitesse limite de chute. — D'après ce que nous venons de voir, la résistance d'un fluide R peut être donnée par la formule : $R = KS\,v^2$, v étant la vitesse du mobile, vitesse de l'ordre de 10 m par seconde ; S la surface apparente et K une constante qui dépend de la forme du corps et de la nature du fluide.

Un corps qui tombe dans un fluide est donc soumis à l'action de deux forces :

1° son poids P ;

2° la résistance du fluide $R = KS\,v^2$.

La force F qui produit le mouvement est égale à la différence P — R ; ce n'est pas une force constante et le mouvement n'est jamais uniformément accéléré dans le fluide.

Mais tant que P est plus grand que R, la vitesse va en croissant ; avec elle, R croît et il arrive donc un moment où R = P. Le mouvement devient uniforme et la vitesse correspondant à ce mouvement s'appelle vitesse limite de chute dans le fluide.

Nous avons donc à ce moment :

$$P = R = KS\,v^2$$

D'où

$$v = \sqrt{\frac{P}{KS}}$$

Par conséquent pour les corps de même forme et de même surface, la vitesse limite est proportionnelle à la racine carrée du poids.

L'aéroplane est un appareil qui utilise, pour se soutenir, la résistance de l'air.

AVIATION

Les machines à voler peuvent se ramener à trois types principaux dont le seul pratiquement réalisable à l'heure actuelle est l'*aéroplane* :

1° L'*ornithoptère* pouvant se soutenir dans l'air à l'aide d'ailes battantes, à l'imitation des oiseaux. Ce type, qui est historiquement le premier, présente toujours la difficulté considérable de s'articuler solidement à l'épaule ;

2° L'*hélicoptère* qui se compose d'une hélice verticale donnant le mouvement d'ascension et d'une ou plusieurs hélices horizontales pour la propulsion. C'est un appareil nécessairement compliqué et, malgré le grand nombre de types proposés, aucun n'a encore donné pleine satisfaction ;

3° L'*aéroplane* se compose d'une surface que l'on déplace dans l'air avec une grande rapidité ; elle ne se soutient qu'en avançant. L'ascension est une conséquence du mouvement de translation.

Théorie de l'aéroplane. — Soit une surface AB pesante soumise à l'action d'une force propulsive F et se déplaçant dans l'air (fig. 101).

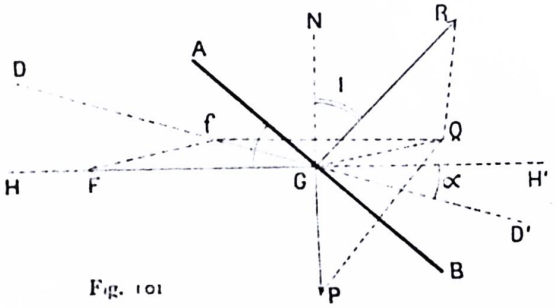


Fig. 101

Les forces qui agissent sur cette surface sont :

1° la force propulsive F horizontale ;

2° le poids P de la surface, vertical et appliqué en G, centre de la gravité.

3° la résistance de l'air sur la surface ; si V est la vitesse de l'appareil, S sa surface et I l'angle de la surface avec l'horizontale, cette résistance est :

$$R = K\,S\,V^2 \sin I$$

Les trois forces R, P et F se composent ; comme R augmente constamment, il arrivera un moment où la composante f fera un angle aigu a avec la verticale et sera dirigée vers le haut ; la surface tendra donc à s'élever dans la direction GD.

Description de l'aéroplane

1° La surface portante ou *voilure* de l'aéroplane peut être formée soit par une seule aile (*monoplan*), soit par deux ou trois plans superposés (*biplan* et *triplan*). Ces ailes ont une forme concave (fig. 102) ; elles sont formées d'un certain nombre de nervures ajourées afin de

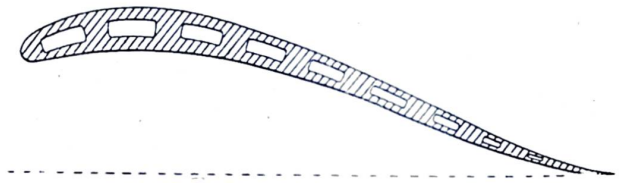


Fig. 102

diminuer le poids de l'appareil. Ces nervures sont en bois ou en métal léger (aluminium, alliage de magnésium et d'aluminium, etc.) et elles sont recouvertes de toile ou de feuilles d'aluminium.

L'extrémité des ailes porte un système mobile compensateur donnant à l'appareil plus de maniabilité dans les virages.

2° La *cellule* porte le moteur et son radiateur, les aviateurs, les appareils de mesure et les commandes des gouvernails.

3° Les *gouvernails* qui permettent de guider l'appareil sont à l'arrière, ils comprennent généralement un empennage horizontal qui est fixe et stabilise l'appareil automatiquement, un gouvernail de profondeur qui permet la montée et la descente, et un gouvernail de direction.

4° Les gouvernails sont reliés aux ailes et à la cellule par le *fuselage* ; celui-ci peut être entoilé, il faut alors lui donner un profil pisciforme afin de réduire la résistance de l'air.

5° Les organes de contact avec le sol sont constitués par un *chariot d'atterrissage*, cadre pourvu de roues à jantes pneumatiques. Dans les appareils marins (hydroaéroplanes) on remplace le chariot d'atterrissage par un système de flotteurs.

L'arrière porte une *béquille* afin d'éviter le contact, avec le sol, des organes délicats.

Appareil propulsif — L'appareil propulsif de l'aéroplane est constitué par le *moteur* actionnant une ou plusieurs *hélices*.

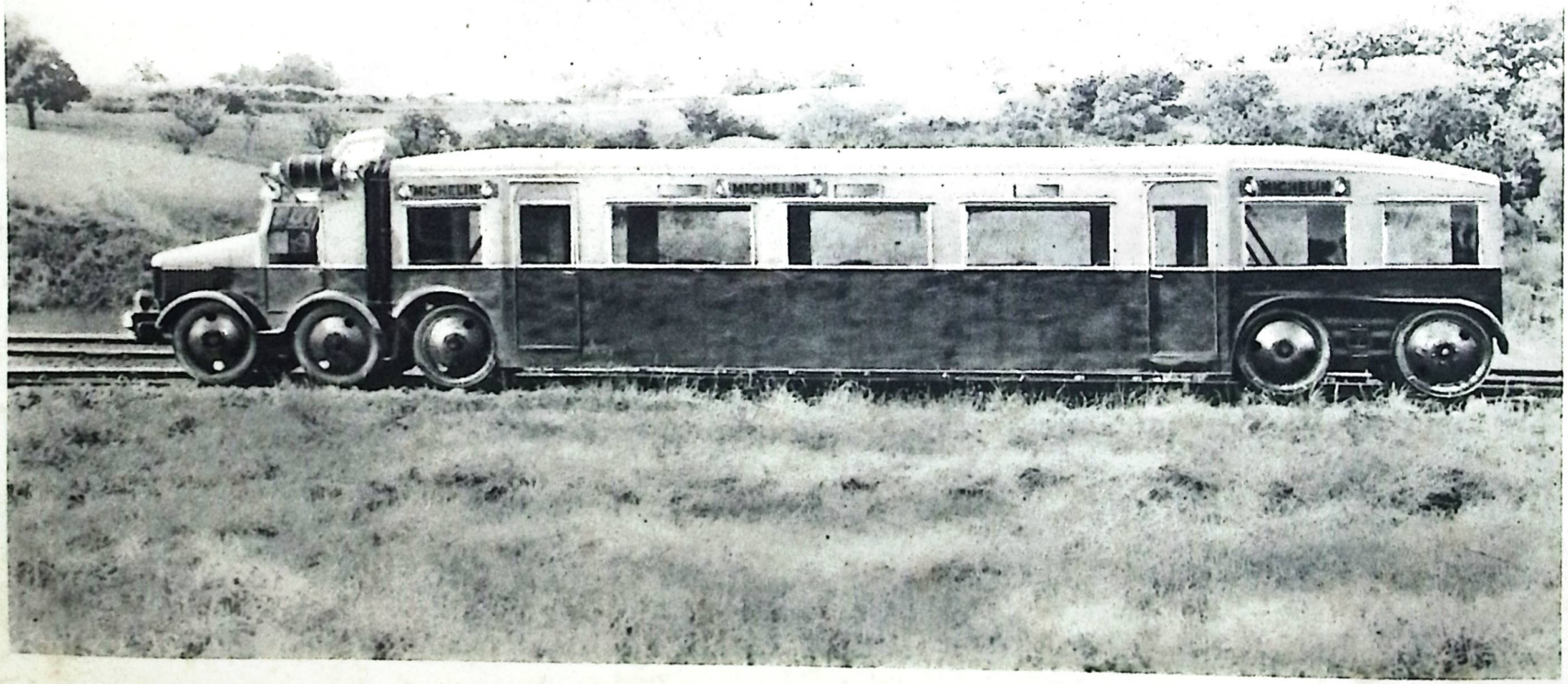
Celles-ci se vissent en quelque sorte dans l'air, mais il est établi que l'hélice ne fait jamais parcourir à l'appareil un chemin aussi long que celui qui est indiqué par son pas multiplié par le nombre de tours : il y a une perte que l'on nomme *recul*. On parvient à diminuer le recul en augmentant le diamètre de l'hélice.

Le rendement de l'hélice est de 80 à 90 % environ, mais on est arrivé à 97 % avec le type *Intégral* de M. Chauvière.

Le moteur joue un rôle extrêmement important dans l'aéroplane ; il doit être très léger et posséder une grande sûreté de marche.

On utilise les moteurs à essence de pétrole ; les pistons sont en aluminium. Les moteurs actuels ne pèsent pas plus de 1 kg., 2 par cheval-vapeur.

Ils peuvent être rotatifs, mais généralement fixes, disposés en V ou en étoile.



(Cl. Michelin)

LA MICHELINE

Le premier véhicule sur pneus pouvant circuler sur rails a été mis en service par la Compagnie des Chemins de fer de l'Etat.

Historique. — De 1809 à 1890 on a fait d'intéressantes études et même quelques vaines tentatives de vol. La théorie exacte de l'aéroplane est due à Alphonse Pénaud (1873) ; ce fut le premier qui construisit un petit appareil ayant pu quitter le sol.

En 1890, M. Marey analysa le mécanisme du vol des oiseaux à l'aide d'appareils enregistreurs très précis.

La même année Clément Ader expérimenta un type d'aéroplane auquel il donnait le nom d'avion ; cet appareil se serait élevé le 9 octobre 1890 sur une distance de 50 mètres mû par sa seule force motrice, mais il n'y avait d'autres témoins qu'Ader et ses aides. Les expériences furent renouvelées, mais sans grand succès. Le Français Mouillard inventa le gauchissement des ailes.

Pendant ce temps l'Allemand Lilienthal et l'Américain Chanute utilisaient des appareils à large surface portante et s'élançant du haut de petites collines, ils atteignirent des vols de plus de 300 mètres, mais trouvèrent la mort dans leurs expériences.

Les frères Wright reprirent les expériences de Chanute mais au lieu de se tenir debout et de lancer l'appareil en courant, ils s'y tenaient couchés et avaient besoin de deux aides pour le lancement.

Ils imaginèrent le gouvernail de profondeur placé à l'avant et permettant de relever l'appareil.

Enfin ils firent, en 1903, les essais d'un appareil de 338 kg., de 50 m² de surface et ayant un moteur de 20 HP actionnant deux hélices.

Leurs essais furent couronnés de succès et en 1908 ils firent un parcours de plus de 8.000 mètres. Le défaut de leur appareil était qu'il ne quittait pas le sol par ses propres moyens et qu'il était très difficile à conduire.

En France, Santos-Dumont, Ferber, Blériot, Farman, etc., firent de nombreuses expériences et dès 1908 réussirent à voler sur plusieurs kilomètres.

Le 25 juillet 1909, Blériot réussissait sur son monoplan à traverser la Manche (fig. 103). Depuis, l'aviation s'est de plus en plus développée et ses progrès furent extrêmement rapides. Après la Manche, la Méditerranée, puis l'Océan Atlantique furent franchis. Les « Goliaths », véritables navires aériens, emportent une vingtaine de passagers à leur bord et vont de Paris à Bruxelles avec facilité.

Pendant la guerre 1914-18, l'aéroplane s'est montré indispensable d'abord comme éclaireur, puis comme appareil de bombardement et enfin comme appareil d'attaque. Les escadrilles se sont multipliées chez les belligérants alors qu'en août 1914, les appareils étaient peu nombreux. Il fallut construire des appareils nettement spécialisés ; appareils rapides à faible surface portante (chasseurs), appareils de bombardement emportant des tonnes de projectiles grâce à leur grande surface ; appareils de reconnaissance munis de T.S.F., etc.

Depuis la cessation des hostilités, l'aéroplane est devenu un appareil de tourisme ; il peut rendre les plus grands services pour le transport des lettres, les relations rapides avec nos colonies africaines ; il permet d'explorer les zones désertiques comme le Sahara. En 1930

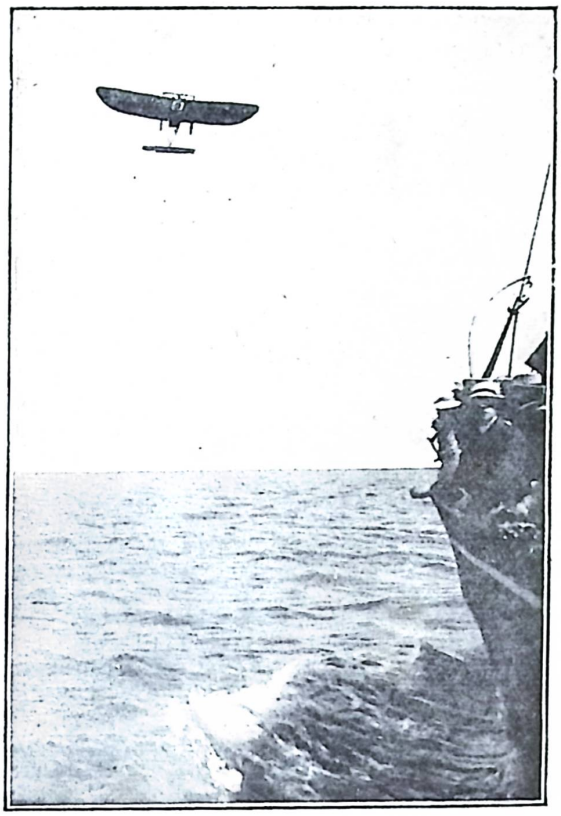


Fig. 103
Traversée de la Manche par Blériot

Costes et Bellonte ont réussi la traversée de l'Atlantique Paris—New-York. Malheureusement, le retour au sol ne peut se faire qu'avec une assez grande vitesse et occasionne des accidents ; de plus les ailes, forcément un peu faibles, subissent des pressions considérables. Il semble que les efforts des constructeurs doivent se porter surtout à étudier ces deux questions.

CHAPITRE V

CHOC DES CORPS

ELASTICITÉ — FROTTEMENT

Choc des corps. — Lorsqu'un corps en mouvement rencontre un corps immobile ou en mouvement, on dit qu'il y a *collision* ou *choc* des deux corps. Le choc fait apparaître des forces dont les effets sont variables suivant la nature des corps. Quand la force n'agit qu'un instant et qu'elle détermine des changements sensibles dans la vitesse des deux corps, on dit que c'est une force instantanée ou *impulsive*.

Les effets du choc dépendent :

1° De la direction des mouvements des deux corps par rapport à la ligne qui joint leurs centres de gravité.

2° De la dureté des corps, de leur *élasticité*.

Les corps peuvent être classés en *corps mous* et en *corps élastiques*. Les premiers se déforment durablement sous l'influence du choc, leurs molécules se déplacent les unes par rapport aux autres et *restent dans leurs nouvelles positions*.

Les corps élastiques, au contraire, jouissent de la propriété de reprendre leur forme primitive; après que, sous l'influence d'un choc ou d'une pression, ils se sont momentanément déformés, leurs molécules tendent donc à reprendre leurs positions respectives avec une certaine force qu'on appelle *force élastique*.

Un corps parfaitement élastique opposerait à une force de compression donnée. une force élastique égale en valeur absolue et de sens contraire. Cette élasticité parfaite n'est jamais réalisée. Les corps sont plus ou moins élastiques suivant qu'ils se rapprochent plus ou moins de cette limite.

Si nous appelons C la force de compression et E la force élastique, l'élasticité est exprimée par la relation

$$C = E$$

ou

$$\frac{E}{C} = 1$$

La valeur du rapport $\frac{E}{C}$ pour un corps donné nomme *élasticité* de ce corps. Ce rapport est de $\frac{15}{16}$ pour le verre, de $\frac{8}{9}$ pour l'ivoire et de $\frac{5}{9}$ pour l'acier.

Choc des corps mous. — On appelle *quantité de mouvement* d'un corps le produit de sa masse par sa vitesse :

$$Q = M \times V$$

1° Supposons que l'un des corps B est immobile. Soit A un corps mou animé d'une vitesse V ; lorsqu'il rencontre B, les deux corps réagissent d'abord l'un sur l'autre, puis se meuvent ensemble avec une vitesse commune. Il y a d'abord compression : les deux corps se déforment, les molécules de chacun d'eux se rapprochent du centre ; les corps A et B s'aplatissent.

Soit F la valeur commune des forces d'action et de réaction qui se développent pendant l'aplatissement ; le corps en mouvement perd une vitesse v ; le corps immobile gagne une vitesse v' pendant un temps très petit t. Soient m la masse de A et m' celle de B :

$$F = m\frac{v}{t} = m'\frac{v'}{t}$$

d'où

$$m\,v = m'v'$$

A la fin de la compression la somme des quantités de mouvement est la même qu'avant le choc.

Une fois la période de compression terminée, les deux corps A et B cesseront de réagir l'un sur l'autre, puisqu'ils sont mous, et se déplaceront avec une vitesse commune V' comme s'ils ne faisaient qu'un corps de masse : $m + m'$; on a

$$m\,V = (m + m')\,V'$$

d'où

$$V' = \frac{m}{m + m'}\,V$$

2° Supposons que les deux corps se meuvent suivant une ligne droite passant par leur centre de gravité avec des vitesse V et V' ; la quantité de mouvement reste la même après et avant le choc et si V_1 est la nouvelle vitesse :

$$m\,V + m'\,V' = (m + m')\,V_1$$

d'où

$$V_1 = \frac{m\,V + m'\,V'}{m + m'}$$

Choc des corps élastiques. — Si les deux corps A et B sont parfaitement élastiques, à partir du moment où les deux corps ont atteint le maximum de compression ils commencent à réagir en sens inverse et la force de réaction F prendra à chaque instant les mêmes valeurs que dans la période de compression. Les vitesses qui seront imprimées ou détruites seront précisément égales à celles qui l'ont été pendant la compression.

Soient V et V' les vitesses des deux corps A et B au moment du choc, soit U la vitesse commune à l'instant de la plus grande compression. A cet instant, le corps A aura perdu une vitesse V — U et le corps B aura gagné U — V'. Mais, comme la réaction due à l'effet de l'élasticité est identique à celle de la compression durant le retour des corps à leur état primitif, le corps A perdra encore V — U et le corps B gagnera encore U — V'.

Soient W et W' les vitesses nouvelles des corps A et B à la fin du choc. On aura :

$$W = V - 2\,(V - U) = 2\,U - V$$
$$W' = V' + 2\,(U - V') = 2\,U - V'$$

et comme on a, d'après ce qui précède :

$$U = \frac{m\,V + m'\,V'}{m + m'}$$

On a d'autre part :

$$W = \frac{2\,mV + m'V'}{m + m'} - V$$

$$W' = 2\,\frac{mV + m'V'}{m + m'} - V'$$

Ou, en développant et réduisant :

$$W = \frac{2m\,V + 2m'V' - mV - m'\,V}{m + m'}$$

$$W = \frac{m\,V + 2m'V' - m'V}{m + m'} \qquad (1)$$

et

$$W' = \frac{2mV + 2m'V' - mV' - m'V'}{m + m'}$$

$$W' = \frac{m'V' + 2mV - mV'}{m + m'} \qquad (2)$$

Frottement. — Lorsqu'un corps glisse sur un autre, il se développe aux différents points de contact des résistances tangentes aux surfaces et qui s'opposent directement au mouvement.

Ces forces résultent de l'existence d'aspérités à la surface des corps. Ces aspérités s'accrochent, pour ainsi dire, les unes aux autres, et présentent autant d'obstacles au mouvement.

Il y a une autre espèce de frottement qui est celui d'un corps roulant sur un autre. Ici, les inégalités des surfaces déterminent des mouvements qui contrarient le mouvement général et absorbent, par suite, une certaine quantité d'énergie.

On distingue donc deux sortes de frottements : 1° le frottement de *glissement* et 2° le frottement de *roulement*.

Le frottement de roulement est beaucoup moins considérable en général que le frottement de glissement ; on épargne une grande dépense de force en convertissant les frottements de roulement. C'est ainsi que les roulettes qu'on met sous les pieds des meubles diminuent considérablement le frottement de ces derniers quand on les traîne sur le plancher. Dans certains cas on peut néanmoins avoir avantage à transformer le roulement en glissement. L'action des freins en est un exemple.

C'est le frottement qui permet à un homme ou à un animal de se déplacer sur le sol, et, sans le frottement, il serait impossible de tenir un objet dans la main. Le frottement est utilisé pour transmettre une force d'une poulie à une autre au moyen d'une courroie ou d'une corde.

Les lois du frottement s'énoncent de la manière suivante :

1° *Le frottement est directement proportionnel à la pression.* Si un objet d'une substance quelconque a un poids double d'un objet de la même substance, et si la surface de contact de chacun de ces objets avec un plan uniforme est la même, la force nécessaire pour mettre en mouvement le premier est double de celle qu'il faut pour mettre en mouvement le second.

2° *Le frottement est indépendant de l'étendue de la surface de contact.* Par exemple, étant donné un objet pesant 60 kilogrammes, supposons qu'il soit nécessaire de faire agir une force de 25 kilogrammes pour le mettre en mouvement, il faudra une force de 50 kilogrammes, pour mettre en mouvement l'ensemble formé par deux objets identiques et posés côte à côte, mais il faudra encore 50 kilogrammes si on pose les deux objets l'un sur l'autre. Cependant, dans ce dernier cas, la surface de contact aura diminué de moitié.

3° *Le frottement est indépendant de la vitesse quand le corps est en mouvement.* La valeur du frottement entre deux corps dépend bien plutôt de la nature de ces corps. Ainsi, entre le bois de chêne et la fonte de fer, elle est représentée par 0,38 ; entre fer forgé et fer forgé, elle est de 0,44 ; le cuivre sur la fonte exerce un frottement de 0,22. Nous supposons naturellement que les surfaces sont bien polies et horizontales. Ces nombres 0,38, 0,44, 0,22, etc. représentent le rapport de la force, nécessaire pour mettre un corps en mouvement sur une surface, à la pression de ce corps sur la surface. C'est le *coefficient* de frottement. Le tableau suivant indique le frottement de différents métaux sous une pression moyenne de 54,25 kilogrammes à 69,55 kilogrammes :

Noms des métaux	Pression en kg.	Rapport de la pression au frottement
Cuivre sur fer forgé	69,25	7,312
Cuivre sur fonte de fer	54,25	6,745
Cuivre sur acier	69,55	6,592
Bronze dur sur fonte de fer...	54,25	6,581
Cuivre sur cuivre	69,25	6,764
Acier sur acier	69,55	6,860
Fer forgé sur fer forgé	69,55	6,561
Fonte de fer sur fonte de fer .	54,25	6,475
Fonte de fer sur fer forgé	69,023	6,55
Fonte de fer sur acier	69,55	6,393
Etain sur étain.....	69,55	3,305

Il ressort de ces données que le frottement entre des métaux durs est moins considérable qu'entre des métaux mous. Le frottement de métaux durs sur métaux durs peut être évalué en général approximativement à un sixième, c'est-à-dire à 0,17.

On emploie couramment la graisse et les huiles pour diminuer l'importance du frottement ; le savon remplit le même office. On se rendra compte de l'intérêt qu'il peut y avoir à enduire de graisse deux surfaces destinées à glisser l'un sur l'autre par le tableau suivant :

Surfaces en contact	Coefficients de frottement
Bois sur bois, sans enduit	0,50
Bois sur bois, avec enduit de savon	0,36
Bois sur bois, avec enduit de suif	0,19
Bois sur métaux, sans enduit	0,60
Bois sur métaux, avec enduit de suif.....	0,12
Courroie sur bois, sans enduit	0,63
Courroie sur bois, mouillée d'eau	0,87
Métaux sur métaux, sans enduit	0,18
Métaux sur métaux, avec enduit d'huile	0,12

Le frottement diminue quand les surfaces sont en mouvement. Ainsi, pour bois sur bois, le frottement au départ est de 0,50 et, pendant le mouvement, il n'est plus que de 0,36. Quand les surfaces sont graissées le coefficient de frottement pendant le mouvement est de 0,07 à 0,08.

Pour toutes les substances poreuses le frottement augmente avec la surface de contact et avec la durée du mouvement. Il n'atteint toute son intensité qu'au bout d'un certain temps. Il diminue quand la vitesse augmente.

Mais, pour le bois, les métaux, la pierre, la valeur du frottement est simplement proportionnelle à la pression ; elle n'est affectée ni par le temps, ni par la surface, ni par la vitesse.

Le tableau suivant donne les coefficients de frottement de certaines surfaces planes quand elles sont restées quelque temps en contact.

Surfaces en contact	Etat de la surface	Dispositions des fibres	Coefficients de frottement
Chêne sur chêne..	sec	parallèles	0,60
Chêne sur chêne..	»	perpendiculaires	0,54
Chêne sur chêne..	mouillé	»	0,71
Orme sur chêne ..	sec	parallèles	0,69
Orme sur chêne ..	»	perpendiculaires	0,57
Frêne sur chêne ..	»	parallèles	0,50
Sapin sur chêne ..	»	perpendiculaires	0,52
Hêtre sur chêne ..	»	parallèles	0,53
Fer forgé sur chêne	»	»	0,62
Bronze sur chêne .	»	»	0,62
Cuivre sur chêne .	»	»	0,74
Corde de chanvre sur chêne	»	»	0,64
Chêne sur fonte ..	»	»	0,38
Fer forgé sur fer forgé	»	»	0,44
Bronze sur fonte..	»		0,20

Le *coefficient de frottement* est représenté généralement par la lettre grecque μ. R étant la pression normale aux surfaces, F le frottement, le rapport $\frac{F}{R}$ est constant, les deux surfaces restant dans les mêmes conditions. On a :

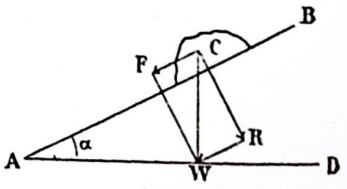
$$\frac{F}{R} = \mu$$

$$F = \mu R$$

Angle de repos. — On appelle *angle de repos* le plus grand angle suivant lequel on peut incliner un plan sur l'horizontale sans qu'un corps posé à sa surface, et en repos, se mette en mouvement.

Soit un corps C posé sur un plan AB (fig. 104). Inclinons le plan AB jusqu'à ce que le corps C se mette en mouvement, l'angle que fait le plan avec l'horizon AD, à cet instant est l'*angle de repos*.

Le poids W du corps peut se décomposer en une force F parallèle à AB et une force R perpendiculaire à AB ; R est la pression, F le frottement.



Fg. 104

Dans le triangle rectangle F C W, l'angle W est égal à α comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ce dernier. On a donc, en remarquant que F W = C R :

$$\frac{F}{R} = tg\,\alpha$$

$$F = R\,tg\,\alpha$$

Mais comme on a d'autre part $F = \mu R$
on tire de ces deux relations : $\mu R = R \, tg \, \alpha$

$$\mu = tg \, \alpha$$

Ainsi le coefficient de frottement est égal à la tangente de l'angle de repos.

Résistance de frottement. — Quand un cylindre roule sur un plan horizontal, la résistance de frottement tend à le ramener à l'état de repos. La valeur de la résistance du frottement de roulement est beaucoup plus faible que celle du frottement de glissement.

Quand on veut diminuer le frottement d'un corps à faire mouvoir sur un plan, on le monte sur des roues. Il est vrai que les axes des essieux sont soumis eux-mêmes au frottement des roues ; mais on peut les graisser et diminuer ainsi beaucoup la résistance ; d'autre part le petit diamètre de l'axe rend le frottement peu sensible.

Le coefficient de frottement pour des roues en fonte roulant sur des rails en fer est de 0,003 ; il est de 0,02 pour des roues de voitures garnies de bandes, roulant sur un pavé bien entretenu.

On applique aussi cette transformation du glissement en roulement au transport des lourds fardeaux, tels que pierre de taille, sur des rouleaux.

Mais le frottement est utilisé pour modérer ou arrêter la vitesse d'une machine. C'est le principe des freins.

Le *frein* peut consister soit en une simple pièce de bois qui vient s'appuyer contre la roue d'une voiture, soit en une courroie ou une bande métallique qui s'enroule sur un tambour monté sur l'axe des roues d'une voiture ou sur l'arbre de transmission d'une machine. On serre la courroie ou la bande métallique au moyen d'un levier.

STATIQUE DES FLUIDES

Définition. — L'hydrostatique est l'étude des conditions d'équilibre des liquides. Nous avons vu précédemment la différence qui existe entre un liquide et un gaz ; le liquide est très peu compressible et, par suite, son volume est à peu près indépendant de la pression exercée sur lui ; il résulte que la densité d'un liquide peut être considérée comme constante. Au contraire, le gaz occupe tout le volume qui lui est offert.

Les principes généraux s'appliquent également à tous les fluides, liquides ou gaz.

CHAPITRE PREMIER

HYDROSTATIQUE

PRESSION DANS LES LIQUIDES

Notion de pression. — Unité. — Un corps pesant placé sur un autre corps appuie sur ce dernier avec une *force égale à son poids.*

Cette force se répartit sur toute la surface du corps en contact. *On appelle pression sur cette surface le quotient de la force pressante par la surface pressée.*

Exemple : Considérons une masse de fer de forme parallélépipédique de $20 \times 10 \times 5$ et pesant 5 kilogrammes (fig. 105).

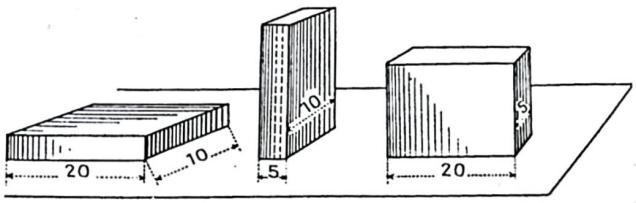


Fig. 105

Cette masse reposant sur une grande face exerce une pression de $\frac{5.000}{20 \times 10} = 25$ grammes.

Sur une face moyenne $\frac{5.000}{20 \times 5} = 50$ grammes.

Sur une petite face $\frac{5.000}{5 \times 10} = 100$ grammes.

Applications. — Les *couteaux,* les *burins* et autres instruments tranchants coupent parce qu'ils permettent d'exercer sur les corps, avec un effort relativement faible, des pressions considérables.

Au contraire, les *traverses de chemin de fer,* les *skis* permettent de diminuer les pressions exercées par des corps lourds.

Unités de pression. C'est la pièze (pz).

La pièze est la pression uniforme, qui répartie sur une surface de 1 m² produit un effort total d'un sthène.

Dans le système C. G. S., c'est *la barye.* La barye est *la pression uniforme qui, répartie sur une surface de 1 cm² produit un effort total d'une dyne.*

Pratiquement, on évalue les pressions en kilogrammes poids (kgp) ou en grammes poids (gp) par cm², en atmosphères, en cm de mercure.

$$1 \text{ kgp} = 981.000 \text{ dynes}$$
$$1 \text{ st.} = 10^8 \text{ dynes}$$
$$1 \text{ kgp par cm}^2 = \frac{0 \text{ sn}, 0098}{0, \text{m}^2 0001} = 98 \text{ pièzes.}$$
$$1 \text{ pz} = \frac{102 \text{ kgp}}{10000 \text{ cm}^2} = 0{,}0102 \text{ kgp ou } 10{,}2 \text{ gp}$$
$$1 \text{ atm.} = 13{,}6 \times 76 \text{ cm de mercure} = 1033 \text{ gp.}$$
$$= \text{sensiblement } 1 \text{ kgp.}$$

Existence des forces de pression à l'intérieur d'un fluide. — Si nous perçons un orifice dans une paroi mouillée par un liquide, celui-ci s'écoule et le jet est normal à la surface de la paroi.

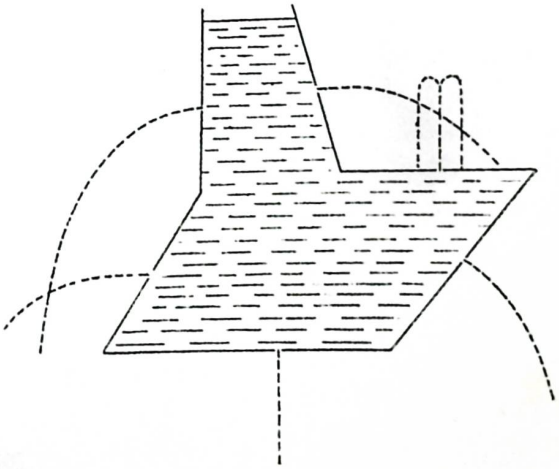


Fig. 106

Prenons un récipient (fig. 106) dont les parois présentent des inclinaisons différentes et perçons des orifices dans chacune des parties de ces parois ; les jets sortent

perpendiculairement à la paroi, nous voyons en outre que pour une même orientation le jet est d'autant plus fort que l'orifice est plus bas (fig. 107).

Les pressions exercées par les liquides sont normales aux surfaces qui les reçoivent.

Mesure des pressions dans les liquides.

On appelle pression en un point d'un liquide, la pression moyenne sur une surface très petite dont ce point serait le centre.

Les pressions sont mesurées avec des tubes en verre munis d'obturations mobiles ou mieux avec le baroscope.

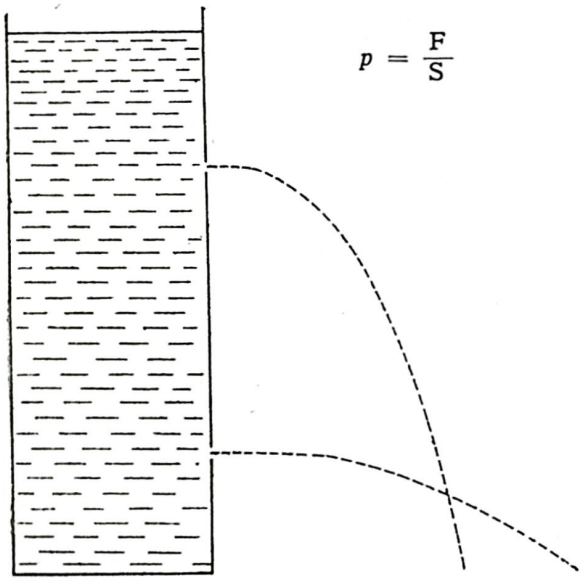
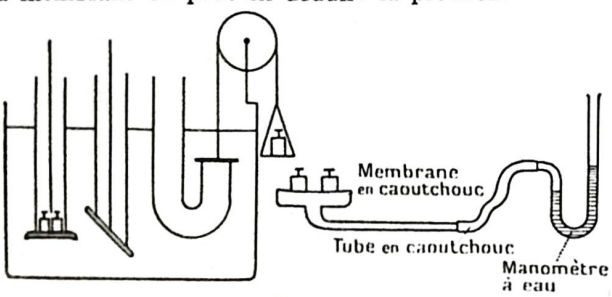


Fig. 107

Le *baroscope* (fig. 108) se compose d'une petite boîte, formée par une membrane en caoutchouc, en communication avec un tube de verre en U contenant de l'eau rougie.

La dénivellation de l'eau de ce manomètre indique la *poussée*. Connaissant cette poussée et la surface de la membrane on peut en déduire la pression.



Fg. 108

Le baroscope nous permet de vérifier les lois suivantes :

1° *Dans un liquide au repos la pression en un point est la même dans tous les sens* (fig. 109 I).

La pression est la même quelle que soit l'orientation du baroscope.

La pression est plus grande en B qu'en A.

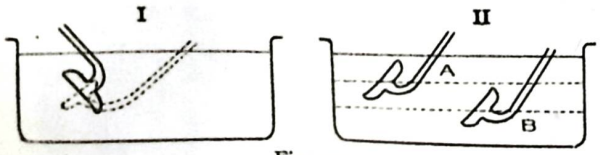


Fig 109

2° *Dans un liquide au repos la pression augmente avec la profondeur* (fig. 109 II).

3° *Dans un liquide au repos, la pression est la même en tous les points d'un plan horizontal* (fig. 110).

Pour évaluer la pression exercée sur la membrane, on note la *dénivellation* h' du manomètre puis le baroscope étant hors du liquide, on charge cette membrane *de poids marqués* jusqu'à ce que la dénivellation redevienne égale à h' ; on constate qu'elle est égale à s hp, s étant la surface de la membrane, h la distance verticale du centre de la membrane au niveau du liquide et p le poids spécifique du liquide.

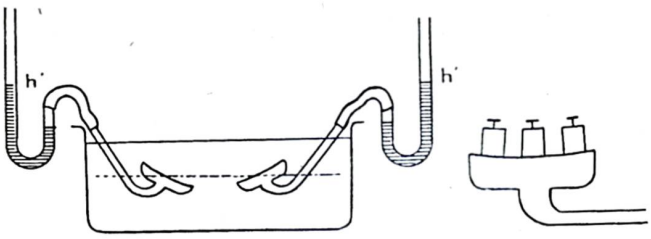


Fig. 110

4° *Dans un liquide au repos la poussée sur une surface est égale au poids de la colonne prismatique de liquide ayant cette surface pour base et pour hauteur la distance verticale de cette surface au niveau du liquide.*,

5° *Dans un liquide au repos la pression en un point est égale au produit du poids spécifique par la distance verticale du point à la surface libre du liquide.*

En effet : $\frac{shp}{s} = hp$

6° *Dans un liquide au repos la différence de pression entre 2 points pris à des niveaux différents est hp, h étant la différence des niveaux et p le poids spécifique du liquide.*

Remarque. — La pression *absolue* en un point du liquide est égale à hp plus la pression atmosphérique.

Conséquences : 1° *La surface libre d'un liquide en équilibre est un plan horizontal.*

Cela s'entend naturellement pour de petites surfaces, car nous avons vu que la surface de la mer était courbe.

2° Quand plusieurs liquides, qui ne se mélangent pas, sont placés dans un vase, ces liquides se *superposent* par ordre *de densités* décroissantes et leurs surfaces de séparation *sont planes et horizontales* (fig. 111).

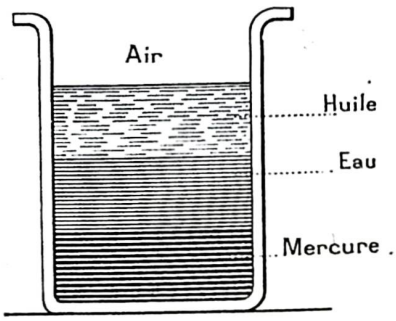


Fig. 111

Applications. — *Le niveau à bulle d'air* (fig. 112).

Si la bulle d'air occupe l'intervalle A B situé entre 2 repères A et B, la surface S est horizontale.

Dans le cas contraire la surface est inclinée.

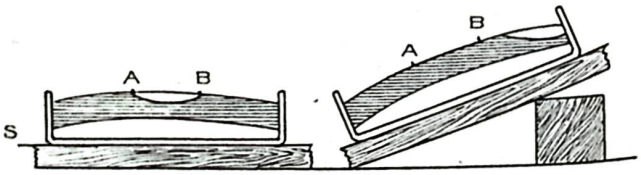


Fig. 112

VASES COMMUNICANTS.

Dans ce qui précède la théorie fait totalement abstraction de la forme du vase; la surface est horizontale quelle que soit sa forme ; on le vérifie au moyen des vases communicants (fig. 113 et 114).

Dans le tube en U, ONK les éléments de surface libre AB et DE sont dans le même plan horizontal.

On peut le vérifier aisément en plongeant le tube dans un vase LHFG. Les surfaces LF, AB et DE sont dans le même plan horizontal.

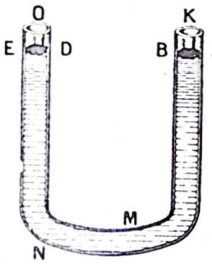


Fig. 113

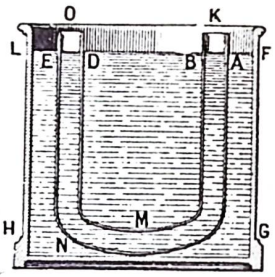


Fig. 114

Principe. — Quand plusieurs vases renfermant un même liquide communiquent, les surfaces libres de ce liquide sont sur un même plan horizontal (fig. 115).

Vases communicants à 2 liquides. — Versons dans un tube à deux branches (fig. 116) des liquides différents. Soit GH la surface de séparation des deux liquides, et supposons que le liquide le moins dense remplisse la branche AB jusqu'au niveau EF; l'autre branche CD ne contient que le liquide le plus dense.

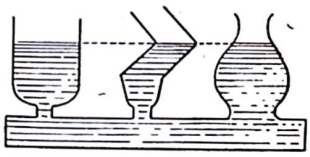


Fig. 115

Dans la branche CD, la pression au niveau LM doit être la même qu'en GH qui est sur le même plan horizontal dans le même liquide. Dans la colonne liquide qui surmonte LM dans la branche CD s'exerce une pression égale à la pression exercée par la colonne GHFE.

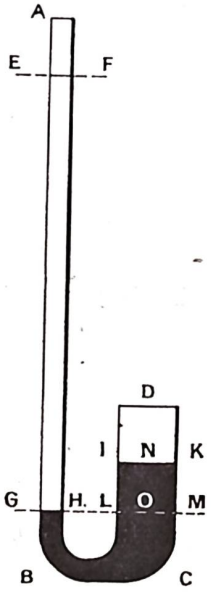


Fig. 116

Soient d et d' les poids de l'unité de volume du liquide de la branche CD. Deux colonnes liquides dans l'une et dans l'autre branche, ayant pour base l'unité de surface au niveau GHLM, ont le même poids, puisque la pression est la même. Or, pour chaque colonne, ce poids est égal au volume multiplié par la densité du liquide. Soient h et h' les hauteurs EG et IL, nous aurons :

$$h\,d = h'\,d'$$

d'où

$$\frac{h}{h'} = \frac{d'}{d}$$

La hauteur des liquides dans les deux branches est inversement proportionnelle à la pression.

Application. — On verse dans la branche CD d'un tube recourbé, du mercure dont la densité est 13,6; dans l'autre branche AB, on verse, au-dessus de la surface GH du mercure, une colonne d'eau de 1 mètre de hauteur. A quelle hauteur au-dessus du niveau GH le mercure montera-t-il dans la branche CD ?

On a : $h = 1$ m $\quad d = 1 \quad d' = 13{,}6$

De la relation (1) on tire :

$$\frac{1}{h'} = \frac{13{,}6}{1}$$

d'où

$$\frac{1}{13{,}6} = h'$$

$$h' = 0{,}0735 \text{ m}$$

Le mercure s'élèvera à 73 millimètres et demi au-dessus du niveau GH.

Puits. — Une application très importante du principe des vases communicants est celle des puits.

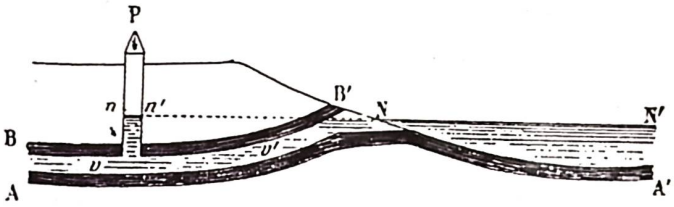


Fig. 117

Une nappe d'eau N N' repose sur un sol argileux A A' (fig. 117). La couche d'argile imperméable sur laquelle repose la nappe est surmontée d'une couche perméable v' v, dans laquelle l'eau s'infiltre. Une seconde couche d'argile imperméable B B' surmonte la couche perméable, de sorte que l'eau se trouve renfermée entre A A' et B B' absolument comme dans un vase. Si on fore un puits en P, jusqu'à ce qu'on ait

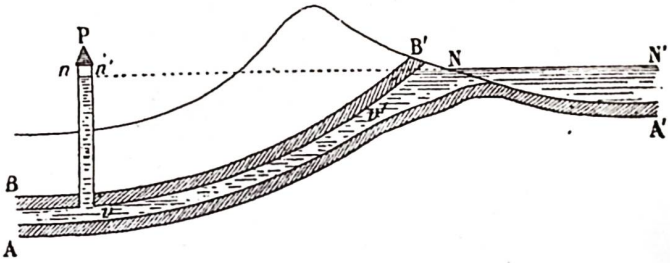


Fig. 118

traversé la couche d'argile B B', l'eau monte dans le puits jusqu'à ce que son niveau ait atteint celui de la nappe d'eau N N'.

Si le niveau N N' est au-dessous du niveau du sol en P, on a un puits ordinaire, dont il faut tirer l'eau au moyen d'un seau ou d'une pompe. Si le niveau N N' est au-dessus du niveau du sol en P, on est obligé de construire une colonne creuse pour permettre à l'eau de s'élever jusqu'en $n\,n'$ (fig. 118). Sans quoi l'eau jaillirait et se répandrait à la surface du sol. Dans ce second cas, le puits prend le nom de *puits artésien*.

Jets d'eau. — Si on fait communiquer avec un bassin un tube effilé disposé verticalement et dont l'orifice est situé plus bas que le niveau du bassin, l'eau jaillit par le tube effilé et tend à s'élever au même niveau que l'eau du bassin.

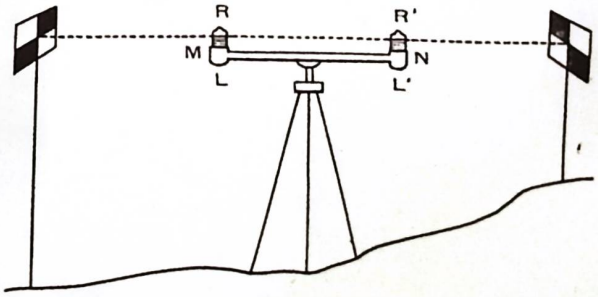


Fig. 119

Le frottement de la résistance de l'air l'empêche d'atteindre ce niveau. Le jet s'élève plus ou moins haut suivant la forme et la dimension des orifices.

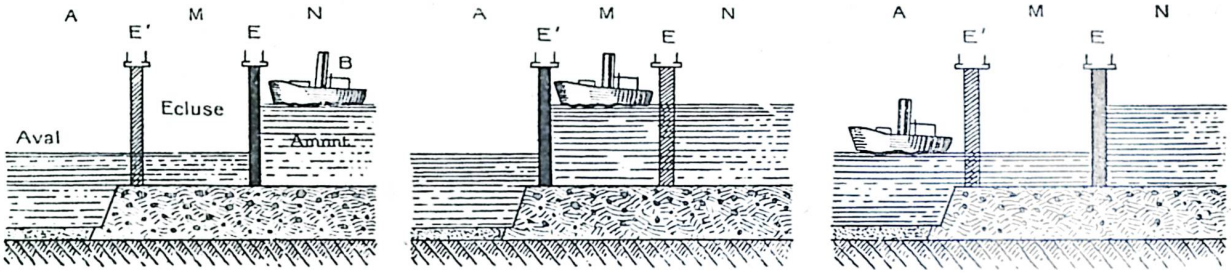
Niveau d'eau. — Le niveau d'eau est un instrument employé par les arpenteurs pour déterminer une ligne de visée horizontale ; il se compose essentiellement d'un long tube recourbé à angle droit à ses extrémités (fig. 119). On dispose sur un trépied, à peu près horizontalement, la partie médiane L L' du tube, et, à peu près verticalement, les deux parties recourbées R et R'.

R et R' constituent des vases communicants. Si on verse de l'eau dans le tube, le niveau doit être le même en R et en R'. Le niveau de l'eau se trouve par exemple dans le plan horizontal M N. Un observateur qui place l'œil à la hauteur de N et qui regarde au ras du niveau M, vise les points situés sur l'horizontale M N.

Ecluses. — L'établissement d'une écluse a pour but de faire passer les bateaux dans les bassins dont les niveaux sont différents (fig. 120).

Distribution de l'eau dans les villes. — L'eau est amenée à un point culminant de la ville dans un grand réservoir situé plus haut que l'étage supérieur des maisons, et envoyée dans les maisons par des canalisations souterraines (fig. 121).

Fig. 120



Le bateau B arrive à la porte de l'écluse

Les vannes de la porte E ont été ouvertes. Le niveau de l'eau est le même en M et en N. Les portes de l'écluse sont ouvertes et le bateau peut entrer dans l'écluse.

Les portes E sont alors fermées. On ouvre les vannes de E'. Le niveau M devient le même que celui de A. On ouvre les portes de E' et le bateau passe de M en A et peut continuer sa route.

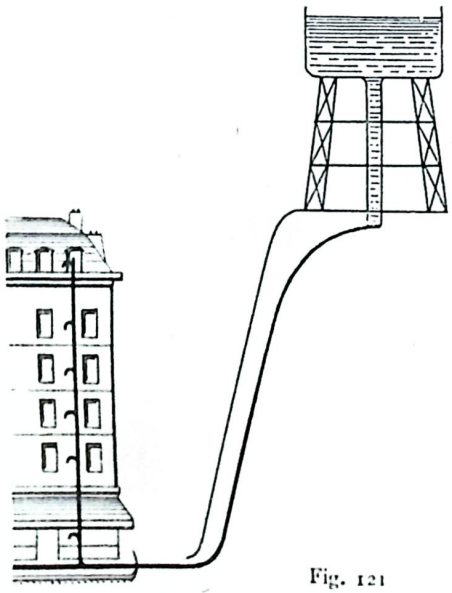


Fig. 121

Problèmes

1. Un prisme hexagonal régulier, en fer a 8 centimètres de hauteur ; le rayon de base est 2 centimètres. La densité du fer est 7,8. On demande la pression exercée par ce prisme sur un plan horizontal : 1° Quand il est placé sur une de ses bases ; 2° Quand il est couché sur une de ses faces latérales. Donner le résultat en grammes poids par cm² et en pièzes.

Réponses : 62,4 gp. / 6,12 pz. ; 40,5 gp. / 39,7 pz.

2. — Un homme pèse 80 kg. ; il se déplace sur la neige Quelle est la pression qu'il exerce : 1° lorsqu'il repose sur un pied, la surface de la semelle de sa chaussure étant 200 cm², lorsque son pied est muni d'un ski ayant la forme d'un rectangle de 2 m. 50 de long et de 80 mm. de large.

Réponses : 400 g — 40 g.

3. — La membrane du baroscope a un diamètre de 6 cm., quelle charge faut-il placer sur cette membrane pour que la dénivellation du manomètre soit la même que lorsqu'elle est plongée dans l'eau salée de densité 1,18, son centre étant à une profondeur de 20 cm.

Solution

La charge qu'il est nécessaire de placer sur la membrane du baroscope est égale au poids d'une colonne cylindrique d'eau salée, de densité 1,18, dont la base est un cercle de 6 cm. de diamètre, et dont la hauteur est 20 centimètres.

Soit :

$$\pi \times 3^2 \times 20 \times 1{,}18 = 667{,}5 \text{ grammes poids.}$$

Réponse : 667,5 grammes poids.

4. — A quelle profondeur faut-il descendre dans la mer pour que la pression soit 15 kgp. par cm². ?

La densité de l'eau de mer est 1,025 (Ne pas tenir compte de la pression atmosphérique).

Solution

La pression en un point d'un liquide est mesurée par hp, h étant la distance verticale du point à la surface libre, et p le poids spécifique du liquide. La profondeur à laquelle il faut descendre pour que la pression soit 15 kgp. par cm² est donc de

$$\frac{15.000}{1.025} = 14.634 \text{ cm.} = 146{,}34 \text{ m}$$

Réponse : 146,34 m.

5. — La paroi d'un sous-marin présente un orifice circulaire de 60 cm. de diamètre. Avec quelle force faudrait-il pousser la porte qui le ferme lorsque le centre de cette porte est à 30 m. au-dessous du niveau de la mer ? Densité de l'eau de mer : 1.025.

Solution

La force qui maintient fermée la porte de l'orifice du sous-marin est égale au poids d'une colonne cylindrique d'eau de mer, dont la base est un cercle de 60 cm. de diamètre et dont la hauteur est 30 mètres. C'est cette force qu'il faudrait vaincre pour ouvrir la porte ; l'effort à faire est donc de

$$\pi \times 30^2 \times 30{,}00 \times 1{,}025 = 8697857 \text{ gr. p.}$$
$$= 8.697 \text{ kg. p. environ.}$$

Réponse : 8.697 kg. p. environ.

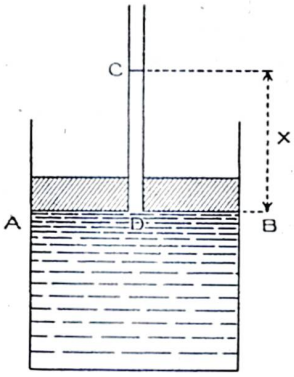


Fig. 122 a

6. — Deux vases communicants contiennent l'un de l'eau, l'autre de la benzine; la hauteur de l'eau au-dessus du plan de séparation est 17,6 cm, celle de la benzine 20 cm. Quelle est la densité de la benzine ?

Solution

Les hauteurs de l'eau et de la benzine au-dessus de leur plan de séparation sont en raison inverse de leurs densités, la densité de la benzine est donc

$$\frac{1 \times 17{,}6}{20} = 0{,}88$$

Réponse : 0,88.

7. — Un piston de 20 cm. de rayon, mobile sans frottement dans un corps de pompe vertical de même diamètre repose sur le sommet d'une colonne d'eau qui remplit le corps de pompe. Ce piston, dont le poids est de 125,4 kg, est traversé par un tube cylindrique ouvert aux deux bouts, vertical et de 20 mm. de diamètre (fig. 122 a). Calculer la hauteur à laquelle l'eau s'élève dans le tube au-dessus de la base inférieure du piston.

Solution

La pression du piston s'exerce sur une surface de

$$S = \pi \times \overline{20}^2 - \pi \times \overline{1}^2 = \pi \times 399^{cm}$$

La pression est donc :

$$P = \frac{125{,}4}{\pi \times 399} \text{ kg. par cm}^2 \text{ ou } \frac{125.400}{\pi \times 399} \text{ gr/cm}^2$$

La pression exercée par la colonne d'eau C D est :

$$P' = x \text{ grammes par cm}^2$$

mais $P = P'$, d'où :

$$X = \frac{125.400}{\pi \times 399} = 100^{cm} (1^m)$$

CHAPITRE II

PRESSION ET POUSSÉES SUR LES PAROIS DES VASES

Pression sur les parois des vases. — Pour mettre en évidence la pression qu'un liquide exerce sur les parois du vase qui le renferme et pour montrer en même temps l'influence de la hauteur du niveau, Pascal a fait la curieuse expérience du *crève-tonneau* (f. 122 b).

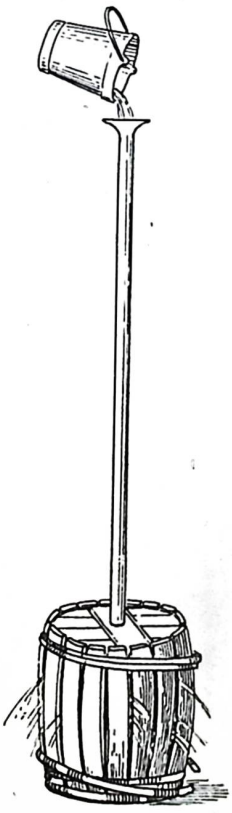


Fig. 122 b

Dans le fond d'un tonneau solide était dressé verticalement un tube d'un faible diamètre communiquant avec le tonneau. La quantité de liquide que pouvait contenir ce tube était insignifiante par rapport à celle que contenait le tonneau. Celui-ci étant plein d'eau, on versa de l'eau dans le tube ; quand le niveau eut atteint une certaine hauteur au-dessus du fond du tonneau, celui-ci éclata. En effet, la pression étant proportionnelle à la hauteur de la colonne liquide, et non à la quantité de liquide, le tonneau se trouva bientôt soumis à des pressions énormes.

Poussées sur le fond des vases. — *La poussée exercée sur le fond d'un vase est égale au poids d'une colonne prismatique du liquide ayant pour base la surface du fond et pour hauteur la distance verticale du fond à la surface libre du liquide.*

Elle est indépendante de la forme et du vase.

Cela résulte de la loi des pressions à l'intérieur d'un liquide. On peut vérifier expérimentalement cette conséquence, de la manière suivante :

On prend des vases de formes très différentes (fig. 123, 124 et 125), mais dont le fond a exactement les mêmes dimensions. Ce fond est d'ailleurs mobile ; il est constitué par un opercule assujetti à l'une des extrémités d'un fléau de balance Q N. Ainsi les trois vases sont, en réalité, ouverts par le fond. On peut les visser par la partie BC sur un support contre lequel vient s'appuyer exactement l'opercule. Pour maintenir ce dernier appliqué contre le vase, on pose, sur le plateau S suspendu à l'autre bout du fléau, un poids P. Si on verse de l'eau dans le vase, au moyen de la pompe M N, il arrive un moment où le fond se détache, le poids P ne suffisant plus à équilibrer la pression qui s'exerce sur l'opercule. Or, quel que soit le vase employé, on constate qu'il faut toujours verser de l'eau jusqu'au *même* niveau pour produire ce résultat, et la

Fig. 123

Fig. 124

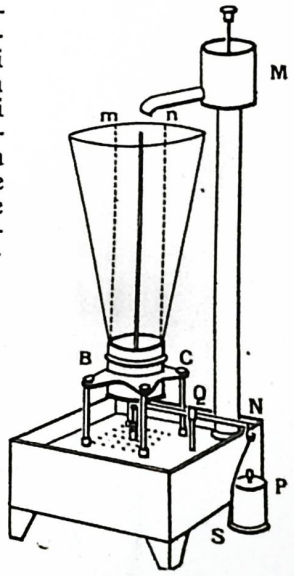


Fig. 125

hauteur est celle d'un cylindre d'eau qui aurait pour base le fond commun des différents vases et dont le poids serait justement égal à P.

Poussées sur les parois latérales d'un vase. — En un point quelconque de la surface intérieure d'un vase la pression s'exerce normalement à cette surface (c'est-à-dire perpendiculairement à la portion de surface considérée).

Sur une ouverture latérale circulaire de surface *s* pratiquée dans la paroi latérale d'un vase (fig. 126) on applique le baroscope et on constate que la poussée est égale à *s n p*.

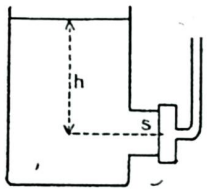


Fig. 126

La poussée sur une portion de paroi latérale est égale au poids d'une colonne prismatique de liquide ayant pour base la surface considérée et pour hauteur la distance verticale du centre de cette surface à la surface libre du liquide.

Applications. — Utilité du cerclage des cuves et tonneaux. Résistance à donner aux portes ou écluses qui doivent être munies de vannes.

TRANSMISSION DES PRESSIONS DANS LES LIQUIDES

Principe de Pascal. — Les lois de l'hydrostatique énoncées précédemment, nous ont appris que la pression entre deux points d'un liquide en équilibre était mesurée par *h p*, si donc on augmente cette pression entre deux points, pour que l'équilibre subsiste, il faut qu'elle augmente de la même quantité entre tous les autres points.

Expérience. — A l'aide du petit appareil (fig. 127), qui se compose d'un espace sphérique rempli d'eau, en communication avec 4 tubes de même diamètre, fermés par des pistons A, B, C, D. On constate que, si l'on exerce sur l'un, piston A par exemple, une poussée L, les 3 autres pistons tendent à se déplacer dans le sens indiqué par les flèches et qu'il faut, pour les retenir, leur opposer à chacun une force égale à F.

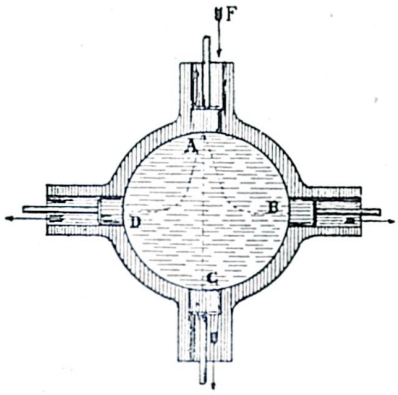


Fig. 127

Pascal a donc énoncé le principe suivant : *Les liquides transmettent intégralement les pressions qu'ils reçoivent.*

Mais comme nous allons le vérifier, *ils modifient les poussées.*

Soit un récipient A B C D B' A' I H (fig. 128) exactement rempli d'un fluide et dont les faces A B, A' B', d'ailleurs hermétiquement closes, sont mobiles, comme par exemple des pistons. La surface A' B' est à la surface A B dans un rapport connu, $\frac{1}{10}$ par exemple.

Si le principe est exact, quand on exerce une pression donnée P sur A' B', cette pression doit se transmettre intégralement à toute la paroi de l'enveloppe et, en particulier, à la surface mobile A' B'. Comme cette dernière surface vaut dix fois la surface A' B', si la pression est la même sur les deux pistons, on doit avoir, F' étant la force qui s'exerce sur le piston A' B', et F la force qu'il faut exercer sur A B pour neutraliser les effets de la pression :

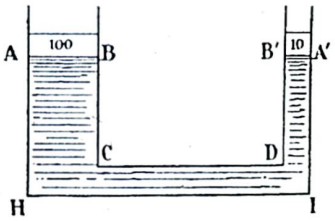


Fig. 128

$$P = \frac{F'}{A'\ B'} = \frac{F}{A\,B}$$

ou $$P = \frac{F'}{1} = \frac{F}{10}$$

d'où $$F = 10\ F'$$

On constate, en effet, par l'expérience, que pour équilibrer une certaine force appliquée en A' B', le poids d'un kilogramme par exemple, il faut appliquer sur A B une force dix fois supérieure, 10 kilogrammes dans le cas présent.

Application. — Presse hydraulique. — Ce principe est appliqué dans la *presse hydraulique.*

La presse hydraulique (fig. 129) se compose essentiellement d'un corps de pompe CC, dans lequel pénètre un piston PP. Pour éviter les frottements considérables qui résulteraient de l'emploi d'un piston ordinaire, on emploie un piston dit *plongeur.* Il a la forme d'un cylindre creux, pour que son poids soit moins élevé. Il passe à frottement doux dans le bâti de fonte CC. Une

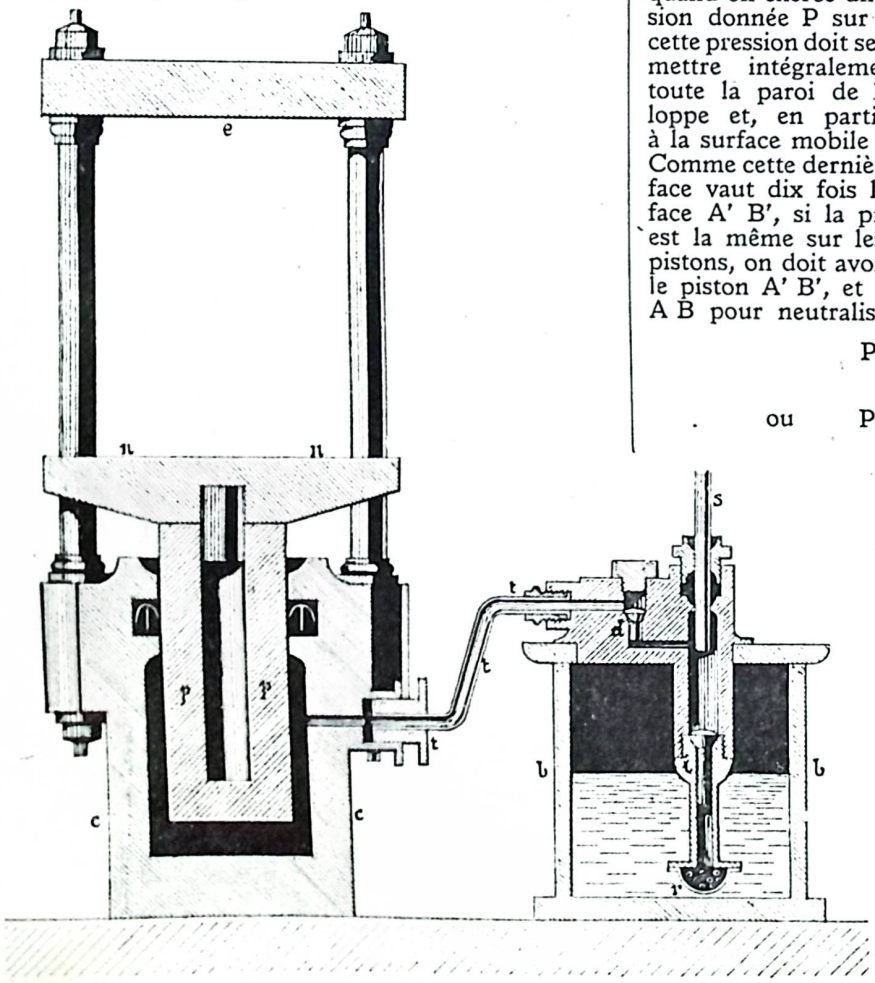


Fig. 129

gorge circulaire est ménagée dans ce bâti autour du piston et, dans cette gorge, se trouve une bande de cuir *embouti* (fig. 130), c'est-à-dire recourbé en dedans comme le montre la figure. Ce cuir embouti joue le rôle de soupape et empêche l'eau de fuir entre le piston et le corps de pompe ; au fur et à mesure que la pression augmente, il s'applique plus fortement contre les parois métalliques et réalise une occlusion parfaite.

Fig. 130

Le piston plongeur est surmonté d'une plate-forme *n n* qui peut glisser sur des montants et à laquelle est opposée une plaque *e* très résistante. C'est entre les deux plateaux *n n* et *e* qu'on place les objets qu'on veut mettre sous presse.

Pour faire monter le piston PP, on introduit de l'eau dans le corps de pompe par le conduit *t t*, au moyen d'une pompe. Cette dernière est, en général, une pompe aspirante et foulante (nous en donnerons plus loin le principe). Le petit piston S aspire l'eau du réservoir *b b*; pendant ce dernier temps la soupape *d* est fermée et empêche l'eau, contenue dans le grand corps de pompe PP, de refluer dans le petit. Par contre, la soupape *i* est ouverte et permet à l'eau du réservoir de remplir le petit corps de pompe. Pendant le second temps le piston s'abaisse; la soupape *i* se referme et la soupape *d* s'ouvre ; l'eau contenue dans le petit corps de pompe est chassée dans le grand.

Si la surface du petit piston S est cent fois moindre que celle du grand piston PP, on voit qu'un effort de 5 kilogrammes par exemple, en S, se traduit par un effort de 500 kilogrammes en *n n*. Il est vrai qu'à chaque coup de pompe, le piston S parcourt cent fois plus de chemin que le piston PP.

Usages. — La presse hydraulique est employée pour comprimer les matières encombrantes (laine, coton, foin, etc.), extraire les huiles ou graines oléagineuses ; soulever des poids considérables, etc.

Remarque. — Les petits pistons de ces puissantes machines sont industriellement actionnés par des moteurs électriques, ce qui leur donne une puissance bien plus grande encore.

APPLICATIONS DES LOIS DE L'HYDROSTATIQUE ET DU PRINCIPE DE PASCAL

Accumulateur hydraulique. — Il se compose essentiellement d'un corps de pompe vertical, long et étroit C (fig. 131) ; le piston qui se meut dans ce corps de pompe est relié par des tiges verticales et horizontales E F G H I J à un manchon cylindrique P entourant le corps de pompe. Ce manchon est lourd et peut être en outre surchargé au moyen de rondelles de plomb. A sa partie inférieure le corps de pompe communique par un tuyau A avec des pompes d'alimentation et par un tuyau B avec les presses ou les ascenseurs dans lesquels on veut injecter de l'eau sous pression.

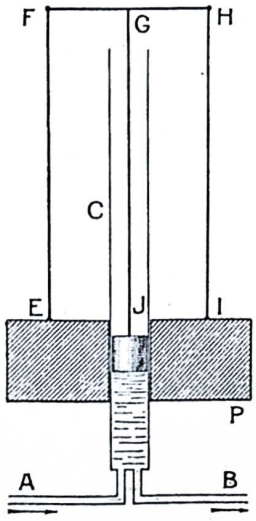


Fig. 131

Soient *p* le poids du piston intérieur et S sa section, la pression de l'eau dans le corps de pompe est de :

$$\frac{P + p}{S}$$

S étant petit et P aussi grand que l'on veut, on peut donc obtenir ainsi des pressions considérables.

Ascenseur hydraulique. — Il existe de nombreux types d'ascenseurs hydrauliques ; un des plus courants est le suivant. La cage A de l'ascenseur porte à sa partie inférieure un cylindre plein P, formant piston plongeur dans un cylindre B rempli d'eau et portant deux robinets D et E.

Le tout est équilibré par un poids M au moyen d'une poulie R (fig. 132).

Lorsqu'on fait communiquer D avec un accumulateur hydraulique, les pressions qui s'exercent sur le piston plongeur le font monter ; au contraire, si E communique avec l'extérieur, la pression se rétablit et C reprend la position primitive.

On obtient ainsi par le jeu des robinets D et E le mouvement de va-et-vient de la cage A.

Les deux robinets D et E sont remplacés par un robinet à deux voies (fig. 133) qu'on manœuvre de la cabine.

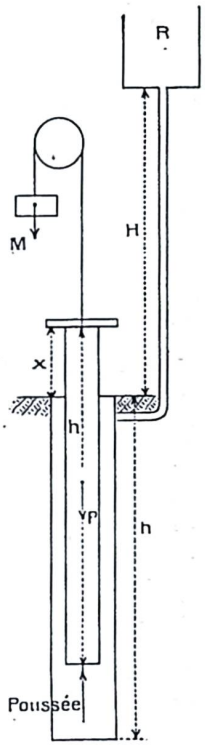


Fig. 132

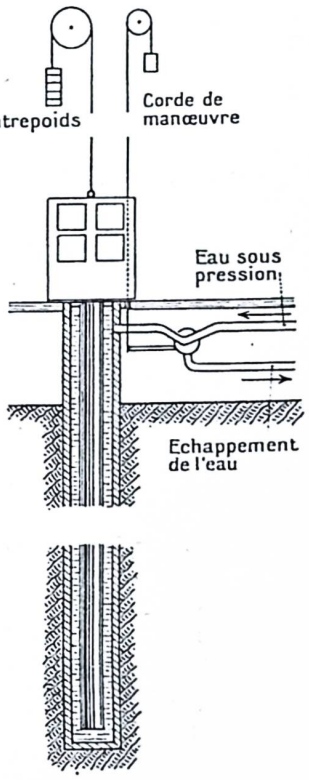


Fig. 133

Problèmes

1. — Calculer la poussée exercée sur une porte d'écluse de 8 m. de long sur 4 m de haut, sachant que la hauteur de l'eau dans le canal est 1,50 m.

Solution

Section de l'eau

$$1\ m^2 \times 8 \times 3 = 24\ m^2 = 240.000\ cm^2$$

Le centre de cette section est 1,50 m.

Poussée de l'eau :

$$1\ kg. \times 240.000 \times 1{,}5 = 360.000\ kg.$$

en sthènes :

$$\frac{360.000}{102} = 3529{,}4117\ st.$$

2. — Un vase de forme parallélépipédique de 0,20 m. × 0,20 m. de base, et de 0,75 m. de hauteur, est entièrement rempli d'eau. 1° Calculer la poussée exercée sur la base ; sur une face latérale. 2° Quelle sera la poussée exercée sur une ouverture rectangulaire de 3 cm. × 4 cm. pratiquée sur une face latérale au $\frac{1}{3}$ de la hauteur à partir de la base.

Solution

1° La poussée exercée sur la base est égale au poids de l'eau contenue dans le vase :

$$1 \text{ kg.} \times 2 \text{ dm.} \times 2 \times 7{,}5 = 30 \text{ kg.}$$

2° La poussée exercée sur une face latérale s'applique à son centre ; elle est égale à :

$$1 \text{ kg.} \times 2 \text{ dm.} \times 7{,}5 \times \frac{7{,}5}{2} = 56{,}25 \text{ kg.}$$

3° La poussée s'exerce au centre de l'ouverture

$$1 \text{ kg.} \times 0{,}4 \text{ dm.} \times 0{,}3 \times \frac{(75 \times 2)}{3} = 6 \text{ kg.}$$

3. — Le piston d'un ascenseur a un cylindre de 24 cm. de diamètre. La longueur de sa course est de 20 m. La différence entre le niveau de l'eau du réservoir et de la base du piston lorsque celui-ci est au bas de sa course est 40 m. Calculez la force qui pousse l'ascenseur vers le haut : 1° Lorsque l'ascenseur est au bas de sa course ; 2° Lorsqu'il est monté de 8 m., de 16 m. Donnez le résultat en sthènes. Quel est en tonnes la masse d'eau consommée à chaque course ?

Solution

La force qui pousse l'ascenseur vers le haut lorsque celui-ci est au bas de sa course est égal au poids de la colonne de liquide de 40 mètres ou :

$$12 \times 12 \times 3{,}1416 \times 4.000 = 1809561{,}600 \text{ ou } 1809{,}56 \text{ kg.}$$

Nombre de sthènes :

$$\frac{1809{,}56616}{102} = 17{,}74 \text{ st.}$$

Lorsque l'ascenseur est à 8 mètres la force est :

$$12 \times 12 \times 3{,}1416 \times 3.200 = 1447{,}64928$$

ou en sthènes :

$$\frac{1447{,}64928}{102} = 14{,}28 \text{ st.}$$

Lorsque l'ascenseur est à 16 mètres la force est :

$$12 \times 12 \times 3{,}1416 \times 2.400 = 1085{,}73696$$

ou en sthènes :

$$\frac{1085{,}73696}{102} = 10{,}64 \text{ st.}$$

Masse d'eau consommée à chaque course :

$$12 \times 12 \times 3{,}1416 \times 2.000 = 0{,}90478 \text{ t.}$$

Réponses : 17,74 st., 14,28 st., 10,64 st., 0,90478 t.

4. — Les deux pistons d'une presse hydraulique ont pour sections $S = 2 \text{ dm}^2$ et $s = 5 \text{ cm}^2$; le levier du second genre qui sert à manœuvrer la pompe a pour bras des longueurs 10 cm. et 1 mètre ; on exerce à l'extrémité du levier une force de 1 kg. (fig. 134). On demande :

1° Quel poids pourra soulever la presse ?

2° Quel est le déplacement du grand piston quand le petit s'abaisse de 10 cm. ?

3° Quelle est la relation entre le travail moteur et le travail résistant ?

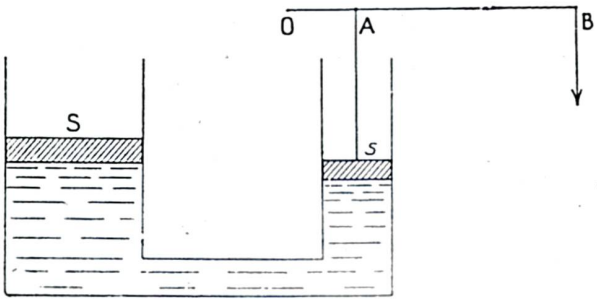


Fig. 134

Solution

1° Nous avons pour le levier :

$$OA \times R = OB \times P$$

P étant la puissance et R la résistance ; or comme $P = 1$ kg :

$$R = \frac{OB}{AB} = \frac{100}{10} = 10 \text{ kilogrammes}$$

Ces 10 kilogrammes font pression sur la surface s ; cette pression est de :

$$p = \frac{10}{s} = \frac{10}{5} = 2 \text{ kilogrammes par cm}^2.$$

Mais :

$$\frac{X}{S} = \frac{R}{s} \text{ d'où } X = S\,\frac{R}{s} = 200 \times 2 = 400 \text{ kg.}$$

La presse peut donc soulever un poids de 400 kilogrammes.

2° Lorsque le petit piston s'abaisse de 10 centimètres il refoule un volume d'eau de :

$$10 \times 2 = 10 \times 5 = 50^{\text{cm}}$$

Ce volume d'eau passe dans l'autre corps de pompe et sa hauteur change :

$$50 = S \times h$$

$$h = \frac{50}{200} = 0{,}25 \text{ cm.}$$

Le grand piston s'élèvera donc de 0,25. cm.

3° Le travail moteur est le travail qui fournira la force de 1 kilogramme appliquée en B, extrémité du levier et le travail résistant est celui que fournit le grand piston en se déplaçant.

Lorsque *s* s'abaisse de 10 centimètres, B s'abaisse de

$$10 \times \frac{100}{10} = 100 \text{ cm.}$$

d'où le travail :

$$A = 1 \text{ kg} \times 100 \text{ cm.} = 1 \text{ kilogrammètre}$$

et le travail résistant est :

$$A' = 400 \text{ kg.} \times 0{,}25 \text{ cm.} = 1 \text{ kgm.}$$

donc : $A = A'$

CHAPITRE III

PRINCIPE D'ARCHIMÈDE

Principe d'Archimède. — Nous avons tous observé qu'un corps pesant paraît beaucoup plus léger dans l'eau que dans l'air.

300 ans avant J. C. Archimède ayant constaté qu'il soulevait sans peine sa jambe dans sa baignoire, fut conduit à énoncer le principe suivant :

Tout corps plongé dans un liquide reçoit de la part de celui-ci une poussée verticale dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de celui-ci.

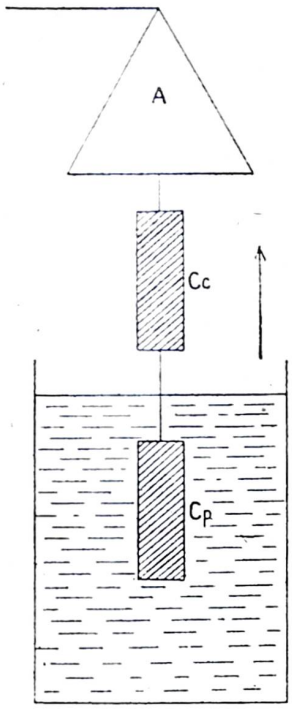


Fig. 135

On peut le vérifier expérimentalement au moyen de l'appareil suivant :

On dispose sous le plateau A d'une balance deux cylindres comme sur la figure 135; le cylindre inférieur est plein et peut être contenu exactement dans le cylindre supérieur, creux. On tare afin qu'il y ait équilibre.

On plonge ensuite le cylindre dans un liquide, l'équilibre est rompu dans le sens de la flèche et pour le rétablir, il faut remplir le cylindre creux avec le liquide.

On a donc pu détruire l'effet de la poussée par l'addition d'un poids équivalent au poids du fluide déplacé.

Réciproque du principe d'Archimède. — *Tout corps plongé dans un liquide exerce sur ce dernier une poussée verticale dirigée de haut en bas et égale au poids du liquide déplacé.*

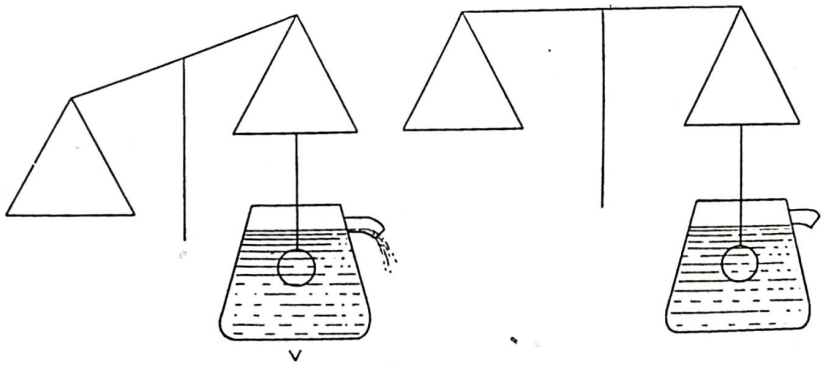


Fig. 137

Sur le plateau de la balance hydrostatique on suspend un corps A (fig. 136) et on tare, puis on plonge le corps dans un vase à trop-plein V, l'équilibre est rompu jusqu'à ce que le corps ait fait écouler un volume d'eau égal au sien (fig. 137).

Conséquence du principe d'Archimède. — Principe des corps flottants. — Il résulte du principe d'Archimède que tout corps plongé dans un liquide est soumis à deux forces (fig. 138).

1° Son poids W appliqué à son centre de gravité G

2° La poussée P exercée par le liquide appliquée au centre de gravité du liquide déplacé.

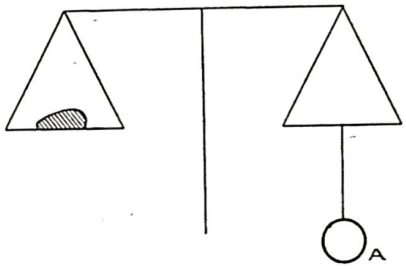


Fig. 136

Trois cas peuvent se présenter :

a) W = P ; la poussée du liquide est égale au poids du corps ; celui-ci reste en équilibre au sein du liquide et si on lui imprime une impulsion, il prend un mouvement uniforme.

b) W > P le corps tombe sous l'action de la force F = W — P.

c) W < P ; le corps s'élève verticalement sous l'action de la force F = P — W.

Mais il arrive à la surface du liquide et la dépasse ; la poussée va en diminuant et il arrive un moment où : P = W.

A ce moment, on dit que le corps flotte.

Soit un corps flottant en équilibre ; les deux forces P et W sont dans le prolongement l'une de l'autre, suivant la droite AB.

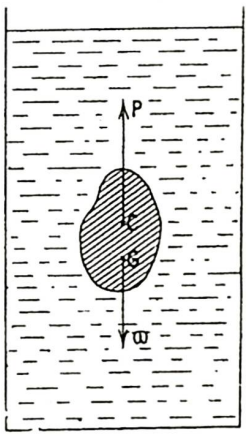


Fig. 138

Ecartons le corps de sa position d'équilibre (fig. 139); P et W sont invariables mais le point C se déplace et vient en C'. On appelle *métacentre* le point de rencontre de la verticale du point C' avec la droite A'B'.

Nous voyons que pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, il faut que le métacentre soit au-dessus du centre de gravité (fig. 140).

Cette condition explique pourquoi un navire doit être constamment lesté, le lest étant un poids suffisamment lourd et disposé le long de la quille, afin que le centre de gravité demeure le plus bas possible.

Applications — Navires. — Ce sont des corps de grandes dimensions qui déplacent un volume d'eau dont le poids est supérieur à leur propre poids.

Principe des sous-marins. — Les sous-marins sont des navires entièrement fermés ; ils possèdent à leur partie inférieure deux réservoirs communiquant avec l'extérieur par des ouvertures C et D (fig. 141).

L'eau entre par ces ouvertures dans les réservoirs A et B, dans ce cas le sous-marin plonge ; pour le faire

remonter en surface, il suffit de fermer C et D et de chasser l'eau au moyen de pompes.

Ludion. — Le ludion est une petite figurine creuse portant à la base une partie effilée ouverte par un orifice étroit. Cette figurine est lestée de manière à ce qu'elle ait un poids très légèrement inférieur au poids de l'eau

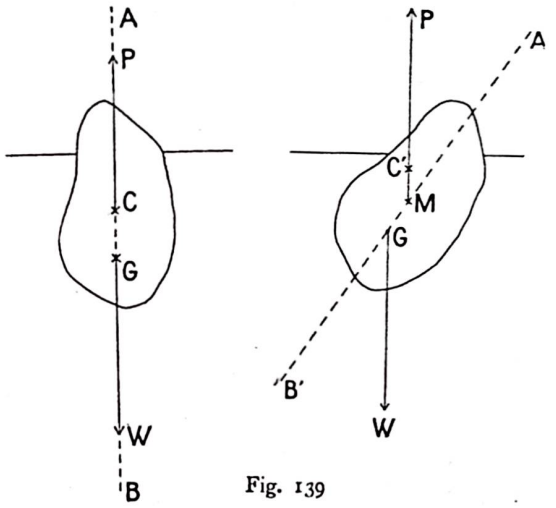


Fig. 139

qu'elle déplace. On le dispose dans un cylindre (fig. 142) rempli d'eau et une petite pompe permet d'augmenter la pression à l'intérieur de l'eau. En vertu du principe de Pascal, cette pression se transmet dans tout le liquide et en particulier à l'orifice du ludion ; un peu d'eau pénètre, son poids augmente, devient égal puis supérieur à la poussée.

Fig. 140

Un œuf dans l'eau pure tombe au fond du vase — Dans l'eau salée diluée il se tient en équilibre — Dans l'eau saturée de sel il surnage

Le ludion descend dans le cylindre ; pour le faire remonter, il suffit de rétablir la pression primitive.

DENSITÉS — ARÈOMÈTRES

Définitions. — On appelle *masse spécifique* ou *densité absolue* d'un corps le nombre qui mesure la masse de l'unité de volume de ce corps ; ce nombre dépend du système d'unités employées : exemple, la masse spécifique du mercure est :

$$\mu = 13{,}596 \text{ g. à } 0^\circ$$

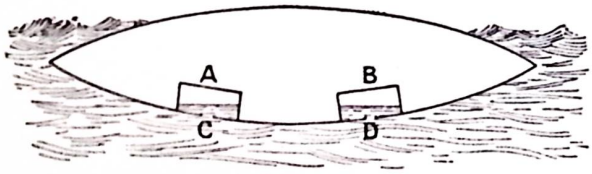


Fig. 141

On appelle *densité relative* d'un corps le rapport entre la masse d'un volume de ce corps et la masse d'un égal volume d'eau sous pression normale et à la température de 4 degrés.

Soit un volume V d'un corps de masse spécifique μ ; la masse de ce corps est par définition :

$$M = \mu V$$

d'autre part le même volume d'eau a pour masse :

$$M' = 1 \times V$$

La densité relative par rapport à l'eau est donc :

$$d = \frac{M}{M'} = \frac{\mu \times V}{1 \times V} = \mu$$

La densité relative d'un corps par rapport à l'eau s'exprime donc par le même nombre que sa densité absolue mesurée dans le système C.G.S.

Exemple : la densité du mercure par rapport à l'eau est $d = 13{,}596$.

Poids spécifique. — On appelle *poids spécifique absolu* d'un corps le poids de l'unité de volume de ce corps.

Nous avons donc : $\omega = \mu \times g$.

g étant l'accélération de la pesanteur.

Le poids spécifique absolu du mercure est donc dans le système C.G.S. à Paris :

$$\omega = 13{,}596 \times 981 = 13{,}337^{\text{dynes}},676$$

On appelle *poids spécifique relatif* le rapport entre le poids d'un corps et le poids du même volume d'eau à 4° sous pression normale ; il est indépendant du système d'unités employé et dans le système C. G. S. :

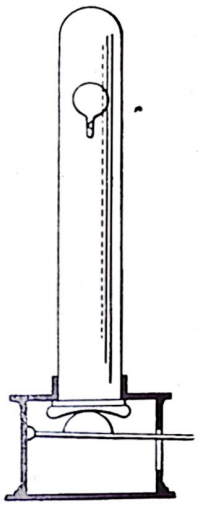


Fig. 142

$$\rho = \mu = d$$

en effet le poids d'un volume V du corps est :

$$P = \mu V g$$

le poids du même volume d'eau :

$$P' = 1 \times V \times g$$

d'où

$$\rho = \frac{P}{P'} = \frac{\mu V g}{1 \times V \times g} = \mu$$

Conséquences de ces définitions. — 1° Pour avoir le poids d'un objet, il faut multiplier son volume par son poids spécifique absolu :

$$P = V \times \omega$$

2° Pour mesurer une densité, il suffira de mesurer le poids d'un volume déterminé du corps, puis de mesurer le poids du même volume d'eau pure :

$$\rho = \mu = d \frac{P}{P'}$$

Mesure expérimentale de la densité d'un corps. — Une première méthode consiste à mesurer le volume directement, puis à peser le corps ; cette méthode ne peut être appliquée qu'à des corps de forme parfaitement géométrique (sphère, cube, etc.).

La méthode la plus précise est celle du flacon ; la méthode de la balance hydrostatique est plus rapide, mais aussi plus grossière.

Enfin, les aréomètres sont d'un emploi commode, mais leurs mesures sont peu précises.

Méthode du flacon. — *a) corps solides* : Pour mesurer la densité d'un corps solide (fig. 143), on dispose d'un petit flacon fermé par un bouchon de verre portant un tube étranglé sur lequel est marqué un trait de repère π (fig. 144).

1° On remplit ce flacon d'eau distillée à 0° jusqu'au trait de repère puis on le porte en compagnie du corps dont on veut connaître la densité sur le plateau d'une balance ; on équilibre avec de la tare qui restera constante dans les opérations suivantes ;

2° On remplace le corps par des masses marquées M_1; on a ainsi la masse du corps ;

3° On place le corps dans le flacon et on finit de le remplir à 0° avec de l'eau distillée jusqu'au trait x. On le porte sur le plateau de la balance et l'on rétablit l'équilibre au moyen de masses marquées M_2. En comparant les opérations 1° et 3°, on voit que M_2 représente la masse de l'eau déplacée par le corps. La densité de celui-ci est donc :

$$d = \frac{M_1}{M_2}$$

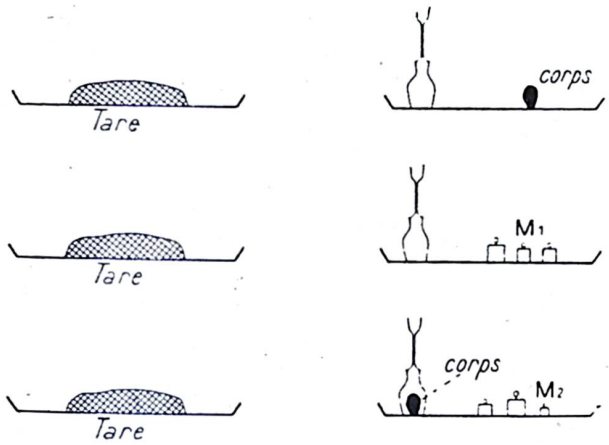


Fig. 143

b) liquides. — La méthode employée est analogue à la précédente ; le flacon est en une seule pièce et porte une partie étranglée avec un trait de repère. Lorsqu'on a affaire à un liquide volatil on bouche le flacon (fig. 145).

Fig. 144

1° On remplit le flacon avec le liquide et on le porte sur le plateau de la balance avec des masses marquées M_1 puis on équilibre avec de la tare ;

2° On vide le flacon et on le porte avec des masses marquées M_2 sur le plateau de la balance ; la tare demeure constante ;

3° Enfin on remplit le flacon d'eau distillée et on rétablit l'équilibre en lui ajoutant des masses M_3.

$M_2 - M_1$ représente la masse du liquide,

$M_3 - M_2$, celle de l'eau.

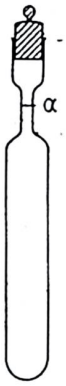


Fig. 145

Par conséquent :

$$d = \frac{M_2 - M_1}{M_3 - M_2}$$

Méthode de la balance hydrostatique. — Pour les corps solides on détermine le poids du corps par la double pesée, puis on le suspend sous un des plateaux de la balance, on le plonge dans l'eau et on détermine le poids du volume d'eau qu'il déplace.

Il faut donc encore trois opérations comme le montre la figure 146 ; la densité du corps est :

$$d = \frac{M_1}{M_2}$$

Pour les liquides, on suspend sous un des plateaux M de la balance une boule solide insoluble. On en fait la tare dans l'autre plateau. La balance étant en équilibre, on place sous le plateau M un vase rempli du liquide à étudier, de façon que la boule plonge entièrement dans le liquide ; pour rétablir l'équilibre, il faut placer sur M des masses marquées M_1 représentant la masse du liquide déplacé.

On recommence la même opération en remplaçant le liquide par de l'eau ; on a une masse M_2. masse de l'eau déplacée.

$$d = \frac{M_1}{M_2}$$

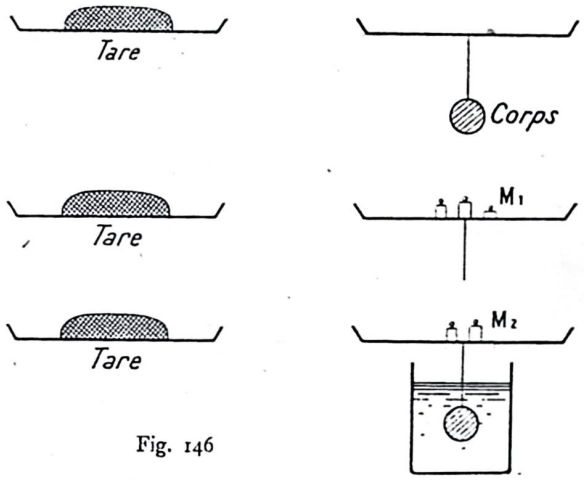


Fig. 146

Aréomètres. — Les aréomètres sont soit à volume constant soit à poids constant. Les premiers sont de moins en moins utilisés ; le plus connu est l'aréomètre de Nicholson ; il se compose d'une partie cylindrique A, terminée par deux cônes et constituant un flotteur (fig. 147). Cette partie cylindrique est surmontée d'une tige D qui supporte elle-même un plateau C. A la partie inférieure du flotteur se trouve un petite nacelle B, lestée par un poids qui maintient l'appareil dans une position verticale. L'aréomètre est plongé dans une éprouvette pleine d'eau.

On commence par poser le corps solide sur le plateau et on ajoute une tare convenable de manière à ce que l'appareil affleure à un trait marqué sur la tige D. On enlève le corps et on le remplace par des masses marquées dont la somme est M_1. On enlève les masses marquées et on met le corps dans la nacelle B. Pour contrebalancer la poussée qu'il subit alors de la part de l'eau, il faut poser sur le plateau des masses marquées M_2.

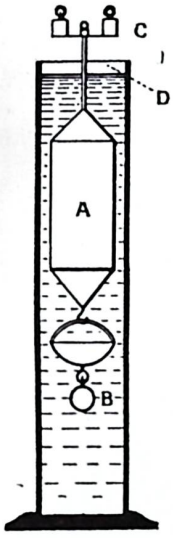


Fig. 147

La densité du corps est :

$$d = \frac{M_1}{M_2}$$

Les *aréomètres à poids constant* sont destinés à mesurer la densité des liquides par application du principe d'Archimède. Ils se composent essentiellement d'un flotteur de verre creux lesté à sa partie inférieure par de petits grains de plomb ou du mercure. Le flotteur est surmonté d'un tube de verre cylindrique qui se tient verticalement quand l'appareil est plongé dans un liquide (fig. 148 et 149).

La graduation varie suivant les différents modèles.

Le *pèse-acides Baumé* (fig. 148), est gradué empiriquement par comparaison : on le plonge dans l'eau pure à la température de 12° 5 et on règle le lest de manière que l'appareil s'enfonce à peu près jusqu'au sommet du tube. On marque 0 au point d'affleurement.

On prépare ensuite une solution de 15 parties de sel marin dans 85 parties d'eau. On y plonge l'appareil. La solution étant plus dense que l'eau pure, la tige de l'aréomètre émerge davantage. Au nouveau point d'affleurement, on marque la division 15 et on divise l'intervalle 0-15 en 15 parties égales ; on continue la graduation jusqu'au bas de la tige.

Le *pèse-esprits Baumé* est destiné à mesurer la densité de liquides moins denses que l'eau (alcools, liqueurs, etc.) ; pour le graduer, on le plonge dans une solution de 10 parties de sel marin dans 90 parties d'eau ; on règle le lest de manière que le tube soit presque entièrement émergé. On marque 0 au point d'affleurement. On plonge ensuite l'appareil dans l'eau pure à 12° 5 et on marque 10 au point d'affleurement. On partage l'intervalle 0-10 en dix parties égales et on continue la graduation jusqu'en haut de la tige.

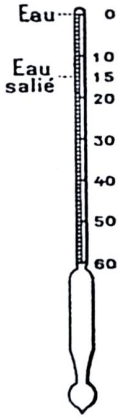


Fig. 148

Les aréomètres Baumé sont gradués arbitrairement et la graduation n n'indique pas directement la densité du liquide. On appelle *module* de l'aréomètre la formule qui permet de passer du degré Baumé n à la densité D du liquide.

Pour le pèse-acides on a :

$$D = \frac{144{,}32}{144{,}32 - n}$$

Pour le pèse-esprits :

$$D = \frac{144{,}32}{134{,}32 + n}$$

On construit des *densimètres* gradués de façon plus logique par immersions successives dans des liquides de densités connues et, chaque fois, on indique la densité en face du point d'affleurement correspondant ; cette graduation n'est pas en parties d'égale longueur.

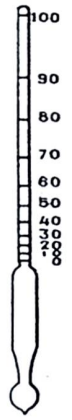


Fig. 149

L'*alcoomètre centésimal de Gay-Lussac* (fig. 149) est destiné à donner la richesse en alcool d'un mélange d'alcool et d'eau. Il est gradué expérimentalement par immersions successives dans des mélanges d'alcool et d'eau de composition connue. On plonge d'abord l'appareil dans de l'alcool absolu à la température de 15° et on règle le lest de manière que l'appareil s'enfonce jusque vers le sommet de la tige ; on marque 100 au point d'affleurement. Puis on plonge l'appareil dans de l'eau pure à 15° et on marque 0 au point d'affleurement. On prépare ensuite un mélange en ajoutant à 5 cm³ d'alcool absolu assez d'eau pure pour que le volume total soit de 100 cm³. Il faut ajouter plus de 95 cm³ d'eau, car il y a contraction. On fait flotter l'aréomètre dans ce mélange et on marque 5. On détermine de façon analogue les points 10, 15, 20, etc... Chaque intervalle est divisé en 5 parties égales ; les intervalles vont en augmentant vers le sommet de la tige.

Comme la graduation a été faite à 15° on adjoint à l'alcoomètre une table de corrections pour les autres températures.

Il existe enfin d'autres aréomètres à usage bien défini : pèse-urines, pèse-laits, etc... Seule, la graduation varie.

Densités par rapport à l'eau de quelques corps importants :

Platine fondu	20,86
Or fondu	19,25
Plomb fondu	11,35
Argent	10,47
Bismuth	9,82
Cuivre fondu	8,85
Cuivre laminé	8,95
Maillechort	8,43
Laiton	8,39
Nickel	8,28
Acier	7,82
Fer	7,79
Fonte de fer	7,21
Etain	7,29
Zinc	7,00
Antimoine	6,71
Spath	4,43
Diamant	3,25
Flint-Glass	3,78 à 3,20
Aluminium	2,57
Verre vert	2,60
Verre à vitres	2,37
Marbre	2,84
Emeraude	2,77
Cristal de roche	2,66
Porcelaine	2,49 à 2,14
Soufre natif	2,03
Ivoire	1,92
Graphite	1,8 à 2,40
Phosphore	1,77
Magnésium	1,74
Ambre	1,08
Anthracite	1,80
Houille compacte	1,33
Ebène	1,33
Chêne d'Angleterre	0,97 à 1,17
Acajou d'Espagne	1,06
Buis de France	1,03
Cire Blanche	0,97
Sodium	0,97
Potassium	0,86
Hêtre	0,85
Frêne	0,84
Erable	0,75
Cerisier	0,71
Noyer	0,68
Pitchpin	0,66
Orme	0,60
Cèdre	0,59
Saule	0,58
Mélèze	0,54
Peuplier	0,38
Liège	0,24

Liquides à 0° Centigrade

Mercure	13,596
Acide sulfurique	1,848
Acide nitrique	1,500
Eau régale	1,284
Acide chlorhydrique	1,218
Sang humain	1,045
Bière ordinaire	1,035
Lait	1,030
Eau de mer	1,028
Vinaigre	1,026
Goudron	1,015
Eau distillée, à 4° Centigr.	1,000
Huile de lin	0,940
Huile d'olive	0,930
Ether chlorhydrique	0,874
Essence de térébenthine	0,870
Eau-de-vie	0,837
Esprit de bois	0,800
Alcool absolu	0,796
Ether sulfurique	0,720

Problèmes

1. — Une règle quadrangulaire en bois de densité $\frac{2}{3}$ a une section de 1,50 cm² et une hauteur de 32 cm. Pour la faire flotter verticalement dans l'eau pure, 30 cm. seulement de sa hauteur étant sous l'eau, on propose de suspendre une boule de plomb à la partie inférieure. Quel devra être le volume de cette boule ? Densité du plomb = 11.

Réponse : 1,300 cm³.

2. — Un cylindre de bois à base circulaire de densité 0,6 se tient verticalement dans un liquide de densité 1,50. On demande la hauteur de la partie immergée. On

fixe ensuite à la partie inférieure de ce cylindre un cylindre de fer de même base. Quelle hauteur faut-il donner à ce dernier pour que le cylindre total se tienne en équilibre lorsqu'il est complètement plongé dans le liquide ? Densité du fer 7,8. Hauteur du cylindre de bois 0,21 m., diamètre du cylindre de bois 0,24 m. Les réponses seraient-elles différentes si le diamètre du cylindre, au lieu d'être égal à 24 cm. avait une autre longueur ? Pourquoi ?

Solution

1) La masse du cylindre est égale à la masse du liquide déplacé :

$$\pi \times 12^2 \times 21 \times 0{,}6 \text{ g.}$$

Volume du liquide déplacé :

$$\frac{\pi \times 12^2 \times 21 \times 0{,}6 \text{ cm}^3}{1{,}5}$$

Hauteur de la partie immergée :

$$\frac{\pi \times 12^2 \times 21 \times 0{,}6}{1{,}5 \times \pi \times 12^2} = \frac{21 \times 0{,}6}{1{,}5} = 8{,}4 \text{ cm.}$$

La réponse est indépendante du diamètre de base pourvu que ce diamètre reste suffisant pour que le cylindre flotte toujours verticalement.

En effet la surface $12^2 \times \pi$ disparaît dans les calculs.

2) Hauteur du cylindre de fer (h).

Masse du liquide déplacé :

$$(\pi \times 12^2 \times 21 + \pi \times 12^2 \times h) \times 1{,}5.$$
$$\text{ou } 1{,}5 \times \pi \times 12^2 (21 + h).$$

Elle doit être égale à la masse de l'ensemble du flotteur qui est :

$$(\pi \times 12^2 \times 21 \times 0{,}6) + (\pi \times 12^2 \times h \times 7{,}8)$$
$$= \pi \times 12^2 (21 \times 0{,}6 + h \times 7{,}8)$$

d'où équation :

$$1{,}5 \times \pi \times 12^2 (21 + h) = \pi \times 12^2 (21 \times 0{,}6 + 7{,}8\, h)$$
$$(1{,}5 \times 21) + 1{,}5\, h = (21 \times 0{,}6) + 7{,}8\, h$$
$$1{,}5 \times 21 + 15\, h = 21 \times 6 + 78\, h$$
$$78\, h - 15\, h = 15 \times 21 - 21 \times 6$$
$$63\, h = 21\,(15-6)$$
$$h = \frac{21 \times 9}{63} = \frac{21}{7} = 3 \text{ cm}$$

3. — Un submersible ou sous-marin a un poids total de 398 tonnes :

1° Quel est le volume immergé lorsqu'il flotte à la surface de la mer ?

2° Son enveloppe métallique ayant été trouée en un point, il s'est enfoncé dans la mer. En le supposant à 17 m. de profondeur, à quelle pression faudrait-il faire arriver de l'air comprimé dans cette coque pour en chasser l'eau qui y est entrée ?

On évaluera la pression en kilogrammes par centimètre carré. Densité de l'eau de mer : D = 1,026. Hauteur barométrique : 0,75. m.

Solution

1° Quand le sous-marin flotte à la surface de la mer il déplace un volume d'eau de mer dont le poids est égal au sien, soit 398 tonnes (principe des corps flottants). La densité de l'eau étant 1,026, le mètre cube d'eau de mer pèse 1,026 t. ; le volume de 398 tonnes d'eau de mer est de:

$$398 : 1{,}026 = 387{,}9 \text{ m}^3$$

2° La pression de l'air comprimé capable de chasser l'air du sous-marin est au moins égale à la pression que supporte le liquide intérieur du bateau. Or, celle-ci est égale à la pression atmosphérique, augmentée de la pression exercée par une couche d'eau de mer de 17 m. de hauteur.

Calculons en kilogrammes, par centimètre carré, chacune de ces pressions.

Pression atmosphérique : $1{,}033 \text{ kg.} \times \frac{75}{76} = 1{,}019 \text{ kg.}$

Pression de l'eau de mer :

$$1{,}026 \text{ kg.} \times 170 \times 0{,}01 = 1{,}744 \text{ kg.}$$

Pression totale par centimètre carré :

$$1{,}019 \text{ kg.} + 1{,}744 \text{ kg.} = 2{,}768 \text{ kg.}$$

Réponse : 387,9 m³
2,768 kg.

4. — A l'un des plateaux A d'une balance hydrostatique on a suspendu un cube de fer de 7 cm. d'arête et au plateau B on a suspendu un cube d'aluminium de 10 cm. d'arête. La balance est en équilibre. La densité du fer étant 7,8 on demande la densité de l'aluminium.

Le cube de fer étant immergé dans de l'huile et le cube d'aluminium plongeant dans de l'alcool dont la densité est 0,81 on constate qu'il faut placer 496 g. dans le plateau B pour rétablir l'équilibre. En déduire la densité de l'huile.

Le cube de fer et le cube d'aluminium restant suspendus aux plateaux de la balance et le plateau B conservant la surcharge de 496 g. on enlève de l'eau jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli. Quel est alors le rapport de la portion du cube immergé au volume total du cube d'aluminium ?

Solution

Le volume du cube de fer est de :

$$7 \times 7 \times 7 = 343 \text{ cm}^3$$

Et son poids est :

$$7 \text{ gr. } 8 \times 343 = 2675{,}4 \text{ g.}$$

Le volume du cube d'aluminium est de :

$$10 \times 10 \times 10 = 1.000 \text{ cm}^3.$$

La balance étant en équilibre, c'est que le cube d'aluminium pèse autant que le cube de fer, 1 cm³ pèse :

$$\frac{2675{,}4}{1.000} = 2{,}675 \text{ g.}$$

La densité de l'aluminium est donc : 2,675.

2° Le cube de fer étant plongé dans l'huile reçoit une poussée égale à 343 x, x étant la densité de l'huile.

L'aluminium reçoit une poussée égale à 0,81 g. × 1.000 = 810 g. Comme pour rétablir l'équilibre, on est obligé de mettre 496 g. sur le plateau B, c'est que la poussée de l'alcool sur l'aluminium dépasse 496 g. la poussée de l'huile sur le fer.

La poussée de l'huile sur le fer est donc de :

$$810 \text{ g.} - 496 \text{ g.} = 314 \text{ g.}$$

Densité de l'huile est $x = \frac{314}{343} = 0{,}915$

3° Le fer subit toujours une poussée subie par l'éther, soit 314 g. plus les 496 g. ajoutés pour établir l'équilibre, soit 810 g. La poussée exercée par l'eau étant 810 g., la partie immergée mesure 810 cm³. Le rapport de la portion du cube immergé est de :

$$\frac{810}{1000} = \frac{81}{100}$$

Si le cube de fer dans cette 3e expérience ne plongeait plus dans l'huile (l'énoncé ne le spécifie pas) la poussée de l'eau sur le cube d'aluminium serait seulement égale aux 496 g. ajoutés sur le plateau B pour établir l'équilibre. Le volume d'eau déplacé serait donc 496 cm³ et le rapport de la portion du cube immergé au volume total du cube d'aluminium serait de $\frac{496.}{1000}$

Réponses : 2,675 — 0,915

$$\frac{496}{1000} \text{ et } \frac{81}{100}$$

5. — Un pèse-acide de Baumé s'enfonce jusqu'au 0 de sa graduation dans l'eau pure et jusqu'à la division 66 dans l'acide sulfurique concentrée de densité 1,843 (fig. 150). Si la tige de cet appareil porte 75 divisions, on demande de calculer :

1° Le volume de son renflement immédiatement au-dessous de la dernière division du bas, en prenant pour unité le volume d'une division.

2° La densité de la solution qui a servi à marquer la division 15.

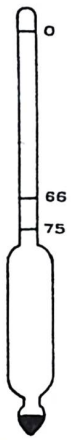


Fig. 150

Solution

Si nous appelons V^{cm^3} le volume de la partie remplie jusqu'à la division 75 et v^{cm^3} le volume d'une division de la tige; on a en écrivant que la masse du pèse-acides est la même dans les deux cas.

$$(V + 75\ v) \times 1 = [V + (75-66)\ v]\ 1{,}843$$
$$V + 75\ v = 1{,}843\ V + 9 \times 1{,}843\ v$$
$$0{,}843\ V = 750\ v - 16{,}587\ v$$
$$= 58{,}413 \times v$$

$$\text{d'où } V = \frac{58.413\ v}{843} = 69{,}23\ v$$

Soit x la densité de la solution qui a servi à marquer la division 15.

$$\text{On a } (V + 75\ v) = (V + (75-60)\ v)\ x$$
$$V + 75\ v = (V + 15\ v)\ x$$

$$\text{ou } x = \frac{V+75\ v}{V+15\ v} = \frac{\frac{58.413\ v}{843} + 75\ v}{\frac{58.413\ v}{843} + 15\ v} = \frac{58413+75\times 843}{58413+15\times 843}$$

$$x = 1{,}116$$

La densité de la solution qui a servi à marquer la division 15 est de 1,116.

6. — Un morceau de fer pèse 390 g.; plongé dans l'eau pure, il ne pèse que 340 g. On demande : 1° son volume ; 2° son poids apparent s'il est complètement immergé dans un liquide de densité 1,8 ; 3° la densité d'un liquide qui exercerait sur ce corps une poussée de 45,75 g.

Réponses : 50 cm³
300 g.
0,915.

7. — Un thermomètre à mercure (enveloppe de verre contenant le mercure) pèse 37,7 g. Si on le pèse complètement plongé dans l'eau, la balance donne le poids de 28 g.

On demande : 1° le volume du thermomètre ; 2° le volume du verre du thermomètre ; 3° le volume et le poids du volume qu'il contient.

Densité du verre, 2,56, du mercure 13,6.

Solution

1° La poussée subie par le thermomètre plongé dans l'eau est :

37,7 g. — 28 g. = 9,7 g.

Le volume de l'eau déplacée ou du thermomètre est donc : 9,7 cm³.

2° et 3° Soient x et y les volumes respectifs du verre et du mercure du thermomètre. On peut écrire :

$$x + y = 9{,}7$$
$$2{,}56\ x + 13{,}6\ y = 37{,}7$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues, on obtient :

$x = 8{,}534$ cm³ et $y = 1{,}166$ cm³

Le poids du mercure est 13,6 g. × 1,166 = 15,85 g.

8. — Au-dessus d'un liquide de densité D, à une distance h de la surface libre, est abandonné sans vitesse initiale un corps de densité d inférieure à D. On demande :

1° La profondeur à laquelle descendra le corps au sein du liquide ?

2° Le temps qu'il mettra pour atteindre le point le plus bas ?

On négligera les dimensions du corps et les résistances de frottement.

Application numérique :

$D = 13{,}6$; $d = 8{,}4$; $h = 12$ m. et $g = 981$ cm/s.

Solution

Le corps commence à tomber en chute libre pendant un temps t_1 tel que :

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad \text{et } t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Lorsqu'il arrive en contact avec le liquide, il a une vitesse :

$$v_1 = g t_1 = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

Lorsque le corps est à l'intérieur du liquide il est soumis à l'action de deux forces :

1° Son poids : $P = Mg$;

2° La poussée du liquide :

$$P' = \frac{MD}{d} g$$

Ces deux forces étant opposées, nous pouvons les remplacer par une force F verticale dirigée de bas en haut, et :

$$F = P' - P = Mg\left(\frac{D-d}{d}\right)$$

Cette force tend à donner au corps un mouvement d'accélération γ :

$$(1) \qquad \gamma = \frac{F}{M} = \frac{(D-d)\ g}{d}$$

d'où l'équation du mouvement du corps à partir de la surface du liquide :

$$(2) \qquad l = v_1 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$$

la vitesse à l'instant t étant :

$$v = v_1 - \gamma t$$

Le corps parviendra au point le plus bas lorsque sa vitesse sera nulle :

$$v_1 - \gamma t_2 = 0$$

d'où :

$$t_2 = \frac{v_1}{\gamma}$$

Portons dans l'équation (2) :

$$l_2 = \frac{v_1^2}{\gamma} - \frac{1}{2}\gamma\frac{v_1^2}{\gamma^2} = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{\gamma} = \frac{2gh \times d'}{2(D-d)g} = \frac{hd}{D-d}$$

d'où :

$$l_2 = 19{,}38 \text{ m. et } t = t_1 + t_2 = 4^s{,}05$$

9. — Deux vases communicants cylindriques et verticaux ayant respectivement pour sections 1 dm² et 15 cm² renferment du mercure de masse spécifique 13,6. On verse au-dessus du mercure, dans le vase le plus large, 2 litres d'un liquide de densité 1,7, puis on fait flotter sur ce liquide un corps pesant 800 gr. (fig. 151).

On demande la hauteur du mercure au-dessus du niveau de séparation avant l'introduction du corps flottant et après son introduction.

Solution

Lorsque les liquides sont en équilibre les pressions sont les mêmes pour tous les points d'un même plan horizontal. Prenons comme plan de comparaison, le plan C D de la surface de séparation des deux liquides.

Nous aurons :

$$P_c = h \times 1{,}7$$
$$P_d = h' \times 13{,}6$$

D'où : $P_c = P_d$ ou : $h \times 1{,}7 = h' \times 13{,}6$

1° Avant l'introduction du corps M dans le système nous connaissons h :

$$2000^{cm3} = 100^{cm2} \times h^{cm}$$

d'où : $h = 20^{cm}$

et nous en déduisons :

$$h' = \frac{20 \times 1{,}7}{13{,}6} = 2{,}5^{cm}$$

2° Lorsqu'on introduit un corps pesant 800 grammes, tout se passe comme si l'on avait ajouté 800 grammes de liquide dans la branche A.

Comme ce liquide a une densité de 1,7 il correspond à une hauteur :

$$\frac{800}{100 \times 1{,}7} = 4{,}76^{cm}$$

d'où la nouvelle hauteur du mercure :

$$h'_1 = \frac{24{,}76 \times 1{,}7}{13{,}6} = 3{,}09^{cm}$$

10. — Une machine d'Atwood porte à ses extrémités deux masses de platine M et M'. La masse M' se trouve plongée dans un récipient plein d'eau pure ; la masse M est dans l'air (fig. 152). On abandonne ce système à lui-même :

1° Quelle sera l'accélération du mouvement, tous les frottements étant négligeables ?

2° Quel sera le travail accompli par la pesanteur au bout du temps t compté à partir de l'instant où le corps se met en mouvement. On admet que pendant ce temps M' est immergée.

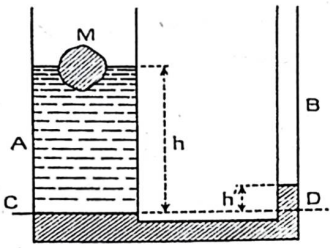


Fig. 151

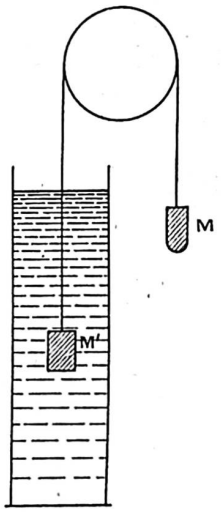


Fig. 152

Application : g = 981 cm/s. ; M = M' = 150 g ; d (masse de 1 cm³ d'air) = 0,00125 g. ;

(masse de 1 cm³ de platine) 21 g. ; t = 2",03.

Solution

Les forces agissant sur le système sont :

a) Les poids de M et de M' :

$$P = M \times g \text{ et } P' = M' \times g$$

b) Les poussées exercées sur M et M' par l'air et le liquide :

$$F = \frac{M}{\Delta} \times \delta \times g$$

$$F' = \frac{M'}{\Delta} \times 1 \times g$$

Ces forces ont une résultante f :

$$f = Mg - M'g - \frac{M}{\Delta}\delta g + \frac{M'}{\Delta} g$$

et comme : M = M' :

$$f = \frac{M}{\Delta} g\,[1 - \delta]$$

L'accélération γ du mouvement est donc :

$$\gamma = \frac{f}{m} = \frac{\frac{M}{\Delta} g\,(1 - \delta)}{2\,M} = \frac{g\,(1 - \delta)}{2\,\Delta}$$

Pendant le temps t la masse M parcourt un espace e :

$$e = \frac{1}{2}\gamma\, t^2$$

Le travail est donc :

$$A = f \times e$$

d'où :

$$A = \frac{\left[\frac{M}{\Delta} g\,(1 - \delta)\right]^2 t^2}{4\,M} = M\gamma^2 t^2$$

Application numérique :

$$\gamma = \frac{981\,(1 - 0{,}00125)}{2 \times 21} = 23{,}33^{cm/s}$$

$$A = 150 \times \overline{23{,}33}^2 \times \overline{2{,}03}^2 = 336.377 \text{ ergs.}$$

11. — On suspend au-dessous des plateaux d'une balance hydrostatique supposée juste d'un côté, un corps, de l'autre côté des poids marqués, mais en immergeant le corps et les poids marqués dans un même liquide.

Dans une première expérience, ce liquide est de l'eau ; les poids qui produisent l'équilibre ont pour valeur 11,43 g. ; dans une 2e expérience le liquide a pour densité 0,8 ; les poids qui établissent l'équilibre ont pour valeur 13,33 g. Sachant que la substance qui constitue les poids marqués a pour densité 8, on demande : 1°, la densité du corps ; 2°, son poids ?

Solution

Soient V le volume du corps, v et v_1 les volumes des poids lui faisant équilibre successivement, nous avons les équations d'équilibre :

(1) $V \times x - V \times 1 = v \times 8 - v \times 1$

(2) $V \times x - V \times 0{,}8 = v_1 \times 8 - v_1 \times 0{,}8$

ou :

$$V\,(x - 1) = 7\,v$$
$$V\,(x - 0{,}8) = 7{,}2\,v_1$$

et en divisant membre à membre :

$$\frac{x - 1}{x - 0{,}8} = \frac{7}{7{,}2} \times \frac{v}{v_1}$$

Mais :

$$\frac{v}{v_1} = \frac{11{,}43}{13{,}33}$$

d'où :

$$\frac{x - 1}{x - 0{,}8} = \frac{7}{7{,}2} \times \frac{11{,}43}{13{,}33}$$

et

$$x = 2$$

Le poids du corps est : $V \times x$; nous tirons de l'équation (1) :

$$V = 7\,v$$

mais

$$v = \frac{11{,}43}{8} = 1{,}43$$

d'où

$$V = 1^{cm3} \text{ et } P = 20 \text{ grammes}$$

12. — Une sphère creuse dont le diamètre est égal à 10 cm. pèse 500 g. On la suppose placée au fond de la mer, à une profondeur de 100,10 m. et on l'abandonne à elle-même (fig. 153). La densité de l'eau de mer étant 1,026, on demande d'indiquer :

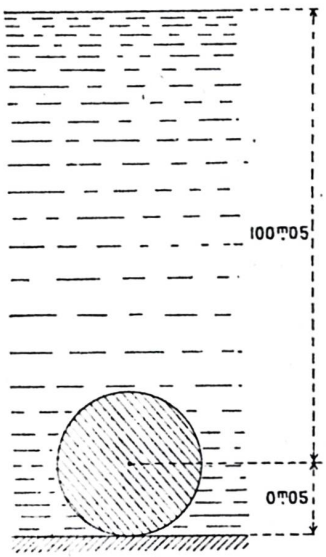


Fig. 153

1° La nature du mouvement qu'elle prendra en s'élevant dans ce liquide ?

2° Le temps qu'elle mettra pour venir affleurer à la surface et la vitesse qu'elle possédera à ce moment ?

3° Le rapport du volume immergé au volume total quand elle flottera sur un liquide en négligeant la poussée de l'air ?

On prendra g = 981 cm.

Solution

Cette sphère est soumise à l'action de deux forces opposées :

a) Son poids $\omega = 500$ grammes ;

b) La poussée $V \times d \times g$.

Soit d' la densité de la sphère, nous aurons :

$$F = V\,d\,g - V\,d'\,g = V\,(d - d')\,g$$

La sphère va donc monter avec un mouvement uniformément accéléré, d'accélération γ :

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{V\,(d - d')\,g}{V\,d} = g \times \frac{d - d'}{d'}$$

Mais :

$$d' = \frac{500 \times 6}{\pi \times 10^3} = \frac{3}{\pi}$$

d'où :

$$\gamma = 981 \times \frac{1{,}026 - \frac{3}{\pi}}{\frac{3}{\pi}} = 72{,}8^{cm}/_{s},$$

La sphère monte de 100 mètres (100,10 m. — 0,10 m.); d'où :

$$100 = \frac{1}{2}\,\gamma\,x^2$$

ce qui donne :

$$x = 100\sqrt{\frac{2}{72.8}} = 16',55$$

La vitesse cherchée est alors :

$$v = \gamma\,t = 72{,}8 \times 16{,}55 = 12 \text{ m/s environ}$$

Lorsque le corps flotte son poids est égal à celui du volume d'eau déplacée :

$$V'\,d\,g = V\,d'\,g$$

d'où :

$$\frac{V'}{V} = \frac{d'}{d} = \frac{3}{1{,}26 \times \pi} = 0{,}93$$

13. — On mélange par parties égales de l'eau et de l'alcool absolu dont la densité par rapport à l'eau est 0,79. On constate qu'il se produit par le mélange une contraction de $\frac{1}{20}$ du volume total. On demande quel degré marquera ce mélange :

1° A l'alcoomètre centésimal ?

2° Au pèse-liqueurs Baumé, sachant que ce dernier marque 0 dans une dissolution de densité 1,075 et 10 dans l'eau. On négligera l'influence de la capillarité.

Solution

1° Lorsqu'on ajoute 100 cm³ d'alcool à 100 cm³ d'eau on a donc une contraction de :

$$\frac{200}{20} = 10^{cm^3}$$

Le volume devient : $200 - 10 = 190^{cm^3}$

D'où la teneur en alcool :

$$\frac{100 \times 100}{190} = 52{,}63\,\%$$

C'est le degré que marquera l'alcoomètre centésimal.

2° 190 cm³ du mélange pèsent :

$$100 \times 0{,}79 + 100 \times 1 = 179 \text{ grammes}$$

d'où la densité : $\frac{179}{190}$

Soit v le volume d'une division de l'aréomètre Baumé, supposons que le volume du réservoir au dessous du 0 de la graduation contienne n fois ce volume v, nous aurons en appelant ω le poids de l'appareil :

(1) $\omega = (n + 10)\,v \times 1$

(2) $\omega = n\,v \times 1{,}075$

(3) $\omega = (n + x)\,v \times \frac{179}{190}$

Nous en tirons :

$$n + 10 = n \times 1{,}075$$

d'où :

$$n = 133{,}33$$

et $x = 18°81$ Baumé.

14. — Un aréomètre de Nicholson pèse 50 g. Pour le faire affleurer dans un liquide de densité 1,32 il faut placer sur le plateau inférieur un morceau de métal pesant 20 gr. et de densité 8,8. On demande quel poids il faudra ajouter sur le plateau supérieur de cet aréomètre pour le faire affleurer dans l'eau.

Solution

Soit V le volume constant de l'aéromètre ; lorsqu'il est dans le liquide, on a :

$$V \times 1{,}32 = 50 + 20 - \frac{20}{8.8} \times 1{,}32 = 70 - 3 = 67$$

d'où :

$$V = \frac{67}{1{,}32}$$

dans l'eau, on a :

$$V \times 1 = 50 + x$$

d'où :

$$x = \frac{67}{1{,}32} - 50 = 0{,}757\,g.$$

STATIQUE DES GAZ

Les gaz sont des fluides compressibles ; tous les principes généraux énoncés précédemment peuvent s'appliquer à eux. (Principe de Pascal, Principe d'Archimède, etc.).

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES GAZ

1° **Les gaz sont pesants.** — Pour montrer que les gaz sont pesants on a recours à l'expérience suivante :

Sous un plateau d'une balance (fig. 154) on suspend un ballon de verre A dans lequel on a fait le vide. Ce ballon est fermé par un robinet. On fait la tare dans l'autre plateau de la balance, de manière à rétablir l'équilibre. Si on laisse rentrer l'air dans le ballon, en ouvrant le robinet, on constate que la balance s'incline dans le sens de la flèche *f*.

On peut répéter l'expérience avec d'autres gaz ; on fait des constatations analogues. Des expériences précises ont montré qu'à 0 degré et sous la pression 76 cm. de mercure le litre d'air pèse 1,293 g.

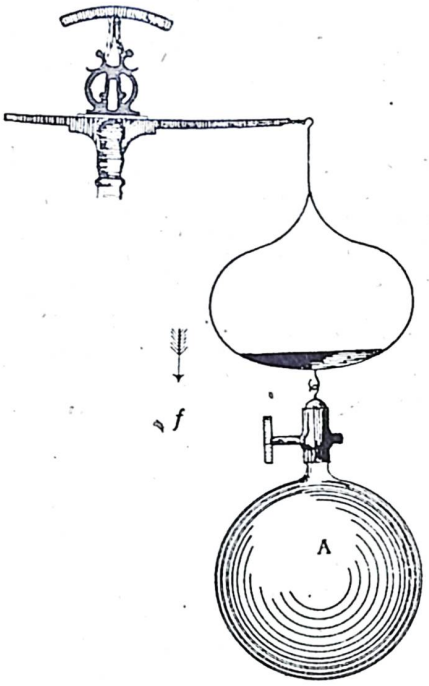


Fig. 154

2° **Les gaz sont compressibles,** *c'est-à-dire qu'on peut réduire leur volume en les comprimant.*

Dans un cylindre v (fig. 155) on introduit de l'air et on ferme par un piston. On peut diminuer le volume du gaz en appuyant sur le piston.

Cette propriété est appliquée dans l'industrie pour le transport des gaz. A cet effet on les comprime de 100 à 200 atmosphères dans de grands cylindres en fer. Ces cylindres sont munis d'un bouchon comportant deux vis v et v' qui en assurent hermétiquement la fermeture et permettent d'en faire sortir le gaz à volonté au fur et à mesure des besoins (fig. 156).

Remarque.—Alors qu'un litre d'eau soumis à la pression de 20 atmosphères varie de $\frac{1}{1000}$ de son volume, 1 litre d'air sous la même pression se réduit à 0,05 l.

Les gaz sont expansibles, *c'est-à-dire qu'ils occupent tout l'espace qui leur est offert.*

Cette propriété les distingue encore des liquides.

Pour démontrer l'expansibilité des gaz, on dispose un ballon en baudruche dans la cloche C de la machine pneumatique ; puis on fait le vide dans la cloche, on constate que le ballon de baudruche se gonfle immédiatement (fig. 157).

Les gaz sont élastiques *c'est-à-dire qu'ils répondent par une force égale à la pression qu'on exerce sur eux* (fig. 158).

L'élasticité est une conséquence de l'expansibilité.

Pour démontrer cette propriété on se sert d'une pompe dans le corps de laquelle on a enfermé un volume AR de gaz (1), le robinet R étant fermé on comprime le gaz en abaissant le piston de A en B (2). On lâche alors le piston et on constate qu'il revient en A (fig. 158).

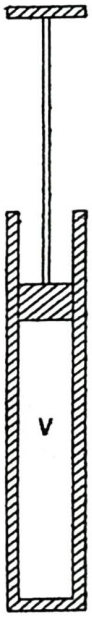


Fig. 155

Remarque : La *compression dégage de la chaleur.* (Exemple : briquet à air) (fig. 159).

La *détente* au contraire se fait avec *absorption* de chaleur.

Exemple : le brouillard artificiel.

Un bocal contenant un peu d'eau est surmonté d'un bouchon traversé par un tube terminé par une poire en caoutchouc P. On lâche la poire, l'air du bocal se détend. L'air saturé de vapeur d'eau se refroidit, il y a formation d'un brouillard. Pour bien réussir l'expérience il est bon d'introduire un peu de fumée *en poussière dans le ballon* (fig. 160).

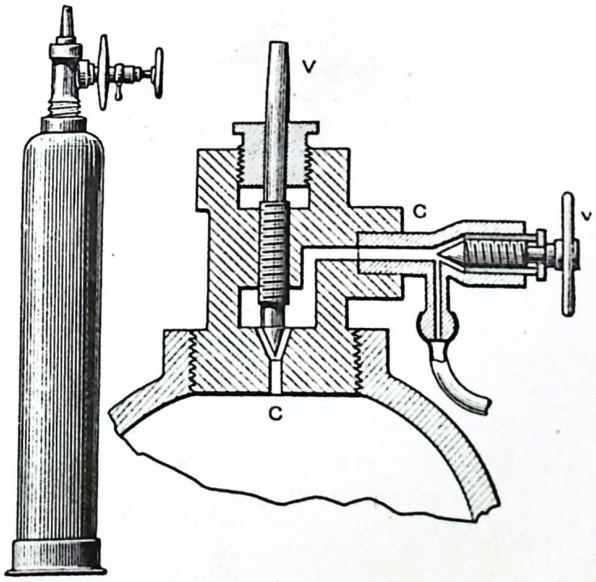


Fig. 156

Pression dans une masse gazeuse. — Tout ce que nous avons dit à propos des fluides pesants s'applique aux gaz : *dans une masse gazeuse, en équilibre, la pression est la même en tous les points d'un plan horizontal.*

En deux plans horizontaux différents, la différence des pressions est mesurée par le poids d'une colonne gazeuse cylindrique verticale ayant pour base l'unité de surface, et pour hauteur la différence de niveau des deux plans horizontaux.

CHAPITRE PREMIER

PRESSION ATMOSPHÉRIQUE

Pression atmosphérique. — La terre est enveloppée par une couche d'air limitée, mais cette limite est peu précise. On conçoit néanmoins que cette atmosphère exerce sur les points de la surface du globe une pression considérable. On peut le montrer au moyen de différentes expériences :

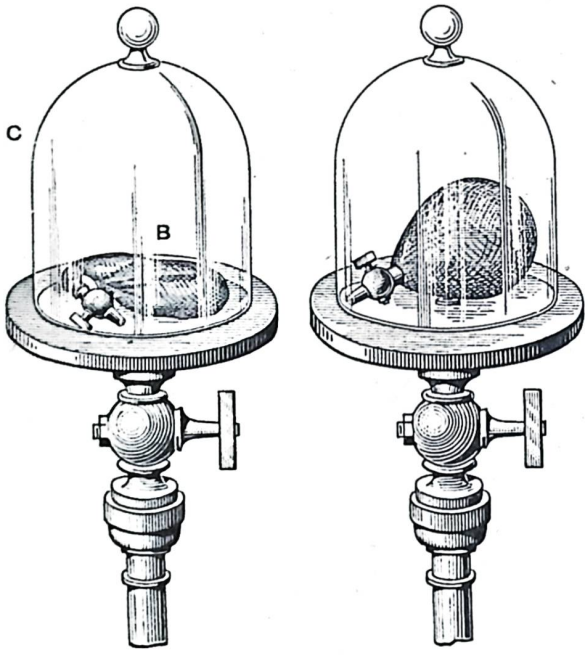


Fig. 157

1° *Expérience du crève-vessie.*

On supprime la pression atmosphérique de l'un des côtés d'une membrane en faisant le vide; la membrane s'incurve dans le sens de la flèche *f* et crève (fig. 161).

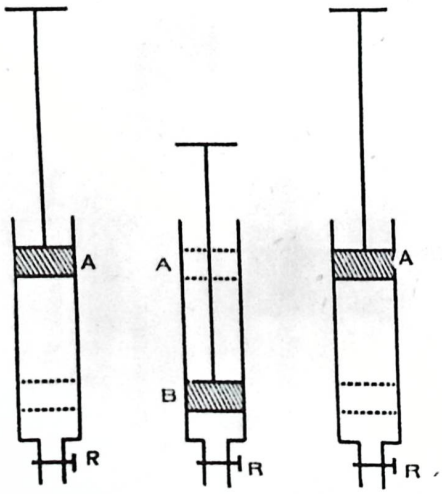


Fig. 158

2° *Expérience des hémisphères de Magdebourg.* — On adapte à une machine pneumatique l'hémisphère B au moyen de la vis D (fig. 162). On applique sur B l'hémisphère A et on fait le vide, puis on ferme le robinet E pour empêcher l'air de rentrer. On dévisse le système des deux hémisphères et on adapte sur le pas de vis D la poignée H. Plusieurs personnes vigoureuses tirant de part et d'autre sur les poignées des hémisphères ne parviennent pas à séparer ces derniers. Si on fait rentrer l'air par le robinet, on les sépare sans aucune difficulté.

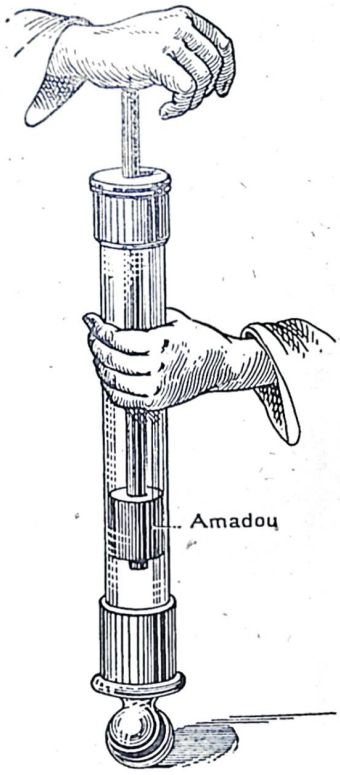


Fig. 159

3° *Expérience.* — Dans une carafe à goulot évasé on jette un morceau de coton imbibé d'alcool et enflammé, puis on bouche la carafe avec un œuf dur dont on a enlevé la coquille ; l'alcool en brûlant raréfie l'air dans la carafe, l'œuf entre brusquement dans celle-ci (fig. 163).

4° Une bouteille pleine d'eau renversée dans un verre demeure pleine (fig. 164).

5° La pipette (fig. 165) est un tube de verre présentant un renflement, si on plonge la pointe dans un liquide et qu'on aspire par l'extrémité supérieure le liquide monte. Pour le maintenir à la hauteur voulue on ferme cette extrémité avec le doigt. La pression atmosphérique empêche le liquide de s'écouler par la pointe.

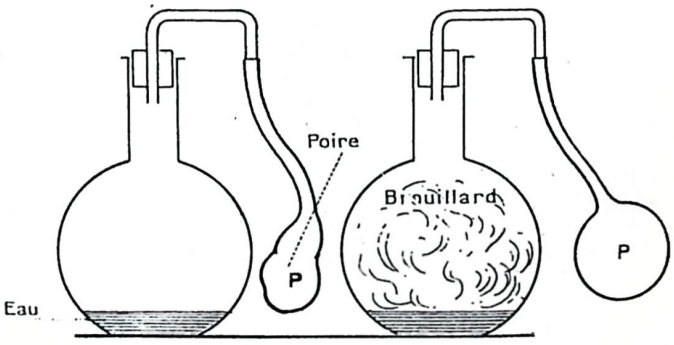


Fig. 160

6° Une feuille de papier appliquée sur un verre rempli d'eau reste en place lorsque le verre est retourné, parce qu'elle est maintenue par la pression atmosphérique (fig. 166).

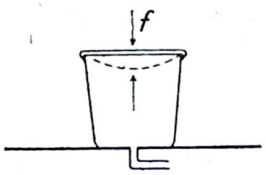


Fig. 161

Expérience de Torricelli. Imaginons un verre à expérience B (fig. 167) contenant du mercure, et un tube de verre d'un mètre de long environ fermé à l'une de ses extrémités A. On remplit d'abord ce tube de mercure en tenant l'extrémité A tournée vers le bas puis on applique le doigt sur son orifice de manière à le fermer hermétiquement ; on renverse le tube, orifice en bas, sans déranger le doigt obturateur , et on plonge l'extrémité ainsi bouchée dans le mercure du verre à expérience. Ceci fait, on retire le doigt en maintenant le tube plongé.

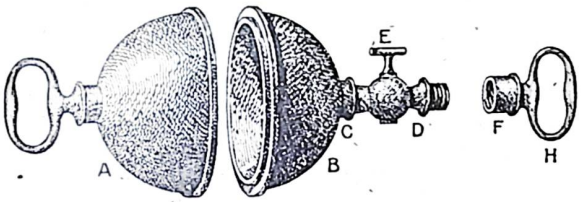


Fig. 162

Le mercure descend dans le tube A B, mais il ne descend pas jusqu'au niveau du mercure contenu dans le verre, il s'arrête à une certaine hauteur qui est d'environ 76 centimètres à Paris.

Fig. 163

La colonne de mercure contenue dans le tube fait équilibre à la pression atmosphérique : celle-ci est donc égale au poids d'une colonne de mercure de 1 cm² de section et d'une hauteur d'environ 76 cm.

La densité du mercure étant 13,6 un centimètre carré de surface reçoit donc une pression de

$$13{,}6 \text{ g.} \times 76 = 1033 \text{ g.} = 1{,}033 \text{ kg.}$$
$$= 1 \text{ atm.} = \text{sensiblement } 1 \text{ kilogramme.}$$

Pascal reprit l'expérience de Torricelli avec d'autres liquides et constata que les hauteurs des liquides soulevés *sont inversement proportionnelles à leurs poids spécifiques.*

De plus il fit des mesures à la tour St-Jacques, le niveau de mercure était moins élevé qu'au pied de la tour, la différence était de 4 millimètres ½ environ.

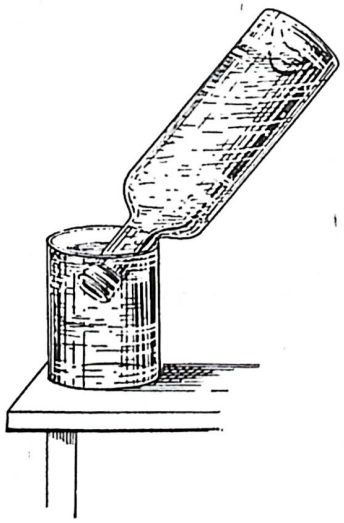


Fig. 164

Puis son beau-frère fit des mesures le long du Puy de Dôme. La différence entre la pression au sommet et la pression au pied de la montagne était de 8 centimètres.

Mesure de la pression atmosphérique. Baromètres. — La pression du mercure au niveau de la surface libre dans le verre à expérience (cuvette) de Torricelli est mesurée par le poids d'une colonne de mercure ayant pour base l'unité de surface et, pour hauteur, la hauteur du mercure dans le tube. Or, le poids en question est proportionnel à la hauteur de la colonne de mercure. On voit donc qu'il suffit de connaître la hauteur de la colonne pour en déduire le poids, et par suite la pression grâce à un calcul des plus simples. On se contente d'ordinaire de donner la hauteur du mercure dans le tube, soit en centimètres, soit en millimètres et on dit, d'une manière abrégée : la pression est de 67 centimètres, de 757 millimètres., etc.

Depuis le 1er janvier 1927 les bulletins météorologiques la donnent en *millibars* le bar = 100 pièzes = 1.000.000 de baryes. Le millibar vaut donc 1,02 g. par centimètre carré.

Pour rendre la mesure plus facile, on place le tube de Torricelli sur une planchette graduée en millimètres, ou dans un tube métallique gradué et pourvu de petits regards. L'appareil ainsi constitué prend le nom de *baromètre* (fig. 168).

Le baromètre le plus simple est le *baromètre à cuvette* qui est, à quelques détails près, identique à l'appareil de Torricelli (fig. 169). Il peut être fixé comme celui qui est représenté dans la figure ci-contre, ou transportable. Dans ce dernier cas, il est un peu plus compilqué, comme nous allons le voir.

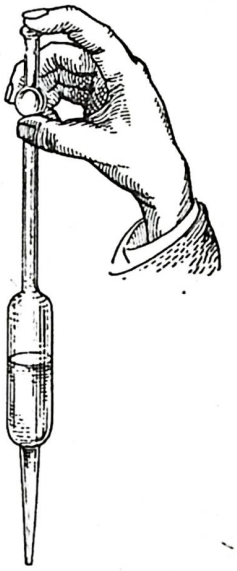


Fig. 165

Le niveau du mercure dans la cuvette n'est pas constant ; il monte ou descend suivant que le mercure descend ou monte dans le tube. On ne peut donc pas faire partir la graduation du niveau du mercure dans la cuvette, du moins si l'on veut avoir un appareil fournissant des renseignements précis. En conséquence, on choisit un o vers le milieu de la colonne de mercure et on gradue dans les deux sens en montant et en descendant à partir de ce o. Pour lire la pression, on prend le chiffre de la graduation en face duquel se trouve le niveau du mercure dans la cuvette, et celui qui correspond au niveau du mercure dans le tube, puis on additionne les deux nombres.

Cependant, pour les baromètres usuels, comme ceux dont on se sert dans les appartements, on se contente de donner à la cuvette une large surface, de manière à y rendre presque insen-

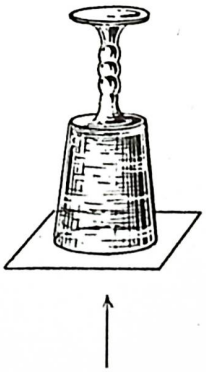


Fig. 166

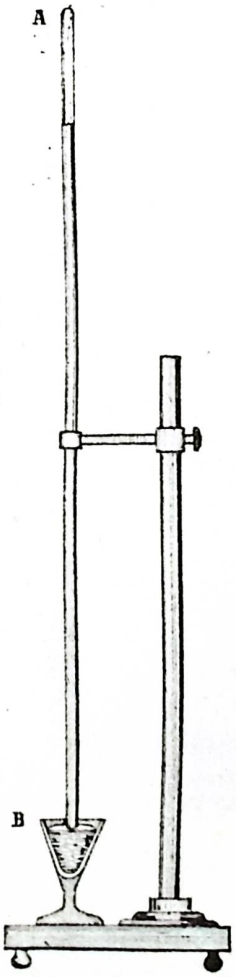


Fig 167

sibles les variations de niveau, et on place le o de la graduation au niveau du mercure dans la cuvette.

Le *baromètre à cuvette* ordinaire est d'un transport difficile parce que les chocs ou les oscillations peuvent déterminer de brusques mouvements du mercure dans la cuvette et livrer passage à l'air qui rentre dans le tube. Dès qu'une seule bulle d'air a pénétré dans ce dernier, le baromètre devient inutilisable.

Dans le *baromètre de Fortin*, on a remédié à ces inconvénients. Ce baromètre (fig. 170) se compose essentiellement d'une cuvette dont le fond est formé par une peau de chamois non tendue, et d'un tube de Torricelli plongé dans la cuvette et réuni à cette dernière par une monture perméable à l'air, mais imperméable au mercure. Le fond en peau de chamois de la cuvette est mobile et peut être élevé ou abaissé au moyen d'une vis mobile elle-même dans la monture de cuivre du baromètre. Cette vis se voit sur la figure au bas de l'appareil.

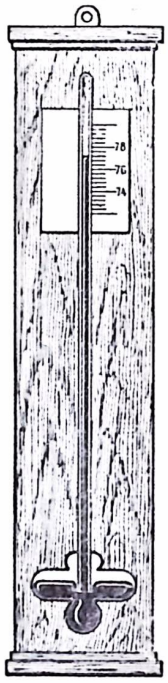


Fig. 168

Fig. 169

Quand on veut faire une observation, on suspend le baromètre à un trépied dans une position verticale. Puis on tourne la vis de manière à régler la hauteur du mercure dans la cuvette : ce réglage peut se faire grâce à un regard en verre ménagé au sommet de la cuvette et à une pointe fixe en ivoire qui correspond au o de la graduation.

On règle le niveau du mercure de façon que la pointe d'ivoire affleure la surface. Comme l'on ramène ici toujours le niveau au même point de la graduation, on peut faire partir celle-ci de la surface du mercure dans la cuvette et on n'a, par conséquent, qu'une lecture à faire.

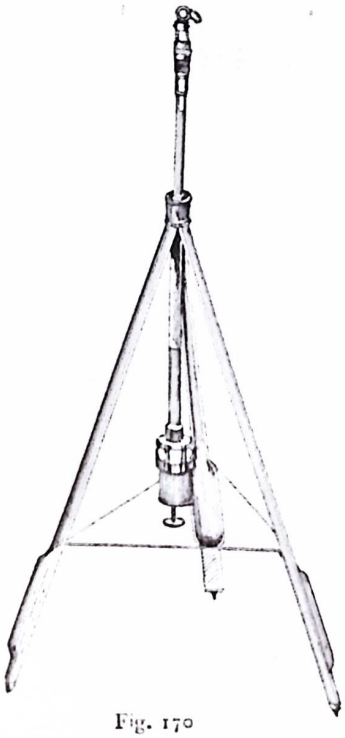


Fig. 170

Pour transporter le baromètre on serre la vis à fond ; le mercure remplit complètement la cuvette, puis le tube ; on peut alors placer l'appareil dans n'importe quelle position sans crainte d'y faire rentrer de l'air.

Le baromètre enregistreur se compose d'une série de petites boîtes analogues à celle du baromètre anéroïde. Les variations de hauteur de cette pile sont transmises à une grandes aiguille dont l'extrémité enduite d'encre se déplace devant un cylindre enregistreur mû par un mouvement d'horlogerie et autour duquel est appliquée une feuille de papier portant des divisions convenablement tracées. L'examen de cette feuille permet d'observer une courbe continue qui permet de suivre les variations présentées par la pression atmosphérique en 24 heures, une semaine ou même en une quinzaine (fig. 171).

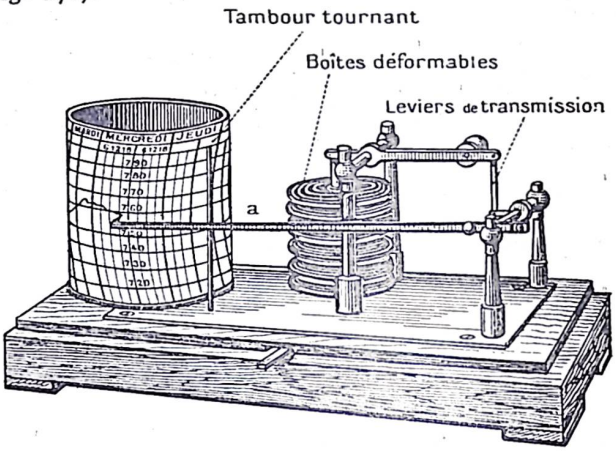


Fig. 171

Baromètre à siphon. — Grâce au système de la double graduation, il devient possible de réduire les dimensions de la cuvette jusqu'à lui donner la même largeur qu'au tube lui-même. C'est ce qu'on a réalisé dans le baromètre à siphon. Cet appareil est tout simplement un tube recourbé dont l'une des branches, la plus courte, est ouverte et joue le rôle de cuvette ; et l'autre, la plus longue, est fermée et fonctionne comme le tube d'un baromètre ordinaire. On mesure la différence des niveaux au moyen d'une double graduation (fig. 172).

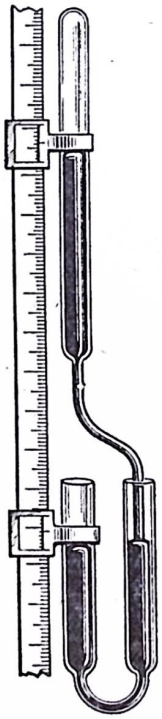


Fig. 172

Gay Lussac a construit sur ce principe un *baromètre transportable* (fig. 173). L'appareil se compose essentiellement d'un tube à deux branches, dont les deux parties sont réunies par un tube capillaire. La branche dans laquelle doit s'exercer la pression atmosphérique ne communique avec l'extérieur que par un trou capillaire qui ne permet pas au mercure de sortir si on renverse l'appareil. Le tube capillaire de jonction empêche également l'air de diviser le mercure et de s'introduire dans la branche fermée.

Quand on veut transporter le baromètre, on le retourne avec précaution, de manière que la plus grande quantité possible du mercure reste dans la grande branche. Une fois que l'appareil est ainsi retourné, on n'a plus à craindre de rentrées d'air.

Le *baromètre à cadran* est aussi une application du baromètre à siphon. Dans la branche ouverte d'un baromètre à siphon ordinaire on place un flotteur attaché à l'extrémité d'un fil. Le fil s'enroule sur un petit treuil et supporte à son autre extrémité un contre-poids. Le flotteur suit les mouvements du mercure et le treuil tourne dans un sens ou dans l'autre. Le treuil entraîne une aiguille qui se déplace sur un cadran divisé. La graduation correspond aux hauteurs de mercure ; de plus le cadran porte en général des indications telles que : pluie, vent, variable, beau fixe, etc. Ces indications ne fournissent que des probabilités.

Fig. 173

Le *baromètre anéroïde* est construit sur un principe tout différent ; il ne contient aucun liquide. Il se compose essentiellement d'une boîte métallique cylindrique dont le fond est constitué par une lame très mince et plissée circulairement (fig. 174). Cette lame plissée est douée d'une très grande élasticité. On fait le vide dans la boîte et on la ferme hermétiquement. La pression de l'air fait fléchir la lame élastique qui s'enfonce plus ou moins suivant que la pression est plus ou moins forte. Cet appareil est très sensible. Les mouvements de la lame flexible se transmettent par un système d'engrenages à une aiguille qui les amplifie sur un cadran. Ce baromètre est gradué par comparaison avec un baromètre à mercure ordinaire. (Sur la fig. 174 le cadran a été enlevé pour pouvoir montrer le mécanisme du baromètre.

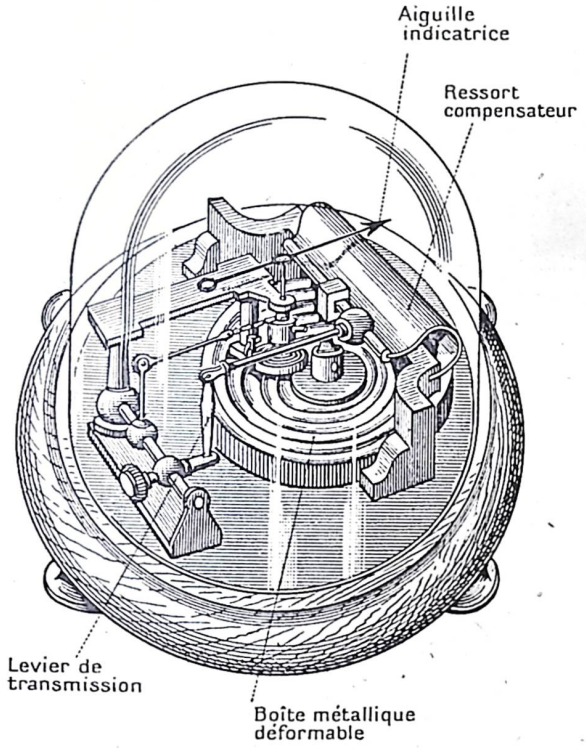


Fig. 174

Valeur de la pression atmosphérique. — Mesure des hauteurs. — La pression atmosphérique varie avec l'altitude du lieu considéré, puisque l'épaisseur de la couche atmosphérique varie.

Au niveau de la mer, la pression est en moyenne de 760 millimètres à la température de 0°. C'est ce qu'on appelle la *pression normale*. Dès qu'on s'écarte de la mer la pression diminue puisqu'on s'élève dans l'atmosphère.

Dans les mesures barométriques, on doit tenir compte : 1° de la température ; 2° de la capillarité. Ces deux causes introduisent dans la lecture des hauteurs des erreurs qu'il faut corriger. Le volume du mercure et, par suite, la hauteur de la colonne barométrique augmentent avec la température, la pression restant constante. Il y a là un phénomène de dilatation. Nous en reparlerons dans le chapitre de la chaleur et nous apprendrons comment la correction doit être faite.

Nous verrons aussi, plus loin, ce que c'est que la capillarité et comment on doit en tenir compte dans les mesures barométriques.

Le baromètre fournit un moyen de mesurer la hauteur des montagnes, par comparaison. Cependant, on n'a pu déterminer exactement la loi de variation de la pression atmosphérique avec l'altitude. L'air étant compressible, cette pression n'est pas, en effet, proportionnelle à la profondeur de l'atmosphère. D'autre part, la température influe sur la densité de l'air, et cette température varie elle-même avec l'altitude, suivant une loi encore mal connue.

Prévisions du temps. — Lignes isobares. — Les baromètres peuvent servir à prévoir le temps à courte échéance ; on a remarqué, en effet, qu'une série de hautes pressions amène toujours le beau temps, tandis qu'une série de basses pressions amène la pluie ou le vent.

Le bureau central météorologique de Paris publie chaque jour deux cartes, l'une indiquant les pressions à 6 heures du soir, l'autre à 7 heures du matin aux différentes stations météorologiques. En chaque station la pression est corrigée de l'influence de l'altitude. Les points de même pression sont joints par des lignes appelées *isobares*.

Ces cartes permettent de connaître la direction des vents.

Manomètres. — Les manomètres sont des appareils permettant la mesure des pressions des fluides.

Le baromètre n'est qu'un manomètre particulier.

Les plus utilisés sont les manomètres à air libre et les manomètres métalliques.

Manomètres à air libre. — Ils sont destinés à la mesure des pressions ne dépassant pas quelques atmosphères.

Un manomètre à air libre se compose essentiellement d'un tube en U renfermant du mercure. L'une des branches est ouverte B l'autre communique avec l'enceinte renfermant le gaz dont on veut mesurer la pression.

A l'aide d'une règle graduée ou du cathétomètre on mesure la différence des niveaux h du mercure dans les 2 branches (fig. 175).

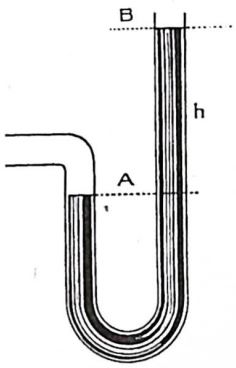


Fig. 175

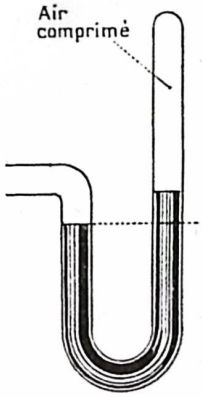


Fig. 176

La pression en A est donc égale a celle en B plus h. C'est-à-dire à la pression atmosphérique $+ h$.

Remarque. — Lorsqu'on veut mesurer avec précision de petites pressions, on remplace le mercure par de l'eau.

Manomètre à air comprimé. — Ce manomètre est construit comme le précédent , avec cette différence que le tube est fermé à sa partie supérieure et contient de l'air (fig. 176). L'appareil est réglé pour que le niveau du mercure dans la cuvette et dans le tube soit le même lorsque la pression à la surface du mercure de la cuvette est d'une atmosphère. A ce moment, l'air contenu dans le tube a donc une pression d'une atmosphère.

Au fur et à mesure que la pression augmente à la surface du mercure de la cuvette, la colonne s'élève dans le tube ; mais, en même temps, la pression de l'air renfermé dans celui-ci augmente et retarde l'ascension du mercure. Ce dispositif permet d'obtenir un appareil beaucoup moins encombrant que le précédent. On le gradue par comparaison avec un manomètre à air libre. Il présente toutefois un inconvénient, c'est que les divisions sont de moins en moins espacées au fur et à mesure qu'elles indiquent des pressions plus élevées.

Ainsi, l'intervalle de 1 à 2 atmosphères est double de celui de 2 à 4 atmosphères et quadruple de celui de 4 à 8 atmosphères. De plus le volume d'air varie avec la température.

Manomètre métallique. — Le plus employé est celui de Bourdon. Il se compose d'un tube en laiton à parois minces et flexibles, recourbé en hélice sur une longueur d'une spire et demie. L'extrémité A, qui est ouverte est fixée à une tubulure à robinet destinée à mettre l'appareil en communication avec une chaudière à vapeur, l'extrémité B est fermée, libre et soudée à une aiguille C dont l'extrémité se déplace devant un cadran gradué (fig. 177).

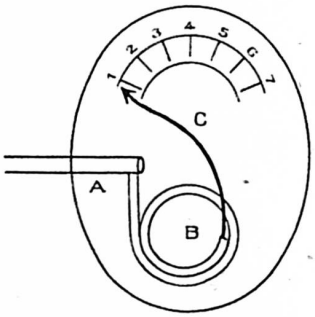


Fig. 177

On gradue l'instrument par comparaison.

Manomètre enregistreur. Il repose sur le même principe que le précédent mais le déplacement de l'aiguille est amplifié par un jeu de leviers dont l'extrémité de l'un porte une plume inscriptrice qui se déplace devant une feuille de papier enroulée autour d'un cylindre animé d'un mouvement uniforme (fig. 178).

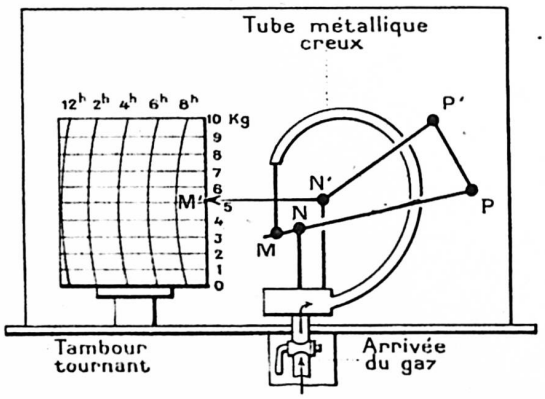


Fig. 178

Problèmes

1. — Quelle doit être la hauteur barométrique pour que la pression atmosphérique soit égale :

1° à 1 kilogramme-poids par cm² ?

2° à 1 hecto pièze ? Densité du mercure 13,6.

Solution

Si l'on représente par h cm. la hauteur barométrique et par p gp. par cm³, le poids spécifique du mercure on sait que la pression atmosphérique est mesurée en grammes poids par cm² par le produit hp.

Pour que la pression atmosphérique soit égale à 1 kgp. par cm² on doit avoir :

$$hp = 1.000$$

$$\text{d'où } h = \frac{1.000}{13,6} = 73,50 \text{ cm.}$$

Une pression de 1 hectopièze équivaut à

$$\frac{102 \times 100}{10000^{\text{cm}^2}} = \frac{102}{100} \text{ kgp.} = 1020 \text{ gp.}$$

par cm². Lorsque la pression atmosphérique est de 1 hectopièze ou 1 bar, la hauteur barométrique est :

$$\frac{1020}{13,6} = 75 \text{ cm.}$$

2. — On fait l'expérience de Torricelli avec des liquides de densité de 1,25 et 0,8 ; quelles sont les hauteurs des liquides soulevés ? Hauteur barométrique : 74 cm. Densité du mercure : 13,6. On admet que la chambre barométrique est parfaitement vide.

Solution

Les hauteurs des liquides soulevés par la pression atmosphérique sont inversement proportionnelles aux poids spécifiques de ces liquides.

Si le poids spécifique du liquide est 1,25 gp. par cm³, la hauteur soulevée est :

$$\frac{74 \times 13,6}{1,25} = 805 \text{ cm. ou } 8,05 \text{ m.}$$

Si le poids spécifique du liquide est 0,8 gp. par cm³ la hauteur soulevée est :

$$\frac{74 \times 13,6}{0,8} = 1258 \text{ cm. ou } 12,58 \text{ m.}$$

3. — Deux hémisphères de Magdebourg ont 1 diamètre de 0,40 m., avec quelle force faut-il tirer chacun d'eux pour les séparer quand on a fait le vide entre eux ? La hauteur barométrique est 75 cm. (La poussée sur chaque hémisphère est égale à la poussée s'exerçant sur un cercle de même diamètre.).

Densité du mercure 13,6.

Solution

La pression atmosphérique, évaluée en grammes poids par centimètre carré est de $13,6 \times 75 = 1020$ gp. par cm².

La surface d'un cercle de diamètre égal à celui des 2 hémisphères est de :

$$\pi \times 20^2 = 1256 \text{ centimètres carrés}$$

La poussée atmosphérique sur la surface externe de chaque hémisphère est de :

$$1020 \times 1256 = 1.281.000 \text{ grammes-poids ou } 1.281 \text{ kilogrammes-poids.}$$

Pour séparer les deux hémisphères, il faut tirer chacun d'eux avec une force supérieure à 1281 kilogrammes-poids.

Réponse : 1.281 kilogrammes-poids.

CHAPITRE II

LOI DE MARIOTTE

Nous avons vu que les gaz sont compressibles ; Boyle en Angleterre et l'abbé Mariotte en France ont déterminé la loi suivant laquelle varie le volume d'une masse gazeuse lorsque sa pression augmente.

Pour étudier les variations du volume d'une masse gazeuse avec la pression on se sert de l'appareil de Leblanc.

Il se compose de 2 récipients en verre A et B mobiles le long d'une règle graduée et réunis par un long tube de caoutchouc. Le récipient A est quelconque, le récipient B est un tube cylindrique gradué en centimètres cubes et muni à son extrémité supérieure d'un robinet R (fig. 179).

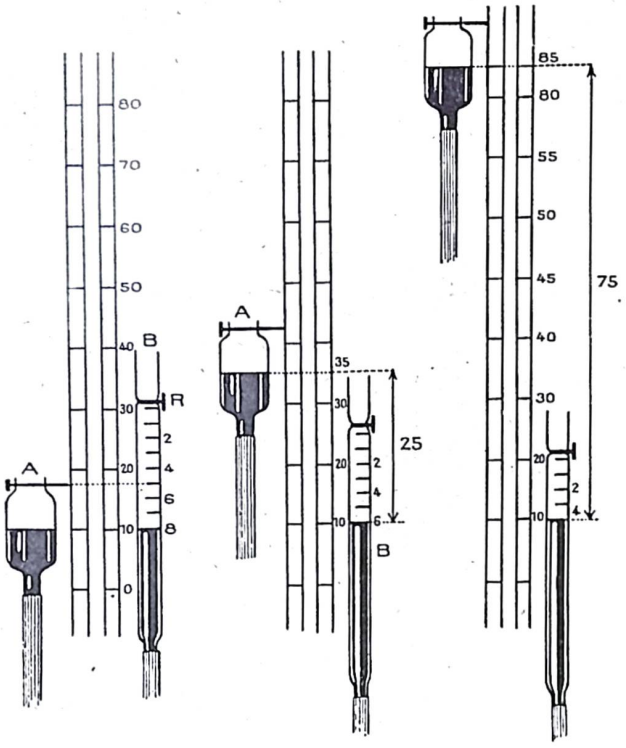


Fig. 179

Expérience. — A et B étant amenés l'un en face de l'autre, on verse du mercure dans A jusqu'à ce que le niveau corresponde à une certaine division de la graduation du tube B (8 par exemple). On ferme alors le robinet R emprisonnant ainsi un volume déterminé d'air (8 cm³) à la pression atmosphérique (75 cm. par exemple).

Ceci fait, on soulève le récipient B, le mercure monte alors dans A. Lorsqu'il est arrivé à la division 6 c'est-à-dire lorsque le volume d'air est réduit à 6 cm³ on note sur la règle graduée la différence des niveaux du mercure dans A et B. On la trouve égale à 25 cm. La pression de l'air est donc

$$25 + 75 = 100 \text{ cm.}$$

On continue à élever le récipient A jusqu'à ce que le volume de l'air soit réduit à 4 cm³ et on note la pression correspondante que l'on trouve égale à

$$75 + 75 = 150 \text{ cm.}$$

On remarque alors que

$$8 \times 25 = 6 \times 100 = 4 \times 150 = 600$$

On peut donc en déduire :

Loi de Mariotte. — *A une même température le produit du volume d'une masse gazeuse par sa pression est constant.*

Autrement dit si P, P_1, P_{11} sont les pressions correspondant respectivement aux volumes V, V^1, V^{11} d'une même masse gazeuse, on a

$$(1) \qquad PV = P_1 V_1 = P_{11} V_{11}$$

En remarquant que $PV = P_1 V_1$

peut s'écrire $$\frac{V}{V_1} = \frac{P_1}{P}$$

On a le 2e énoncé de la loi de Mariotte.

A une même température, les volumes d'une même masse gazeuse sont inversement proportionnels aux pressions qu'elle supporte.

Enfin si D, D_1, D_{11} est la densité, on a :

$$V D = V_1 D_1 = V_{11} D_{11}$$

En divisant membre à membre avec (1)

$$\frac{D}{P} = \frac{D_1}{P_1} = \frac{D_{11}}{P_{11}}$$

d'où 3e énoncé. — *A une même température, les densités absolues ou masses spécifiques d'un gaz sont proportionnelles aux pressions.*

Représentation graphique de la loi de Mariotte (fig. 180).

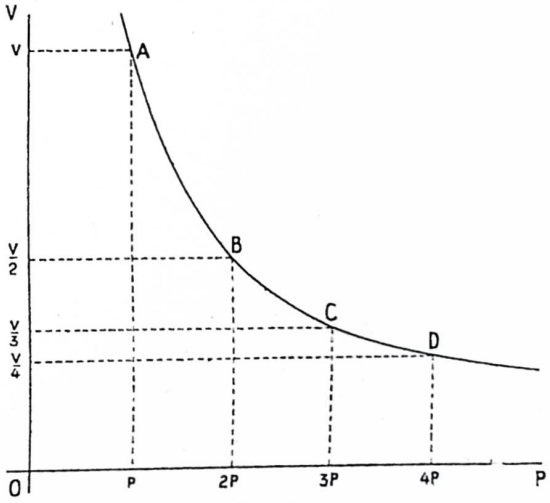


Fig. 180

Portons sur l'axe des abscisses O P les pressions, P, 2 P, 3 P et sur l'axe des ordonnées les volumes correspondants :

$$V, \frac{V}{2}, \frac{V}{3},$$

on obtient la courbe A B C D. (C'est une branche d'hyperbole).

Remarque. — La loi de Mariotte n'est qu'une loi approchée. Desprets et Regnault ont établi que la loi de Mariotte doit être considérée comme une loi limite, dont les différents gaz s'approchent plus ou moins suivant les pressions initiales qu'ils possèdent et suivant leur température. Mais pour tous les gaz éloignés de leur point de liquéfaction (en particulier pour l'air et les gaz appelés jadis gaz permanents) les écarts sont si faibles sous des variations peu considérables de pression

et à la température ordinaire qu'on peut les négliger absolument.

On peut donc appliquer la loi de Mariotte dans la plupart des calculs sur la compressibilité.

Un gaz qui suivrait exactement la loi de Mariotte serait un *gaz parfait*.

L'hydrogène est le plus parfait de tous les gaz.

Si on porte en abcisses les pressions et en ordonnées le produit PV un gaz qui suivrait rigoureusement la loi de Mariotte (un gaz parfait) tracerait une parallèle à l'axe x. La figure 181 montre que l'hydrogène se comprime moins que ne l'indique la loi de Mariotte les autres se compriment d'abord plus, ensuite moins au fur et à mesure que la pression croît.

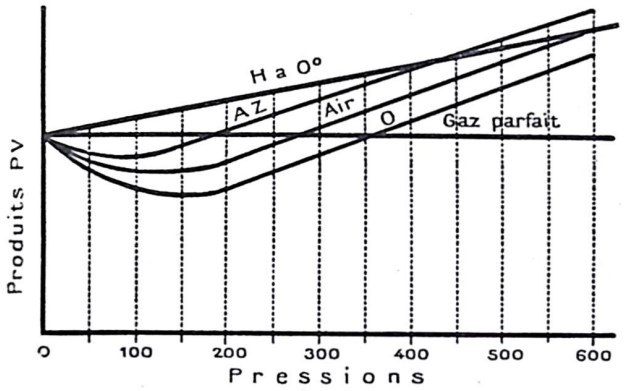


Fig. 181

Mélange des gaz. — Loi de Dalton. — Nous avons vu qu'un gaz tend toujours à occuper tout l'espace qui lui est offert. Cette tendance se manifeste même lorsque l'espace est occupé en même temps par un autre gaz ; l'expérience classique de Berthollet le démontre.

On prend deux ballons, remplis l'un d'hydrogène, l'autre de gaz carbonique (fig. 182); ces ballons, fermés par des robinets A et B, peuvent s'adapter l'un à l'autre au moyen d'un pas de vis. Les deux récipients étant ainsi réunis, on ouvre la communication, après avoir placé le ballon d'hydrogène au-dessus de celui de gaz carbonique.

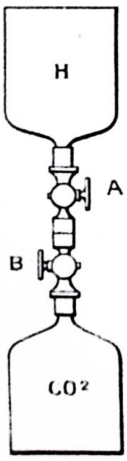


Fig. 182

Au bout d'un certain temps, les deux ballons renferment chacun un mélange homogène de gaz carbonique et d'hydrogène ; pourtant l'hydrogène est un gaz beaucoup plus léger que le gaz carbonique.

Dalton a énoncé la loi suivante : *Dans un mélange de plusieurs gaz, chaque gaz occupe le volume comme s'il était seul et la pression totale est égale à la somme des pressions de chaque gaz considéré comme occupant seul le volume entier.*

Par exemple, introduisons dans un ballon de 10 litres, 6 litres d'azote à la pression de 5 atmosphères et 5 litres d'oxygène à la pression de 3 atmosphères.

Si l'azote occupait le volume seul, sa pression serait, d'après la loi de Mariotte :

$$P = \frac{6 \times 5}{10} = 3 \text{ atmosphères}$$

De même, celle de l'oxygène serait :

$$P_1 = \frac{5 \times 3}{10} = 1{,}5 \text{ atm.}$$

La pression totale est :

$$3 + 1{,}5 = 4{,}5 \text{ atm.}$$

Généralisons : Soient v_1, v_2 v_3 les volumes des gaz mélangés, p_1 p_2 p_3 leurs forces élastiques respectives, V la capacité totale du récipient contenant le mélange et P la pression de ce mélange.

On a :

$$VP = v_1 p_1 + v_2 p_2 + v_3 p_3$$

Remarque. — Si un tube barométrique, renfermant un gaz repose sur une cuve à mercure, la force élastique du gaz contenu dans ce tube est donnée par l'équation

$$n = H - h$$

de laquelle H = pression atmosphérique,
h = hauteur du mercure dans le tube (fig. 183).

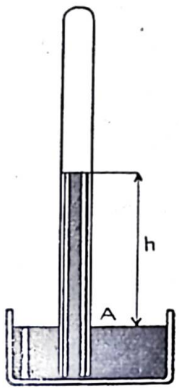


Fig. 183

En effet : On peut écrire qu'en A il y a équilibre entre la pression à l'intérieur du tube et la pression atmosphérique.

$$n + h = H$$

d'où $n = H - h$.

Problèmes.

1. — Dans la chambre barométrique d'un baromètre à cuvette on introduit 2 cm³ d'air sec mesurés sous la pression extérieure de 75 cm. On constate que la hauteur de la chambre barométrique s'abaisse de 6 cm. On demande la hauteur de la chambre barométrique sachant que la section du tube est 1 cm².

Solution

Soit l la longueur de la chambre barométrique. L'air introduit occupe le volume nouveau (l + 6) cm³. La pression nouvelle est 6 cm.

En appliquant la loi de Mariotte, on a :

$$2 \times 75 = (l + 6)\, 6$$

d'ou $l = 19$ cm.

2. — Dans un tube barométrique exactement cylindrique et vertical, la colonne mercurielle s'élève à 70 cm. au-dessus du niveau libre dans la cuvette, et la longueur de la chambre est 6 cm. On soulève le tube de manière que la différence des niveaux soit 72 cm. et que la chambre occupe 10 cm. Quelle est la pression atmosphérique ? (Supposée constante ainsi que la température).

Solution

Soit x la pression extérieure. Représentons par P_1 et par P_2 la pression de l'air dans la chambre barométrique pour les 2 positions successives du tube.

On a :

$$x = 70 + P_1$$
$$x = 72 + P_2$$

Or la loi de Mariotte donne $P_1 V_1 = P_2 V_2$.

On peut donc écrire :

$$P_1 \times 6 \times s = P_2 \times 10 \times s \qquad s : \text{section du tube}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \qquad (1)$$

D'autre part les premières relations nous donnent

$$70 + P_1 = 72 + P_2$$

d'où $P_1 - P_2 = 2$ (2)

En associant 1 et 2 on tire $P_2 = 3$.

La pression cherchée est donc :

$$x = 72 + 3 = 75 \text{ cm. de mercure}$$

3. — Dans une éprouvette cylindrique renversée sur une cuve à mercure est enfermé un volume de gaz de 224 cm³ et la hauteur du mercure dans l'éprouvette au-

dessus de la surface libre de la cuve est de 19 cm. Un baromètre à mercure indique une pression atmosphérique de 76 cm.

1° Quel est le volume qu'occuperait ce gaz sous la pression atmosphérique ?

2° Quelle est la pression du gaz dans l'éprouvette en grammes par cm³ ? densité du mercure 13,6.

Solution

1° Le mercure s'élevant dans l'éprouvette de 19 cm. du dessus de la surface libre de la cuve, la pression du du gaz en cm. de mercure est :

$$76 \text{ cm.} - 19 = 57 \text{ cm.}$$

Si x est le volume demandé, la loi de Mariotte donne

$$24 \times 57 = x \times 76$$
$$\text{d'où } x = 18 \text{ cm}^3.$$

2° La pression du gaz dans l'éprouvette étant de 57 cm. de mercure, la pression du gaz par cm² est :

$$13{,}6 \text{ g} \times 57 = 775{,}2 \text{ g.}$$

4. — Un tube cylindrique semi-capillaire A B est fermé en A, ouvert en B ; un index a b de mercure de 119 mm. de longueur est en équilibre à une distance du fond A a, égale à 163 mm., quand le tube est vertical, l'ouverture en bas ; et à une distance A a égale à 118 mm. quand le tube est vertical, l'ouverture en haut (fig. 184).

Trouver : 1° la valeur de la chambre atmosphérique (en mm. de mercure) ;

2° la longueur A a quand le tube est placé horizontalement. (A. et M. 1916).

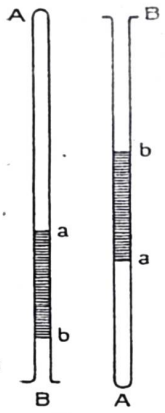


Fig. 184

Solution

Soit x mm. de mercure la pression atmosphérique au moment de l'expérience.

Lorsque le tube est vertical (l'ouverture en bas), la pression de l'air qu'il contient est : x — 119 mm de Hg., et son volume est 163 (en supposant une section égale à l'unité).

Lorsque le tube est vertical (l'ouverture en haut), la pression de la même masse d'air est : x + 119 mm., et son volume est 118.

D'après la loi de Mariotte, on peut écrire :

$$(x - 119) \times 163 = (x + 119) \times 118.$$
$$45\,x = 119\,(163 + 118)$$
$$x = \frac{119 \times 281}{45} = 743 \text{ mm.}$$

2° Si le tube est placé horizontalement, l'air qu'il contient est à la pression atmosphérique 743 mm., et son volume est :

$$\frac{(743 - 119)\,163}{743} \text{ ou } \frac{(743 + 119)\,118}{743} = 137$$

La longueur Aa est alors 137 millimètres.

5. — Un tube cylindrique ouvert aux deux bouts, plonge dans une cuve de mercure. Le niveau du liquide est le même à l'intérieur et à l'extérieur du tube. Un piston ferme le tube à une distance de 10 centimètres de la surface du liquide. De combien faut-il le soulever pour que le mercure monte de 25 centimètres dans le tube, sachant que le baromètre indique, au moment de l'expérience, une hauteur de 75 centimètres.

(B. E. Académie de Caen, 1926).

Réponse : 30 cm.

6. — La chambre d'un baromètre à mercure contient de l'air sec. Dans une première expérience on lit la hauteur 751 millimètres. On enfonce le tube dans la cuvette jusqu'à ce que le volume de la chambre soit réduit au $\frac{1}{5}$ de sa valeur ; la hauteur est alors 740 millimètres. On demande quelle est la hauteur barométrique réelle au moment de l'expérience.

(B. E. Paris, 1926).

Solution

Je suppose x mm. de mercure la pression barométrique réelle.

Dans les 2 cas cette pression est égale à la somme des pressions : 1° de l'air sec ; 2° du mercure :

Mais en vertu de la loi de Mariotte on a :

$$\frac{V}{V'} \quad \frac{H}{H'} ;$$

pour V = 5 : H = 1 (la pression est inversement proportionnelle au volume) ;
pour V' = 1 : H' = 5.

J'établis mes équations :

$$x = 751 + H$$
$$x = 740 + 5\,H$$

d'où $H = \frac{11}{4} = 2{,}75$ mm : c'est la pression de l'air sec dans le 1er cas. En ajoutant la hauteur de Hg., j'ai la pression barométrique réelle :

$$751 + 2{,}75 = 753{,}75 \text{ mm.}$$

7. — Dans la petite branche fermée d'un tube de Mariotte on emprisonne 10 cm³ d'air à la pression extérieure 76 ; le niveau du mercure est en o dans les deux branches (fig. 185) ; puis on verse par la grande branche 25 cm³ de mercure. On demande le nouveau volume et la nouvelle pression du gaz sachant que la section du tube est de 1 cm².

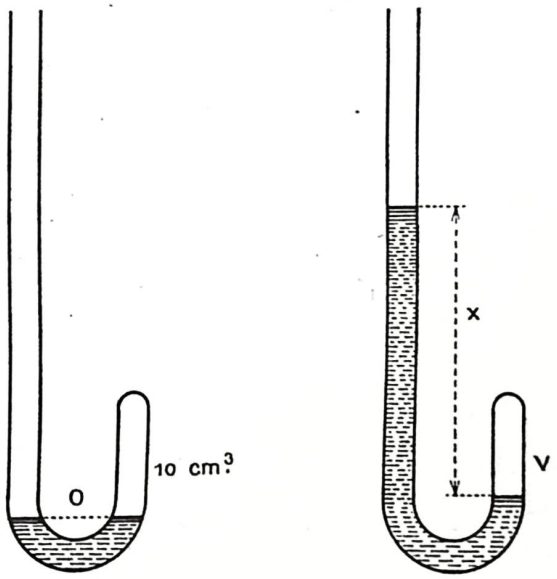


Fig. 185

Solution

Dans le premier cas la pression est mesurée par 76 cm. de mercure ; dans le deuxième cas, elle est de : 76 + x.

Appliquons la loi de Mariotte :

$$(1) \quad 10 \times 76 = V \times (76 + x).$$

Mais le volume du mercure soulevé dans la petite branche sera : $10 - V$

et nous avons : $10 - V + x = 25 \text{ cm}^3$

d'où : (2) $x - P = 25 - 10 = 15$

on en tire : $V = 7{,}5 \text{ cm}^3$

et pression correspondante 101,3 cm.

CHAPITRE III

MACHINES A GAZ

I. Machine pneumatique. — La machine pneumatique est une pompe à gaz destinée à faire le vide dans un appareil. D'une façon générale, l'appareil, (fig. 186) comprend un corps de pompe C communiquant avec une cloche V dans laquelle on veut faire le vide, par un tube T muni d'un robinet R et fermé par une soupape S_1. La cloche V repose sur une surface plane appelée *platine*.

Dans le corps de pompe se meut un piston P dans lequel est ménagé un orifice muni d'une soupape S_2. Quand on soulève le piston, l'atmosphère se raréfie dans le corps de pompe ; la soupape S_2 se ferme sous l'influence de la pression atmosphérique. La soupape S_1 s'ouvre car la pression devient plus forte en V qu'en C

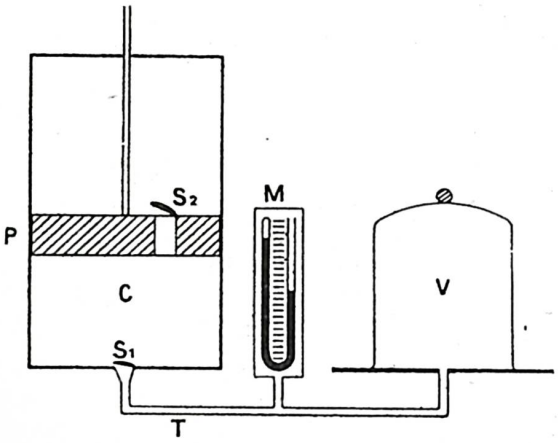


Fig. 186

Quand le piston s'abaisse S_1 se ferme tandis que S_2 s'ouvre ; l'air contenu dans C est expulsé.

Soient V le volume du récipient, C celui du corps de pompe utilisable, H la pression au début de l'expérience. Quand on soulève le piston, le volume de la masse gazeuse d'abord renfermée dans V devient (V + C) tandis que sa pression est H_1 telle que :

$$(V + C)\, H_1 = V\, H \text{ (loi de Mariotte)}$$

D'où :

$$H_1 = \frac{V}{V + C}\, H$$

Le piston étant ramené au bas de sa course, le volume de la masse gazeuse redevient V tandis que la pression reste H_1; après le deuxième coup de piston la pression H_2 est donnée par la formule :

$$(V + C)\, H_1 = V\, H_2$$

d'où :

$$H_2 = \frac{V}{V + C}\, H_1 = \left(\frac{V}{V + C}\right)^2 H$$

Au bout de *n* coups de piston, la pression H_n est :

$$H_n = \left(\frac{V}{V + C}\right)^n H$$

La machine pneumatique comporte généralement un manomètre tronqué M qui permet de suivre la marche de la pression.

Lorsque la pression diminne dans le corps de pompe, il devient de plus en plus difficile de manœuvrer le piston ; pour éviter cet inconvénient, on se sert généralement de machines à deux corps de pompe de sorte qu'un piston monte lorsque l'autre descend (fig. 187) ou de machines dans lesquelles le corps de pompe est à double effet.

Au point de vue théorique, une machine pneumatique peut donner une pression nulle. Deux circonstances empêchent la machine d'obtenir ce résultat. Ce sont d'abord les fuites qui se produisent dans les différents joints de l'appareil et particulièrement aux soupapes.

De plus, même si l'on parvient à supprimer les fuites, on ne peut empêcher qu'il reste entre le fond du corps de pompe et le piston un petit espace vide lorsque le piston arrive au bas de sa course ; c'est ce qu'on appelle *l'espace nuisible*. L'air contenu dans cet espace n'est jamais chassé. Il arrive un moment où la pression dans le récipient est si faible que l'air contenu dans cet espace n'a plus une pression supérieure à la pression atmosphérique ; à ce moment, la soupape du piston ne fonctionne plus et n'extrait plus d'air de l'appareil. Si *u* est le volume de l'espace nuisible, la pression limite H_e est :

$$H_e = \frac{u}{C}\, H$$

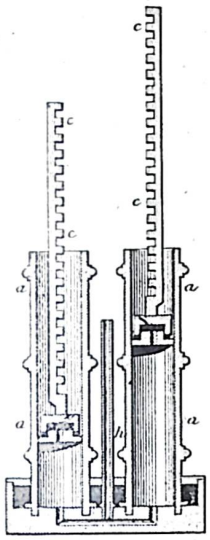


Fig. 187

Trompe à mercure. — La trompe à mercure permet de faire un vide presque absolu. Elle se compose d'un tube en S dont une des courbures est un tube en caoutchouc. L'extrémité tournée vers le haut est pourvue d'un entonnoir ; l'autre, tournée vers le bas, s'ouvre au-dessus d'un récipient quelconque destiné à recueillir le mercure. La courbure rigide du tube, tournée vers le haut, est mise en communication avec le récipient dans lequel on veut faire le vide (fig. 188).

Quand on verse du mercure dans l'entonnoir, il s'écoule par le tube en S et vient tomber dans la coupelle. Mais en passant en face du tube du récipient, il est divisé par l'air en une série de petits cylindres. Ceux-ci agissent comme des pistons et chassent l'air qui les précède. Ici les fuites sont faciles à éviter et il n'y a pas d'espace nuisible. Le tube de caoutchouc permet de régler l'écoulement du mercure au moyen d'une pince.

Trompe à eau. — La trompe à eau se compose de deux cônes de verre dont les orifices sont à faible distance (fig. 189). Lorsque l'eau arrive sous pression suffisante, il se produit une aspiration d'air.

Ces appareils sont très utilisés car ils donnent une raréfaction rapide ; celle-ci est limitée par la tension de vapeur d'eau correspondant à la température à laquelle on opère.

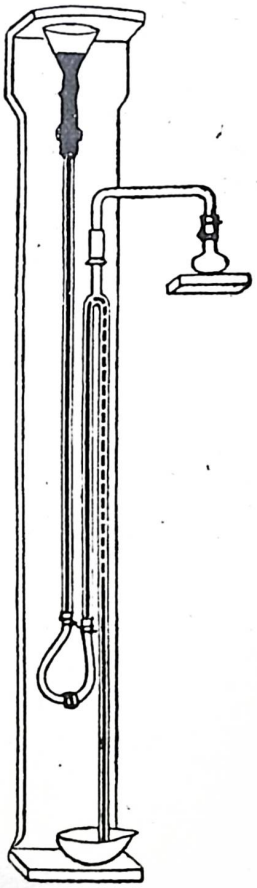


Fig. 188

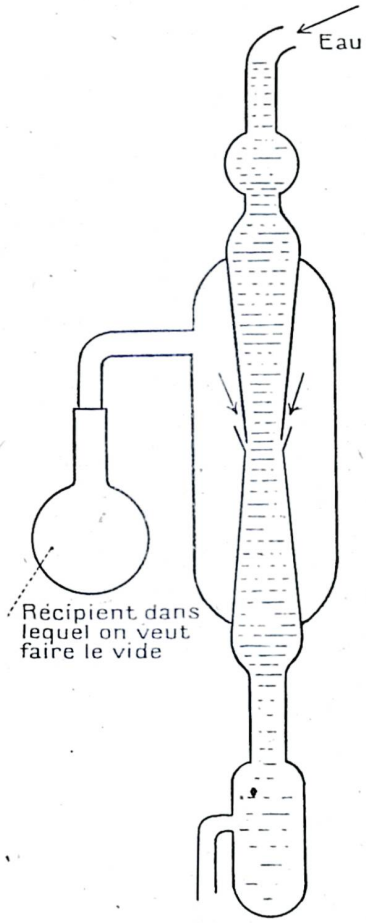


Fig. 189

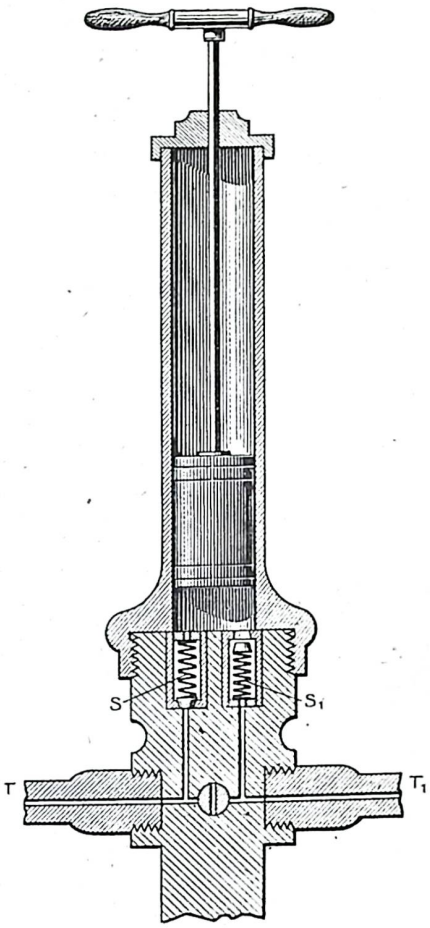


Fig. 190

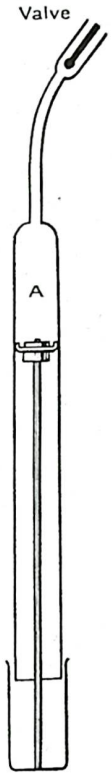


Fig. 191

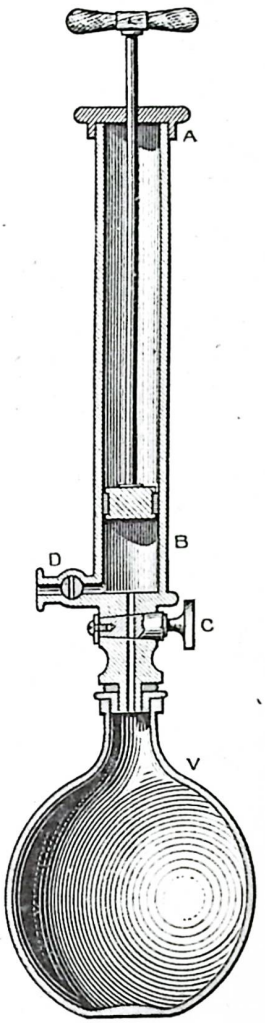


Fig. 192

II. Pompe de compression. — Ce sont des machines destinées à comprimer l'air dans un récipient. Il suffit de renverser le jeu des soupapes d'une machine pneumatique pour la transformer en machine de compression. On emploie fréquemment des machines de compression dites *pompes à main* (fig. 190). Ce sont par exemple celles dont on se sert pour gonfler les pneumatiques de bicyclettes ou d'automobiles (fig. 191).

Pompe à bicyclette. — Le piston est constitué par une rondelle de cuir dont les bords sont amincis. Pendant la montée l'air appuie sur les parois du corps de pompe tandis que pendant la descente il laisse pénétrer l'air dans la partie supérieure A. Le pneumatique est muni d'une valve qui joue le rôle de soupape.

Il est facile de calculer l'augmentation de la pression à chaque coup de piston en supposant la pompe parfaite (fig. 192).

Soient V le volume du récipient, C le volume du corps de pompe A B et H la pression initiale dans le récipient.

Supposons le piston en A, en haut de sa course. L'air qui remplit le corps de pompe est à la pression atmosphérique, 76 cm. Si on amène le piston au bas de sa course en D, on fait pénétrer tout l'air contenu dans le corps de pompe dans le récipient V ; il acquiert une pression H_1 :

$$H_1 = H + \frac{C}{V} \times 76$$

A chaque coup de piston, la pression augmentera de la même valeur ; au bout de *n* coups de piston, la pression sera donc :

$$H_n = H + n \frac{C}{V} \times 76$$

Ici encore l'espace nuisible empêche d'atteindre ce résultat théorique. Il arrive un moment où, en comprimant dans l'espace nuisible tout l'air que renferme le corps de pompe, on ne dépasse pas la pression de l'air contenu dans le récipient. A partir de ce moment, la soupape du récipient cesse de fonctionner ; l'air n'y rentre plus.

Application des gaz comprimés. — Le *soufflet* qui constitue une pompe soufflante sert à activer les combustions (fig. 193).

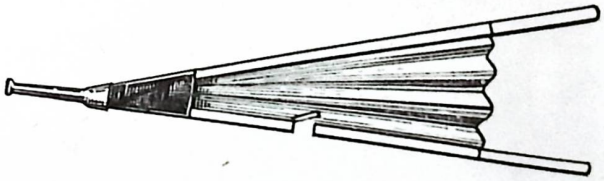


Fig. 193

Le *télégraphe pneumatique* se compose de tubes souterrains dans lesquels on peut faire pénétrer des pistons creux contenant des dépêches à expédier. On comprime de l'air d'un côté de ces pistons, ou bien on fait le vide de l'autre côté et les boîtes (fig. 194) sont ainsi poussées d'une station à l'autre.

La *cloche à plongeur* dont le principe peut être montré par la figure 195, est une enceinte métallique ouverte par le bas et qu'on immerge aux endroits où l'on veut

travailler au fond de l'eau. On injecte dans la cloche de l'air comprimé qui refoule l'eau et maintient les ouvriers à sec dans une atmosphère constamment renouvelée.

Des *freins* de wagons de chemin de fer ou de tramways, des *moteurs*, des *horloges*, etc. sont actionnés par de l'air comprimé.

Les *scaphandriers* reçoivent l'air dont ils ont besoin au moyen de pompes de compression, etc.

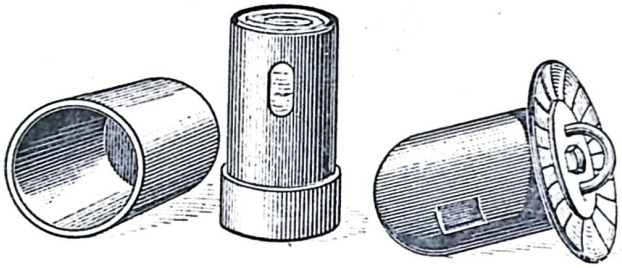


Fig. 194

Problèmes

1. — Le corps de pompe d'une machine pneumatique a un volume de 1,5 l. et le récipient un volume de 6 litres. La longueur de la course du piston est 30 centimètres. A quelle hauteur dans le corps se trouvera le piston au moment de l'ouverture de la soupape d'échappement aux 1er, 2e, 3e, etc. coups de piston ?

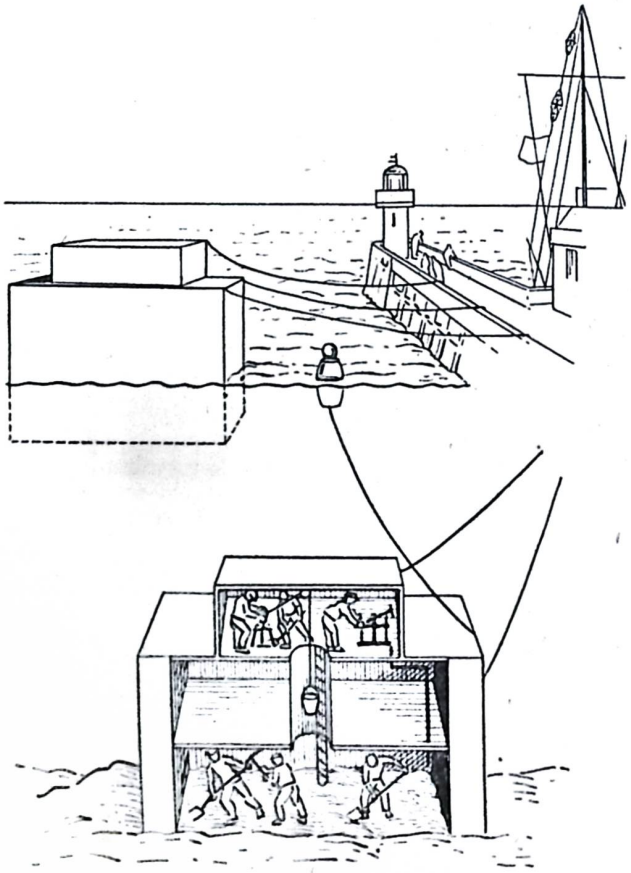


Fig. 195

Réponses ..... 24 *cm de la base.* 19,2 *cm de la base.* 15,36 *cm de la base.* $30 \times \left(\frac{4}{5}\right)$ n. *de la base.*

2. — Une pompe de compression a un volume de 320 cm³. Combien faut-il donner de coups de piston pour comprimer l'air à 4 atmosphères (pression effective) dans un réservoir de 6 litres de capacité ? Pression atmosphérique : 75 centimètres de mercure (1 atmosphère = 76 centimètres).

Solution

A chaque coup de piston, il entre dans le réservoir 320 cm³ d'air à la pression :

$$\frac{75 \times 320}{6.000} = 4 \text{ centimètres de mercure}$$

4 atmosphères = 76 × 4 = 304 centimètres de mercure.

Nombre de coups de piston ?

$$\frac{304}{4} = 76 \text{ coups.}$$

Réponse : 76 *coups de piston.*

3. — Avec une machine pneumatique dont le corps de pompe mesure 2 litres, on fait le vide dans un récipient de 8 l. d'air à la pression 75 cm. Que devient la pression dans ce récipient après 1, 2, 3 coups de piston ?

Solution

Soient x_1, x_2, x_3 les pressions après 1, 2 et 3 coups de piston. Après avoir soulevé le piston pour la 1ère fois, l'air emprisonné sous un volume de 8 l. à la pression 75 cm. occupe un volume de 10 l. à la pression x_1. D'après la loi de Mariotte, on a :

$$10 \times x_1 = V \times 75$$

d'où $$x_1 = \frac{75}{10} \times V = 60 \text{ cm.}$$

Quand on abaisse le piston, 2 l. s'échappent, mais la pression reste à 60 cm. dans le récipient.

Après avoir soulevé le piston pour la 2e fois, l'air emprisonné sous un volume de 8 l. à la pression 60 cm. occupe un volume de 10 l. à la pression x_2.

La loi de Mariotte donne :

$$10 \times x_2 = V \times 60$$

$$x_2 = \frac{8 \times 60}{10} = 48 \text{ cm.}$$

On trouve de même :

$$x_3 = \frac{48 \times 8}{10} = 38{,}4 \text{ cm.}$$

Réponses : 38,4 cm. ; 48 cm. ; 60 cm.

4. — Une pompe de compression à simple effet, actionnée par un volant, a une cylindrée de 11 litres. On se propose de charger d'air comprimé à 3,5 kgp/cm² un réservoir métallique vide d'air formé d'un cylindre de 1 m. de rayon et de 5,²/₃ m. de longueur terminé à ses deux extrémités par une demi-sphère. En combien de temps, le réservoir sera-t-il chargé si le volant tourne à raison de 25 tours par minute ? Prendre $\pi = \frac{22}{7}$ et H = 1 kg-p/cm².

Solution

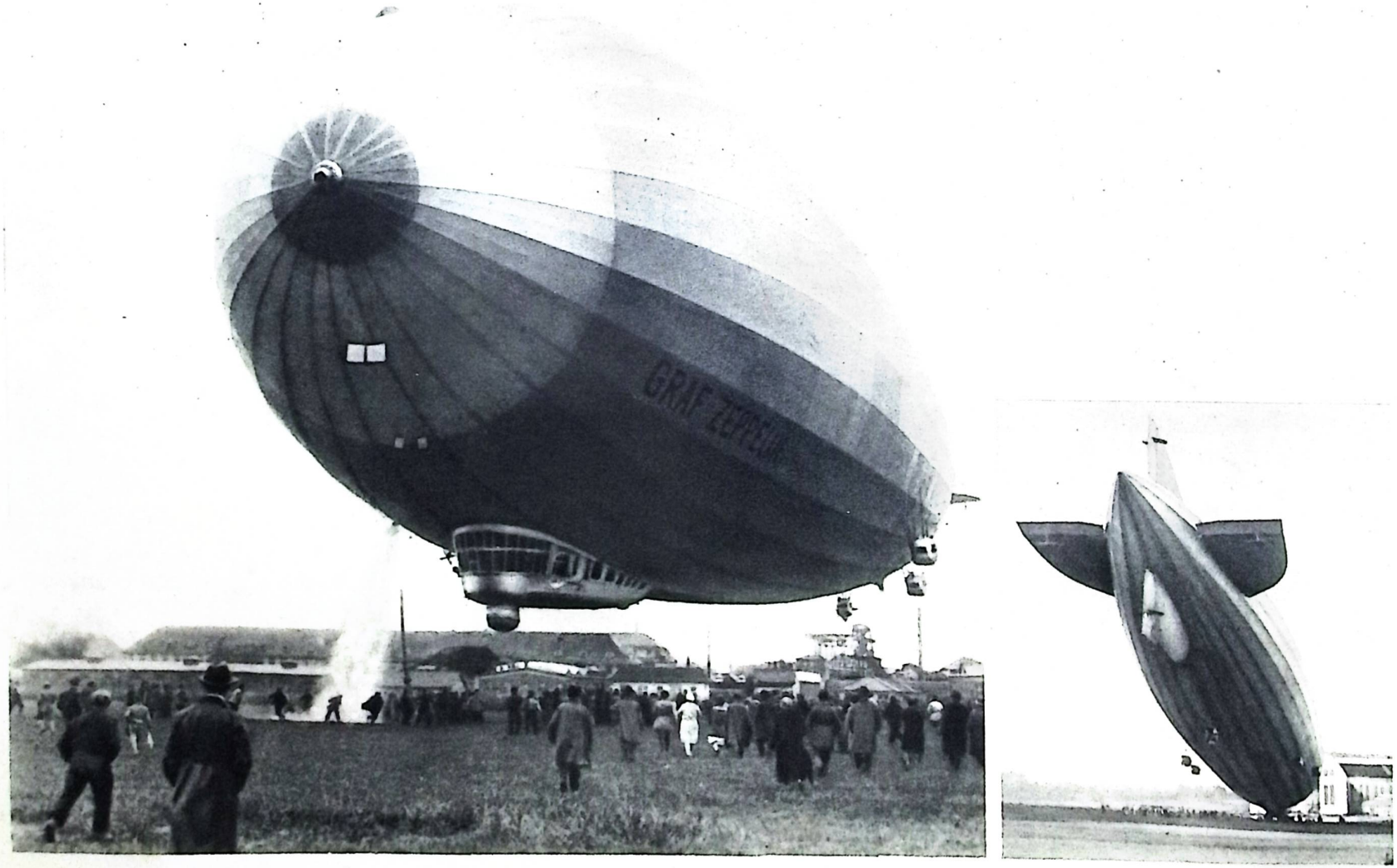
Le volume du réservoir est de

$$\frac{22}{7} \times 1^2 \times 5\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 1^3 = 22 \text{ m}^3$$

A chaque tour de volant, 11 litres d'air à la pression H pénètrent dans le réservoir de 22.000 litres et y exercent une pression H' donnée par la relation

$$22.000 \times H' = 11 \times H$$

ou $$H' = \frac{H}{2.000}$$



(Ph. communiquée par les Chemins de fer allemands)

LE GRAF ZEPPELIN

Le dirigeable allemand de la firme Zeppelin est le plus grand aéronef construit jusqu'à ce jour dans le monde. Sa longueur de 235 mètres, son diamètre de 30 mètres et surtout sa rigidité ont assuré la grande sécurité qui lui a permis de faire le tour de la terre en août 1929, entraîné par cinq moteurs de cinq cent cinquante chevaux à une vitesse moyenne de 117 kilomètres à l'heure.

En appelant n le nombre de tours de volant nécessaires pour que la pression intérieure s'élève à 3,5,

on a : $$\frac{H}{2.000} \times n = 3{,}5\ H$$

d'où : $n = 7.000$ tours.

A raison de 25 tours par minute, le temps demandé est de :

$$1\ \text{m.} \times \frac{7.000}{25} = 280\ \text{m. ou } 4\ \text{h. } 40\ \text{minutes.}$$

Réponse : 4 heures 40 minutes.

CHAPITRE IV

POMPES A LIQUIDES

Les pompes à liquides sont des appareils destinés à élever un liquide d'un niveau inférieur à un niveau supérieur.

On distingue : la **pompe aspirante**, la **pompe foulante**, la **pompe aspirante et foulante.**

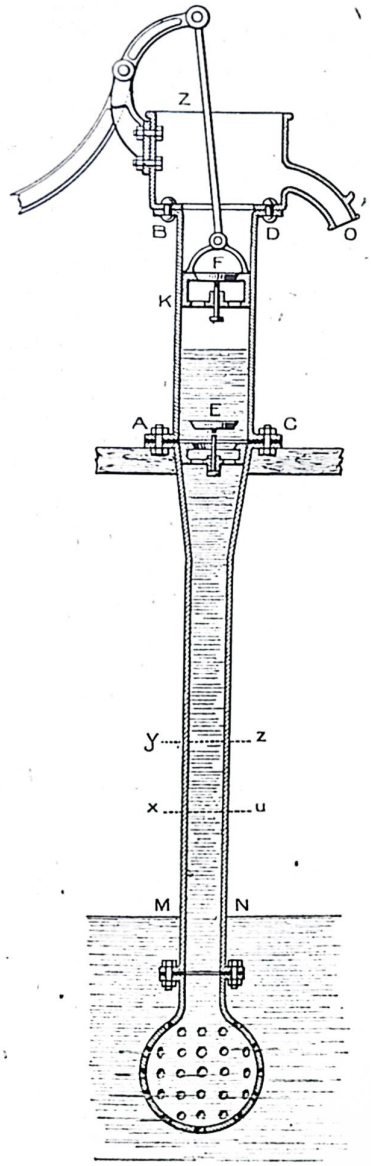


Fig. 196

Pompe aspirante. — La pompe aspirante (fig. 196 et 197), se compose d'un tuyau B D M N qui plonge dans le liquide à élever, dans une nappe d'eau au fond d'un puits, par exemple. Ce tuyau possède une partie large A C D B qui constitue le *corps de pompe*. Ce corps de pompe est fermé à sa partie inférieure par une soupape E, qui cède à la pression de bas en haut. Dans le corps de pompe se meut un piston actionné par une tige et un levier Z. Le piston K est muni d'une soupape F qui cède à la pression de bas en haut.

Supposons d'abord le piston en haut de sa course. Quand on l'abaisse pour l'amener sur A C, la soupape E reste fermée et la soupape F s'ouvre sous la pression de l'air renfermé dans le corps de pompe. L'appareil fonctionne comme une machine pneumatique. Quand le piston se relève, la soupape F se ferme, l'air du corps de pompe augmente de volume et l'air contenu dans le tuyau est aspiré à son tour par la soupape E. Mais la pression atmosphérique qui s'exerce à la surface de la nappe d'eau, oblige alors le liquide à s'élever dans le tuyau, jusqu'au niveau *u x* par exemple. Un second coup de piston fera monter l'eau au niveau *y z* et ainsi de suite. Au bout d'un certain temps, le liquide passera lui-même au travers de la soupape E et quand le piston s'abaissera il plongera dans l'eau. En se relevant, il poussera l'eau au dehors par l'orifice O. Une fois la pompe amorcée, on tire de l'eau à chaque coup de piston.

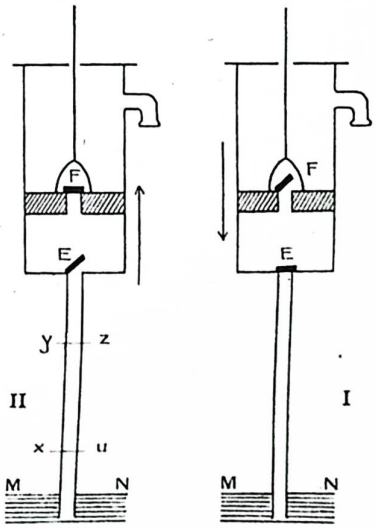


Fig. 197

Cette pompe ne fonctionne plus si la distance A M dépasse la hauteur de la colonne liquide qui fait équilibre à la pression atmosphérique. Par exemple, pour l'eau la hauteur ne doit pas être de plus de 10 mètres. Pratiquement 7 à 8 mètres à cause des fuites.

Pompe foulante. — La pompe foulante (fig. 198) se compose essentiellement d'un corps de pompe C entièrement plongé dans le liquide et sur le côté duquel est adapté un tuyau d'ascension T portant à sa base une soupape F ouvrant dans son intérieur.

Le corps de pompe est muni à sa base d'une soupape E. Le piston P est plein.

Supposons le piston en bas de sa course. Quand il monte, la soupape E s'ouvre et F reste fermée, l'eau pènètre alors dans le corps de pompe. Quand il descend, la soupape E se ferme tandis que F s'ouvre et une partie de l'eau du corps de pompe passe dans le tuyau.

L'eau est donc ainsi élevée dans le tuyau à une hauteur qui n'a d'autres limites que la pression exercée sur le piston et la solidité de l'appareil.

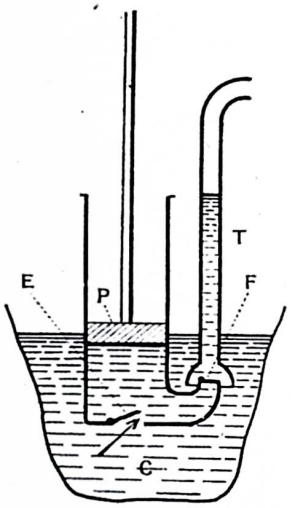


Fig. 198

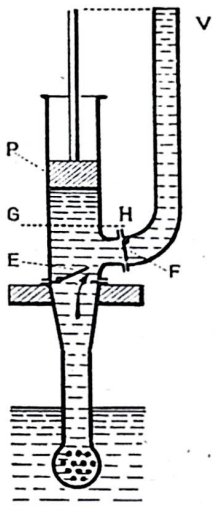


Fig. 199

Pompe aspirante et foulante (fig. 199). — Dans cette pompe, le corps G H fonctionne tour à tour comme celui d'une pompe aspirante et comme celui d'une pompe foulante. Le piston P est plein, sans soupape. En montant, il aspire le liquide dans le corps de pompe en soulevant la soupape E. En descendant, il oblige la soupape E à se fermer et la soupape F à s'ouvrir, et il chasse l'eau dans la conduite V.

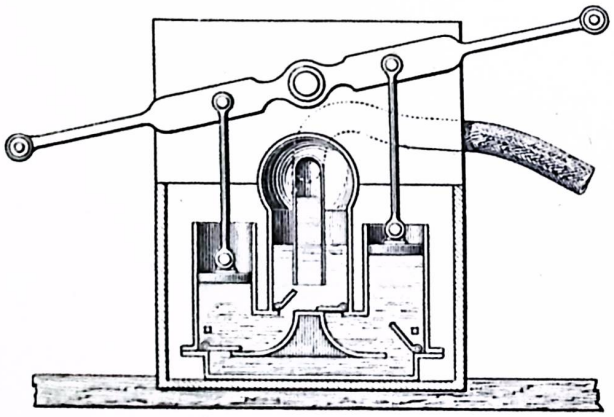


Fig. 200

Pompe à incendie. — La pompe à incendie est une pompe aspirante et foulante à deux pistons *a a* (fig. 200). Chacun des corps de pompe fonctionne exactement comme nous venons de l'expliquer. Les pistons sont mus par un levier commun qui les soulève et les abaisse alternativement. L'eau est chassée dans un réservoir central *e* dans lequel plonge la conduite *d* en communication avec les tuyaux et qui contient de l'air à sa partie supérieure. Cet air est comprimé par l'eau quand celle-ci s'élève dans le réservoir et cette compression a pour effet de régulariser le mouvement de l'eau et d'empêcher que les coups de piston fassent danser le jet.

SIPHONS

Définition. — On appelle siphons des instruments destinés à transvaser les liquides.

Un siphon est constitué par un tube recourbé à branches inégales.

Pour le faire fonctionner, on plonge la petite branche dans le liquide et on aspire par la grande branche de façon à remplir le siphon qui est alors *amorcé*. Si l'on cesse d'aspirer, le liquide s'écoule d'une manière continue.

Théorie du siphon. — Supposons le siphon amorcé, la pression qui s'exerce en A à l'orifice du tube est égale à la pression atmosphérique H, augmentée de la hauteur *h* du liquide du vase au-dessus du point A. (fig. 201). Cette pression est contrariée par la pression inverse exercée par la colonne d'eau B A ; cette dernière pression est mesurée par la différence de niveau *r* de A et de B. La différence des pressions en A est donc :

$$H + h - r \qquad (1)$$

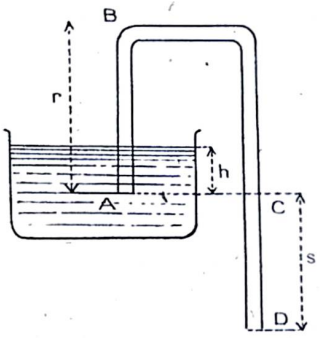


Fig. 201

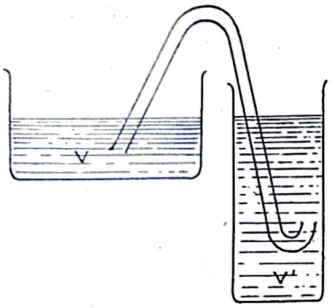


Fig. 202

En D s'exerce d'une part la pression atmosphérique H, d'autre part la pression de la colonne d'eau B D mesurée par la différence de niveau B C = B A = *r* augmentée de la différence de niveau de C et de D soit *s*. La différence des pressions en D est donc :

$$H - r - s \qquad (2)$$

Si on prend la différence des expressions (1) et (2) on obtient :

$$H + h - r - H + r + s = h + s$$

Il existe donc entre A et D, et en faveur de A, une différence de pression égale à $h + s$. La conséquence c'est que le liquide est poussé dans le sens A B C D et se met en mouvement pour s'écouler en D.

Remarque I. — Au fur et à mesure que le vase V se vide la hauteur $h + s$ diminue et la vitesse d'écoulement décroît progressivement.

On pourrait encore expliquer le fonctionnement du siphon de la façon suivante :

Le siphon amorcé peut être considéré comme un tube faisant communiquer 2 vases V et V'. (fig. 202).

Il y aura donc écoulement du liquide de V dans V' jusqu'à ce que les niveaux de ce liquide dans les 2 vases soient sur un même plan horizontal.

Détails de construction. — Pour éviter d'absorber du liquide en amorçant le syphon, on construit des siphons du type représenté sur la figure 203.

L'appareil est muni d'un petit tube latéral E par lequel on aspire le liquide. Il est rare que ce dernier puisse remonter jusqu'en E, par suite de l'aspiration. On munit aussi le siphon d'un robinet D qui permet d'arrêter l'écoulement du liquide à volonté. Le siphon une fois amorcé le reste indéfiniment, tant qu'il y a du liquide dans le vase.

Cet appareil est très employé dans l'industrie ou dans les laboratoires de chimie pour vider des récipients non munis de robinet.

La figure 204 représente un vase de Tantale.

Ce siphon permet d'expliquer le fonctionnement des fontaines et des sources intermittentes.

En effet, une fois que le siphon est désamorcé, il faut attendre que le bassin se remplisse à nouveau pour obtenir l'écoulement du liquide.

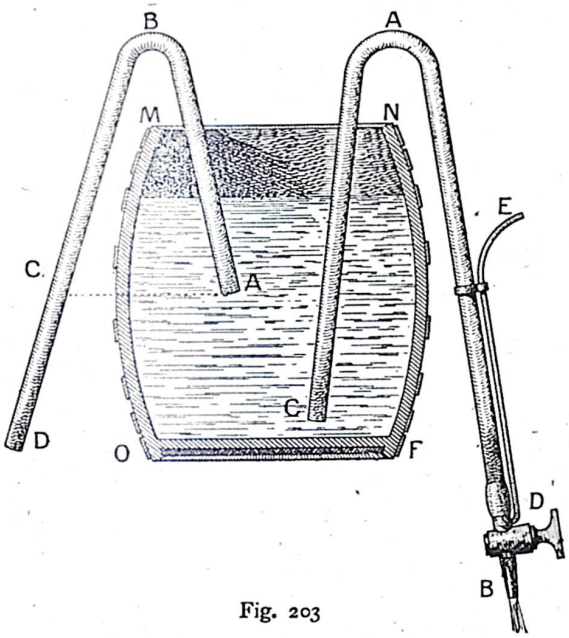


Fig. 203

Remarque. — Une corde, une mèche de coton peuvent servir de siphon. Il suffit de plonger cette corde ou cette mèche dans un vase plein d'eau de manière que l'extrémité hors du vase soit à un niveau moins élevé que l'autre. L'eau s'écoule goutte à goutte par cette extrémité (fig. 205). Ce procédé est souvent employé *pour filtrer* des liquides troubles.

Le fonctionnement de cet appareil est dû aux phénomènes de capillarité.

Problème

1. — Un vase large contient de l'eau jusqu'à un niveau invariable A B. Dans ce vase plonge la petite branche d'un siphon C D E rempli d'huile de densité 0,9 à partir du niveau A B de l'eau jusqu'à l'extrémité E.

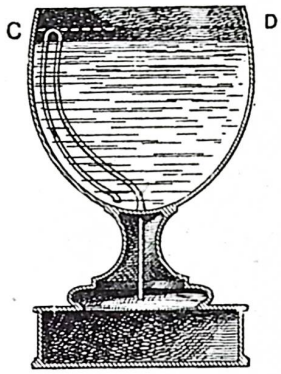


Fig. 204

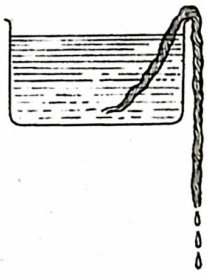


Fig. 205

La hauteur verticale C D de la petite branche depuis le niveau de l'eau jusqu'au point le plus élevé du siphon est 1 m. :

1° Quelle condition doit remplir la hauteur verticale D E = x de la grande branche pour que l'eau du vase puisse s'élever jusqu'en D ?

2° Cette condition supposée remplie, est -elle suffisante pour que le siphon s'amorce ?

Pression extérieure mesurée par 76 cm. de mercure.

Solution

1° Pour que l'eau du vase puisse s'élever jusqu'en D nous devons avoir : $x \times 0{,}9 = 1 \times 1$

d'où :

$$x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11 \text{ m.}$$

2° Pour que le siphon s'amorce, il faut que la pression exercée par le liquide en E soit supérieure à la pression atmosphérique ; si $x = 1{,}11$ m, les pressions en C et E sont les mêmes ; il faudra donc que x soit supérieur à 1,11 m pour que le liquide s'écoule.

CHAPITRE V

CAPILLARITÉ

On entend par *phénomènes de capillarité*, des phénomènes qui se produisent dans des tubes de petit diamètre et qui semblent en opposition avec les lois de l'hydrostatique (fig. 206).

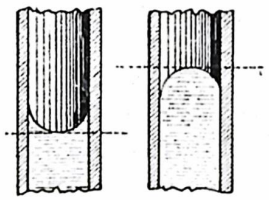


Fig. 206

Quand un liquide en équilibre est renfermé dans un tube d'un très petit diamètre interne, sa surface libre, au lieu de prendre la forme d'un plan horizontal, s'incurve et prend celle d'un *ménisque* concave ou convexe.

Si le liquide mouille les parois du tube, sa surface se creuse et forme un ménisque concave, comme on le voit sur la figure de gauche. Si le liquide ne mouille pas les parois du tube, sa surface se renfle et forme un ménisque convexe (figure de droite).

Ascensions capillaires. — Quand un liquide mouille les parois d'un tube, il monte dans ce tube plus haut que ne l'indiquent les lois de l'hydrostatique. Par exemple, si on plonge un tube de verre dans un vase plein d'eau, l'eau monte dans ce tube au-dessus du niveau de l'eau dans le vase ; en même temps le liquide se relève extérieurement le long des parois du tube (fig. 207).

Ces ascensions capillaires sont régies par la loi suivante :

Pour un même liquide l'ascension capillaire est en raison inverse du diamètre du tube.

On remarque du reste que la valeur de l'ascension capillaire dépend de la nature du liquide.

Dépressions capillaires. — Quand un liquide ne mouille pas les parois d'un tube, il reste, dans ce tube, au-dessous du niveau que sembleraient lui assigner les lois de l'hydrostatique. Par exemple, si on plonge un

tube de verre ouvert aux deux bouts dans un vase rempli de mercure, le mercure reste dans le tube au-dessous du niveau du liquide dans le vase ; le ménisque est convexe, et, de plus, le mercure est déprimé dans le vase autour du tube (fig. 208).

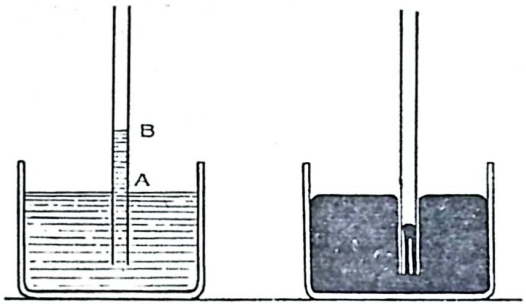


Fig. 207 Fig. 208

La loi qui régit les dépressions capillaires est la même que pour les ascensions.

Phénomènes divers dus à la capillarité. — Entre des lames parallèles placées à une petite distance l'une de l'autre, l'eau monte au-dessus du niveau général. Dans les corps poreux l'eau s'élève en les imprégnant, parce que les vides du corps poreux fonctionnent comme des tubes très fins. On dit que le corps *boit* les liquides. C'est ainsi que fonctionnent : une éponge, un biscuit, la mèche d'une lampe, etc. Les vaisseaux capillaires des végétaux absorbent aussi l'eau du sol d'une façon analogue.

Corrections de capillarité. — Dans la lecture des indications des appareils de physique, il faut tenir compte de la capillarité. Par exemple, dans les baromètres, on doit tenir compte de ce que la hauteur du mercure dans le tube est inférieure à ce qu'elle devrait être en vertu des lois de l'hydrostatique.

CHAPITRE VI

PRINCIPE D'ARCHIMÈDE APPLIQUÉ AUX GAZ

BALLONS

Le principe d'Archimède s'applique non seulement aux liquides, mais aux gaz. On peut le montrer au moyen des deux expériences suivantes :

1° *Baroscope.* — Deux boules A et B de volumes différents sont reliées par une branche rigide mobile autour d'un point C ; les deux boules se font équilibre dans l'air (fig. 209). On les place sous la cloche d'une machine pneumatique et on fait le vide. L'équilibre est rompu dans le sens de la flèche. En effet, la poussée exercée par l'air était plus forte sur la boule A que sur la boule B.

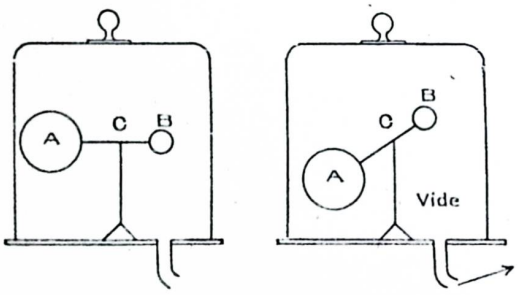


Fig. 209

2° *Expérience de Terquem.* — Une boule A pleine est suspendue sous l'un des plateaux P d'une balance et on fait la tare de manière à rétablir l'équilibre de la balance dans l'air. La boule est entourée par un manchon B dans lequel on fait arriver de l'hydrogène ; ce gaz étant moins dense que l'air, la poussée exercée sur la boule est plus faible et l'équilibre est rompu dans le sens de la flèche (fig. 210) ; si nous faisons arriver du gaz carbonique au lieu d'hydrogène, l'équilibre est rompu dans l'autre sens, car le gaz carbonique est plus dense que l'air.

Des expériences précises ont permis d'énoncer le principe suivant :

Tout corps plongé dans un fluide en équilibre reçoit de la part de ce fluide une poussée verticale dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé et appliquée au centre de gravité du fluide déplacé.

Applications à la correction des pesées faites dans l'air. — Les masses marquées utilisées sont étalonnées dans le vide. Dans l'air, ces masses ainsi que le corps à peser subissent des poussées qui naturellement sont inégales puisque les volumes d'air qu'ils déplacent sont différents.

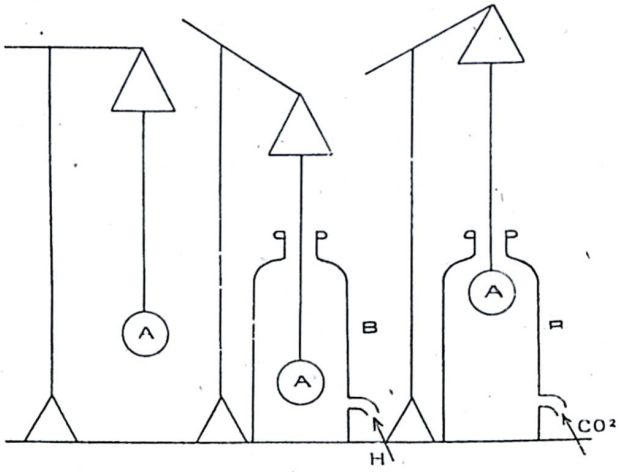


Fig. 210

Désignons par P le poids du corps dans le vide, c'est-à-dire son poids réel, par p le poids de l'air déplacé, par V son volume, par P_1 le poids ou masses marquées de volume V_1 et par p_1 le poids de l'air déplacé par ces masses.

Pratiquons la double pesée (fig. 211) ; le poids apparent du corps est égal au poids apparent des masses marquées.

On a donc :

$$P - p = P_1 - p_1$$

d'où :

$$P = P_1 - p_1 + p.$$

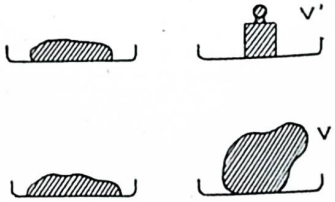


Fig. 211

Comme en un même lieu les corps de même poids ont aussi même masse, il vient

$$M = M_1 - m_1 + m$$

M, M_1, m_1, m étant les masses correspondantes aux poids P, P_1, p, p_1.

En remarquant que $p = a V$

$$p_1 = a V_1$$

A étant la masse spécifique de l'air on peut écrire :

$$M = M_1 - a V_1 + aV$$
$$\text{ou } M = M_1 + a (V - V_1)$$

La masse réelle d'un corps est donc égale à la masse apparente augmentée du poids d'un volume d'air égal à la différence des volumes du corps et des masses marquées.

Remarque. — Si la densité du corps à peser est supérieure à celle des masses marquées, $V - V_1$ est négatif. Si la densité du corps à peser est inférieure à celle des masses marquées. $V - V_1$ est positif.

Ballons. — Les ballons sont une application du principe d'Archimède. Une enveloppe d'étoffe imperméable aux gaz est remplie d'un gaz plus léger que l'air, de l'hydrogène ou du gaz d'éclairage, par exemple. Le poids de l'air déplacé par le ballon étant supérieur au poids du gaz que celui-ci contient, le ballon subit de bas en haut une poussée égale à l'excès du poids de l'air déplacé sur le poids du gaz dont il est gonflé. *Cette poussée, diminuée du poids de l'enveloppe, de la nacelle et des cordages, est la force ascensionnelle du ballon.* Si l'on désigne par P le poids de l'air déplacé, par p le poids du gaz et par p_1 le poids des accessoires et de l'enveloppe, la force ascensionnelle est

$$F = P - (p + p_1)$$

D'après les observations de Mariotte et de Pascal, on sait que la pression atmosphérique diminue à mesure qu'on s'élève au-dessus du sol, et qu'à une même température le poids spécifique d'un gaz varie en proportion de la pression qu'il supporte.

On a pu dresser un tableau qui indique les pressions atmosphériques correspondant à l'altitude, en prenant comme point de départ la pression de 760 millimètres de mercure au bord de la mer :

Pression barométrique	Altitude à 20 m près
760 mm.	0 m.
745	160
730	300
715	490
700	650
650	1250
600	1900
500	3300

De plus, la température décroît lorsqu'on s'élève dans l'air ; par exemple, pour 20° au bord de la mer, il n'y a plus que 6° à 3.300 mètres d'altitude.

Il s'en suit qu'un ballon, étant entièrement gonflé au départ, perd de sa force ascensionnelle en s'élevant. Il arrivera un moment où, pour continuer à monter, il devra jeter du lest, d'où nécessité pour l'aéronaute d'emmener avec lui un certain nombre de sacs de sable.

De nombreuses influences accidentelles sont à redouter : la pluie, la neige, la rosée, le soleil, le passage du jour à la nuit.

Le ballon sphérique est à peu près abandonné, mais l'armée utilise des ballons captifs de forme allongée pour l'observation.

On se sert également de ballons-sondes, sans aéronautes, pour connaître les températures et les pressions aux hautes altitudes.

Ballons dirigeables. — Le ballon dirigeable peut se déplacer suivant une direction déterminée ; pour cela, la nacelle porte un moteur actionnant une hélice et un système de gouvernails.

Le moteur doit être capable de donner à l'appareil une vitesse supérieure à celle du vent ; il est donc nécessaire d'avoir un moteur puissant. Le ballon doit être d'un assez grand volume et est toujours gonflé à l'hydrogène. Pour offrir le moins de résistance à l'avancement, il faut que le dirigeable soit de forme allongée, le rapport entre la longueur du ballon et son plus grand diamètre varie entre 4 et 7. Il doit être de forme invariable, pour cela on le munit d'un ballonnet compensateur, de forme ellipsoïdale, contenu à l'intérieur du ballon et dans lequel on peut comprimer de l'air. La capacité du ballonnet à air doit être le $\frac{1}{6}$ ou le $\frac{1}{8}$ du volume total du ballon.

La *rigidité du système* dépend de la façon dont la *nacelle* est suspendue. Dupuy de Lôme a, le premier, résolu la question en employant des formes triangulaires composées de suspentes en fil d'acier. L'ensemble présente deux systèmes de filets : l'un, le *filet porteur*, l'autre, le *filet des balancines*. Quand tout l'ensemble s'incline, le poids de la nacelle a pour effet de tendre simultanément toutes les suspentes et, par conséquent, le système a la même rigidité que s'il était formé de barres métalliques.

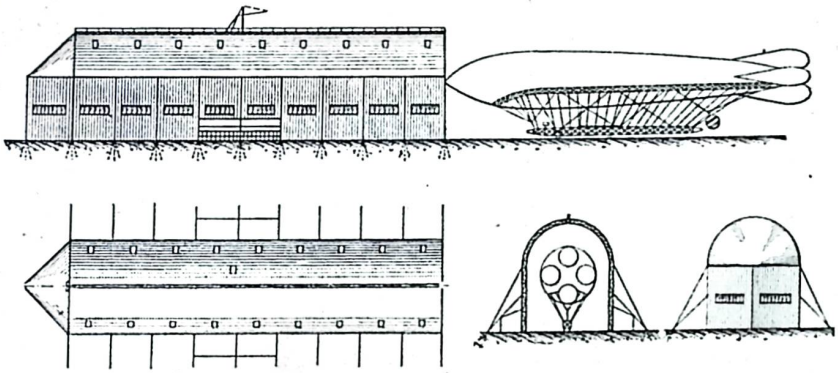


Fig. 212

On obtient l'*équilibre vertical* en faisant passer l'arbre de l'hélice, autant que possible, par le centre des résistances.

Il n'y a pas de conditions rigoureuses pour la *nacelle*, cependant il est bon de la garnir de tous côtés de toile lisse, sans plis, et de ne rien laisser dépasser. Comme longueur, on peut prendre la moitié ou les 2/3 de celle du ballon.

A l'heure actuelle, l'enveloppe des dirigeables est en soie caoutchoutée ; on peut les diviser en 3 groupes :

1° Le *dirigeable mou* (fig. 212) qui porte généralement, comme dans le type français, un empennage de 4 ballonnets postérieurs en communication avec le gaz du ballon.

2° Le *dirigeable semi-rigide* ;

3° Le *dirigeable rigide*, qui possède une carcasse complète en aluminium et des ballonnets intérieurs remplissant cette carcasse. C'est dans cette catégorie qu'il faut ranger les Zeppelins.

L'utilisation de ces appareils est très limitée ; ils emploient du gaz combustible et par suite sont très vulnérables ; on a proposé un dirigeable métallique dans lequel on ferait le vide, mais les pressions extérieures sont considérables et il est difficile de trouver un alliage métallique capable de les supporter.

Enfin les Américains ont essayé l'hélium, gaz incombustible pour gonfler leurs ballons, mais ce gaz n'est encore obtenu qu'en quantités très limitées et ne peut être utilisé industriellement.

Problèmes

1. — Un ballon sphérique de 5 m. de rayon est gonflé avec de l'hydrogène de densité par rapport à l'air 0,0692. L'enveloppe et les accessoires pèsent 350 kilogrammes. Calculer sa force ascensionnelle. (Poids de l'air 1,3 g).

Solution

Volume : $\frac{4}{3}\pi \times 5^3$

Poids de l'air déplacé $\frac{4}{3}\pi \times 5^3 \times 1{,}3$ kg.

Poids d'hydrogène $1{,}3 \text{ kg} \times 0{,}0692 \times \frac{4}{3}\pi \times 5^3$

Poids du ballon $1{,}3 \times 0{,}0692 \times \frac{4}{3}\pi \times 5^3 - 350$

Force ascensionnelle :

$$\frac{4}{3}\pi 5^3 \times 1{,}3 \text{ kg} - 1{,}3 \times 0{,}0692 \times \frac{4}{3}\pi \times 5^3 - 350 =$$

$$\frac{4}{3}\pi \times 5^3 \times 1{,}3\,(1 - 0{,}0692) - 350$$

$$= 633{,}35 - 350$$

$$= 283{,}35 \text{ kg.}$$

2. — Un aérostat demeure en équilibre dans un air calme à une certaine hauteur, où la pression est mesurée par 70 cm. de mercure à 0°. On jette 25 kg. de lest. Quelle sera la variation de la hauteur barometrique accusée par l'instrument placé dans la nacelle quand l'aérostat sera parvenu à une nouvelle position d'équilibre ?

On supposera le ballon entièrement gonflé, l'enveloppe imperméable et la température invariable et égale à 0°. On négligera l'influence de l'humidité atmosphérique. Volume total de l'aérostat 500 m³ ; poids du litre d'air normal : 1,293 g.

Solution

Lorsque l'aérostat est en équilibre la pousséee exercée par l'air est égale au poids de l'appareil :

$$P = V \times d \times \frac{H}{76}$$

Nous avons donc :

$$P = 500 \times 1{,}293 \times \frac{70}{76}$$

$$P - 25 = 500 \times 1{,}293 \times \frac{x}{76}$$

d'où :

$$500 \times 1{,}293 \times \frac{70}{76} - 25 = 500 \times 1{,}293 \times \frac{x}{76}$$

d'où :

$$x = \frac{20 \times 1{,}293 \times 70 - 76}{20 \times 1{,}293} = 67{,}1 \text{ cm.}$$

CHAPITRE VII

HYDRODYNAMIQUE

L'hydrodynamique traite des lois qui régissent le mouvement des fluides non élastiques ainsi que les résistances qu'ils opposent aux corps qui se meuvent dans ces fluides. Les anciens semblent avoir fort peu connu les lois de l'hydrodynamique. Au seizième siècle, à l'époque de Galilée, on ne connaissait pas encore la véritable théorie des pompes. L'hydrodynamique n'a débuté qu'avec Torricelli.

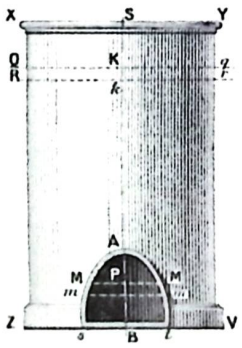


Fig. 213

Théorème de Torricelli. — Soit un vase cylindrique XYZV (fig. 213) muni d'un orifice AB. L'eau s'écoulant par l'orifice AB, on peut supposer que le liquide est divisé en une série de tranches parallèles, perpendiculaires à l'axe BS du cylindre. L'une de ces tranches V *q r R*, descend vers l'orifice du tube, sollicitée par son poids d'une hauteur $kA = h$; g étant l'accélération de la pesanteur, lorsqu'elle arrive en A elle a acquis une vitesse égale à

$$v = \sqrt{2gh}$$

Torricelli a énoncé la loi à peu près sous la forme suivante :

Quand un liquide s'écoule d'un vase, par un orifice placé à une certaine hauteur h *au-dessous du niveau du liquide dans le vase, les molécules du liquide acquièrent, en arrivant à cet orifice, une vitesse égale à celle qu'elles acquerraient si elles tombaient librement dans le vide, d'une hauteur égale à* h.

On vérifie cette loi de la manière suivante. Dans un vase de la forme indiquée sur la figure 214 on pratique des orifices F, G, H, M, N. Il se forme aussitôt

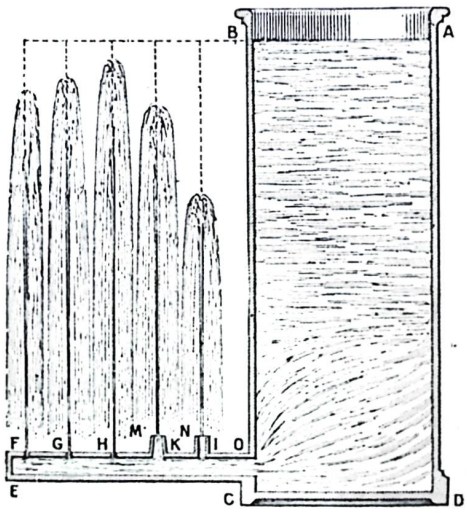


Fig. 214

des jets liquides qui s'élèvent à peu de chose près jusqu'au plan horizontal AB, qui forme le niveau supérieur du liquide dans le vase.

Pour qu'un corps, lancé de bas en haut s'élève à une hauteur h, il faut qu'il soit animé d'une vitesse initiale donnée par la formule :

$$v = \sqrt{2 g h}$$

la loi est donc vérifiée.

Toutefois, pour que l'expérience réussisse, il faut que le diamètre de l'orifice soit au moins égal à une fois et demie l'épaisseur de la paroi, autrement dit : il faut qu'il soit pratiqué en *paroi mince*. C'est ainsi que les jets correspondant aux orifices M et N, qui sont pratiqués en paroi épaisse, ne s'élèvent pas au niveau A B.

La petite différence qu'on remarque entre la hauteur du jet H, par exemple, et celle du niveau A B est due à la résistance de l'air et à la chute des molécules d'eau qui retombent sur celles qui s'élèvent.

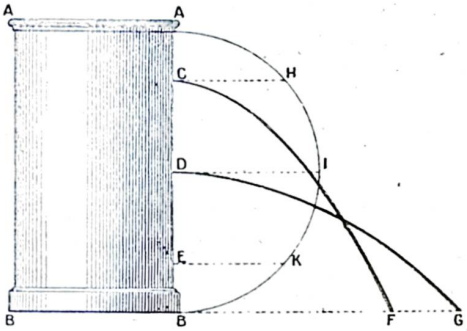


Fig. 215

On peut vérifier le théorème par une autre expérience (fig. 215). Si on perce un orifice C dans la paroi d'un vase cylindrique rempli d'eau, l'eau jaillit avec une certaine vitesse $v = \sqrt{2 g h}$, h étant la hauteur du niveau au-dessus du point C. La molécule d'eau est animée, au moment où elle part du point C, d'un mouvement horizontal uniforme qui resterait tel si l'action de la pesanteur n'intervenait pas. Mais celle-ci a pour effet de donner au jet C F une forme parabolique, les molécules d'eau prenant, sous l'action de la pesanteur un mouvement uniformément accéléré. La longueur B F représente la composante horizontale du mouvement. tandis que C B en représente la composante verticale, B F est la distance horizontale parcourue d'un mouvement uniforme par la molécule d'eau, dans le temps qu'elle a mis à tomber de C en B d'un mouvement uniformément accéléré. Comme on connaît la durée de la chute, on peut calculer la vitesse horizontale ; on trouve qu'elle est égale à $\sqrt{2 g h}$.

On peut répéter l'expérience à divers niveaux, par exemple en D. Comme h est ici plus grand que dans le premier cas, la distance horizontale B G est plus grande.

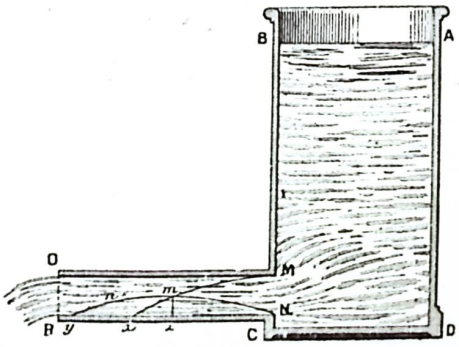


Fig. 217

Contraction de la veine. — Lorsqu'un liquide s'écoule d'un vase par un orifice circulaire percé en paroi mince, le diamètre de la *veine* ou du jet va en diminuant jusqu'à une petite distance de l'orifice. Cette *contraction de la veine* est due à ce que les divers filets fluides arrivent à l'orifice dans des directions différentes (fig. 216) et décrivent des courbes qui tournent leur concavité vers l'extérieur de la veine. De là vient la contraction. Si l'on mesure le diamètre de la veine au point où les filets sont devenus sensiblement parallèles en B, et le diamètre de l'orifice en A, on trouve que ce second diamètre est au premier dans le rapport de 100 à 97. Les sections sont entre elles dans le rapport de $100^2 = 10.000$ à $79^2 = 6.241$. C'est-à-dire que la section contractée est les 0,6241 de l'orifice.

Dépense par un orifice en paroi mince. — Cette remarque permet de calculer la quantité d'eau qui s'écoule en une seconde par un orifice d'aire donnée S, situé à une distance h du niveau du liquide dans le bassin. C'est ce qu'on appelle la *dépense*.

Cette dépense équivaut au volume d'un cylindre de liquide ayant pour base la section contractée et pour hauteur la distance horizontale parcourue en une seconde par une molécule d'eau, c'est-à-dire par la vitesse de cette molécule au sortir du vase. Cette vitesse est $\sqrt{2 g h}$. L'aire de la section contractée est 0,6241 × S. Le volume du cylindre est donc :

$$V = 0{,}6241 \times S \times \sqrt{2 g h}$$

V représente le volume d'eau émis en une seconde. L'expérience confirme ce résultat.

Ajutage cylindrique. — Si on adapte à l'orifice un tuyau cylindrique (fig. 217) ayant pour longueur plus de 2 fois le diamètre de l'orifice, l'eau en s'écoulant commence par se contracter comme dans le cas précédent ; mais elle chasse peu à peu l'air qui est resté dans le tuyau et le remplit complètement. Le liquide coule à *gueule-bée*.

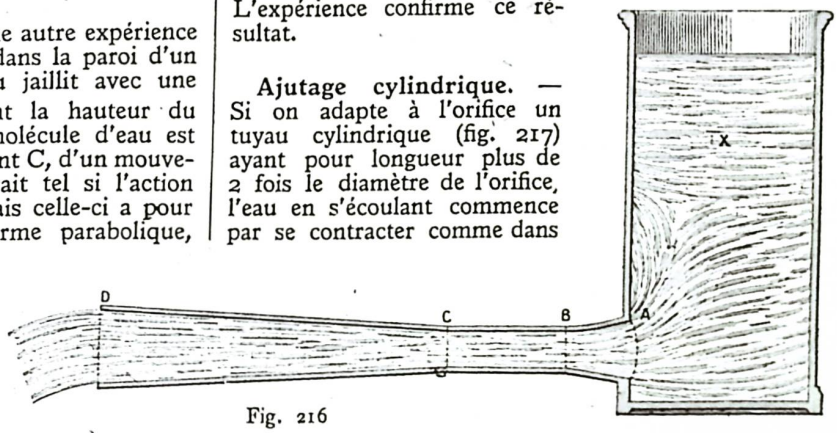


Fig. 216

Dans ce cas, la section de l'orifice de sortie est égale à celle de l'orifice percé dans la paroi du vase. Mais la vitesse d'écoulement est un peu plus faible que dans le cas de l'écoulement à l'air libre. Elle n'est plus que les 0,82 de la vitesse $\sqrt{2 g h}$. La dépense est donc le produit d'un cylindre ayant pour base S, et pour hauteur 0,82 $\sqrt{2 g h}$. Elle est :

$$V = 0{,}82 \times S \times \sqrt{2 g h}$$

On voit qu'elle est d'un quart plus grande environ que dans le cas précédent.

Le tuyau O M N P reçoit le nom d'*ajutage cylindrique*.

Lorsque le tube s'ouvre au fond du vase (fig. 218), la vitesse d'écoulement croît avec la longueur du tube.

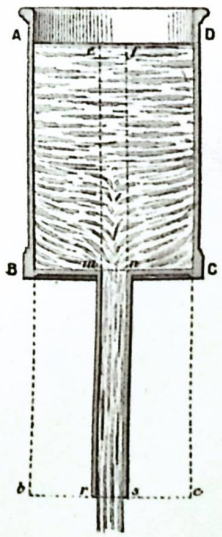


Fig. 218

Jaugeage d'un cours d'eau. — Jauger un cours d'eau c'est déterminer la dépense, c'est-à-dire le volume d'eau qui traverse en une seconde une section du cours d'eau.

Pour déterminer cette dépense, il faut d'abord mesurer la section, ce qu'on fait au moyen de sondages et par la mesure directe de la largeur du cours d'eau ; cela constitue une simple opération d'arpentage. Il faut ensuite déterminer la vitesse moyenne. C'est vers le centre du courant, à la surface et à l'endroit le plus profond que la vitesse est la plus grande. Or, l'expérience a montré que la vitesse moyenne est les 0,80 de la plus grande vitesse. Il reste à déterminer cette dernière, ce qu'on fait en jetant un flotteur à l'endroit le plus rapide et en évaluant, au moyen de chronomètres à secondes, le temps qu'il met à parcourir une distance déterminée.

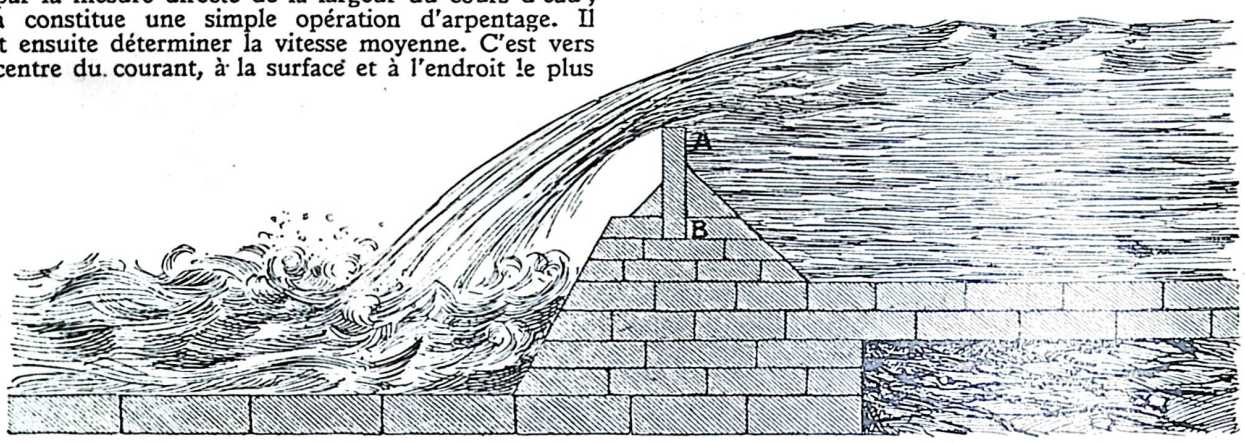


Fig. 219

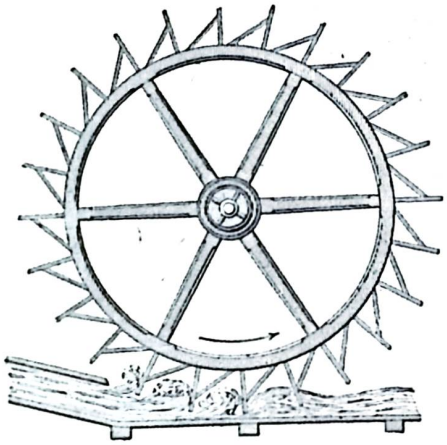


Fig. 220

La dépense D est égale au produit de la section S par les 0,80 de la plus grande vitesse V.

$$D = 0{,}80\ V \times S$$

Vannes et déversoirs. — On retient souvent le courant par un barrage et l'eau s'écoule soit au-dessous du barrage par une *vanne* qu'on peut lever ou abaisser à volonté, soit au-dessus du barrage par un déversoir (fig. 219).

Dans le premier cas, si on représente par S la section de l'orifice de la vanne, et par h la hauteur de l'eau au-dessus de cet orifice, la dépense est :

$$D = 0{,}6241\ S \sqrt{2gh}$$

Dans le second cas, si on désigne par h la hauteur du niveau supérieur de l'eau au-dessus de la crête du déversoir, par L la largeur de l'orifice, on a :

$$D = 0{,}40\ L\ h \sqrt{2gh}$$

Chutes d'eau. — Quand on veut utiliser un cours d'eau comme force motrice (houille blanche), on y établit un barrage qui a pour effet d'élever le niveau de l'eau en amont et de l'abaisser en aval du barrage.

On règle l'ouverture de la vanne de manière que la différence de niveau reste stationnaire ; ainsi la dépense de la vanne est égale à la dépense en un point quelconque du courant.

La *puissance absolue* de la chute est le produit du poids d'eau qui s'écoule en une seconde (dépense), par la *hauteur de chute* (différence de niveau des deux côtés du barrage). Cette puissance peut être calculée en chevaux-vapeur.

Il n'y a rien à changer à ce qui précède au cas où l'eau, au lieu de s'écouler par une vanne, s'écoule par un déversoir.

Récepteurs hydrauliques. — On appelle récepteur hydraulique toute machine destinée à transmettre l'action du courant aux diverses organes de mouvement d'une usine ou d'un moulin.

Un récepteur hydraulique est d'autant meilleur qu'il utilise une plus grande partie de la puissance de la chute. Cependant il est impossible d'utiliser toute cette puissance. Le rendement est de 60 à 80 % avec les meilleures machines.

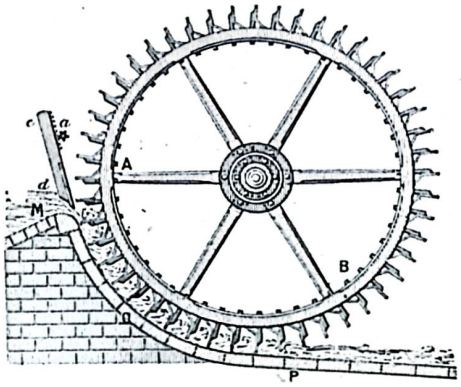


Fig. 221

Roues en dessous à palettes planes (fig. 220). — Deux roues sont montées sur un axe horizontal et réunies par les palettes rectangulaires. L'eau sortant d'une vanne vient agir sur les palettes et fait tourner la roue dans le sens indiqué par la flèche.

Le rendement de ce système est généralement assez faible : il ne dépasse guère 30 %. On peut donner aux roues jusqu'à 7 mètres de diamètre.

Roues de côté à coursier circulaire (fig. 221). — On appelle coursier le canal qui amène l'eau de la

vanne au contact des palettes de la roue. Les roues de côté à coursier circulaire sont construites comme les roues en dessous. La vanne s'ouvre en face de la roue, un peu au-dessous de l'axe, d'où le nom de *roues de côté*. Un coursier circulaire emboîte la roue sur un quart de sa circonférence environ, jusqu'à l'aplomb de l'axe. Des parois latérales empêchent l'eau de s'échapper sur les côtés. Les palettes elles-mêmes ont une forme brisée qui leur permet de mieux retenir l'eau et de l'empêcher de sortir entre deux palettes.

Ce système peut rendre 60 à 70 % et même 80 % dans certains cas.

Fig. 222

Turbine Fourneyron. — On entend par *turbine* une roue hydraulique à axe vertical. Les turbines tournent à une grande vitesse. L'une des plus employées est la *turbine Fourneyron*, représentée en plan (fig. 222), et en coupe verticale (fig. 223).

L'axe vertical *c d* de la roue repose en *c*, par un pivot, sur le fond du bief d'aval. La roue motrice se compose de deux ou plusieurs couronnes circulaires horizontales (4 sur la figure), réunies par des aubes verticales en tôle, *b, b*. Ces aubes ont une forme concave. Les couronnes sont supportées sur une même monture pleine, représentée en coupe à la base de la fig. 223. L'arbre *c d* est entouré d'un réservoir cylindrique au milieu duquel il passe en traversant un tube. Le fond de ce réservoir est au niveau de la couronne inférieure de la roue. Il porte des aubes *directrices* verticales *a a* de même hauteur que les aubes de la roue et destinées à diriger l'eau sur ces dernières suivant l'angle le plus favorable. Le réservoir cylindrique est ouvert dans tout son pourtour au niveau de la roue ; cette ouverture peut d'ailleurs être obstruée par une vanne ou par un mouvement d'ascension de la roue au moyen d'un levier indiqué sur la figure.

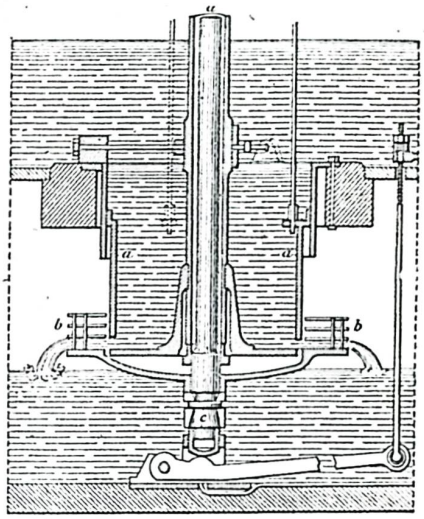


Fig. 223

Quand le réservoir est ouvert par le bas, l'eau s'écoule en agissant sur les ailes de la roue et oblige celle-ci à tourner avec une grande vitesse. Le rendement est de 80 % environ. Cette turbine peut être utilisée pour de grandes chutes ayant jusqu'à 30 ou 40 mètres. Elle tourne à 60 tours par minute, ou davantage encore. Enfin elle peut être noyée, c'est-à-dire placée au-dessous du niveau du bief sans inconvénient.

CHALEUR

CHAPITRE I

THÉORIE MODERNE DE LA CHALEUR

THERMOMÈTRES

On sait aujourd'hui que la matière est constituée par l'association de grains d'électricité positive (protons) et d'électricité négative (électrons). Une première association de ces grains donne l'atome ; puis l'association d'atomes donne la molécule. Electrons, atomes et molécules *vibrent* ; mais tandis que les électrons sautent d'un atome à un autre avec une vitesse prodigieuse, les atomes vibrent sur place à la période moyenne de 30 milliards de milliards par seconde. Que l'agitation électronique et et atomique s'accroisse (mouvement, pression, électricité, choc) le nombre de vibrations s'accroît également et la température s'élève en même temps qu'augmente le volume du corps (s'il ne change pas d'état). La chaleur ainsi produite se transmet de proche en proche entre électrons et atomes (conductibilité). Dans le vide, le mouvement électronique de projection linéaire et de vibration se conserve, ce qui donne lieu à la chaleur rayonnante. Si la température s'élève suffisamment, les électrons se vaporisent, c'est-à-dire qu'ils quittent le corps et produisent un courant (effet thermoélectronique). C'est cet effet qui est utilisé dans la T. S. F.

Ainsi considérés, les phénomènes calorifiques ne se distinguent des phénomènes lumineux et acoustiques que par la fréquence des vibrations et il y a des sons (ultra-sons), qui sont dus à un ébranlement d'origine électronique.

Quant à l'*éther*, matière impondérable qui remplirait les espèces intersidéraux et interatomiques, on en a admis puis nié l'existence.

Nous avons vu, dans le premier chapitre de la physique, que la plupart des corps changent d'état quand leur température varie au delà de certaines limites. Le passage de l'état solide à l'état liquide, ou de l'état liquide à l'état gazeux, résulte des vibrations moléculaires engendrées par la chaleur. En effet, si on suppose une certaine force de cohésion entre les molécules d'un corps, cette force tend à diminuer au fur et à mesure que les vibrations sont plus énergiques. Quand la cohésion devient trop faible pour maintenir les molécules associées dans un édifice rigide, le corps passe à l'état liquide, et, quand elle est insuffisante pour maintenir les molécules à des distances invariables, le corps passe à l'état gazeux.

Cette conception de la chaleur amène à penser qu'un mouvement mécanique quelconque peut engendrer de la chaleur, si on transforme le mouvement d'un corps dans son ensemble en mouvement des molécules de ce corps. C'est ce que l'expérience vérifie : quand on frappe avec un marteau sur un clou pour enfoncer ce dernier, la tête du clou et le marteau s'échauffent ; une scie devient brûlante quand on l'emploie à couper un assez gros morceau de bois. Les exemples de ce genre abondent et tout le monde est à même de les constater : il suffit de frotter pendant quelques instants sur un bouchon la lame d'un couteau pour la rendre très chaude.

Notions de température. — Le sens du toucher nous permet, dans un grand nombre de cas, d'établir certaines comparaisons entre les divers corps sous le rapport de leur état calorifique. Nous déclarons par exemple qu'un corps est *plus chaud* qu'un autre, ou que sa *température* est plus élevée ; qu'un corps est *plus froid* (moins chaud) qu'un autre, ou que sa température est plus basse (moins élevée). On dit que deux corps sont à la même température, lorsqu'ils sont aussi chauds l'un que l'autre.

Ces expressions, basées sur l'expérience de nos sens, définissent suffisamment pour l'instant ce qu'il faut entendre par température.

Toutefois, les jugements tirés de nos sensations peuvent être entachés d'erreur. Supposons, par exemple, qu'on plonge la main droite dans un sceau d'eau très chaude ; la main gauche dans un sceau d'eau glacée et que, après être resté quelques instants dans cette position, on plonge les deux mains ensemble dans un seau d'eau à la température ordinaire. La main droite éprouvera une sensation de froid ; la main gauche une sensation de chaleur. Les indications de nos sens sont donc absolument relatives.

En outre, il y a une infinité de cas où nos sens ne nous permettent pas d'apprécier la température, parce qu'ils ne pourraient la supporter physiologiquement.

Ainsi, nous n'avons pas de moyen direct de savoir si de la graisse fondue est plus chaude que de l'eau bouillante, si de l'air liquide est plus froid qu'un mélange de glace et de sel.

Thermomètres. — Pour se faire une idée plus exacte de la température, on a recours aux *thermomètres*. Ces appareils sont basés sur le phénomène de la dilatation des corps sous l'influence de la chaleur.

On constate que, au fur et à mesure qu'un corps s'échauffe, sans changer d'état physique, son volume augmente en général. Quelquefois, pourtant, il diminue entre certaines limites de température, d'ailleurs très rapprochées.

Si l'on admet, ce qui paraît évident, que le volume d'un corps, toutes choses égales d'ailleurs, est toujours le même à la même température, le phénomène de la dilatation fournit un moyen de mesurer les températures.

Le *thermomètre à mercure* ordinaire se compose essentiellement d'un tube de verre capillaire (fig. 224) terminé à l'une de ses extrémités par une ampoule remplie de mercure, et fermée à l'autre extrémité.

Si on plonge ce tube dans un milieu liquide ou gazeux quelconque, il prend peu à peu la température de ce milieu en absorbant ou en perdant de la chaleur jusqu'à ce que l'équilibre soit établi. A ce moment, le mercure contenu dans l'ampoule et dans une partie du tube a acquis un certain volume. S'il s'est dilaté, la colonne contenue dans le tube de verre s'est allongée; s'il s'est contracté, la colonne s'est raccourcie. Le point où la colonne de mercure s'est fixée indique la température.

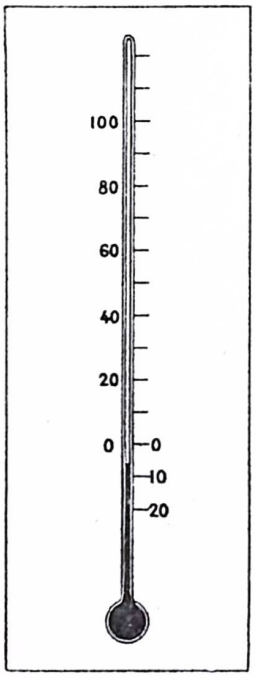


Fig. 224

Il est du reste facile de tracer des divisions sur le tube avec des chiffres qui permettront de comparer plus aisément les indications. La division qu'on adopte s'appelle l'*échelle du thermomètre*.

L'échelle ordinairement adoptée est l'*échelle centigrade* ou *centésimale* : le 0 de cette échelle correspond à la température de la *glace fondante*, et le degré 100 à la température de la *vapeur d'eau bouillante*.

Fig. 225

Nous allons exposer la construction d'un thermomètre à mercure à échelle centésimale.

Remplissage. — On choisit un tube capillaire en verre, bien calibré, c'est-à-dire dont la section est la même en tous les points. On s'assure que le tube est bien calibré en y faisant promener une petite colonne de mercure : la longueur de cette colonne doit rester rigoureusement constante. A l'une des extrémités du tube se trouve un réservoir, le plus souvent ménagé dans l'épaisseur même du verre de sorte qu'il ne correspond à aucun renflement extérieur (fig. 225). L'autre extrémité, qui plus tard sera fermée, est munie d'une ampoule effilée ouverte à la pointe.

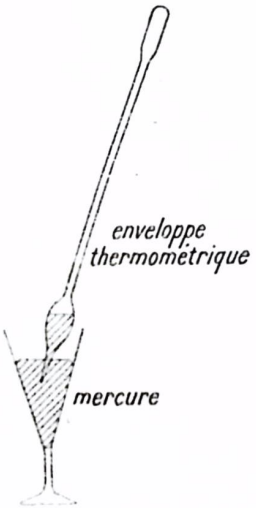


Fig. 226

Pour remplir le thermomètre, on plonge la pointe de l'ampoule dans un vase contenant un peu de mercure, après avoir chauffé cette ampoule pour dilater l'air qu'elle contient. En se refroidissant, l'air contenu dans le thermomètre se contracte et le mercure pénètre dans l'ampoule.

Quand il en est rentré suffisamment, on retourne l'appareil de manière à placer l'ampoule en haut. Le mercure descend dans le tube capillaire, mais s'arrête bientôt, l'air s'opposant à sa pénétration dans le réservoir ; on chauffe alors ce dernier de façon que l'air qu'il contient, en se dilatant, repousse le mercure et s'échappe en partie. Puis on laisse refroidir ; un peu de mercure descend dans le réservoir. Il suffit alors de le faire bouillir pour chasser entièrement le reste de l'air contenu dans le thermomètre ; en laissant refroidir encore une fois, on obtient le résultat souhaité, c'est-à-dire que l'instrument achève de se remplir de mercure jusqu'en haut du tube capillaire (fig. 226).

Ce résultat obtenu, on brise l'extrémité du tube, pour en détacher l'ampoule accessoire qu'on y avait adaptée. Puis on porte le thermomètre à une température un peu plus élevée que la plus haute pour laquelle il doit être utilisé. Le mercure se dilate et tout ce qui serait en excès s'échappe au dehors. Il ne reste plus qu'à fermer le tube à la lampe sans attendre que le mercure se contracte en se refroidissant et permette à l'air de rentrer.

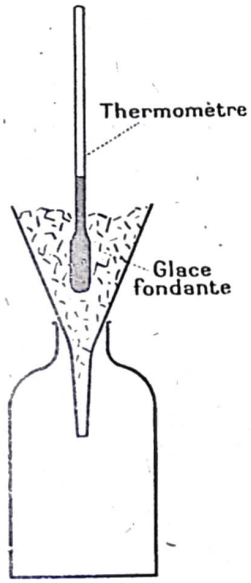


Fig. 227

Graduation. — Le thermomètre construit, il faut le graduer. Pour cela, on le plonge d'abord dans la glace fondante et, quand le mercure a atteint sa position d'équilibre dans le tube, on trace un trait sur le verre au point où la colonne s'est arrêtée ; c'est le 0 de l'échelle (fig. 227).

Pour déterminer le point 100, on place le thermomètre dans un appareil représenté sur la figure 228 et qui se compose d'une chaudière surmontée d'une cheminée mauvaise conductrice de la chaleur. La vapeur d'eau bouillante remplit cette cheminée et ne s'échappe qu'après être redescendue par un tube qui s'ouvre sur le côté. Le thermomètre se trouve ainsi plongé dans la vapeur jusqu'au sommet de la colonne ; de temps à autre on le soulève légèrement pour observer la position du mercure. Quand celle-ci est devenue fixe, on trace un trait sur le tube au point où la colonne s'est arrêtée, c'est le point 100 de l'échelle.

Toutefois, la température de la vapeur d'eau bouillante varie avec la pression sous laquelle se produit l'ébullition. Le point 100 correspond à la pression normale de 760 millimètres de mercure ; si la pression est différente de la normale, une correction est nécessaire. Celle-ci se pratique aisément au moyen d'une table. Pour une variation de pression de 27 millimètres, la température varie d'un degré dans le même sens que la pression.

Une fois qu'on a déterminé le 0 et le point 100 de l'échelle, il suffit, pour compléter cette dernière, de partager l'intervalle en 100 parties égales qui prennent le nom de *degrés*. On prolonge l'échelle au-dessous du 0, par des divisions égales aux précédentes.

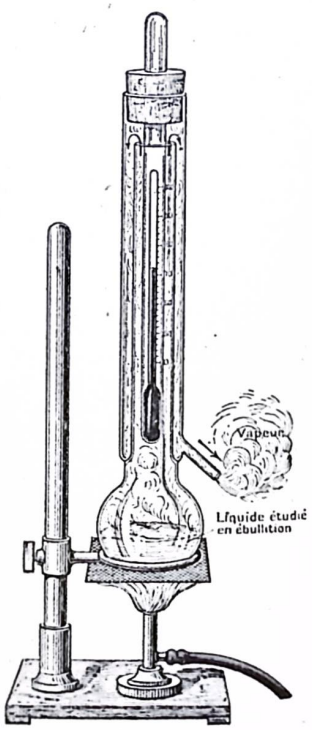


Fig. 228

L'appareil étant ainsi gradué, lorsque la colonne s'arrête par exemple à la division 20, on dit que la température est de 20°. Si la colonne s'arrête au-dessous du 0 et à 12 divisions de ce point, on dit que la température est de — 12° (moins douze degrés) ou de 12° *au-dessous de zéro*.

Comme on le voit, ces indications sont toutes conventionnelles. Elles n'en rendent pas moins les plus grands services.

Quand on veut mesurer les températures supérieures à la température de la vapeur d'eau bouillante, on prolonge l'échelle par des divisions égales au delà du point 100. Un thermomètre à mercure peut être établi pour mesurer des températures variant entre — 30° et + 300°. Au delà de ces limites, on est arrêté par la congélation ou par la vaporisation du mercure. Il faut avoir recours à d'autres corps ou à des instruments basés sur un autre principe.

Différentes échelles. — L'échelle centésimale n'est pas la seule usitée. Les deux plus connues après elle sont les échelles *Réaumur* et *Fahrenheit*.

L'échelle *Réaumur*, qui fut longtemps en usage en France, est construite sur le même principe que l'échelle centigrade, mais la température de la vapeur d'eau bouillante est indiquée par la *division* 80. L'intervalle 0 à 80 est divisé en 80 divisions. On prolonge l'échelle dans les deux sens comme pour le thermomètre centésimal.

L'échelle *Fahrenheit* est encore employée en Angleterre. Son auteur avait cru avoir réalisé la température la plus basse qui puisse exister et il avait fixé le 0 de son thermomètre à cette température. Cette prétention est réduite à néant par la science actuelle qui peut démontrer l'existence de températures bien inférieures au 0 de Fahrenheit.

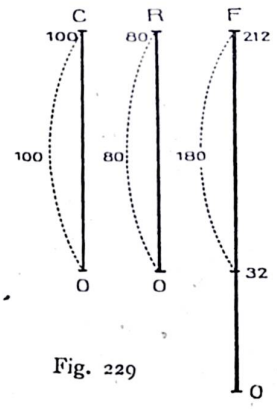


Fig. 229

Quoi qu'il en soit, le 0 de l'échelle centésimale *correspond au 32 de l'échelle Fahrenheit*, et le point 100 de la première *au 212 de la seconde* (fig. 229).

Connaissant la température exprimée au moyen de l'une de ces trois échelles, on peut se proposer de trouver son expression dans les deux autres.

Soit d'abord à convertir les degrés Réaumur en degrés centésimaux. Le rapport des nombres de degrés exprimant la même température dans les deux échelles est de 80 à 100. En appelant R le nombre de degrés Réaumur, et C le nombre de degrés centésimaux (ou Celsius) on a donc :

$$\frac{R}{C} = \frac{80}{100} \qquad (1)$$

Cette formule permet de trouver R ou C, suivant que l'un ou l'autre de ces deux nombres est donné.

Pour l'échelle Fahrenheit, il faut tenir compte de la différence de position des zéros. Puisque le point 32 de l'échelle Fahrenheit correspond au 0 de l'échelle Celsius, et le 212 Fahrenheit au 100 Celsius, il y a, pour le même intervalle, 212 — 32 divisions Fahrenheit et 100 divisions Celsius. Si on suppose pour un instant que le 0 Fahrenheit est reporté au 32, le 212 deviendra 180, et le rapport des nombres fournis par le thermomètre Fahrenheit et le thermomètre centésimal sera de 180. Pour ramener le problème à ce cas, il suffit de retrancher 32 au nombre fourni par l'échelle Fahrenheit. F étant ce nombre, on a donc :

$$\frac{F - 32}{C} = \frac{180}{100} \qquad (2)$$

En combinant les formules (1) et (2) on obtient la formule suivante :

$$\frac{R}{F - 32} = \frac{80}{180}$$

qui permet de passer de l'échelle Réaumur à l'échelle Fahrenheit, ou réciproquement.

Application. — Si le thermomètre centésimal marque 50°, le thermomètre Réaumur marque

$\frac{50 \times 80}{100} = 40$, et le thermomètre Fahrenheit marque

$\frac{x - 32}{50} = \frac{180}{100}$ d'où $x = 122$.

Remarque. — Les thermomètres à mercure sont sujets à certaines causes d'erreur et particulièrement *au déplacement du zéro*. On constate en effet qu'un thermomètre, dont la graduation remonte à quelques mois, subit des variations de volume du réservoir et de la tige qui tendent à faire monter le point 0. Il en résulte que le 0 de la graduation ne correspond plus exactement à la température de la glace fondante ; quand le thermomètre est plongé dans cette dernière il indique 1, 2, 3 degrés au-dessus de zéro ; par suite toutes les indications du thermomètre sont trop fortes.

Pour corriger l'erreur qui en résulte, on doit déterminer la valeur du déplacement en plongeant le thermomètre dans la glace fondante et retrancher de toutes les observations le nombre de divisions trouvé.

Ce déplacement du 0 est dû au travail moléculaire que subit le verre sous l'influence des variations de température et qui entraîne une diminution de volume de l'appareil.

Dans les thermomètres usuels employés pour mesurer la température des appartements, des bains, etc. ; on remplace souvent le mercure par de l'alcool coloré. On emploie aussi les thermomètres à alcool pour mesurer les températures inférieures au point de congélation du mercure. Par contre, comme l'alcool bout à 80° centigrades environ, on ne peut graduer directement les thermomètres à alcool. On se contente de déterminer le 0, et on se donne un autre point de l'échelle, 50° par exemple, par comparaison avec un thermomètre à mercure déjà gradué. On partage ensuite l'intervalle entre 0° et 50° en 50 divisions égales qu'on prolonge au-dessous de 0, jusqu'à — 40°, et même davantage.

Mesure des basses températures. — Le thermomètre à alcool ne peut servir que jusqu'à — 100°, car à partir de cette température le liquide devient pâteux ; de plus, c'est un appareil peu précis ; aussi, pour les mesures des basses températures, emploie-t-on :

1° Les thermomètres à *toluène* (solidification à — 102°). Le toluène est un liquide incolore, extrait en même temps que la benzine des goudrons de houille.

2° Les thermomètres à *éther de pétrole* ; c'est un liquide extrait dans la distillation du pétrole et qui est liquide jusque vers — 200°.

3° Les *thermomètres à gaz*, basés sur la diminution de la pression d'un gaz lorsqu'on abaisse la température. Ce sont de véritables manomètres.

Mesure des températures élevées. — Le mercure bouillant à 360°, le thermomètre à mercure ne peut guère servir que jusqu'aux températures voisines de 300°.

Les instruments destinés à mesurer de hautes températures sont généralement désignés sous le nom de *pyromètres*.

Les principaux types sont les suivants :

1° Le *thermomètre de Dufour*, obtenu en substituant l'étain au mercure et le quartz au verre de l'enveloppe. Ce thermomètre permet d'atteindre 1.000°.

2° Les *thermomètres à gaz* peuvent également servir pour les mesures des hautes températures.

3° Les *pyromètres à circulation d'eau*. — On fait passer dans l'appareil dont on veut connaître la température un tube en métal traversé par un courant d'eau de vitesse suffisante pour éviter la vaporisation ; on peut déduire la température cherchée de la vitesse du débit de l'eau et de l'élévation de température qu'elle subit.

Ces pyromètres sont surtout utilisés pour connaître la température des fours ; ils peuvent donner des renseignements jusqu'à 2.300°.

4° On peut encore connaître les températures élevées soit par une mesure calorimétrique (Violle), soit par une mesure électrique (Siémens ou Le Châtelier), soit par une méthode optique. Nous étudierons ces méthodes ultérieurement.

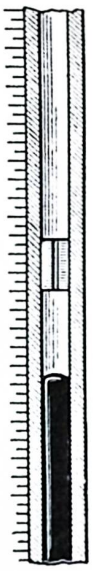


Fig. 230

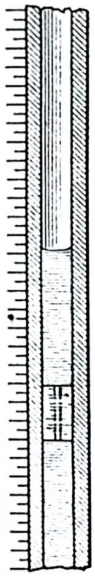


Fig. 231

Enfin, dans la pratique lorsqu'il suffit de connaître la température d'un four, par exemple, à quelques degrès près, on dispose dans ce four des mélanges en proportions variables de carbonate de calcium, quartz, kaolin et feldspath de manière à ce que chaque mélange fonde à une température déterminée (montres de Seger).

La température du four est donc comprise entre la température du dernier mélange fondu et celle du premier mélange non fondu.

Thermomètres à maxima et à minima. — 1° Les thermomètres à maxima sont à mercure avec à l'intérieur un index en fer. Le mercure pousse l'index tant qu'il monte et le laisse en place dès qu'il descend. La figure 230 représente la tige d'un thermomètre à maxima.

2° Au contraire les thermomètres à minima sont à alcool avec index en émail mouillé par le liquide. Celui-ci entraîne l'index en descendant, mais le laisse en place en montant (fig. 231).

3° On peut combiner les deux précédents de manière à avoir un thermomètre donnant à la fois la température maxima et la température minima atteintes.

Cet appareil (fig. 232) se compose d'un tube thermométrique doublement coudé et terminé par une ampoule fermée. Il contient de l'alcool dans la partie A ; puis du mercure et enfin de l'alcool.

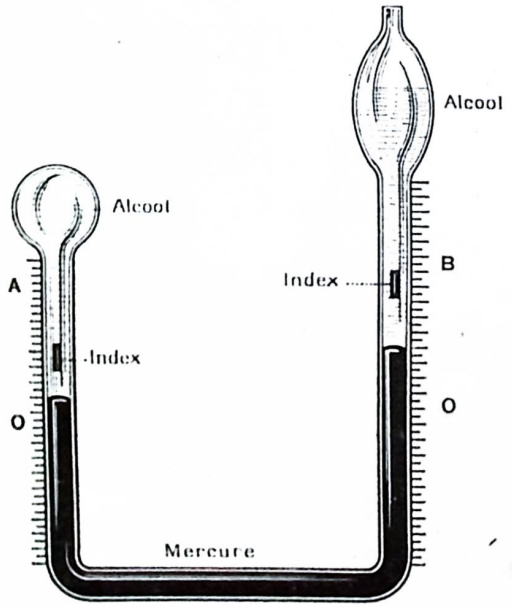


Fig. 232

Deux index en fer sont déplacés par le mercure et de chaque côté une graduation permet de connaître :

dans le tube A, le minimum ;

dans le tube B, le maximum.

On ramène les index au niveau du mercure au moyen d'un aimant.

Thermomètres enregistreurs. — Le type principal est celui de Richard ; il se compose essentiellement :

1° D'un tube mince en cuivre A B (fig. 233) contenant un liquide dilatable, en général de l'éther de pétrole. Ce tube est fixé en A ; l'extrémité B est en communication avec une aiguille se déplaçant autour d'un point fixe E. Un ressort R tend à s'opposer aux déplacements

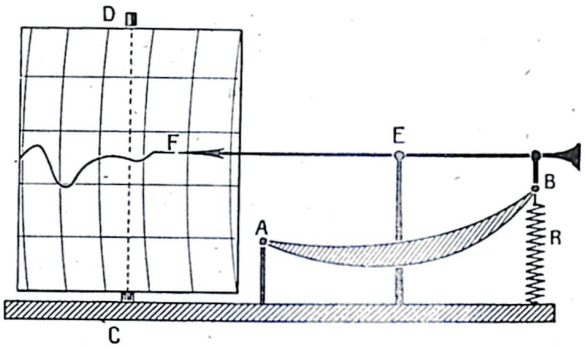


Fig. 233

de B. Lorsque la température augmente le liquide se dilate et le tube tendant à augmenter de volume, le point B se déplace de haut en bas. Lorsque la température baisse le mouvement se fait en sens contraire.

2° D'un cylindre tournant d'un mouvement uniforme grâce à un mouvement d'horlogerie. Sur ce cylindre est fixé une feuille de papier sur laquelle s'inscrit le déplacement de l'extrémité F du levier.

Le cylindre est ordinairement réglé pour faire un tour sur lui-même en une semaine.

Thermomètres médicaux. — Ce sont des thermomètres à maxima ; leur graduation ne s'étend que de 34° à 44° environ ; la tige est étranglée à sa base et le mercure est arrêté lorsqu'il descend (fig. 234).

On le ramène dans le réservoir en secouant énergiquement l'appareil.

Températures d'un bloc de platine

Rouge naissant	255° C.
Rouge sombre	700° »
Rouge cerise	900° »
Orangé	1.100° »
Blanc	1.300° »
Blanc éclatant	1.500° »

Températures diverses

Froid artificiel obtenu au moyen d'un bain de sulfure de carbone et d'anhydride azoteux liquide	— 140° C.
Froid artificiel obtenu au moyen de l'éther et de l'anhydride carbonique liquide	— 110
Plus basse température observée au pôle	— 57,7
Solidification du mercure	— 39,4
Mélange de neige et de sel	— 20
Fusion de la glace	0
Maximum de densité de l'eau	4
Température du sang humain	36,6
Ebullition de l'eau	100
Ebullition du mercure	360
Ebullition du soufre	440
Fusion de l'argent	1.000
Ebullition du zinc	1.040
Fusion du fer	1.530
Maximum de température des hauts fourneaux	1.800
Fusion du platine	2.000
Fusion de l'iridium	2.700

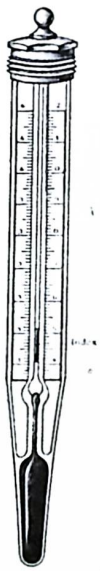


Fig. 234

Problèmes.

1. — Un thermomètre centésimal marque 28°. Quelle est la température indiquée :

au thermomètre Réaumur ;
au thermomètre Fahrenheit.

Solution

Le thermomètre Réaumur marque :

$$\frac{80 \times 28}{100} = 22^\circ 4$$

Le thermomètre Fahrenheit marque :

$$32^\circ + \frac{180 \times 28}{100} = 32^\circ + 50^\circ 4 = 82^\circ 4$$

2. — A quelle température deux thermomètres gradués, l'un en degrés centésimaux, l'autre en Fahrenheit marqueront-ils le même nombre de degrés ? Même question pour un thermomètre Fahrenheit et un thermomètre Réaumur.

Solution

I. — Soit x la température marquée par le thermomètre centésimal, celle que marquera le thermomètre Fahrenheit sera :

$$y = \frac{x \times 180}{100} + 32^\circ$$

d'où en égalant x et y

$$x = 1{,}8\,x + 32$$

d'où : $$x = -\frac{32}{0{,}8} = -40^\circ$$

de même nous aurions

$$z = \frac{z \times 180}{80} + 32$$

ce qui donne : $$z = -\frac{32}{1.25} = -25^\circ 6$$

CHAPITRE II

DILATATIONS — DILATIONS LINÉAIRE ET CUBIQUE

DILATATION DES LIQUIDES - DILATATION DE L'EAU - DILATATION DES GAZ

Dilatations. L'effet le plus général et le plus remarquable de la chaleur sur les corps est le changement de volume de ces corps.

Dilatation des solides : 1° *Dilatation linéaire :* D'une façon générale, sous l'action de la chaleur, les corps *solides s'allongent.* On dit qu'ils *se dilatent.*

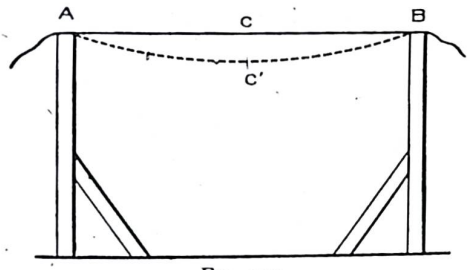


Fig. 235

On peut mettre ce phénomène en évidence avec un fil tendu entre deux supports A et B (fig. 235). Sous l'action de la chaleur d'une rampe à gaz ou du passage d'un courant électrique, on constate qu'il s'infléchit suivant A C'B.

Si on veut avoir une idée plus exacte de la valeur de la dilatation linéaire, on se sert du pyromètre à cadran (fig. 236). Il se compose d'une tige de cuivre fixée à l'une de ses extrémités A par une vis V tandis que l'autre extrémité agit en B sur une aiguille mobile autour d'un axe O et dont la pointe C se déplace sur un cadran D. Cette tige de cuivre A B peut être chauffée par une lampe à gaz R et remplacée à volonté par une tige d'un autre métal (fer, aluminium, etc.).

Avec cet appareil on peut constater en outre que :

1° *La dilatation est un phénomène temporaire puisque la tige reprend sa longueur primitive quand on la laisse revenir à sa température initiale ;*

2° *La dilatation linéaire est proportionnelle à l'élévation de température* puisque l'allongement de la tige de cuivre est la même entre 0 et 10°, 10° et 20°, 20° et 30° ;

3° *La dilatation linéaire est proportionnelle à la longueur de la tige.*

2 pyromètres dont les tiges ont respectivement pour longueur l et 2 l indiquent des allongements a et 2a pour une même élévation de température ;

4° *Enfin pour une même élévation de température, l'allongement varie avec la nature du corps.*

On appelle *coefficient de dilatation linéaire d'un corps l'allongement* λ *qu'éprouve l'unité de longueur de ce corps à 0° pour une élévation de température de 1°.*

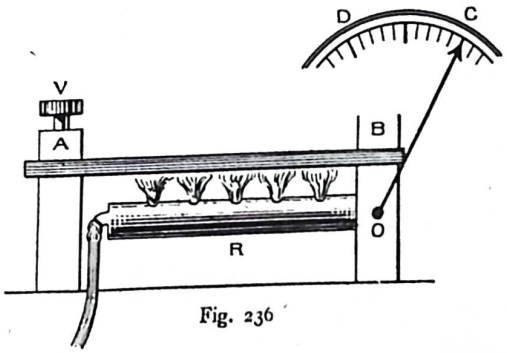


Fig. 236

On voit donc que d'après ces observations la dilatation linéaire d'un corps est donnée par la formule

$$a = \lambda\, lt$$

l étant la longueur du corps à 0° et t sa température.

Si nous désignons par l_0 la longueur d'un corps à 0°, la longueur l_t de ce corps à t° sera :

$$l_t = l_0 + l_0 \lambda t$$
$$l_t = l_0 (1 + \lambda t)$$

L'expression $1 + \lambda t$ est appelée *binôme de dilatation.*

Mesure du coefficient de dilatation linéaire des corps solides,

On détermine aujourd'hui les coefficients de dilatation linéaire des corps solides au moyen du *comparateur* :

Celui-ci se compose de deux microscopes M et M' verticaux dont les axes sont à une distance d'environ 1 mètre ; ces deux appareils sont fixés sur un massif de maçonnerie, et la barre à étudier peut venir se placer sous les microscopes, grâce à un petit wagonnet circulant sur deux rails (fig. 237).

Chaque microscope comporte un réticule qui peut subir des déplacements latéraux réglés par une vis micrométrique.

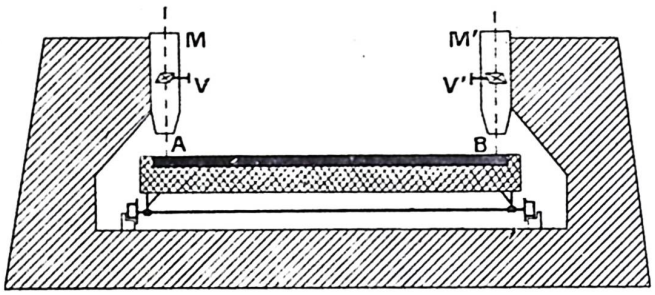


Fig. 237

On commence par placer un mètre étalon dans la glace fondante sous les microscopes, et on règle ceux-ci de façon que les deux traits extrêmes du mètre viennent former leurs images aux points de croisement des fils du réticule ; à ce moment, les deux points de croisement sont exactement à 1 mètre.

On amène ensuite la barre à mesurer, sur laquelle on a pratiqué 2 traits, à une distance voisine de 1 mètre. On mesure les déplacements à donner aux réticules d'abord à 0° puis à t°. On connaît ainsi l_0 et l_t.

La dilatation absolue est $l^t - l_0$; pour un degré elle serait :

$$\frac{l_t - l_0}{t}$$

et pour l'unité de longueur :

$$\frac{l_t - l_0}{l_0 t}$$

Nous donnons ci-dessous quelques coefficients de dilatation linéaire déterminés par cette méthode ou par d'autres.

Acier non trempé	0,000 010 791	Laplace et Lavoisier
Argent de coupelle	0,000 019 097	—
Cuivre	0,000 017 173	—
Cuivre jaune ou laiton	0,000 018 782	—
Fer doux forgé	0,000 012 205	—
Flint-glass anglais	0,000 008 117	—
Or	0,000 014 661	—
Platine	0,000 008 565	—
Plomb	0,000 028 484	—
Verre de Saint-Gobain	0,000 008 909	Smeaton
Acier trempé	0,000 012 2500	—
Bismuth	0,000 013 9167	—
Cuivre jaune fondu	0,000 018 7500	—
Cuivre jaune, 16 pp. ; étain, 1	0,000 019 0833	—
Cuivre rouge battu	0,000 017 0000	—
Cuivre rouge, 8 pp, ; étain, 1	0,000 018 1667	—
Etain fin	0,000 022 8333	—
Etain en grains	0,000 024 8333	—
Fer	0,000 012 5883	—
Fil de laiton	0,000 019 3333	—
Métal de miroir de télescope	0,000 019 3333	—
Plomb	0,000 028 6667	—
Verre blanc, tubes de baromètre	0,000 008 3333	—
Zinc	0,000 029 4167	—
Platine	0,000 009 918	Troughton
Acier	0,000 011 899	—
Argent	0,000 020 826	—
Cuivre	0,000 019 188	—

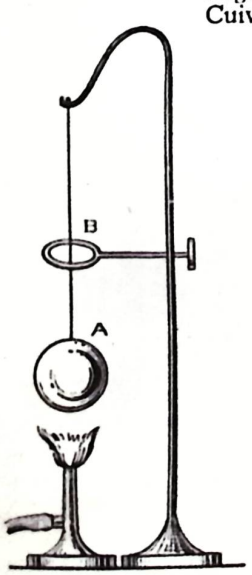


Fig. 238

Dilatation cubique. — Le volume d'un corps *augmente* quand on le chauffe. Cette augmentation de volume est appelée dilatation cubique.

On démontre expérimentalement cette dilatation à l'aide de l'anneau de S'Gravesande. Une boule de cuivre A passe exactement dans un anneau de cuivre B à la température ordinaire (fig. 238).

Après avoir été chauffée, la boule ne passe plus dans l'anneau, son volume a augmenté. par refroidissement elle revient à son volume primitif et repasse dans l'anneau.

Si l'on chauffe en même temps l'anneau et la boule, on constate que la boule passe toujours dans l'anneau. De cette dernière expérience on en déduit qu'un corps *creux se dilate autant que s'il était plein.*

Connaissant le coefficient de dilatation linéaire d'un corps, il est facile d'en déduire le *coefficient de dilatation cubique.*

En effet, si on prend pour unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur, lorsque ce cube s'est dilaté sous l'effet d'une augmentation de température de 1°, chacune de ses trois dimensions est devenue :

$$1 + \lambda$$

et son volume est exprimé par

$$(1 + \lambda)^3$$

Le développement de cette expression est

$$1 + 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$$

Or λ est toujours un nombre très petit dont le carré et le cube sont beaucoup plus petits et pratiquement négligeables, de sorte que l'expression précédent se réduit à

$$1 + 3\lambda$$

dans laquelle 3λ représente le coefficient de dilatation cubique K.

Il est facile de se rendre compte que ce résultat est très sensiblement exact en faisant le calcul pour un coefficient de dilatation linéaire égal à 0,000 02, valeur moyenne. La valeur exacte de K est

$$K = 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$$

ce qui donne :

$$K = 0{,}000\,06 + 0{,}000\,000\,0012 + 0{,}000\,000\,000\,000\,008$$

$$K = 0{,}000\,060\,001\,200\,008$$

d'où sensiblement :

$$K = 0{,}000\,06$$

La partie négligée est de l'ordre des millionièmes.

Nous donnons ci-dessous les coefficients de dilatation cubique d'un certain nombre de corps solides :

Cadmium	0,000 094 78
Zinc	0,000 089 28
Plomb	0,000 083 99
Etain	0,000 068 89
Argent	0,000 058 31
Cuivre	0,000 049 98
Or	0,000 044 11
Bismuth	0,000 039 48
Palladium	0,000 033 12
Antimoine	0,000 031 67
Platine	0,000 026 58
Verre	0,000 025 40
Fer	0,000 035 46

Si l'on désigne par V_0 le volume d'un corps à 0°, le volume V_t d'un corps à t° sera

$$V_t = V_0 (1 + 3\lambda t)$$

Dilatation en surface. — On établirait de la même façon pour la dilatation cubique que si S_0 est la surface d'un corps à 0° sa surface à t° est

$$S_t = S_0 (1 + 2\lambda t)$$

Dilatation des liquides. — Pour les liquides, la force de cohésion entre les molécules étant faible, la dilatation correspondant à une augmentation de température donnée est plus grande que pour les solides. Le coefficient de dilatation est aussi moins constant que pour les solides ; il croît sensiblement avec la température, et il est soumis à des variations considérables au voisinage de la température d'ébullition et de la température de solidification.

Dilatation apparente et dilatation absolue des liquides. — Un liquide est toujours contenu dans un vase et, quand on le chauffe, on chauffe en même temps le récipient, par conséquent celui-ci se dilate en même temps que le liquide.

Supposons qu'un vase, surmonté d'un tube étroit (fig. 239), soit rempli d'un liquide jusqu'à une certaine hauteur dans le tube, soit jusqu'à la division 42. Si on chauffe, le liquide montera dans le tube, jusqu'à la division 58 par exemple. Cela prouve que le liquide s'est dilaté ; mais, comme le verre s'est dilaté en même temps et que, par conséquent, la capacité du vase a augmenté, le volume de la colonne liquide comprise entre les divisions 42 et 58 représente la différence de la dilatation cubique du liquide et de la dilatation cubique du récipient.

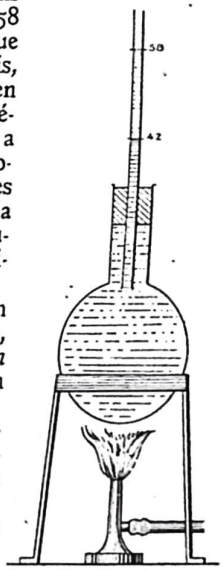


Fig. 239

Cette différence prend le nom de *dilatation apparente* du liquide, par opposition avec la *dilatation absolue* qui est l'augmentation réelle de volume du liquide.

Quand on connaît la dilatation du vase, il est facile de déterminer la dilatation absolue du liquide qu'il renferme.

En effet : *la dilatation réelle est égale à la dilatation apparente augmentée de la dilatation du vase.*

Voici le tableau de dilatation réelle des principaux liquides.

Mercure	$\frac{1}{5550}$
Eau	$\frac{1}{2100}$
Alcool	$\frac{1}{900}$
Ether	0,00151
Benzine	0,00138
Pétrole	0,00104

L'alcool est donc à peu près deux fois plus expansible que l'eau et six fois plus que le mercure.

D'autre part, connaissant le coefficient de dilatation absolue du mercure, on peut déterminer le coefficient de dilatation d'un récipient quelconque, en faisant la différence de la dilatation absolue d'une masse de mercure contenue dans ce récipient et de sa dilatation apparente.

On a trouvé ainsi que le coefficient de dilatation du verre est 0,000 025 84. Pour le verre blanc ordinaire, ce coefficient est de 0,000 025 4.

Isidore Pierre et Kopp ont mesuré la dilatation apparente des liquides entre 0° et 100° :

1 000 parties, en volume,	d'eau distillée	donnent	1 046	parties
» »	d'eau salée saturée	—	1 050	—
» »	de solution d'acide chlorhydrique	—	1 060	—
» »	de solution d'acide sulfurique	—	1 060	—
» »	d'huile d'olive	—	1 073	—
» »	d'essence de térébenthine	—	1 084	—
» »	de brome	—	1 103	—
» »	d'acide acétique	—	1 105	—
» »	d'acide azotique	—	1 110	—
»	chloroforme	—	1 111	—
» »	de sulfure de carbone	—	1 114	—
» »	de benzine	—	1 118	—
» »	d'éther	—	1 148	—

Regnault nous a laissé une table qui donne la dilatation absolue du mercure de 10° en 10° centigrades, entre 0° et 350°.

1 000 000 de volumes à 0° donnent :

1 001 792 à	10° C	1 034 922 à	190° C
1 003 590 à	20°	1 036 811 à	200°
1 005 393 à	30°	1 038 704 à	210°
1 007 201 à	40°	1 040 603 à	220°
1 009 013 à	50°	1 042 506 à	230°
1 010 831 à	60°	1 044 415 à	240°
1 012 655 à	70°	1 046 329 à	250°
1 014 482 à	80°	1 048 247 à	260°
1 016 315 à	90°	1 050 171 à	270°
1 018 153 à	100°	1 052 100 à	280°
1 019 996 à	110°	1 054 034 à	290°
1 021 844 à	120°	1 055 973 à	300°
1 023 697 à	130°	1 057 917 à	310°
1 025 555 à	140°	1 059 866 à	320°
1 027 419 à	150°	1 061 820 à	330°
1 029 287 à	160°	1 063 778 à	340°
1 031 160 à	170°	1 065 743 à	350°
1 033 039 à	180°		

La force d'expansion des liquides est énorme, elle est égale à la force nécessaire pour ramener la masse dilatée à son volume initial. Entre 0° et 10° le mercure se dilate de 0,0015 790 de son volume initial à 0°. Sa compressibilité est de 0,000 002 95 pour une atmosphère. Il faudrait donc une pression de plus de 600 atmosphères pour empêcher la dilatation du mercure entre 0° et 10°.

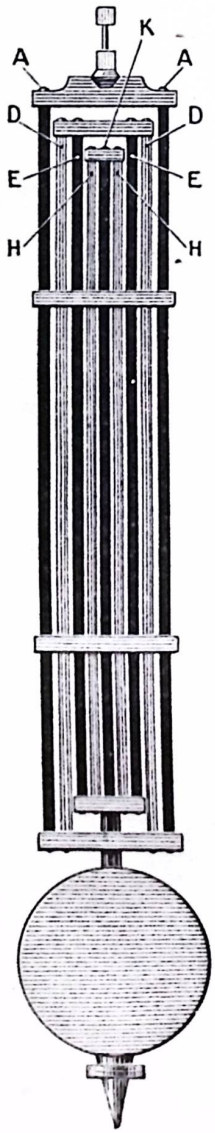


Fig. 241

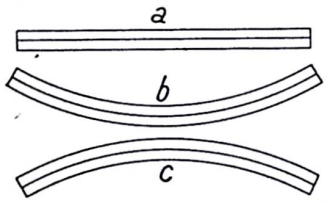


Fig. 240

Conséquences de la dilatation. — Par suite de la dilatation la *masse spécifique d'un corps solide ou liquide diminue quand sa température* augmente car tandis que la masse totale du corps reste fixe son volume augmente.

Applications des dilatations. — Parmi les applications des dilatations, la plus importante est *l'invention des thermomètres.*

Nous avons vu qu'on peut construire des thermomètres au moyen des corps solides, des liquides et des gaz.

Le *thermomètre de Bréguet* est basé sur les différences de la dilatation qu'éprouvent plusieurs rubans métalliques quand on fait varier leur température. Soient (fig. 240) deux lames de métaux différents soudées entre elles, de façon qu'à la température de 0°, par exemple, leur ensemble offre l'aspect d'un barreau rectiligne *a*. Supposons que la lame inférieure ait un coefficient de dilatation plus grand que celui de la lame supérieure. Quand la température s'élève, la lame inférieure devient plus longue que la lame supérieure et le barreau se courbe comme en *b*. Si, au contraire, la température s'abaisse au-dessous de 0°, la lame inférieure se contracte plus vite que la lame supérieure et le barreau s'incurve en sens contraire, comme en *c*.

Lorsque le balancier d'une horloge s'allonge ou se raccourcit sous l'influence des changements de température, il bat moins vite ou plus vite et, par suite, l'exactitude de l'horloge se trouve altérée. Pour rétablir cette exactitude, on a recours *aux balanciers de compensation* (fig. 241).

La pendule se compose d'une série de tiges parallèles, les unes en acier A, E, K ; les autres en cuivre D, H, reliées de telle façon que les tiges d'acier se dilatent toutes en sens inverse des tiges de cuivre. Le cuivre a un coefficient de dilatation plus élevé que celui de l'acier et les longueurs des différentes tiges sont calculées de telle sorte que la dilatation des tiges A, E, K soit exactement compensée par la dilation des tiges D, H.

Quand on établit de vastes constructions métalliques, on est obligé de tenir compte des dilatations qui pourraient amener une déformation considérable de la charpente.

On pare à ces déformations possibles en laissant une mobilité relative à certaines parties de la charpente qui sont en quelque sorte librement articulées les unes sur les autres.

Sur les *voies de chemins de fer* on a soin de laisser *entre les rails un petit intervalle* pour empêcher la déformation par pression réciproque sous l'influence des chaleurs d'été.

La force de contraction d'un solide sous l'effet du refroidissement est considérable. On a parfois utilisé cette force, pour redresser un mur par exemple. *C'est ainsi que la muraille du Conservatoire des Arts et Métiers à Paris* a été ramenée à la verticale par le procédé suivant : de longues tiges de fer furent établies d'un mur à l'autre en travers de la salle ; ces tiges traversaient la muraille et étaient retenues de l'autre côté par de larges plaques de fer pouvant se visser sur les bouts des tiges. Ces tiges, ayant été chauffées dans l'intérieur de la salle, s'allongèrent et les plaques furent vissées à fond. Par suite du refroidissement, les tiges reprirent leurs dimensions premières et leur contraction amena le redressement des murs.

On utilise encore la dilatation des solides pour :

1° *le bandage des roues de voiture* : le forgeron chauffe fortement le cercle en fer qui, en se refroidissant, serre les pièces de la roue ;

2° *la pose des feuilles de zinc des toitures* ; ces feuilles ne sont clouées que par un de leurs bords.

Dilatation des gaz. — On appelle *coefficient de dilatation d'un gaz, sous pression constante, l'accroissement de l'unité de volume de gaz pour une élévation de température d'un degré.*

Gay-Lussac établit que le **coefficient de dilatation entre 0° et 100° est sensiblement le même pour tous les gaz.**

D'un autre côté, Davy a montré que *ce coefficient est indépendant de la pression choisie.*

Toutefois, ces deux lois ne sont suffisamment approchées que pour les gaz éloignés de leur point de liquéfaction.

Regnault a trouvé les nombres suivants :

Hydrogène	0,003661
Oxyde de carbone	0,003669
Air	0,003670
Anhydride carbonique	0,003710
Protoxyde d'azote	0,003719
Cyanogène	0,003877
Anhydride sulfureux	0,003903

La valeur moyenne du coefficient de dilatation des gaz est de $\frac{1}{273}$.

Le 0 absolu. — Ce résultat conduit à penser que, pour un gaz qui suivrait exactement les lois de Mariotte, de Gay-Lussac et de Davy, la pression deviendrait nulle à une température de 273° au-dessous de 0°, le volume deviendrait le *covolume. La température de —273° est alors la température la plus basse possible, c'est le* 0 *absolu.*

Soit α le coefficient de dilatation des gaz, soit V_0 le volume *d'une masse gazeuse à 0°, et* V_t *le volume de la masse à t° sous la même pression, on a toujours*

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t).$$

Pour une autre température t', on aurait

$$V_t' = V_0 (1 + \alpha t').$$

De ces deux égalités on tire $\frac{V_t}{V_t'} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}$

Loi. — *A la même pression, les volumes d'une même masse gazeuse à différentes températures sont entre eux comme les binômes de dilatation correspondant à ces températures.*

Ou encore : *Le quotient du volume par le binôme de dilatation correspondant est constant*

$$\frac{V_t}{1 + \alpha t} = \frac{V'_t}{1 + \alpha t'}$$

En remarquant que si *l'on appelle température absolue d'un corps T la température centésimale t augmentée de 273,* on a

$$T = 273 + t$$

$$1 + \alpha t = 1 + \frac{1}{273} t = \frac{273 + t}{273} = \frac{T}{273}$$

l'équation $\frac{V_t}{1 + \alpha t} = \frac{V_t'}{1 + \alpha t'}$

peut devenir $\frac{V_t}{T} = \frac{V_t'}{T'}$

Loi. — A pression constante, le volume d'un gaz est proportionnel à sa température absolue.

Soit H_0 la pression à laquelle était soumise la masse gazeuse de volume V_0 à 0°. *Si nous élevons la température, sans changer la pression,* le volume V_t se trouvera aussi à la pression H_0 ; mais si nous ramenons le volume V_t au volume V_0, la nouvelle pression H_t sera donnée suivant la loi de Mariotte par l'égalité

$$V_t H_0 = V_0 H_t$$

Ou, en remplaçant V_t par sa valeur

$$V_0 (1 + \alpha t)$$

$$V_0 H_0 (1 + \alpha t) = V_0 H_t$$

ou enfin $H_0 (1 + \alpha t) = H_t$

On trouverait de même pour une autre température t'

$$H_0 (1 + \alpha t') = H_t,$$

De ces deux égalités on tire

$$\frac{H_t}{H t'} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}$$

Loi. — *Les pressions, à différentes températures, d'une même masse gazeuse assujettie à conserver un volume constant, sont entre elles comme les binômes de dilatation correspondant à ces températures.*

Ou encore : *Le quotient de la pression par le binôme de la dilatation correspondant est constant*

$$\frac{H_t}{1 + \alpha t} = \frac{H t'}{1 + \alpha t'}$$

Mais $\frac{H_t}{1 + \alpha t} = \frac{H t'}{1 + \alpha t'}$

peut devenir $\frac{H_t}{T} = \frac{H t'}{T'}$

Loi. — A volume constant, la pression d'une masse gazeuse est proportionnelle à sa température absolue.

Equation des gaz parfaits :

Soit V_1 le volume occupé par une masse gazeuse à la pression H et à la température t' on a

$$\frac{V}{1 + \alpha t} = \frac{V_1}{1 + \alpha t'} \quad (1)$$

Si maintenant nous considérons le volume V' de cette même masse gazeuse à la pression H' on a :

$$V_1 H = V' H'$$

Car ces 2 volumes V_1 et V' sont à la même température t'

on a donc $V_1 = \frac{V' H'}{H}$

En portant dans l'équation (1)

$$\frac{V}{1 + \alpha t} = \frac{V' H'}{H (1 + \alpha t')}$$

ou $\frac{V H}{1 + \alpha t} = \frac{V' H'}{1 + \alpha t'}$ (2)

Cette formule s'exprime par l'énoncé suivant :

Loi. — *Pour une même masse gazeuse,* le produit *du volume par la pression divisé par le binôme de dilatation correspondant à la température de la masse, est un nombre constant.*

Cette formule est connue sous le nom de formule de *Gay-Lussac.*

Elle peut s'écrire aussi

$$\frac{V H}{T} = \frac{V' H'}{T'} \quad (3)$$

C'est alors l'équation connue sous le nom d'*équation des gaz parfaits.* Pour les gaz réels, on applique l'équation de Van der Vaals :

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{R T}{V - b}$$

dans laquelle

$R = p_0 v_0 \alpha$ = constante

b = le covolume

et $\frac{a}{V^2}$ = la pression interne

Densité d'un gaz. — Des formules de *Gay-Lussac* (2) et (3), on peut déduire le rapport des densités d'un gaz à des températures et à des pressions différentes. En effet, les densités D et D' sont inversement proportionnelles aux volumes V et V'

$$\frac{D}{D'} = \frac{V'}{V}$$

Mais de (2) on tire

$$\frac{H (1 + \alpha t')}{H' (1 + \alpha t)} = \frac{V'}{V}$$

d'où $\frac{D}{D'} = \frac{H (1 + \alpha t')}{H' (1 + \alpha t)} = \frac{H T'}{H' T}$ (3)

Les formules (2) et (3) permettent en particulier de résoudre ce problème important : *Ramener le volume ou la densité d'une masse gazeuse aux conditions normales de température et de pression,* le volume ou la densité de cette masse étant connu à une pression et à une température différentes de la normale.

La pression normale étant 760 mm., et la température normale 0°, il suffit de faire, dans la formule (2), $V' = V_0$, $H' = 760$, $t' = 0$, et, dans la formule (3), $D' = D_0$, $H' = 760$, $t' = 0$:

$$\frac{V H}{1 + \alpha t} = V_0 \times 760$$

$$\frac{D}{D_0} = \frac{H}{760 (1 + \alpha t)}$$

d'où on tire $V_0 = \frac{V H}{760 (1 + \alpha t)}$

$$D_0 = \frac{D \times 760 (1 + \alpha t)}{H} = \frac{D \times 760 \times T}{H \times 273}$$

Mesure de la densité d'un gaz. — Comme la densité absolue d'un gaz varie considérablement avec la température et la pression, on prend généralement la densité d'un gaz par rapport à l'air. C'est le rapport entre la masse d'un certain volume de gaz et la masse

du même volume d'air mesuré dans les mêmes conditions de température et de pression.

$$d = \frac{M}{m}$$

Comme le gaz et l'air suivent sensiblement la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, cette densité varie très peu lorsque la température et la pression changent.

Soit a le poids du litre d'air dans les conditions normales (température 0° et pression 76 cm de mercure) ; si le gaz occupe un volume V, son volume à 0 et sous la pression 76 cm. sera :

$$V_0 = \frac{V}{1 + \alpha t} \times \frac{H}{76}$$

en appelant V son volume et H sa pression.

d'où $$m = a \times \frac{V}{1 + \alpha t} \times \frac{H}{76}$$

et enfin : $$M = a \times \frac{V}{1 + \alpha t} \times \frac{H}{76} \times d$$

ou $$a \times V \times \frac{H}{76} \times d \times \frac{273}{T}$$

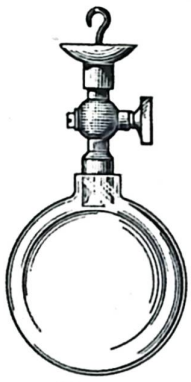


Fig. 242

Pour déterminer la densité du gaz on l'introduit dans un ballon (fig. 242) à 0° et sous la pression atmosphérique, puis on porte le ballon sous le plateau d'une balance en portant un ballon-tare de même volume sous l'autre plateau. Ensuite on fait le vide, la différence de masse donne la masse du gaz.

On recommence les mêmes opérations avec de l'air.

Anomalies des phénomènes de dilatation. — Nous avons dit que, en général, quand la température d'un corps augmente, le volume de ce corps augmente, mais il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple l'iodure d'argent se contracte sous l'influence de la chaleur, son coefficient de dilatation est négatif, sa valeur est de 0,000 001039.

La fonte augmente de volume en se refroidissant, ce qui permet de la mouler.

Une autre exception beaucoup plus importante est celle de l'eau qui se contracte au lieu de se dilater entre 0° et 4°. Le maximum de densité de l'eau est à 4°, et c'est pourquoi l'on définit l'unité de masse, le gramme : *la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à la température de 4° centigrades.*

Expérience de Hope. — Cette anomalie que présente la dilatation de l'eau est mise en évidence par l'expérience de Hope.

Une éprouvette pleine d'eau (fig. 243) est entourée par un manchon contenant un mélange réfrigérant constitué par de la glace pilée et du sel marin. Un premier thermomètre T_1 permet de connaître la température du haut du liquide tandis qu'un deuxième T_2 permet de connaître celle du bas.

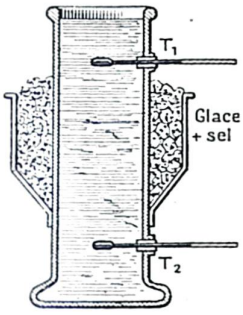


Fig. 243

On note les températures toutes les 5 minutes par exemple et on obtient un tableau analogue au tableau suivant :

temps	température T_1	température T_2	temps	température T_1	température T_2
0 m.	14°	14°	30 m.	11°	4°
5 m.	14°	9°5	35 m.	8°5	4°
10 m.	14°	6°3	40 m.	5°	4°
15 m.	14°	5°1	45 m.	3°	4°
20 m.	13°	4°2	50 m.	1°	3°8
25 m.	12°	4°2	55 m.	0°	3°2

Construisons les graphiques correspondant à cette expérience en portant sur un axe horizontal des longueurs proportionnelles aux temps et sur un axe vertical des longueurs proportionnelles aux températures (fig. 244). Ce graphique nous montre :

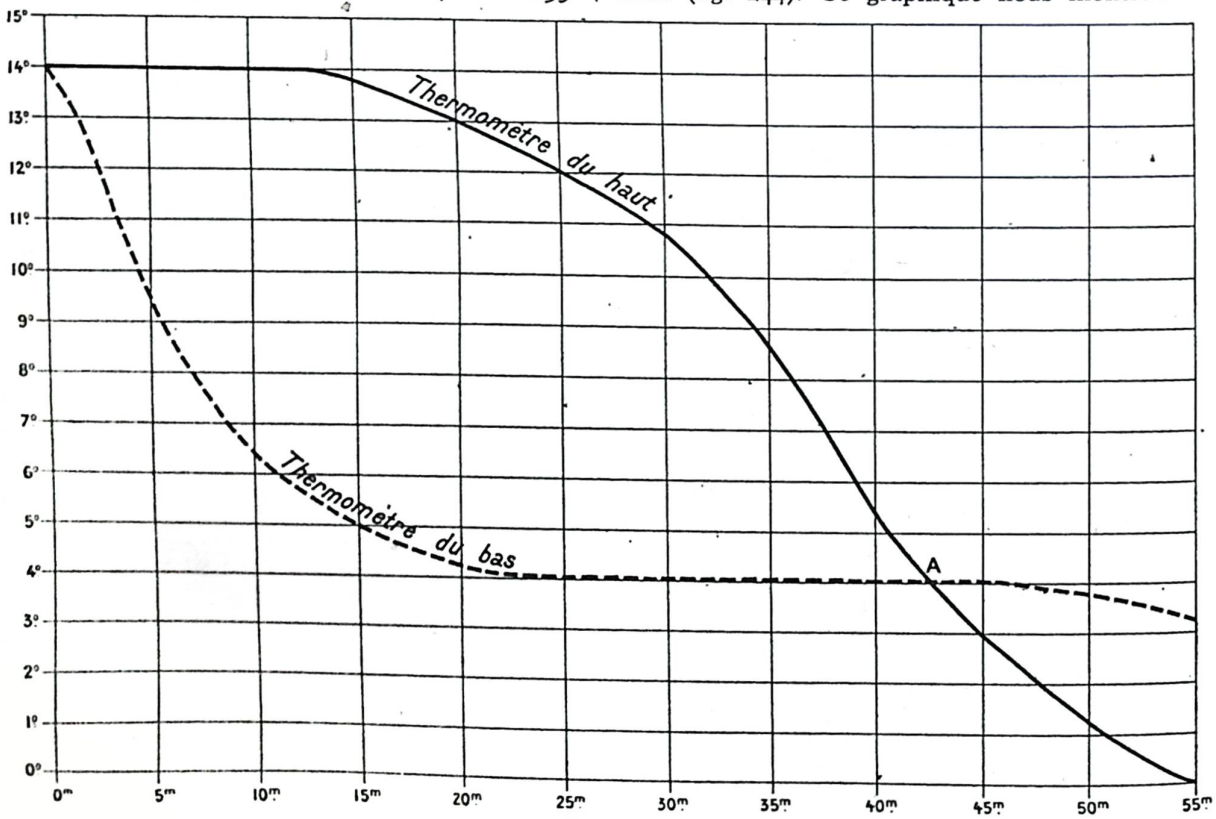


Fig. 244

1° que le thermomètre du bas descend rapidement tandis que celui du haut ne baisse que très lentement.

2° Que lorsque le thermomètre du bas est aux environs de 4° il devient à peu près stationnaire tandis que celui du haut se met à baisser rapidement.

3° Que lorsque le thermomètre du haut atteint 4° et dépasse cette température, les deux graphiques se coupent alors en un point A.

C'est donc toujours du liquide à 4° qui se trouve au fond du vase ; par conséquent la densité du liquide est maximum à cette température.

Remarque. — Cette existence d'un maximum de densité de l'eau vers 4° a une grande importance dans la nature. En effet, lorsque la température se refroidit les parties liquides situées au voisinage de la surface d'un lac ou d'un cours d'eau, deviennent de plus en plus denses au fur et à mesure qu'elles perdent de la chaleur et que leur température s'abaisse. Elles tombent donc au fond pour être remplacées par d'autres plus chaudes qui se refroidissent à leur tour. Ce phénomène de circulation se poursuit jusqu'à ce que l'eau située au fond soit à la température de 4°. A partir de ce moment la circulation devient de moins en moins profonde jusqu'à ce que toute la masse liquide soit à 4°, et alors elle cesse complètement. La surface seule continue à se refroidir jusqu'à 0° et finit par geler, sans que la température de l'eau profonde soit descendue au-dessous de 4°. En se formant, la glace, plus légère que l'eau, forme une couche isolante qui arrête le refroidissement. De sorte que la température de l'eau, à peu de distance de la surface, reste égale à 4°, permettant ainsi aux êtres vivants de continuer à subsister.

Tableau de la dilatation de l'eau :

— 9°	V = 1,001 631	10°	1,000 268
— 5°	1,000 698	20°	1,001 790
0°	1,000 127	25°	1,002 93
4°	1,000 00	30°	1,004 38
8°	1,000 121	etc.	1,004 38

Conséquences de la dilatation des gaz. — Ascension des Montgolfier. — Ce sont des ballons de papier gonflés avec de l'air chaud.

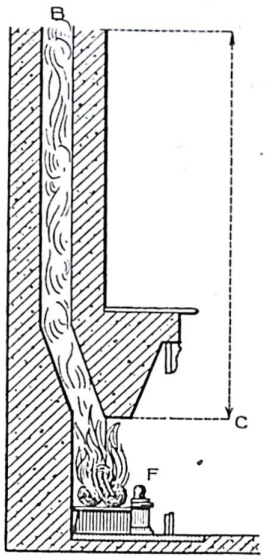


Fig. 245

Tirage des cheminées. — L'air chaud étant plus léger que l'air froid monte dans la cheminée et se trouve remplacé par de l'air froid (fig. 245) ; il s'en suit la formation d'un courant d'air.

Vents. — L'air chauffé au contact du sol dans les régions chaudes est remplacé par l'air froid des régions froides (fig. 246). Il se forme ainsi des courants atmosphériques appelés vents.

Problèmes.

1. — Un pont métallique a une longueur de 100 mètres à 0°. Calculer la variation de sa longueur entre les points de température extrême de l'hiver et de l'été : — 20° et + 40°. Le coefficient de dilatation du fer étant 0,000012.

Solution

Différence de température entre les points extrêmes :

$$40° - (-20°) = 60°$$

Variation de longueur :

$$100 \text{ m.} \times 0{,}000012 \times 60 = 0{,}072 \text{ m.}$$

Réponse : 0,072 m.

2. — Une feuille de zinc mesurée à 0° a 3 m. de long sur 2,50 m. de large. Quelle est sa surface à 40°. Coefficient de dilatation linéaire du zinc : 0,000032.

Solution

La surface à t est donnée par la formule :

$$S_t = S_0 (1 + 2 \alpha t)$$

dans laquelle :

$$S = 3 \times 2{,}50 = 7{,}50$$
$$\alpha = 0{,}000032$$
$$t = 40°$$

donc :

$$S_t = 7{,}5 (1 + 210{,}000032 \times 40)$$
$$S_t = 7{,}5 (1 + 0{,}091256)$$
$$S_t = 7{,}5 (1{,}00256)$$

d'où : $S_t = 1 \text{ m}^2\ 5192$

Réponse : 1,5192 m²

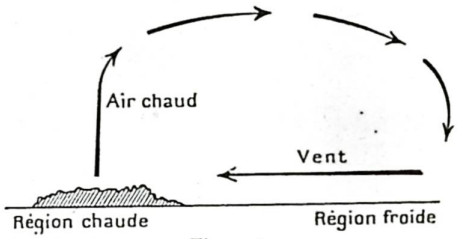


Fig. 246

3. — Quel est le volume à 100° d'une boîte cylindrique en fer-blanc, mesurant à 0° 20 cm. de diamètre et 50 cm. de hauteur. Coefficient de dilatation : 0,000015, $\pi = \frac{22}{7}$.

Solution

Le volume à t_0 est donné par la formule :

$$V_t = V_0 (1 + 3 \alpha t)$$

$$V_0 = 10 \times 10 \times \frac{22}{7} \times 50 = \frac{5000 \times 22}{7} \text{ cm}^3$$

$$t = 100°$$
$$\alpha = 0{,}000015$$

d'où $V_t = \frac{5000 \times 22}{7} \times (1 + 0{,}000015 \times 3 \times 100)$

$$V_t = \frac{5000 \times 22 \times 1{,}001145}{7} = 15.785 \text{ cm}^3$$

Réponse : 15.785 = 15,785 litres

4. — A la température de 0°, on remplit de mercure un récipient en verre d'une capacité de 1 litre. On porte la température du tout à 100°. Déterminer la quantité de mercure qui sortira du vase, sachant que le coefficient de dilatation cubique du verre est 0,000024 et celui du mercure 0,00018.

Solution

A 100°, 1 litre de mercure occupe un volume de :

$$(1 + 0{,}00018)\ 100 = 1{,}018 \text{ l. ou } 1018 \text{ cm}^3$$

Le volume du récipient à la même température est de :

$$(1 + 0{,}000024)\ 100 = 1{,}0024 \text{ l. ou } 1002{,}4 \text{ cm}^3$$

Il sortira donc :

$$1018 - 1002{,}4 = 15{,}600 \text{ cm}^3 \text{ de mercure.}$$

5. — Un petit ballon dont le col est étiré en pointe est rempli exactement avec 816 grammes de mercure à 0°. On le chauffe ; il sort 10,2 g. de mercure par la pointe. A quelle température l'a-t-on chauffé ?

Solution

Représentons par d la densité du mercure à 0° ; la capacité du flacon à 0° est $\frac{816}{d}$ centimètres cubes ; à la température x à laquelle on le chauffe, sa capacité devient :

$$\frac{816}{d}\left(1 + 0{,}000.025\, x\right)$$

Puisqu'il sort 10,2 g. de mercure du flacon, il en reste 805,8 g. Le volume de ce mercure à 0° est $\frac{805{,}8}{d}$ centimètres cubes ; à x° il est de :

$$\frac{805{,}8}{d}\left(1 + \frac{x}{5550}\right)$$

Mais comme à x° le volume de ce mercure est égal au volume du flacon on a

$$\frac{816}{d}\left(1 + \frac{25\, x}{1.000.000}\right) = \frac{805{,}8}{d}\left(1 + \frac{x}{5550}\right)$$

En multipliant les deux membres par d et en simplifiant, il vient :

$$816 + \frac{2040\, x}{1.000.000} = 805{,}8 + \frac{8058\, x}{55500}$$

ou

$$\frac{8058\, x}{5550} - \frac{204\, x}{10000} = 102$$

d'ou

$$x = \frac{102}{0{,}1248} = 81°7$$

Réponse : 81° 7

6. — Un ballon sphérique a une superficie de 10 m². On demande ce que pèse à 0° et à 76 cm. de pression l'hydrogène qu'il contient. Sachant que la densité de l'air est $\frac{1}{770}$ de celle de l'eau, et celle de l'hydrogène comparée à celle de l'air 0,0692.

Coefficient de dilatation absolue du mercure $\frac{5.550}{1}$, du verre : 0.000.025.

Solution

Soit r le rayon du ballon exprimé en décimètres. La surface de la sphère est égale à :

$$4\pi r^2 = 1000 \text{ d'où } r^2 = \frac{250}{\pi}$$

et

$$r = \sqrt{\frac{5}{\pi}} = 5\sqrt{\frac{10}{\pi}} = 5 \times 1{,}78$$

Le volume du ballon est égal à :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{250}{\pi} \times 5 \times 1{,}78 = \frac{1000 \times 5 \times 1{,}78}{3}$$

$$= \frac{8900}{3} \text{ dm}^3$$

Un dm³ d'air pèse $\frac{1000 \text{ g.}}{776}$ et un dm³ d'hydrogène :

$$\frac{1000 \text{ g.}}{770} \times 0{,}0692 = \frac{692}{7700}$$

L'hydrogène du ballon pèse donc :

$$\frac{692}{7700} \times \frac{8900}{3} = \frac{61588}{231} = 267 \text{ g. par excès}$$

7. — Quel est le volume occupé par 25 g. d'air à 6° et à la pression 85 cm. de mercure, sachant que 1 litre d'air à 0° pression 76 cm. pèse 1,3 g. ?

Réponse : 17,29 l.

8. — Expliquez en prenant l'oxygène comme exemple, ce que l'on appelle densité d'un gaz.

1° Sachant que la densité de l'oxygène est 1.105, calculez le poids d'un litre de ce gaz dans les conditions normales de température et de pression.

2° Dix litres d'oxygène à la température de 0° et sous la pression de 760 mm. sont placés dans un corps de pompe étanche. On comprime ce gaz à une pression 5 atmosphères.

Calculez le volume qu'il occuperait en supposant que la température reste à 0°.

3° Mais dans cette compression la température s'est élevée de 30°. Calculer le volume réellement occupé et en déduire le poids d'un litre d'oxygène à la pression de 5 atmosphères et à la température de 30°.

Réponse : 1,429 g.
volume 5 fois plus petit
2,219 l.
6.42 g.

9. — Un ballon sphérique a 12 mètres de diamètre ; il est gonflé entièrement à l'hydrogène dont la densité par rapport à l'air est 0,07. L'enveloppe pèse 400 g. par mètre carré. Les aéronautes et les agrès pèsent ensemble 500 kilogrammes. La température est 20° et la pression atmosphérique 75 centimètres de mercure. Quelle est, en kilogrammes-poids et en sthènes la force ascensionnelle du ballon ?

Solution

Volume du ballon :

$$\frac{\pi \times 12^3}{6} = 905{,}1 \text{ m}^3$$

Surface :

$$\pi \times 12^2 = 452{,}5 \text{ m}^2$$

Poids de l'enveloppe : 0,4 × 452,5 = 181 kg.

Sa force ascensionnelle est égale à la différence entre le poids de l'air déplacé et le poids total du ballon. Appliquons la formule des gaz parfaits $\frac{VP}{T} = \frac{V'P'}{T'}$ pour calculer le volume de l'air déplacé, dans les conditions normales :

$$\frac{905{,}1 \times 75}{293} = \frac{V' \times 76}{273}$$

$$V' = 832{,}2 \text{ m}^3$$

Son poids est donc :

$$1.293 \times 832{,}2 = 1076{,}03 \text{ kg.}$$

L'hydrogène qui gonfle le ballon étant à la même pression et à la même température que l'air atmosphérique pèse

$$1.076{,}03 \times 0{,}07 = 75{,}32 \text{ kg.}$$

Force ascensionnelle du ballon :

$$10.76{,}03 - 75{,}32 + 181 + 500 = 319{,}71 \text{ kg.}$$

ou

$$\frac{319{,}71}{102} = 3{,}134 \text{ st.}$$

Réponse : 319,71 kg. ou 3,134 st.

10. — Calculer à 0° le volume du réservoir d'un thermomètre sachant que le volume compris à 0° entre les traits 0 et 100 est 5 mm³. Coefficient de dilatation absolue du mercure 0,00018 ; coefficient de dilatation cubique du verre 0,000 024.

Solution

Soit V le volume du réservoir à 0° ; il est occupé à 0° par le mercure ; lorsque celui-ci passe à 100° son volume augmente de :

$$V \times 100 \times 0{,}00018 = V \times 0{,}018$$

Or, il occupe un volume de

$$(V + 0\ cm^3,005) \times (0,000024 \times 100 + 1)$$
$$= 0,0024\ V + V + 0,0050012$$

d'où :

$$V = \frac{0,0050012}{0,0156} = 0,32\ cm^3$$

11. — Dans un récipient dont le volume intérieur est invariable et égal à 25 l. se trouve une masse d'air de 39 grammes.

1° Calculer la pression que cet air exerce sur les parois à 0°.

2° On demande à quelle température cette pression deviendrait égale à 2 atm. le volume du récipient restant fixe. Poids du litre d'air à 0° sous la pression de 1 atmosphère 1,3 g. Coefficient de dilatation des gaz $\frac{1}{273}$.

Solution

39 gr. d'air à 0° représentent un volume de :

$\frac{39}{1,3} = 30$ litres sous la pression de 1 atmosphère.

En appliquant la loi de Mariotte, nous aurons donc :

$$30 \times 1 = 25 \times P$$

d'où $P \quad \frac{30}{25} \quad \frac{6}{5}$ atmosphère

2° D'après l'équation des gaz parfaits, nous aurons donc :

$$\frac{30 \times 1}{1} = \frac{25 \times 2}{1 + \frac{x}{273}}$$

d'où : $x = 639°$.

12. — A quelle température l'oxygène sous la pression de 20 cm aurait-il la même densité que l'hydrogène à 0° et à la pression 260 cm ? densité de l'oxygène D = 1.105 ; densité de l'hydrogène 0,069. Coefficient de dilatation 0,00367.

Solution

Densité de l'oxygène à la température demandée x :

$$d = \frac{1,105 \times 20}{76\ (1 + 0,00367\ x)}$$

Densité de l'hydrogène dans les conditions indiquées :

$$d = \frac{0,069 \times 260}{76}$$

d'où : $\frac{0,069 \times 260}{76} = \frac{1,105 \times 20}{76\ (1 + 0,00367\ x}$

Ce qui donne : $x = 63°$.

13. — Dans un réservoir de 10 litres de capacité, muni d'un robinet, on fait entrer 25 l. d'air à la pression de 1 atmosphère et 5 l. de gaz carbonique à la pression de 3 atmosphères. On ouvre le robinet et on laisse échapper une certaine quantité de gaz qui occupe un volume de 30 litres à la pression de 1 atm., puis on ferme le robinet ; on demande :

1° La pression du mélange avant l'ouverture du robinet.

2° La pression du mélange après la sortie des 30 litres.

Solution

1° Pression de l'air :

$$\frac{25 \times 1}{10} = 2,5\ \text{atm.}$$

Pression du gaz carbonique :

$$\frac{5 \times 3}{10} = 1\ 5\ \text{atm.}$$

Pression totale du mélange :

2,5 atm. + 1,5 atm. = 4 *atmosphères.*

2° Nous avons :

$$30 \times 1 + 10\,x = 10 \times 4.$$

d'où : $x = 1$ *atmosphère.*

14. — Etant donné le volume V d'une masse gazeuse à une pression H et à une température t. trouver son volume V' à une autre pression H' et à une autre température t.

Soit V_1 le volume occupé par la masse gazeuse à la pression H et à la température t', on a :

$$\frac{V}{1 + \alpha t} = \frac{V_1}{1 + \alpha t'} \qquad (1)$$

Mais, comme les volumes V_1 et V' sont mesurés à la même température ainsi que les pressions correspondantes H et H', on a

$$V_1 H = V' H'$$

D'où on tire $\quad V_1 = \frac{V' H'}{H}$

En portant cette valeur dans l'équation (1), on trouve

$$\frac{V}{1 + \alpha t} = \frac{V' H'}{H\,(1 + \alpha t)}$$

ou $\quad \frac{V H}{1 + \alpha t} = \frac{V' H'}{1 + \alpha t'}$

d'où il est facile de tirer V'

CHAPITRE III

CHALEUR SPÉCIFIQUE — CALORIMÉTRIE

Quand un corps est à une température différente du milieu ambiant, l'écart de température ne se maintient pas indéfiniment. Cet écart tend à disparaître et au bout d'un temps plus ou moins long, le corps et le milieu sont à la même température, l'équilibre est atteint. On dit, dans ce cas, que le corps le plus chaud *a cédé de la chaleur à l'autre* jusqu'à ce qu'ils soient à la même température.

Sans rien préjuger de la nature véritable de la chaleur, on peut dire que c'est *ce qu'il faut fournir à un corps pour élever sa température.*

Principes de calorimétrie. — 1° Si la température d'un corps placé sur une source de chaleur s'élève de 10° à 60° il est naturel de dire que cette source lui a fourni une certaine quantité de chaleur et que cette quantité de chaleur est la même, quelle que soit la nature de la source de chaleur (soleil, foyer au charbon, gaz, etc.).

Si le corps revient de 60° à 10° on admet comme évident *qu'il perd la quantité de chaleur qu'il avait absorbée.*

Nous dirons donc que :

Si un corps se refroidit, *il perd une quantité de chaleur égale à celle qu'il a fallu lui fournir pour élever sa température.*

2° Si nous plaçons une quantité déterminée d'eau (1 litre par exemple) sur un foyer bien réglé, nous pouvons constater que pour élever la température de cette quantité de 10, de 20, de 30°, il faudra des temps t, $2\,t$, $3\,t$.

Il en résulte que *la quantité de chaleur fournie à un corps (qui ne change pas d'état) est proportionnelle à l'élévation de température correspondante.*

3° Si nous chauffons successivement sur ce même foyer 1 litre d'eau, puis 2 litres, nous constatons que pour élever ces deux quantités à la même température, il faudra des temps t et $2\,t$.

Nous pouvons donc conclure *que les quantités de chaleur nécessaires pour élever également la température de plusieurs masses d'un même liquide sont proportionnelles à ces masses.*

4° Si maintenant nous mélangeons un litre d'eau à 90° et deux litres à 15° en prenant certaines précautions, nous constatons que nous obtenons 3 litres d'eau à 40°.

Autrement dit, en remarquant que la quantité de chaleur est fonction de la masse et de la température, on constate que 1.000 grammes d'eau pour se refroidir de 90° à 40° abandonnent autant de chaleur que 2.000 gr. d'eau en absorbent pour s'élever de 15 à 40°.

La chaleur perdue par le corps qui se refroidit est donc égale à celle gagnée par le corps qui s'échauffe.

Ce principe est celui sur lequel repose la mesure des quantités de chaleur par la *méthode des mélanges.*

5° Si enfin nous chauffons sur un même foyer 1.000 grammes d'eau et 1.000 grammes de mercure, nous constatons que le mercure s'échauffe beaucoup plus rapidement que l'eau.

Pour élever leur température d'un même nombre de degrés *les corps absorbent des quantités différentes de chaleur.*

De tous ces principes, il résulte que la quantité de chaleur gagnée ou perdue par un corps entre deux températures θ et t est donnée par l'équation

$$Q = Cm\,(\theta - t)$$

dans laquelle m est la masse du corps et C une constante calorifique qui dépend de la nature du corps, autrement dit, qui est spéciale à chaque corps et qu'on appelle, pour cette raison, *chaleur spécifique.*

Unités de chaleur. — Pour mesurer une grandeur, il faut choisir une unité. L'unité de chaleur est la *thermie* (*th*).

La thermie est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'une tonne d'eau.

On emploie aussi la *petite calorie qui est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'un gramme d'eau.*

Elle vaut la millionième partie de la thermie ; on l'appelle aussi microthermie (μ *th*).

On utilise aussi *la grande calorie ou calorie kilogramme qui est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'une masse d'eau de 1 kilogramme.*

Elle égale la *millithermie* (*mth*).

Remarque. — Les lois que nous venons d'établir ne sont pas tout à fait exactes.

En effet, la température est déterminée d'une façon tout à fait arbitraire et il ne paraît pas a priori que les quantités de chaleur qu'il faut fournir successivement à une masse d'eau, pour faire dilater de quantités égales la colonne de mercure d'un thermomètre plongé dans cette masse d'eau, doivent être égales.

Cependant on peut l'admettre pour l'eau en particulier et pour un assez grand nombre de corps, du moins entre certaines limites de température.

Pour la plupart des corps, et surtout pour les liquides, la chaleur spécifique est d'autant plus grande que la température $t°$ à laquelle on l'a mesurée est plus élevée.

En général, on considère la chaleur *spécifique moyenne* entre deux températures données, T et T', par exemple entre 0° et 100°. Pour mesurer cette chaleur spécifique moyenne, on mesure la quantité de chaleur absorbée par une masse donnée du corps, lorsque sa température s'élève de T à T'. On divise le nombre trouvé par le poids exprimé en grammes et par la différence des températures T' — T.

C'est particulièrement la mesure de ces chaleurs spécifiques moyennes que nous allons envisager.

Mesure des chaleurs spécifiques. — Calorimétrie. — Reprenons la formule

$$Q = Cm\,(\theta - t)$$

elle peut s'écrire

$$C = \frac{Q}{m\,(\theta - t)}$$

Si donc on connait Q, m et $(\theta - t)$, on peut déterminer C.

Les appareils destinés à mesurer les chaleurs spécifiques sont des *calorimètres* ; le plus simple est celui de Berthelot. Il se compose essentiellement (fig. 247), d'un vase A en laiton à parois très minces.

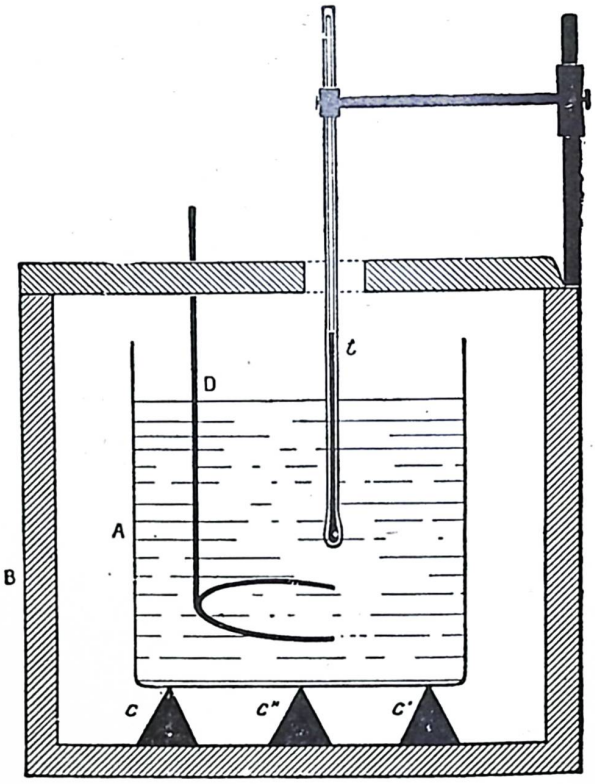


Fig. 247

Il est placé dans une enceinte B généralement constituée par du carton recouvert d'ouate et il repose sur le fond de cette enceinte au moyen de 3 petits cônes en liège (c, c' et c''), afin d'éviter les échanges de chaleur avec l'extérieur. Un thermomètre t permet de connaître la température, et un agitateur D sert à remuer le liquide contenu dans le vase A afin qu'il soit en tous ses points à la même température.

Expérience. — On dispose dans le vase A une masse d'eau M à la température t ; puis on prend une masse p du corps dont on veut connaître le poids spécifique x et on la porte à une température connue T supérieure à t. Enfin, on plonge ce corps dans l'eau du calorimètre et on note la nouvelle température X.

L'eau gagne en chaleur : $M\,(X - t)$.

Le corps perd : $p\,x\,(T - X)$.

Ces deux quantités de chaleur étant égales, on peut donc écrire

$$M\ (X - t) = p\ x\ (T - X)$$

d'où l'on tire la valeur de x :

$$x = \frac{M\ (X - t)}{p\ (T - X)}$$

Le résultat est généralement modifié par certaines corrections indispensables. Ainsi, la température du vase qui contient l'eau ne reste pas constante et il faut tenir compte de la quantité de chaleur absorbée par le vase ; m étant la masse de ce dernier et s sa chaleur spécifique, cette quantité est :

$$m\ s\ (X - t)$$

de sorte que l'équation devient :

$$M\ (X - t) + m\ s\ (X - t) = p\ x\ (T - X)$$

$$\text{d'où} \quad x = \frac{(M + m\ s)\ (X - t)}{p\ (T - X)}$$

On pose souvent : $m\ s = M'$ et cette quantité reçoit le nom d'*équivalent en eau* du calorimètre.

Il existe d'autres sortes de calorimètres, notamment celui de *Bunsen*, basé sur le phénomène de l'absorption de chaleur accompagnant la fusion de la glace.

Pour évaluer la quantité de glace fondue, on a recours à la diminution de volume qu'éprouve la glace à 0° en passant à l'état liquide à la même température. Les variations de volume sont indiquées par les déplacements d'une colonne de mercure dans un tube étroit en communication par une de ses extrémités avec la masse de glace et d'eau. Une graduation convenablement établie permet de rapporter immédiatement les déplacements de la colonne de mercure aux poids de la glace fondue.

Mesures des hautes températures par la méthode calorimétrique. — Cette méthode est due à M. Violle ; le principe est le suivant :

Un morceau de métal de chaleur spécifique connue c est porté à la température y d'un four, puis brusquement enfermé dans un cylindre plongé dans un vase contenant de l'eau froide à la température t.

La température de l'eau s'élève et devient t'.

Si m est la masse du métal, M celle de l'eau du calorimètre et M' l'équivalent en eau du calorimètre, nous aurons l'équation :

$$(M + M')\ (t' - t) = m\ c\ (y - t')$$

d'où on tire :

$$y = \frac{(M + M')\ (t' - t)}{m\ c} + t'$$

Le corps servant de comparaison était le platine dont Violle avait spécialement étudié la chaleur spécifique. C'est par cette méthode que l'on a déterminé les points de fusion de l'argent, de l'or et du cuivre qui servent de points de repère pour la graduation des autres pyromètres.

Tableau des poids spécifiques ; loi de Dulong et Petit. — Dulong et Petit ont énoncé en 1819 la loi suivante : *Le produit de la chaleur spécifique des corps solides par leur poids atomique est un nombre voisin de 6,4.*

Le tableau suivant montre que cette loi n'est qu'approchée :

SUBSTANCES	c CHALEUR spécifique	p POIDS atomique	$c \times p$ PRODUIT	SUBSTANCES	c CHALEUR spécifique	p POIDS atomique	$c \times p$ PRODUIT
Aluminium	0,2143	27,4	5,87	Iode	0,0541	127,0	6,87
Antimoine	0,0513	122,0	6,26	Magnésium	0,2499	24,0	5,94
Argent	0,0570	108,0	6,16	Mercure	0,0332	200,0	6,64
Arsenic	0,0814	75,0	6,17	Nickel	0,1086	58,7	6,41
Bismuth	0,0308	210,0	6,47	Or	0,0324	197,0	6,38
Brome	0,0842	80,0	6,74	Phosphore	0,1740	31,0	5,39
Cadmium	0,0567	112,0	6,35	Platine	0,0329	197,5	6,40
Cobalt	0,1067	58,7	6,26	Plomb	0,0314	207,0	6,50
Cuivre	0,0952	63,5	5,99	Potassium	0,1696	39,1	6,47
Etain	0,0555	118,0	6,55	Soufre	0,1776	32,0	5,70
Fer	0,1138	56,0	6,37	Zinc	0,0955	65,2	6,23

La chaleur spécifique est, pour un même corps, plus grande à l'état liquide qu'à l'état solide.

SUBSTANCES	ÉTAT SOLIDE	ÉTAT LIQUIDE	SUBSTANCES	ÉTAT SOLIDE	ÉTAT LIQUIDE
Eau	0,489	1,000	Mercure	0,031	0,033
Soufre	0,178	0,234	Phosphore	0,174	0,202
Brome	0,084	0,110	Etain	0,056	0,064
Iode	0,054	0,008	Plomb	0,031	0,040

Nous avons dit plus haut que la chaleur spécifique d'un corps à une température t, dépend de t. Elle croît généralement avec la température pour les corps solides.

La chaleur spécifique de l'eau est exprimée à une température quelconque par la formule $1 + 0{,}00015\ t$, t représentant le degré auquel on a pris la chaleur spécifique.

SUBSTANCES	CHALEUR SPÉCIFIQUE MOYENNE	
	ENTRE 0° ET 100°	ENTRE 0° ET 300°
Fer	0,1098	0,1218
Zinc	0,0927	0,1015
Antimoine	0,0507	0,0549
Argent	0,0557	0,0611
Cuivre	0,0949	0,1013
Platine	0,0355	0,0355
Verre	0,1770	0,1990

D'après Pouillet, la chaleur spécifique du platine varie de la manière suivante :

Entre 0° et 100°	0,0335
» 0° » 300°	0,0343
» 0° » 500°	0,0352
» 0° » 700°	0,0360
» 0° » 1.000°	0,0373
» 0° » 1.200°	0,0382

Cette variation est très faible et peut être considérée comme nulle dans la pratique.

Chaleur spécifique des gaz. — Lorsqu'une masse gazeuse absorbe de la chaleur, que sa température s'élève, elle tend à se dilater, comme les solides et les liquides. Si rien ne s'oppose à sa dilatation, cette masse conserve une pression constante ; mais, si le gaz se trouve renfermé dans un vase clos, le volume étant nécessairement constant, c'est la pression qui augmente.

Quand on étudie les lois de la chaleur par rapport aux gaz, on peut donc envisager ces derniers, soit à volume constant, soit à pression constante.

La détermination de la chaleur spécifique des gaz offre de grandes difficultés pratiques. Il faut employer des méthodes d'une extrême délicatesse, car la masse gazeuse sur laquelle porte l'expérience est toujours très faible par rapport à son volume.

Regnault a entrepris cette détermination pour la chaleur spécifique à pression constante. Son appareil était un véritable thermomètre à air.

Le tableau suivant indique la chaleur spécifique à pression constante des principaux gaz :

Gaz simples.

Air	0,2374
Oxygène	0,2174
Azote	0,2438
Hydrogène	3,4090
Chlore	0,1210

Gaz composés.

Bioxyde d'azote	0,2315
Oxyde de carbone	0,2450
Anhydride carbonique	0,2163
Acide chlorhydrique	0,1845
Ammoniac	0,5083

Vapeurs.

Eau	0,4805
Ether	0,4810
Alcool	0,4534
Essence de térébenthine	0,5061
Sulfure de carbone	0,1570
Benzine	0,3754

Quand on porte une masse gazeuse, sous pression constante, à une certaine température t, son volume augmente. Mais, si on le comprime à ce moment pour le ramener à son volume primitif, on élève par cette action mécanique sa température d'une certaine valeur t'. Par conséquent, la même quantité de chaleur qui suffit à élever une masse gazeuse à $(t + t')$ sous volume constant n'élève cette masse qu'à t sous pression constante. La chaleur spécifique d'un gaz à pression constante c est donc plus grande que sa chaleur spécifique à volume constant c_1, et ceci dans le rapport de $t + t'$ à t

$$\frac{c}{c_1} = \frac{t + t'}{t}$$

L'expérience indique que

$$\frac{c}{c_1} = 1{,}405$$

Avant d'abandonner la question des chaleurs spécifiques, faisons remarquer que la chaleur spécifique de l'eau est relativement élevée. Ce fait a une grande importance au point de vue de l'habitabilité de notre planète. A la surface de la terre, l'eau joue le rôle d'un absorbant de la chaleur solaire ; elle l'accumule pendant le jour et pendant l'été, pour la restituer lentement la nuit ou en hiver. L'eau est donc un régulateur de la température. On remarque, en effet, que le climat des contrées voisines de la mer ou des îles est beaucoup plus régulier que celui des régions continentales éloignées de la mer. Ces dernières régions sont soumises à des écarts brusques de température ; d'une saison à l'autre le thermomètre peut accuser des différences de 60 à 70 degrés, tandis que, sous un climat côtier, présentant la même moyenne de température, l'écart ne dépasse guère 30 à 40 degrés.

Quand 1 kilogramme d'eau se refroidit d'un degré au contact de l'atmosphère, il cède à ce dernier assez de chaleur pour élever d'un degré la température de 4 kilogrammes d'air environ. Mais, comme 1 kilogramme d'air occupe à peu près 814 fois plus d'espace qu'un kilogramme d'eau, on voit qu'un litre d'eau, en se refroidissant d'un degré, peut élever d'un degré la température de 4 × 814 litres d'air, c'est-à-dire 3.256 litres.

Le docteur Forel, à la suite d'expériences entreprises sur le lac de Genève, a calculé que la quantité de chaleur cédée à l'air par la masse d'eau du lac en 5 jours, est équivalente à la chaleur fournie par la combustion de 1.200.500 tonnes de charbon.

Problèmes.

1. — Un vase vide en laiton pèse 50 g. ; sa température est 10°. On y verse 20 g. d'eau chaude à la température de 50°. La température finale est 42°. Calculez la chaleur spécifique du laiton.

Solution

Soit c la chaleur spécifique du laiton en petites calories. La quantité de chaleur reçue par le vase de laiton est :

$$c \times 50\ (42 - 10) \text{ ou } c \times 50 \times 32$$

Cette quantité de chaleur est égale à celle qui a été perdue par 20 g. d'eau en passant de 50° à 42° soit, en petites calories :

$$20\ (50 - 42) \text{ ou } 20 \times 8$$

On peut écrire :

$$c \times 50 \times 32 = 20 \times 8$$

$$c = \frac{20 \times 8}{50 \times 32} = 0{,}1$$

2. — Un morceau de platine pesant 20 g. est placé dans un four jusqu'à ce qu'il en ait pris la température. On le retire et on le plonge dans une masse

d'eau dont le poids est de 42 g. et la température de 12°. On constate que la température devient 22°. Quelle était la température du four ? On sait que la chaleur spécifique du platine est 0,03243.

Solution

Chaleur gagnée par l'eau :

$$42 \times (22 - 12) = 420 \text{ calories.}$$

Chaleur perdue par le platine, x étant la température du four :

$$20 \times 0{,}03243\,(x - 22) = 0{,}6486\,x - 14{,}2692$$

d'où :

$$0{,}6486\,x - 14{,}2692 = 420$$

$$\text{et } x = \frac{406{,}7308}{0{,}6486} = 627^\circ \text{ environ.}$$

3. — Un morceau d'argent a été chauffé à 101°9, puis immergé dans un calorimètre contenant 81 g. 34 d'eau, dont la température s'éleva de 11°09 à 11°71. La valeur en eau du calorimètre, de l'agitateur et du thermomètre était de 2,19 g.

Le même morceau d'argent fut chauffé à 101° 2, puis immergé dans 75,3 g. d'essence de térébenthine dont la température s'éleva de 10°98 à 12° 5.

L'appareil était le même que dans la première expérience. Quelle est la chaleur spécifique de l'essence de térébenthine ?

Solution

Au moyen de la première expérience, nous pouvons connaître la capacité calorifique C de l'argent :

$$C\,(101{,}90 - 11{,}71) = 81{,}34\,(11{,}71 - 11{,}09)$$

$$\text{et :} \qquad C = \frac{50{,}4308}{90{,}19}$$

Soit x la chaleur spécifique de l'essence de térébenthine, nous aurons dans la deuxième expérience :

$$C\,(101{,}2 - 12{,}5) = 75{,}3 \times x \times (12{,}5 - 10{,}98)$$

d'où, en remplaçant C par sa valeur :

$$x = \frac{50{,}4308 \times 88{,}7}{90{,}19 \times 75{,}3 \times 1{,}52} = 0{,}44 \text{ environ}$$

CHAPITRE IV

CHANGEMENTS D'ETAT

FUSION

On appelle fusion le passage d'un corps de l'état solide à l'état liquide sous l'action de la chaleur.

Etude de la fusion. — Pour nous rendre compte des phénomènes qui accompagnent la fusion nous allons étudier avec soin la fusion d'un corps fondant à une température commode à atteindre ; par exemple, de la naphtaline.

Pour cela on dispose dans un tube à essais A une petite quantité de naphtaline en contact avec un thermomètre *t*. Ce tube à essais est placé dans un tube plus large B que l'on chauffe au bain-marie (fig. 248). L'élévation de température est lente et régulière. On note par exemple toutes les cinq minutes cette température.

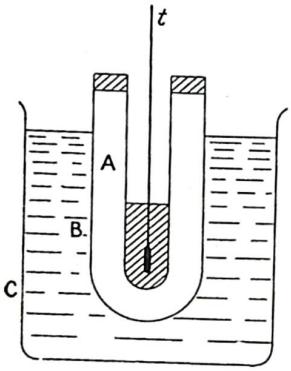


Fig. 248

On constate : 1° que la température croît régulièrement jusqu'à 78° ;

2° qu'elle demeure un certain temps constante à 78° ; on a alors en présence du solide et du liquide ;

3° Dès que tout le solide a disparu la température croît de nouveau.

On peut représenter ces résultats par un graphique (fig. 249) en portant sur une droite horizontale des longueurs proportionnelles aux temps et sur une droite verticale des longueurs proportionnelles aux températures.

Lois de la fusion. — Des expériences analogues peuvent se répéter pour tous les corps purs, la seule différence observée est que le point de fusion n'est pas le même :

Exemples :

Eau	0°
Soufre	114°
Etain	232°
Plomb	326°
Zinc	450°
Platine	1775°

On peut donc énoncer les lois suivantes :

1° *Un corps solide pur chauffé commence toujours à fondre à la même température sous la pression atmosphérique.*

2° *La température du corps reste constante pendant toute la durée de la fusion* ; cette température a reçu le nom de *point de fusion* du corps.

A la température de 3500° atteinte dans le four électrique, tous les corps simples, entrent en fusion. Certains corps composés dits autrefois réfractaires (chaux, charbon) fondent ou se vaporisent.

Enfin certaines substances colloïdales comme le verre, la cire, le caoutchouc que l'on disait autrefois entrer en *fusion pâteuse*, sont, en réalité des *liquides rigides*. Ce que l'on nomme très improprement leur point de fusion dépend de l'état de solvatisation moléculaire ; mais elles n'ont pas à fondre puisqu'elles sont déjà liquides.

Solidification. — La solidification est le phénomène inverse de la fusion.

Si nous refroidissons par exemple de la naphtaline fondue, sa température baisse d'abord d'une manière constante, puis à 78° apparaissent des particules solides et la température demeure constante tant qu'il y a du solide et du liquide en présence. Enfin la température décroît à partir de 78° dès que tout le liquide est solidifié.

Les lois de la solidification seront donc :

1° *Un liquide pur refroidi commence presque toujours à se solidifier à la même température.*

2° *La température est invariable pendant toute la durée de la solidification.*

3° *La température de solidification est la même que celle de fusion.*

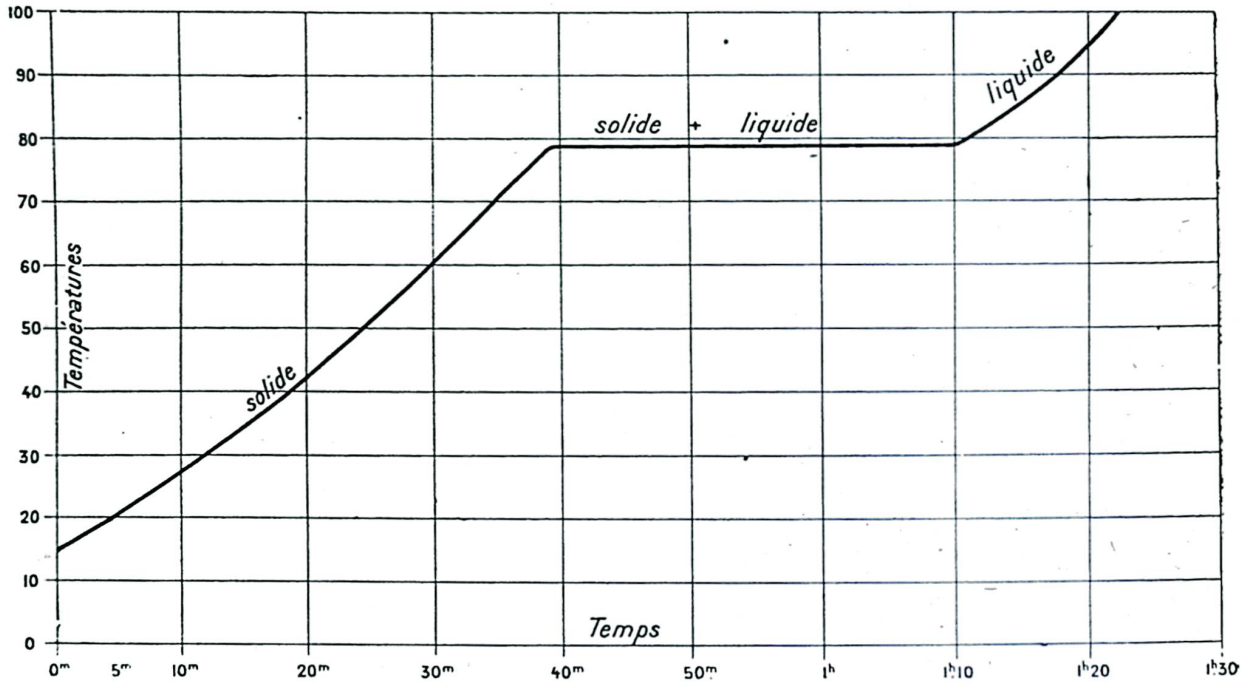


Fig. 249

Surfusion. — Lorsqu'un liquide est maintenu dans des conditions d'immobilité absolue et abrité de tout contact extérieur, il arrive souvent qu'on puisse abaisser sa température au-dessous de son point de fusion sans que la solidification se produise.

On dit alors que le liquide est en *surfusion*. Par exemple le phosphore blanc fond à 44° et peut être ramené à 30° sans se solidifier.

Pour faire cesser la surfusion, il suffit souvent d'agiter le liquide, mais le seul moyen infaillible est de jeter dans le liquide en surfusion une parcelle du corps solide ou d'un corps ayant même force cristalline. La surfusion cesse brusquement et la température remonte à la température de fusion.

PHÉNOMÈNES ACCOMPAGNANT LA FUSION ET LA SOLIDIFICATION

Chaleur de fusion. — Nous avons vu qu'une source de chaleur est nécessaire pour produire la fusion d'un corps. De même, il faut qu'un corps perde de la chaleur pour se solidifier.

Pendant toute la durée de la fusion ou de la solidification la température ne varie pas ; la quantité de chaleur en fusion qui n'est pas mise en évidence par le thermomètre sert donc à produire le changement d'état ; elle se transforme en un travail *moléculaire aboutissant à la désagrégation du corps solide.*

On constate que la quantité de chaleur qu'il faut fournir à une masse donnée d'une substance pendant la fusion, varie avec la nature de la substance. De plus, c'est la même quantité de chaleur que la substance abandonne pendant la solidification.

On appelle chaleur latente de fusion ou simplement chaleur de fusion la quantité de chaleur qu'absorbe 1 gramme de cette substance prise au point de fusion pour fondre sans élévation de température.

Mesure de la chaleur de fusion. — On mesure la chaleur de fusion de la glace par la méthode des mélanges. Pour cela on introduit un morceau de glace essuyé avec du papier buvard dans l'eau d'un calorimètre dont nous suivons l'abaissement de température à partir du moment de l'immersion en prenant soin d'agiter constamment avec le thermomètre.

Supposons, pour fixer les idées, que le morceau de glace introduit dans le calorimètre pèse 65 grammes et que ce calorimètre contenant 1000 grammes d'eau à 15° soit constitué par une masse en laiton de 400 gr., on constatera que le thermomètre marquera environ 10° quand toute la glace sera fondue.

La chaleur spécifique du laiton étant 0,095.

Le calorimètre a donc abandonné :

$$0{,}095 \times 400\,(15-10) = 190 \text{ c}$$

L'eau du calorimètre a perdu :

$$1 \times 1000\,(15-10) = 5000 \text{ c}$$

La glace en fondant a absorbé :

$$65 \times x \text{ calories}$$

x étant la chaleur de fusion.

Ecrivons que la chaleur absorbée par la glace est égale à la chaleur perdue par le calorimètre et son eau.

Il vient $65\,x = 5.000 + 190$

$$x = \frac{5.190}{65} = 79{,}84 = \text{environ } 80 \text{ c}$$

Regnault a déterminé les chaleurs latentes de fusion d'un certain nombre de corps. Voici les principales :

Glace	79,25	Cadmium	13,66
Azotate de sodium	62,975	Bismuth	12,64
Azotate de potassium	47,371	Soufre	9,368
Argent	28,13	Plomb	5,034
Platine	27,18	Phosphore	5,369
Zinc	21,47	Mercure	2,83
Etain	14,252		

II. Changements de volume accompagnant la fusion. — La plupart des corps (saindoux, beurre, soufre, étain, etc.), diminuent de volume en se solidifiant. Par exemple si nous abandonnons dans un vase de la paraffine fondue (fig. 250), la surface qui était d'abord horizontale, se creuse par la solidification. Pour tous les corps précédents le liquide recouvre donc complètement le solide.

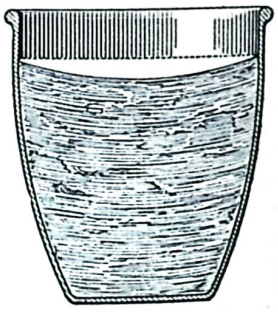


Fig. 250

Au contraire l'eau diminue de volume en fondant ; on le voit facilement en remplissant en hiver une bouteille

d'eau et en l'abandonnant. La glace se forme et fait éclater la bouteille. Les pierres poreuses (*pierres gélives*) se brisent en hiver sous l'action de la glace.

III. Influence de la pression sur le point de fusion. — La température de fusion d'un corps varie légèrement lorsqu'on augmente la pression que subit ce corps ; elle s'abaisse pour ceux qui diminuent de volume en fondant (glace) tandis qu'elle s'élève pour ceux qui augmentent de volume en fondant.

Par exemple, pour la glace, la température s'abaisse d'environ 0°,008 pour un accroissement de pression de 1 kg. par centimètre cube. Cette variation de température permet d'expliquer le phénomène du *regel*.

Regel. — Si nous soumettons de la glace pilée et fondante à une forte pression dans un moule nous constatons que la glace a pris exactement la forme du moule et qu'elle est devenue transparente. C'est donc qu'elle a fondu sous la pression pour se solidifier dès que la pression a pris fin.

L'expérience suivante ne laisse plus de doute à cet égard : Un bloc de glace étant appuyé par ses deux bouts sur deux chevalets de manière que la partie centrale soit suspendue librement dans l'espace, on pose sur cette partie une ficelle supportant à ses extrémités des poids P et P′ (fig. 251). Sous la traction des poids, la ficelle exerce à la surface du bloc une pression

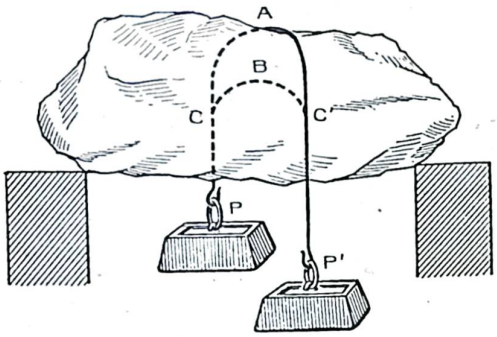


Fig. 251

qui fait fondre la glace et elle pénètre peu à peu dans le bloc de glace, comme si elle le coupait. Mais au fur et à mesure que la ficelle descend, la glace se reforme derrière elle, car, la pression ayant cessé, l'eau de fusion qui est à une température inférieure au point de solidification, se congèle de nouveau.

Ce phénomène se produit en grand en sens inverse dans les glaciers. Les masses de neige et de glace qui descendent des hauteurs, fondent en partie quand elles pénètrent dans les gorges étroites où elles sont soumises à des pressions parfois énormes. Mais elles regèlent dès que la pression diminue et se moulent à la forme des vallées.

Problèmes.

1. — Dans une masse d'eau de 1.500 g. à 10° on plonge une masse de cuivre de 200 g. à 100° et on y ajoute un morceau de glace à 0°.

1° On demande de calculer la masse du morceau de glace nécessaire pour que cette glace ayant entièrement fondue, la température finale de l'ensemble devienne 0°.

2° On suppose que la masse de glace est de 500 g. Quelle sera la température finale du mélange et quel sera le poids de glace restant ?

3° Même question en supposant que la masse de glace au lieu d'être de 500 grammes est de 100 grammes seulement.

Chaleur spécifique du cuivre : 0,095.

Chaleur de fusion de la glace 80 petites calories.

(Bien entendu qu'il n'y a aucun échange de chaleur avec l'extérieur.) *B. E.*, Paris.

Solution

1° La quantité de chaleur qu'absorbe la glace pour fondre est égale à la quantité de chaleur cédée par 1.500 g. d'eau passant de 10° à 0° et par 200 g. de cuivre passant de 100° à 0°.

Chaleur cédée par l'eau :

$$1\ c \times 10 \times 1.500 = 15{,}000\ c.$$

Chaleur cédée par le cuivre :

$$0{,}095\ c \times 100 \times 200 = 1.900\ c.$$

Chaleur totale absorbée par la fusion de la glace :

$$15.000 + 1.900 = 16.900\ c.$$

Masse du morceau de glace nécessaire :

$$\frac{1 \text{ gr.} \times 16.900}{80} = 211{,}25 \text{ g.}$$

2° Si le morceau de glace ajouté avait une masse de 500 g., la température finale du mélange serait 0° et le poids de la glace restant serait :

$$500 \text{ g.} - 211{,}25 \text{ g.} = 288{,}75 \text{ g.}$$

3° Soit x la température finale du mélange. Le cuivre aura fourni $0{,}095 \times 200\ (100 - x) = 1.900 - 19\ x$ cal.

L'eau aura fourni :

$$(10 - x)\ 1.500 = 15{,}000 - 1.500\ x \text{ cal.}$$

La glace aura gagné :

$$100 \times 80 + 100\ x = 8.000 + 100\ x \text{ cal.}$$

$$1.900 - 19\ x + 15.000 - 1.500\ x = 8.000 + 100\ x$$

$$1.619\ x = 8.900$$

$$x = \frac{8.900}{1.619} = 5^\circ\ 5 \text{ par excès}$$

2. — On verse dans 20 g. d'eau à 17°, 10 g. de glace à — 20°. Toute la glace fondra-t-elle ? Indiquer la composition du mélange final. Chaleur spécifique de la glace : 0,5, chaleur de fusion 80 cal.

Solution

Avant de fondre la glace exige pour passer de —20° à 0°

$$10 \times 20 \times 0{,}5 = 100 \text{ cal.}$$

En se refroidissant de 17° à 0° l'eau peut fournir

$$17 \times 20 = 340 \text{ cal.}$$

La quantité de chaleur disponible pour fondre la glace est donc

$$340 - 100 = 240 \text{ cal.}$$

Cette quantité de chaleur provoque la fusion de

$$\frac{240 \text{ g.}}{80} = 3 \text{ g. de glace.}$$

Le mélange final à la température de 0° contient : 23 g. d'eau et 7 g. de glace.

3. — Dans un vase d'argent pesant 200 g. et contenant 150 g. de neige à — 10° on introduit 25 g. de vapeur d'eau bouillante à 100°. Si l'on néglige les gains ou pertes de chaleur par rayonnement, quel sera l'état final du mélange ?

Chaleur de fusion de la glace : 80 calories.

Chaleur de vaporisation de l'eau : 537 calories.

Chaleur spécifique de la glace : 0,5 calorie.

Chaleur spécifique de l'argent : 0,056 calorie.

Solution

Quantité de chaleur perdue par la vapeur d'eau pour être amenée à 0° :

$$25 \times 538 + 25 \times 100 = 15.950 \text{ calories.}$$

Quantité de chaleur gagnée par la neige pour être amenée à l'état liquide à 0° :

$$200 \times 10 \times 0{,}056 - 150 \times 10 \times 0{,}5 + 150 \times 80 = 12.862 \text{ calories.}$$

Par conséquent, il y a : $15.950 - 12.862 = 3.088$ calories en trop.

L'état final du mélange est donc l'état liquide ; soit x sa température, nous aurons :

$$3088 = 175\ x + x \times 200 \times 0{,}056$$

$$x = 16^\circ 5$$

CHAPITRE V

DISSOLUTION ET CRISTALLISATION

Le sucre disparaît au contact de l'eau et si l'on abandonne à l'air le liquide obtenu, il s'évapore et on retrouve le sucre.

On dit que le sucre se *dissout* dans l'eau ; le phénomène inverse est la *cristallisation*.

Il existe d'autres dissolvants que l'eau (alcool, essence, benzine, etc.), et d'autres corps qui se dissolvent. Les liquides et les gaz peuvent être dissous ; par exemple, le gaz ammoniac et l'alcool se dissolvent dans l'eau.

On appelle donc *dissolution* un mélange homogène obtenu en mettant en présence un liquide avec un solide, un gaz ou un autre liquide.

On appelle *concentration* d'une dissolution le rapport entre la masse *m* du corps dissous et la masse M du solvant.

Par exemple si nous dissolvons 10 grammes de sucre dans 100 grammes d'eau, la concentration sera :

$$\frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Solution saturée. — Un gramme d'eau à 15° dissout 0 gr. 36 de sel marin ; si l'on ajoute une masse plus grande de sel, celui-ci ne se dissout pas ; on dit que la solution est saturée. 0 gr. 36 est appelé *coefficient de solubilité* du chlorure de sodium à 15°.

Ce coefficient varie avec le corps, le solvant et aussi avec la température.

Par exemple pour le nitrate de potassium nous trouvons que 100 grammes d'eau dissolvent à :

0°	10°	20°	30°	40°	50°
12 g.	16 g.	25 g.	40 g.	65 g.	91 g.

Absorption de chaleur accompagnant la dissolution. — Si la dissolution s'est produite sans qu'on ait fourni extérieurement de chaleur aux corps en présence, elle n'en a pas moins été accompagnée d'une absorption de chaleur. Ainsi, le mélange de glace et de sel, en se liquéfiant, subit un abaissement notable de température. Les deux corps ne pouvaient fondre, en effet, que sous l'action d'une quantité de chaleur égale à la chaleur latente de fusion de chacun d'eux ; cette quantité de chaleur, ils se la sont empruntée à eux-mêmes.

Il suit de là qu'on peut obtenir un abaissement de température en mettant en présence des corps susceptibles de se dissoudre mutuellement. C'est le principe des *mélanges réfrigérants*. Voici la composition de quelques-uns de ces mélanges :

Neige	1 partie	de 0° à —21°
Sel marin	1 »	
Neige	3 parties	de 10° à —48°
Chlorure de calcium cristallisé	4 »	
Sulfate de sodium	8 »	
Acide chlorhydrique	5 »	de 10° à —17°
Glace pilée ou neige	2 »	
Sel marin	1 partie	de 10° à —18°
Sulfate de soude	3 parties	
Acide azotique dilué	2 »	de 10° à —19°
Sulfate de soude	6 »	
Azotate d'ammonium	5 »	de 10° à —26°
Acide azotique dilué	4 »	
Phosphate de sodium	9 »	
Acide azotique dilué	4 »	de 10° à —29°
Neige	3 »	
otasse	4 »	de 0° à —28°

Sursaturation. — Un retard à la cristallisation peut se produire de la même manière qu'un retard à la solidification ; si, par exemple, on dissout à chaud une grande quantité d'hyposulfite de soude dans très peu d'eau, cet hyposulfite ne cristallise pas par refroidissement. Pour faire cesser la sursaturation, il suffit d'ajouter un germe solide d'hyposulfite ; aussitôt le sel se prend en masse et en même temps il y a un dégagement de chaleur qui peut porter le ballon à une température voisine de 50°.

Solubilité des gaz dans les liquides. — Un liquide, l'eau par exemple, mis en présence de gaz, comme l'azote ou l'oxygène, absorbe une certaine quantité de ces gaz, sans qu'il se produise du reste de combinaison chimique.

Quand il n'y a pas de combinaison chimique, ce phénomène prend le nom de *dissolution*. On dit que l'eau *dissout* l'azote et l'oxygène ou que ces gaz sont *solubles* dans l'eau.

La dissolution des gaz est soumise à certaines lois qui ont été énoncées par Dalton.

1° *Pour un même gaz, un même liquide et une même température, le poids de gaz absorbé par un certain volume du liquide est proportionnel à la pression.*

Comme, d'après la loi de Mariotte, le poids de gaz contenu dans un volume donné de ce gaz est proportionnel à la pression, on voit *qu'un liquide donné dissout toujours, à la même température, le même volume d'un gaz donné, quelle que soit la pression de ce gaz.*

Le nombre qui exprime le volume constant d'un gaz dissous par l'unité de volume du liquide à une température donnée, s'appelle *coefficient de solubilité* de ce gaz à la température donnée.

2° *Si un liquide est en contact avec un mélange de plusieurs gaz, il se comporte à l'égard de chacun d'eux, au point de vue de la solubilité, comme si ce gaz existait seul.*

Le phénomène de la dissolution des gaz est fréquent dans la nature. L'eau de mer ou l'eau de rivière contient de l'air en dissolution et, comme l'air est un mélange composé surtout d'oxygène et d'azote, l'eau dissout séparément chacun de ces gaz. Le coefficient de solubilité de l'oxygène est un peu plus élevé que celui de l'azote ; aussi l'air qu'on extrait de l'eau est-il plus riche en oxygène que l'air atmosphérique. C'est cet oxygène en solution dans l'eau qui permet aux poissons, aux animaux et aux plantes aquatiques de respirer.

L'eau de source qui n'a pas encore été au contact de l'atmosphère ne contient pas d'air en solution. Par contre, elle contient souvent d'autres gaz au contact desquels elle s'est trouvée dans son parcours souterrain. Lorsqu'elle jaillit au dehors, ces gaz, n'étant plus soumis à la même pression que dans l'intérieur du sol, se dégagent.

Problèmes.

Sur la miscibilité des liquides.

1. — On agite ensemble 100 g. d'eau et 40 d'éther jusqu'à saturation des deux liquides, puis on les laisse se séparer. Calculer le poids d'éther dissous dans l'eau et le poids d'eau dissous dans l'éther, sachant qu'à saturation l'eau dissout 1/10 d'éther et l'éther 1/60 d'eau.

Solution

Soit x grammes le poids de l'éther dissous dans l'eau, et y gr. celui de l'eau dissoute dans l'éther.

D'après les coefficients de solubilité ci-dessus :

$$x = \frac{(100 - y)}{10}$$

$$y = \frac{(40 - x)}{60}$$

Système d'où l'on tire aisément :

x = 5.960 : 599 = 9,95 g. par excès.
y = 300 : 599 = 0,50 g. par défaut.

2. — L'eau de la Méditerranée contient 30 g. de chlorure de sodium par litre et sa densité est 1,02.

Quelle masse d'eau faut-il faire évaporer pour que, d'un litre d'eau de mer, il reste une solution saturée à 15° ? Coefficient de solubilité du sel à 15° : 37 g. pour 100 g. d'eau.

Solution

Soit x la masse d'eau qu'il faut faire évaporer.

$$\frac{30}{1020 - x} = \frac{37}{137}$$

$$30 \times 137 = 37 \times 1020 - 37x$$

$$x = \frac{37 \times 1020 - 30 \times 137}{37} = 908{,}9 = 909 \text{ g. environ.}$$

CHAPITRE VI

VAPORISATION

ÉVAPORATION — ÉBULLITION

Quand un corps liquide passe à l'état gazeux, on dit qu'il subit le phénomène de la *vaporisation*.

La vaporisation peut s'effectuer lentement, sans que le liquide paraisse éprouver aucun mouvement, aucun changement. Cependant on constate qu'une partie du liquide s'est *évaporée* au bout d'un certain temps en effectuant des pesées comparatives.

Si le liquide reste assez longtemps en contact direct avec l'atmosphère, il finit par disparaître tout à fait ; il s'est complètement *évaporé*. Le phénomène s'appelle, dans ce cas, *évaporation*.

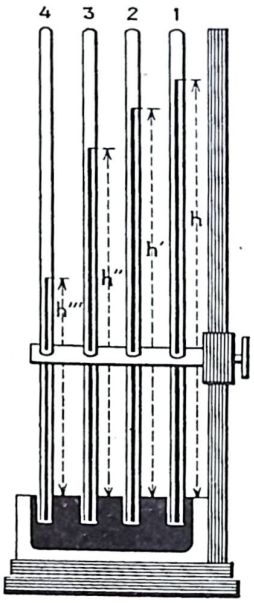


Fig. 252

Mais la *vaporisation* peut s'effectuer d'une autre manière, être accompagnée d'une agitation tumultueuse du liquide, au sein duquel prennent naissance de grosses bulles de vapeur qui viennent crever à la surface. Le phénomène prend alors le nom d'*ébullition*.

Formation des vapeurs dans le vide. — Soient plusieurs tubes barométriques 1, 2, 3, 4, (fig. 252) remplis de mercure comme dans l'expérience de Torricelli. Faisons pénétrer dans les tubes 2, 3, 4 des liquides différents, de l'eau en 2, de l'alcool en 3, de l'éther en 4. Ces liquides, plus légers que le mercure, montent à la surface de ce dernier dans la chambre barométrique et l'on voit aussitôt le niveau baisser dans les trois tubes 2, 3, 4, au-dessous du niveau du tube 1, et d'autant plus que le liquide émet plus de vapeur. La dépression du mercure nous apprend que la vapeur formée possède une force élastique comme les gaz et qu'elle équilibre en partie la pression atmosphérique. Si H est la pression atmosphérique du moment, les forces élastiques de ces gaz sont respectivement : (H—h), (H—h'), (H—h'')· (H—h''').

De cette expérience on peut déduire :

1° *Que les vapeurs se forment instantanément dans le vide.*
2° *Que les vapeurs formées possèdent une force élastique.*

Mais on peut pénétrer plus avant dans l'explication du phénomène. Si, dans l'expérience précédente, on n'introduit dans les tubes barométriques que de très faibles quantités de liquides, on voit ceux-ci disparaître, s'évaporer entièrement, tandis que le niveau du mercure s'abaisse. En introduisant de nouvelles quantités très faibles de liquides, on verra encore ceux-ci s'évaporer entièrement en amenant un nouvel abaissement de mercure. Mais, en continuant ainsi, il arrivera un moment où les liquides cesseront de s'évaporer et le mercure ne s'abaissera plus. La vapeur de chacun des liquides a, dans ce cas, atteint sa *force élastique maxima* ; on dit qu'elle est *saturante*.

Il résulte de ce qui précède :

1° *Que la vaporisation d'un liquide dans le vide est limitée, elle s'arrête lorsque la vapeur produite atteint sa force élastique maxima, c'est-à-dire lorsqu'elle devient saturante ;*

2° *qu'une vapeur, si elle est enfermée dans un espace clos en présence d'un liquide dont elle émane est toujours saturante.*

Propriétés des vapeurs non saturantes. — Considérons un tube T contenant un volume V de vapeur non saturante sous la pression H-h (fig. 253).

Enfonçons ce tube dans le mercure jusqu'à ce que le volume soit réduit de moitié. La pression est alors H—h'. On constate que H—h' = 2 (H—h).

Autrement dit V (H — h) = V' (H—h').

Les vapeurs non saturantes suivent donc la loi de Mariotte dans les limites où elle leur est applicable.

On peut constater également que les vapeurs saturantes suivent la loi de Gay-Lussac sur la dilatation des gaz.

Il en résulte qu'une vapeur saturante est identique à à un gaz.

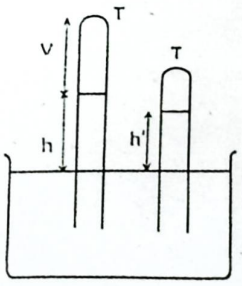


Fig. 253

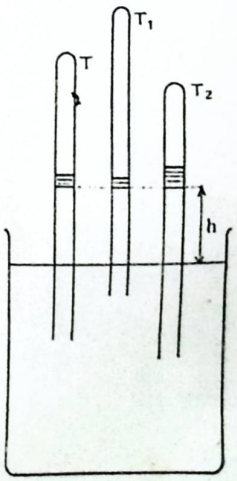


Fig. 254

Propriétés des vapeurs saturantes. — 1° Considérons une vapeur saturante à l'intérieur d'un tube barométrique T. Nous constatons que quelles que soient les positions T, T_1, T_2 occupées par ce tube la hauteur h du mercure reste la même, seule la quantité de liquide diminue si on soulève le tube et augmente si on l'enfonce (fig. 254). On peut donc conclure :

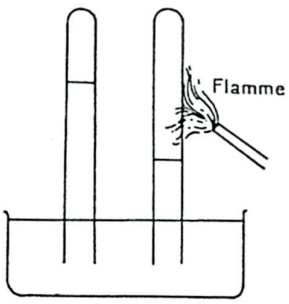


Fig. 255

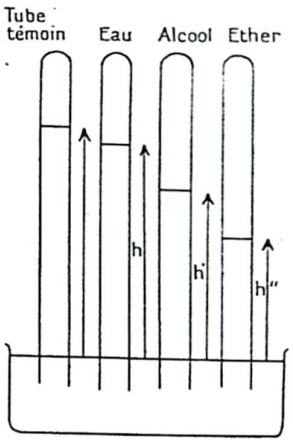


Fig. 256

1° *A une même température la force élastique d'une vapeur est indépendante du volume qu'elle occupe. C'est sa pression maximum.*

2° Chauffons la partie du tube contenant la vapeur saturante, nous constatons immédiatement une diminution de la colonne de mercure (fig. 255.)

Il en résulte que:

La pression maximum d'une vapeur saturante croît rapidement avec la température.

3° Si on introduit dans 3 tubes de l'eau, de l'alcool, de l'éther, on constate que les hauteurs du mercure *h, h', h''*, sont différentes.

On peut donc énoncer :

A la même température la pression maxima d'une vapeur saturante dépend de la nature du liquide générateur (fig. 256).

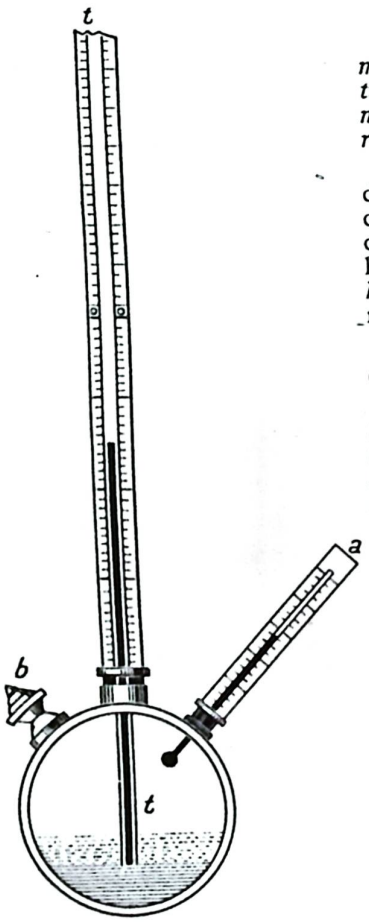


Fig. 257

Pressions maxima de la vapeur d'eau aux diverses températures. — La tension maxima de la vapeur d'eau a été déterminée à toutes les températures et les valeurs trouvées ont été consignées dans des tables.

Bien qu'il n'y ait pas de formule simple permettant de calculer cette tension en fonction de la température on peut dire qu'elle est donnée approximativement entre 100° et 200° par la formule empirique de Duperray

$$F = \left(\frac{t}{100}\right)^4$$

Formation des vapeurs dans les gaz. — L'expérience montre que la tension d'une vapeur dans un espace clos déjà occupé par l'air, par un gaz ou par une autre vapeur, s'établit à la même valeur et de la même manière que dans le vide, L'équilibre est seulement un peu plus lent à se produire.

Il est particulièrement intéressant de connaître la tension de la vapeur d'eau. On constate que cette tension, comme d'ailleurs celle des vapeurs en général, croît rapidement avec la température.

Pour mesurer les tensions des vapeurs on se sert de l'appareil représenté en coupe sur la figure 257. Il se compose essentiellement d'un récipient en forme de ballon, au fond duquel se trouve du mercure *m*. Dans le mercure plonge un tube manométrique *t t* ; c'est au moyen de ce manomètre qu'on mesurera la pression à l'intérieur du ballon. Ce dernier porte encore un bouchon *b* qu'on peut visser hermétiquement, et un thermomètre *a*.

On verse le liquide à étudier sur le mercure du ballon et on porte à la température désirée. On lit la pression au moyen du manomètre.

L'eau s'évapore même à l'état solide. Tout le monde sait, par exemple, que si on étend au dehors du linge humide, un jour de gelée, le linge commence par raidir parce que l'eau qu'il retient se congèle, mais au bout d'un certain temps, il n'en est pas moins complètement sec.

Nous donnons ci-dessous, sous forme de tableaux, les résultats les plus importants.

Force élastique de la vapeur d'eau entre — 10° et + 35°

TEMPÉRATURE	FORCE ÉLAST QUE en millimètres	TEMPÉRATURE	FORCE ÉLASTIQUE en millimètres
— 10	2,078	+ 13	11,062
— 9	2,261	14	11,906
— 8	2,456	15	12,699
— 7	2,666	16	13,635
6	2,890	17	14,421
— 5	3,131	18	15,357
— 4	3,387	19	16,346
— 3	3,662	20	17,391
— 2	3,955	21	18,495
— 1	4,267	22	19,659
0	4,600	23	20,888
+ 1	4,940	24	22,184
2	5,302	25	23,550
3	5,687	26	24,982
4	6,097	27	26,505
5	6,534	28	28,101
6	6,998	29	29,782
7	7,492	30	31,548
8	8,017	31	33,405
9	8,574	32	35,359
10	9.165	33	37,410
11	9,792	34	39,566
12	10,457	35	41,827

Force élastique de la vapeur d'eau entre — 30° et + 230°

TEMPÉRATURE	FORCE ÉLASTIQUE en millimètres	TEMPÉRATURE	FORCE ÉLASTIQUE en millimètres
— 30	0,386	+ 110	1075,370
— 20	0,927	120	1491,280
— 10	2,078	130	2030,28
0	4,699	140	2717,63
+ 10	9,165	150	3581,23
20	17,391	160	4651,62
30	31,548	170	5961,66
40	54,906	180	7546,39
50	91,982	190	9128,00
60	148,791	200	11688,96
70	233,093	210	14324,80
80	354,643	220	17390,35
90	525,450	230	20926,40
100	760,000		

Tension en atmosphères entre 100° et 230°,9

TEMPÉRATURE	NOMBRE d'atmosphères	TEMPÉRATURE	NOMBRE d'atmosphères
100°,0	1	198°,8	15
112°,2	1 ½	201°,9	16
120°,6	2	204°,9	17
133°,9	3	207°,7	18
144°,0	4	210°4	19
152°,0	5	213°,0	20
156°,2	6	215°,5	21
165°,3	7	217°,9	22
170°,8	8	220°,3	23
175°,8	9	222°,5	24
180°,3	10	224°,7	25
184°,5	11	226°,8	26
188°,4	12	228°,9	27
192°,1	13	230°,9	28
195°,5	14		

Force élastique de divers liquides

LIQUIDES	TEMPÉRATURE	FORCE ÉLASTIQUE EN MM.
Anhydride sulfureux	— 25	374
	— 20	479
	— 10	762
	0	1 165
	+ 30	3 432
	+ 60	8 124
Ether	— 20	67
	— 10	113
	0	183
	+ 20	433
	+ 40	909
	+ 60	1 728
	+ 100	4 951
	+ 120	7 702
Ammoniaque	— 78	441
	— 30	2 809
	— 20	4 273
	0	7 709
Sulfure de carbone	— 20	43
	0	132
	+ 20	302
	+ 40	617
	+ 60	1 164
	+ 100	3 329
	+ 120	5 145
	+ 140	7 557
Alcool	0	13
	+ 10	24
	+ 20	44
	+ 50	220
	+ 100	1 695
	+ 150	7 259
Chloroforme	+ 20	160
	+ 30	246
	+ 40	366
	+ 50	531
	+ 75	1 211
	+ 100	2 426
	+ 130	4 866
	+ 160	8 658
Mercure	— 0	0,02
	+ 50	0,11
	+ 100	0,74
	+ 200	19,90
	+ 300	242
	+ 400	1 588
	+ 500	6 520

Evaporation à l'air libre. — Pour étudier l'évaporation à l'air libre, nous placerons de l'eau dans un vase, large et peu profond, exposé à l'air.

En le pesant avant et après un temps donné d'exposition, on trouve les résultats suivants :

1° **Influence de la surface.** — *Les masses de liquide évaporées sont proportionnelles aux surfaces par lesquelles se fait l'évaporation.*

Application : On donne aux marais salants une grande surface pour faciliter l'évaporation de l'eau de mer.

2° **Influence de la température.** — *L'évaporation est beaucoup plus rapide quand on élève la température.* Elle est 5 à 6 fois plus rapide à 50 degrés qu'à 20.

Application : L'eau s'évapore beaucoup plus vite l'été que l'hiver.

3° **Influence de l'humidité de l'air :** *L'évaporation est d'autant plus rapide que l'air est moins saturé de la vapeur considérée.*

4° **Influence des vents et des courants d'air :** *L'évaporation est accélérée par les courants d'air.* Ceci résulte de ce qui précède. En effet, le vent déplace les couches d'air qui se trouvent au-dessus du vase contenant le liquide, et qui par suite sont chargées d'humidité.

5° **Influence de la pression extérieure :** Nous avons vu que dans le vide l'évaporation est instantanée. *On peut donc en conclure, que, dans l'air, elle est d'autant plus rapide que la pression est plus faible.*

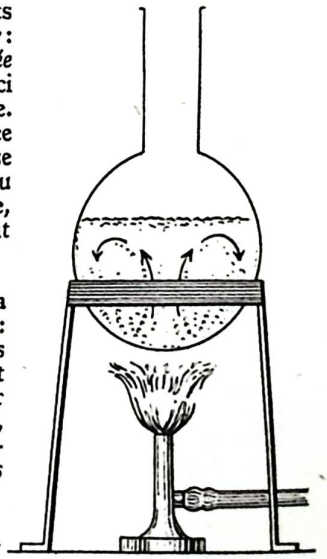


Fig. 258

Ebullition. — *L'ébullition est le passage de l'état liquide à l'état de gaz, sous forme de bulles de vapeur qui prennent naissance dans la masse du liquide et viennent se dégager à sa surface.*

Si on place un ballon de verre contenant de l'eau, sur le feu, la température s'élève peu à peu ; des courants s'établissent au sein du liquide dans le sens des flèches (fig. 258) puis on voit se dégager de petites bulles gazeuses

qui sont surtout formées par l'air dissous. Ensuite apparaissent d'autre bulles qui se forment sur les parois du ballon, s'élèvent à la surface et disparaissent en rencontrant des couches liquides plus froides. Pendant ce temps, le liquide produit un certain bruit : on dit qu'*il chante*.

La température continuant à s'élever, les bulles deviennent plus grosses et arrivent à la surface du liquide où elles se dégagent. A ce moment, le liquide *bout*.

A partir du moment où elle entre en ébullition, l'eau conserve une température constante. D'un autre côté, l'eau bout toujours à la même température, quand la pression reste invariable. Ces lois sont générales, et peuvent s'énoncer pour tous les liquides :

1° *Sous une même pression, un même liquide bout toujours à la même température.*

2° *La température reste invariable pendant toute la durée de l'ébullition.*

3° *La température d'ébullition s'élève ou s'abaisse dans le même sens que la pression.*

Voici la température d'ébullition d'un certain nombre de liquides sous la pression atmosphérique normale :

Anhydride sulfureux	—	8°
Ether chlorhydrique	+	11°
Ether nitreux		21°
Ether sulfurique		35°,5
Sulfure de carbone		48°
Ether formique		56°
Acétone		56°
Alcool méthylique (Esprit de bois)		63,°
Chloroforme		63°,5
Alcool		79°
Benzine		80°
Acide azotique monohydraté		86°
Eau		100°
Acide azotique ordinaire		123°
Essence de térébenthine		157°
Ether oxalique		184°
Huile de lin		316°
Acide sufurique		325°
Mercure		360°
Soufre		400°

Il est facile de prouver par une expérience très simple que la température d'ébullition de l'eau s'abaisse avec la pression. On fait bouillir de l'eau dans un ballon de manière à chasser entièrement l'air contenu dans ce ballon, puis on le bouche hermétiquement. On laisse alors refroidir le ballon en le suspendant, le col en bas plongé dans l'eau. L'ébullition cesse naturellement de se produire ; l'espace contenu entre la surface de l'eau à l'intérieur du ballon et la paroi de ce dernier est plein de vapeur d'eau saturante. Mais si on verse de l'eau froide sur la surface extérieure du ballon (fig. 259), on voit le liquide entrer de nouveau en ébullition à l'intérieur. En effet, l'eau froide a condensé une partie de la vapeur qui, par suite, n'est plus saturante, et la pression se trouvant très inferieure à la pression atmosphérique, la température d'ébullition du liquide est beaucoup plus basse qu'auparavant. L'eau se remet donc à bouillir jusqu'à ce que la vapeur soit redevenue saturante.

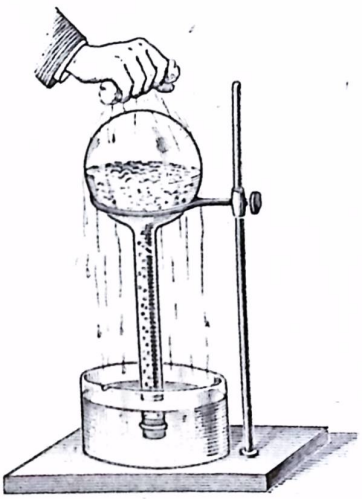


Fig. 259

Pour prouver que la température d'ébullition s'élève avec la pression on se sert de la *marmite de Papin* (fig. 260). Cet appareil se compose d'un cylindre en bronze très résistant, fermé par un couvercle maintenu lui-même au moyen d'une vis et muni d'un thermomètre T et d'un manomètre M. On met de l'eau dans le cylindre et on chauffe. La température s'élève et la vapeur d'eau formée prend une force élastique qui croît rapidement avec la température et empêche le liquide de bouillir. Dans ces conditions, on peut élever l'eau à une température bien supérieure à 100°, sans qu'il y ait ébullition. L'appareil est muni d'une *soupape de sûreté* S qui s'ouvre à volonté. Si on ouvre celle-ci à un moment donné, la pression de la vapeur se trouve brusquement ramenée à la pression atmosphérique. Comme l'eau est à une température très supérieure à 100°, elle se met à bouillir tumultueusement, et une quantité considérable de vapeur se forme tout d'un coup, jusqu'à ce que l'absorption de la chaleur latente de vaporisation ait ramené la température à 100°, l'ébullition continue alors normalement.

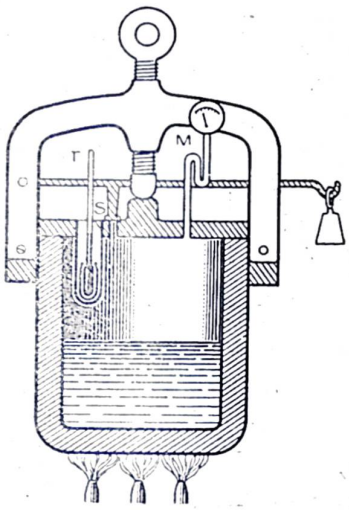


Fig. 260

Vaporisation totale. — L'expérience montre que lorsqu'on chauffe un liquide au delà d'une certaine température, quelle que soit d'ailleurs la pression qu'il supporte, il se réduit entièrement en vapeur. C'est le phénomène de la *vaporisation totale*.

Il y a pour chaque corps une température critique au-dessus de laquelle ce corps à l'état gazeux ne peut être liquéfié quelle que soit la pression qu'il subit.

Cette température est de 365° pour l'eau, 230° pour l'alcool, 190° pour l'éther, etc.

Liquéfaction des gaz. — Or, toutes les recherches physiques démontrent que les gaz et les vapeurs ne sont pas d'une nature essentiellement différente Les gaz ne sont que des vapeurs éloignées de leur point de liquéfaction et à une température supérieure à leur température critique.

Il suit de là que si l'on veut liquéfier un gaz, il faut commencer par abaisser sa température au-dessous de la température critique. Ceci fait, on pourra le considérer comme une vapeur non saturante et on augmentera la pression qu'il supporte jusqu'à ce qu'on ait atteint la tension de saturation ; alors, le gaz commencera à se liquéfier.

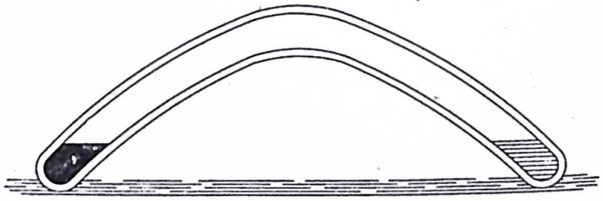


Fig. 261

C'est en se basant sur ces principes qu'on est parvenu aujourd'hui à liquéfier tous les gaz, y compris ceux dont on a considéré longtemps la liquéfaction comme impossible et qu'on appelait pour cette raison *gaz permanents*. De ce nombre était l'air qu'on fournit industriellement aujourd'hui à l'état liquide.

On emploie souvent, pour liquéfier les gaz de liquéfaction facile, une méthode imaginée par Faraday. On prend un tube en V (fig. 261), qui contient dans l'une des branches un corps capable de dégager, sous l'influence de la chaleur par exemple, le gaz qu'on veut liquéfier. Le tube est fermé à ses deux extrémités et la branche vide est plongée dans un mélange réfrigérant. Quand le gaz se dégage, il se trouve renfermé dans le tube à une pression élevée et en contact avec une enveloppe très froide, il se liquéfie.

Le procédé le plus général et le plus fécond est le procédé *Cailletet* dans lequel on utilise la compression *lente* du gaz suivie d'une détente *brusque*.

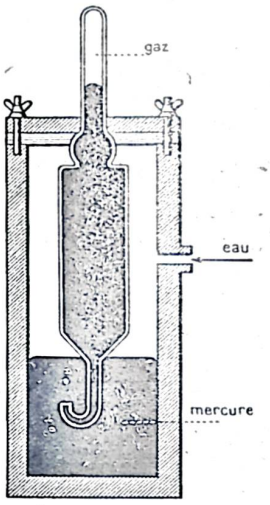


Fig. 262

L'appareil de Cailletet se compose d'un fort tube de verre plongé dans une cuve à mercure. Le mercure de la cuve étant fortement comprimé au moyen de l'eau que l'on injecte dans la cuve comprime à son tour le gaz enfermé dans le tube. Cette compression est opérée *avec lenteur* pour éviter un échauffement notable du gaz. On laisse ensuite le gaz se détendre *brusquement*, ce qui abaisse sa température considérablement. Quand cette température est plus basse que la température *critique* du gaz à liquéfier, celui-ci se liquéfie aisément sous une compression convenable. Tous les corps gazeux connus ont été liquéfiés au moyen du procédé Cailletet. Le gaz hélium a été liquéfié, solidifié même dans le laboratoire spécialisé de la ville de *Leyde*. L'importante industrie du froid (conservation d'aliments) et certaines industries chimiques (ammoniaque synthétique etc.) sont basées sur la liquéfaction des gaz. En particulier, l'air liquide (procédés Linde et G. Claude) est une source de froid; il permet la séparation, par distillation fractionnée, de l'azote (utilisé dans la fabrication de l'ammoniaque, de l'acide nitrique synthétiques) de l'oxygène (utilisé dans une foule de réactions). Les gaz rares, spécialement l'*argon*, gaz qui remplit les lampes électriques dites $^1/_2$ watt et le *néon*, gaz des tubes rouge-orangé qui illumine la devanture des magasins, sont extraits aussi de l'air liquide.

Vapeur sursaturante. — L'eau parfaitement privée d'air bout difficilement et on peut élever la température bien au-dessus de 100° avant d'observer le dégagement de bulles de vapeur. On dit que l'eau est surchauffée.

Enfin, il peut arriver qu'une vapeur saturante à une certaine température, ne se liquéfie pas comme elle devrait le faire quand la température s'abaisse.

Cette vapeur est dite *sursaturante*. La sursaturation cesse brusquement, comme la surfusion, si l'on amène la condensation brusque d'une grande quantité de vapeur.

C'est à des phénomènes de sursaturation que sont dues les grandes averses de l'été. L'atmosphère étant surchargée de vapeur d'eau, on dit qu'il fait lourd. Puis, brusquement, en général sous l'effet de la foudre, la sursaturation cesse et toute la vapeur d'eau contenue en excès dans l'atmosphère se condense et tombe en pluie.

Chaleur et vaporisation. — De même que pour la fusion, pendant la vaporisation il se produit un travail moléculaire qui nécessite une absorption de chaleur appelée *chaleur latente de vaporisation*.

Inversement lorsqu'un corps passe de l'état de vapeur à l'état liquide à la même température il abandonne sa chaleur de vaporisation.

Toutefois il faut remarquer que le passage de l'état liquide à l'état gazeux a lieu à toute température entre le point de fusion et le point d'ébullition. Aussi est-il plus aisé de déterminer la quantité totale de chaleur qu'il faut fournir à une masse liquide à la température initiale 0° pour la transformer en vapeur à une température donnée *t*. Cette quantité est désignée sous le nom de *chaleur totale de vaporisation* à la température *t*. Le tableau suivant indique la chaleur totale de vaporisation de l'eau à diverses températures de 10 en 10 degrés.

Température de la vapeur	Chaleur totale de vaporisation	Température de la vapeur	Chaleur totale de vaporisation
0° C	606,5	120° C	643,1
10°	609,5	130°	646,1
20°	612,6	140°	649,2
30°	615,7	150°	652,2
40°	618,7	160°	655,3
50°	621,7	170°	658,3
60°	624,8	180°	661,4
70°	627,8	190°	664,4
80°	630,9	200°	667,5
90°	633,9	210°	670,5
100°	637,0	220°	673,6
110°	640,0	230°	676,6

Favre, Silbermann et Andrews ont déterminé les chaleurs latentes de vaporisation de différents liquides, en réalisant toujours l'évaporation à 100°.

Chaleurs latentes de vaporisation		Rapport de la chaleur latente à celle de l'eau
Eau	537,2	1,000
Esprit de bois	263,7	0,492
Alcool	208,0	0,387
Formiate de méthyle	117,1	0,219
Acétate de méthyle	110,2	0,206
Ether formique	105,3	0,196
Ether acétique	92,68	0,173
Ether sulfurique	90,45	0,169
Sulfure de carbone	86,67	0,162
Ether oxalique	72,72	0,136
Trichlorure de phosphore	51,41	0,096
Iodure d'éthyle	46,87	0,087
Iodure de méthyle	46,07	0,086
Brome	45,60	0,085
Perchlorure d'étain	30,53	0,057

Nous remarquons qu'à 100° la chaleur de vaporisation de l'eau est 537 c. A t^o elle est donnée par la formule empirique de Régnault

$$Q = 606,5 - 0,695\ t.$$

Pour déterminer les chaleurs latentes de vaporisation on a recours à l'appareil représenté par la figure 263.

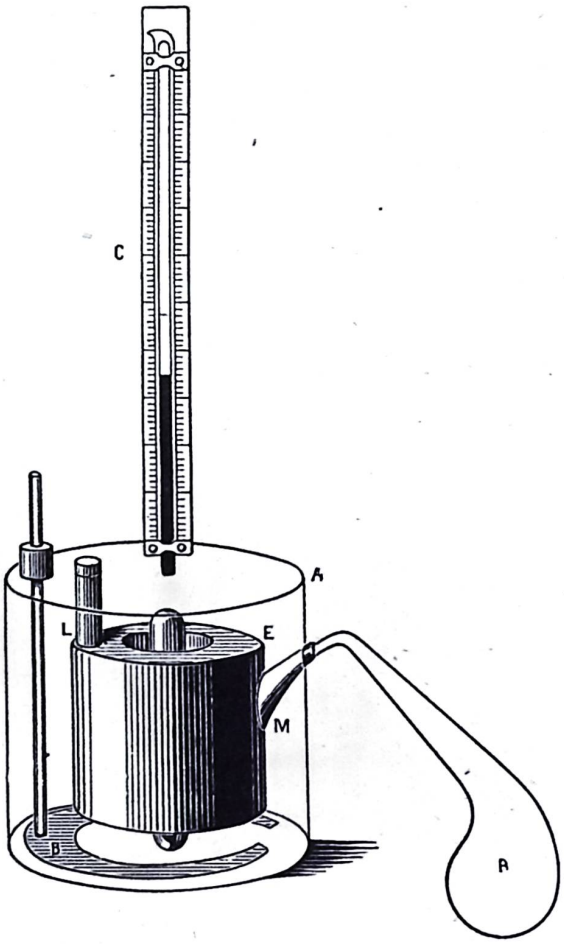


Fig. 263

La vapeur est produite dans la cornue R. De la cornue, la vapeur passe dans un condenseur ELM plongé dans un calorimètre A rempli d'eau froide, à une température connue. La vapeur condensée est recueillie en ELM et la quantité en est mesurée facilement au moyen d'une pesée. Un thermomètre C indique le changement de température de l'eau du calorimètre. Un agitateur B permet de mêler les différentes couches du liquide de manière à rendre la température uniforme.

Soit W le poids de vapeur condensée, T la température de cette vapeur au moment où elle entre dans le serpentin du condenseur, et x la chaleur latente de vaporisation cherchée. D'un autre côté, soit w le poids de l'eau du calorimètre, (y compris la valeur en eau du calorimètre, c'est-à-dire le poids de l'eau ayant même capacité calorifique que le vase), t^o la température de l'eau en A au début de l'expérience, et X sa température finale et celle de la vapeur condensée en ELM. c étant la chaleur spécifique du liquide étudié, la quantité de chaleur dégagée par la vapeur après sa condensation est exprimée par

$$W\,(T - X)\,c$$

La chaleur dégagée au moment de la condensation est

$$W\,x$$

et la chaleur absorbée par le calorimètre est

$$w\,(X - t)$$

On peut donc écrire l'équation

$$Wx + W\,(T - X)\,c = w\,(X - t)$$

d'où il est facile de tirer x.

Abaissement de température dû à l'évaporation. — Puisque pour se réduire en vapeur un liquide doit absorber une certaine quantité de chaleur (chaleur de vaporisation), quand il s'évapore sans recevoir de chaleur de l'extérieur, il est forcé d'emprunter à lui-même ce dont il a besoin et sa température doit s'abaisser.

C'est en effet ce que démontre l'expérience. Si on fait bouillir de l'eau dans le vide sous la machine pneumatique, cette eau ne tarde pas à se congeler. On sait que de l'eau contenue dans un vase poreux (alcarazas) se maintient très fraîche, à cause de l'évaporation active qui se produit à la surface du vase au travers des pores.

Ce principe a été appliqué à la fabrication de la glace et particulièrement à la préparation des *carafes frappées*. Le goulot de la carafe est adapté à une pompe aspirante, qui aspire rapidement l'air contenu dans la carafe, puis la vapeur d'eau qui se forme, ce qui détermine une évaporation très active qui amène la congélation de l'eau.

L'appareil de Carré pour la fabrication de la glace est basé sur le même principe, mais ici le froid est obtenu par l'évaporation du gaz ammoniac liquéfié.

Caléfaction. — Quand on projette une goutte d'eau sur une plaque métallique chauffée au rouge, c'est-à-dire à une température très supérieure à la température d'ébullition de l'eau, on constate que cette goutte ne s'évapore pas brusquement comme on pourrait s'y attendre. Elle court à la surface de la plaque en s'évaporant avec une lenteur relative. Si on observe avec attention, on remarque en outre que la goutte d'eau ne touche pas le métal. C'est qu'en effet, la vapeur qui se dégage activement de la surface de la goutte s'interpose entre la plaque et l'eau ; cette couche de vapeur joue le rôle d'isolant et c'est ce qui retarde la vaporisation.

La vaporisation se produit brusquement quand la plaque est à une température beaucoup plus basse, voisine du point d'ébullition de l'eau.

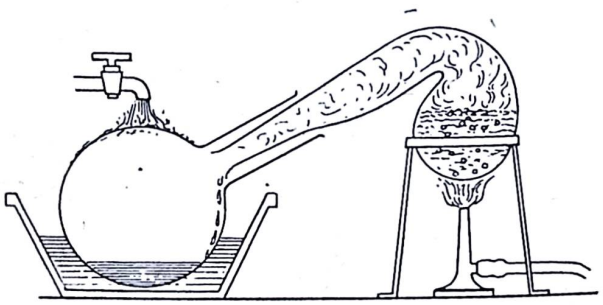


Fig. 264

Ce phénomène, auquel on donne le nom de *caléfaction*, a permis d'expliquer certaines explosions des machines à vapeur. Si, par suite de la mauvaise composition de l'eau, la chaudière s'est, à la longue, incrustée de sels calcaires, sa paroi ne se trouve plus en contact direct avec l'eau et il peut arriver qu'elle rougisse. Que la couche de calcaire vienne alors à se fendiller, l'eau entrera en caléfaction, puis, comme la température de la paroi ne tardera pas à baisser, elle viendra au contact de cette paroi et se transformera brusquement en vapeur. Le dégagement brusque pourra se trouver trop considérable pour la capacité de la chaudière et faire sauter celle-ci.

Principe de la paroi froide (Watt). — Quand *une vapeur est en contact avec une paroi plus froide que le liquide par lequel cette vapeur est émise, elle ne peut exister à une tension supérieure à la tension maxima correspondant à la température de la paroi froide.*.

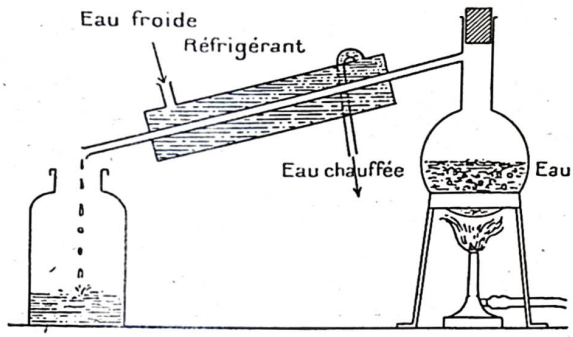


Fig. 265

Dans ces conditions, le liquide émet constamment des vapeurs qui se condensent sans cesse au contact de la paroi froide. Le phénomène continue jusqu'à ce que la chaleur abandonnée par la vapeur qui se condense sur la paroi ait amené celle-ci à la température du liquide, ou jusqu'à ce que l'absorption de la chaleur nécessaire à la formation de la vapeur ait abaissé la température du liquide à celle de la paroi froide. Autrement dit, le phénomène se poursuit tant que la paroi est plus froide que le liquide.

Distillation. — Une application courante de ce principe est celle de la *distillation*.

La distillation se fait dans un alambic, c'est-à-dire dans un appareil composé de deux vases clos communiquant entre eux par un long tube, à la partie supérieure de chacun des deux vases. L'un des vases, dans lequel on a versé le liquide à distiller, est porté à une température voisine de la température d'ébullition de ce liquide. L'autre vase est refroidi. La vapeur passe, par le tube, du vase chaud dans le vase froid et se condense dans ce dernier (fig. 264 et 265).

Pour distiller l'eau on peut se servir de l'appareil représenté par la figure 264, composé d'une cornue contenant le liquide à distiller et d'un ballon refroidi dans lequel la vapeur se condense.

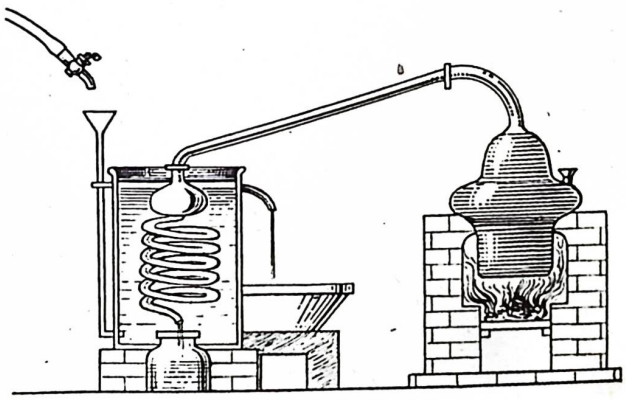


Fig. 266 — Alambic

Pour la distillation des alcools on se sert d'un alambic serpentin représenté par la figure 266 (ci-dessus).

Rosée. — Givre. — Ce principe explique aussi la formation de la rosée et du givre.

Supposons que l'atmosphère soit chargée de vapeur d'eau, à une tension un peu inférieure à la tension maxima à la température de l'air. Pendant la nuit, la terre et les objets solides qui y sont fixés, tels que les plantes, se refroidissent par rayonnement plus vite que l'air en contact avec eux. Il arrive un moment où la température du sol est justement celle pour laquelle la tension de la vapeur d'eau dans l'air est maxima ; à partir de ce moment, la vapeur d'eau se condense à la surface de la terre, en vertu du principe de la paroi froide, jusqu'à ce que la chaleur abandonnée par cette condensation ait suffisamment relevé la température du sol pour faire cesser le phénomène.

Si la terre est très froide au moment où la rosée se dépose, les gouttelettes se congèlent et forment alors ce qu'on appelle le givre ou la gelée blanche.

Hygrométrie. — L'hygrométrie, elle aussi, est fondée sur le principe de Watt.

L'atmosphère contient toujours plus ou moins de vapeur d'eau. Si cette vapeur est voisine du point de saturation, il suffit d'un faible abaissement de température pour en amener la condensation partielle ; on dit alors que l'air est humide. Si, au contraire, la vapeur est très éloignée de son point de saturation, l'atmosphère pourra se refroidir de plusieurs degrés sans qu'il se produise de condensation : on dit que l'air est sec.

Ce simple exposé montre que l'état hygrométrique de l'air ne dépend pas tant de la tension absolue de la vapeur d'eau dans l'atmosphère que du rapport de cette tension f à la tension maxima F à la température de l'atmosphère. La fraction $\frac{f}{F}$ est appelée *fraction de saturation* et c'est elle qui définit l'état hygrométrique de l'air.

On appelle état hygrométrique en degré d'humidité, le rapport entre la pression de la vapeur d'eau dans l'air et la pression maximum de la vapeur d'eau à la même température.

Exemple. — Si à 20° la pression de la vapeur d'eau dans l'atmosphère est 6 mm. 9.

En consultant la table (page 390) on voit que sa pression maximum à cette température est 17,39.

L'état hygrométrique est donc : $\frac{6,9}{17,39} = 0,4$.

Pour calculer ce rapport $\frac{f}{F}$, on cherche F dans la table et on mesure f.

Mesure de f. — On procède indirectement, c'est-à-dire qu'on cherche la température à laquelle f deviendrait la tension maxima. Cette température une fois connue, on trouve dans la table la tension maxima correspondante, c'est-à-dire f.

La méthode consiste à refroidir graduellement un corps, dont on peut à chaque instant connaître la température au moyen d'un thermomètre, jusqu'à ce que la vapeur d'eau atmosphérique commence à se déposer sous forme de buée à sa surface: c'est le *point de rosée*.

Hygromètre à condensation d'Alluard — Cet appareil se compose d'un prisme rectangle métallique creux dont une face verticale est dorée (ou argentée) et entourée par une lame pareillement dorée qui n'est

séparée de la boîte prismatique que par une légère fente. Un courant d'air insufflé dans la boîte barbote dans de l'éther en déterminant une évaporation énergique du liquide et un abaissement de la température de la boîte. A distance, au moyen d'un viseur on note le *point de rosée*, c'est-à-dire la condensation de la vapeur d'eau sur la plaque dorée de la boîte. Celle-ci grâce à sa matité, fait contraste avec la plaque-témoin restée brillante. On note en même temps les températures t de la boîte et T de l'air extérieur et on peut calculer l'état hygrométrique $\frac{F}{f}$ de l'air au moment de l'expérience. Aux températures t et T correspondent les pressions maxima de la vapeur d'eau.

Tableau des pressions maxima

TEMPÉRATURE	PRESSION EN CM. DE MERCURE f
— 10°	0,2
0	0,46
10	0,92
20	1,74
30	3,15
40	5,5
50	9,2
100	76

Problèmes.

1. — Une marmite légère contient 10,74 kg. d'eau à 0°. On y fait condenser de la vapeur d'eau bouillante. Quand on arrive à 100° l'eau de la marmite pèse 12,74 kg. Quelle est la chaleur fournie par l'eau qui se condense ? En déduire la valeur de la chaleur de vaporisation de l'eau ?

Solution

Poids de la vapeur d'eau condensée.

$$12 \text{ kg. } 24 - 10{,}24 = 2 \text{ kg.}$$

Ces 2 kg. en se condensant ont absorbé 2000 × x (étant la chaleur de vaporisation).

Cette chaleur a été absorbée par les 10740 d'eau qui se sont élevés de 0 à 100°.

C'est-à-dire

$$2000\,x = 10740 \times 100$$

$$x = \frac{10740 \times 100}{2000} = 537.$$

2. — Quelle masse de vapeur d'eau à 100° faudrait-il faire condenser dans une baignoire contenant 100 litres d'eau à 17°, pour porter à 37° la température du mélange ? On sait que 1 g. de vapeur d'eau abandonne 537 calories en se transformant en eau liquide à la même température. On ne tiendra pas compte de la chaleur communiquée par la baignoire elle-même.

Solution

Pour chauffer 100 litres ou 100 kg. d'eau de 17° à 37° il faut :

$$20 \times 100 = 2000 \text{ millithermies.}$$

Chaque kg. de vapeur d'eau envoyé dans la baignoire abandonne 537 millithermies en se condensant et l'eau produite par cette condensation se refroidissant de 100 à 37° abandonne encore 63 millithermies ; la chaleur totale cédée par 1 kg. de vapeur est donc : 537 + 63 = 600 millithermies. La masse de la vapeur d'eau à envoyer dans la baignoire est :

$$\frac{2000}{600} = 3{,}333 \text{ kg.}$$

3. — Quelle est la masse de vapeur d'eau contenue dans une salle de 7 mètres de long, 6,50 m. de large et 4 mètres de haut ? La température de l'air de cette salle est 25° et l'état hygrométrique $\frac{3}{5}$. Pression maximum de la vapeur d'eau à 25° : 23,5 mm ; densité de la vapeur d'eau : $\frac{5}{8}$.

Solution

Volume de la salle :

$$7 \times 6{,}5 \times 4 = 182 \text{ m}^3.$$

La pression de la vapeur d'eau contenue dans cette salle est :

$$23{,}5 \times \frac{3}{5} = 14{,}1 \text{ mm.}$$

S'il était possible d'amener cette vapeur d'eau dans les conditions normales, son volume serait, d'après l'équation des gaz parfaits :

$$\frac{V\,H}{T} = \frac{V'\,H'}{T'}$$

$$V = \frac{182 \times 14{,}1 \times 273}{760 \times 298} = 3{,}258 \text{ m}^3.$$

La masse de la vapeur d'eau contenue dans la salle est:

$$1{,}293 \times \frac{5}{8} \times 3{,}258 = 2{,}632 \text{ kg.}$$

4. — On a 10 l. d'air humide à la pression atmosphérique 760 mm. à une température pour laquelle la tension maximum de la vapeur d'eau est 20 mm. ; l'état hygrométrique de cet air est 0,75.

On réduit le volume de cet air à 5 l. sans changement de température et on demande :

(1) Quelle sera la pression finale ?

(2) Quel sera le poids de vapeur d'eau condensée. Température de l'expérience 27°,3. (Elle a été choisie de manière à simplifier les résultats numériques).

Coefficient de dilatation des gaz $\frac{1}{273}$.

Poids du litre d'air dans les conditions normales 1,3 g. Densité de la vapeur $\frac{5}{8}$.

(Baccal. Marseille).

Solution

Soit x la pression finale.
La loi de Mariotte donne

$$x \times 5 = 760 \times 10$$

d'où $$x = \frac{760 \times 10}{5} = 1920 \text{ mm.}$$

La pression de la vapeur d'eau sera doublée aussi $20 \times 0{,}75 \times 2 = 30$ mm.

Comme elle ne peut être supérieure à 20 mm. à la température de l'expérience il y aura condensation.

Les 5 litres d'air ne peuvent contenir à 27° 3 que

$$1 \text{ gr. } 3 \times \frac{5}{8} \times 5 \times \frac{20}{760} \times \frac{273}{273 \times 27{,}3}$$

$$= \frac{1{,}3 \times 5 \times 5 \times 2 \times 10}{8 \times 76 \times 11} \text{ grammes d'eau.}$$

CHAPITRE VII

MACHINES A VAPEUR

Equivalent mécanique de la calorie. — La destruction par le choc ou par le frottement d'une certaine quantité de force vive ou de travail, est accompagnée de la production d'une certaine quantité de chaleur.

Les expériences de Tyndall et de Joule ont établi qu'à une même quantité de force vive correspond toujours une même quantité de chaleur. Réciproquement, si une machine fonctionne sous l'action de la chaleur, on démontre qu'une quantité donnée de travail effectuée par la machine nécessite toujours l'absorption d'une même quantité de chaleur, justement égale à celle qui correspondrait à l'annulation de cette quantité de travail.

Il y a donc équivalence entre le travail et la chaleur. L'expérience et le calcul nous apprennent que l'*équivalent mécanique* de la *calorie* (petite calorie) est en kilogrammètres de 0,425. C'est le travail qu'il faut effectuer pour élever un poids de 0 kg. 425 à 1 mètre de hauteur.

La grande calorie, qui vaut 1.000 calories ordinaires ou petites calories, et qui représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré la température de 1 kilogramme d'eau, a pour équivalent mécanique 425 kilogrammètres.

Dans le système C G S l'équivalence mécanique de la calorie vaut 4 joules 17.

Machines à vapeur. — Les machines à vapeur sont basées sur les variations de la tension de la vapeur d'eau à haute et à basse température.

Nous choisirons une machine à vapeur extrêmement simple pour expliquer le fonctionnement général de ce genre d'appareils ; c'est la machine qu'on utilise encore parfois dans les mines pour l'épuisement de l'eau ; elle fait partie de la catégorie des machines dites atmosphériques ou à *simple effet*.

Cette machine (fig. 267) se compose essentiellement d'un cylindre C mis en communication par un tube S avec une chaudière ou un générateur de vapeur construit sur le principe de la marmite de Papin. Un piston P se meut à frottement doux dans le cylindre qu'il obture exactement. C'est le mouvement de ce piston qui doit actionner la machine. Dans l'exemple choisi, il agit par l'intermédiaire d'une tige et d'une chaîne sur un balancier B à l'autre bout duquel est suspendu un contrepoids W. Enfin, ce balancier est articulé à l'extrémité de la tige d'une pompe d'épuisement.

Supposons d'abord le piston P au bas de sa course, appliqué sur le fond du cylindre C, et supposons la communication par le tube S ouverte avec le générateur de vapeur. La vapeur pénètre en C avec une pression supérieure à la pression atmosphérique qui s'exerce sur

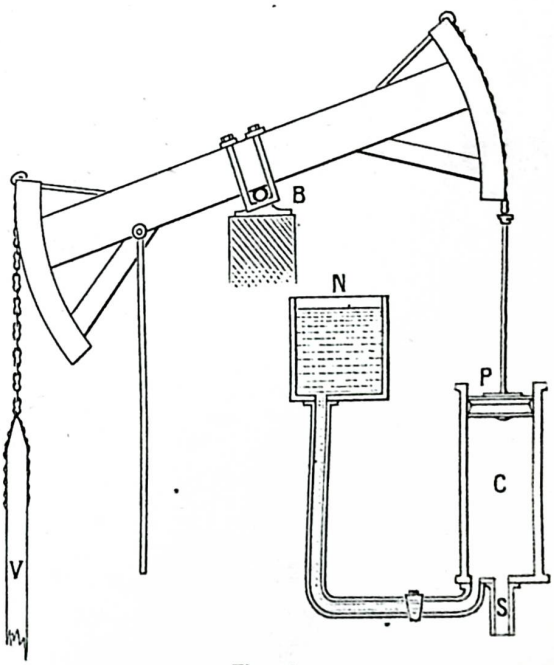


Fig. 267

l'autre face du piston. Celui-ci remonte et le balancier entraîné par le contrepoids 1 s'incline du côté de ce dernier. Quand P est en haut de sa course, le tube S se ferme et la vapeur cesse d'affluer ; en même temps, le cylindre C se trouve mis en communication avec un réservoir d'eau froide N et une petite quantité du liquide s'écoule dans le cylindre. Au contact de l'eau froide, la vapeur contenue en C se condense et la pression tombe brusquement bien au-dessous de la pression atmosphérique qui, en agissant sur la face supérieure du piston, le fait redescendre jusqu'au fond du cylindre en entraînant le balancier B.

On a plutôt recours aujourd'hui aux machines à double effet, dans lesquelles la vapeur agit alternativement sur les deux faces du piston. Pour assurer l'arrivée alternante de la vapeur, on a recours à un nouvel organe, le *tiroir*. Le tiroir est représenté en A B sur les figures

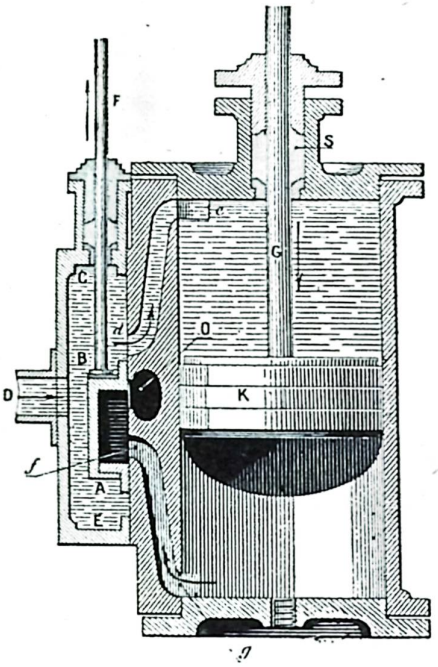


Fig. 268

268 et 269. Le cylindre communique par ses deux extrémités *d e*, *f g*, avec la boîte de vapeur C E. Les deux extrémités des tubes *d* et *f* sont voisines l'une de l'autre de telle façon que le tiroir A B peut recouvrir tantôt l'une (*d*, fig. 268) tantôt l'autre (*f*, fig. 269). Le

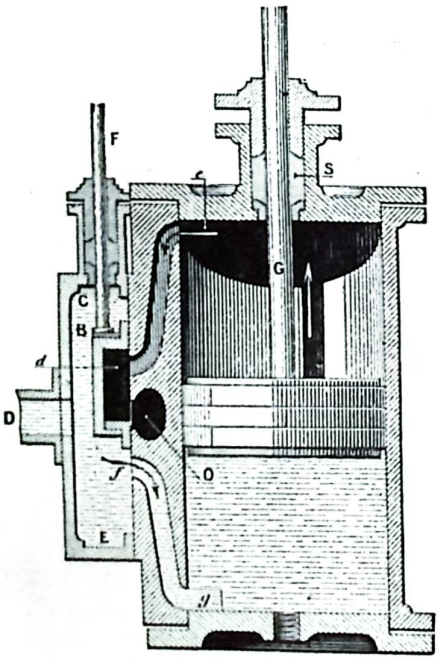


Fig. 269

mouvement du tiroir est produit par la machine elle-même et par l'intermédiaire de la tige F. Il a pour effet de mettre alternativement en communication avec la chaudière tantôt la partie inférieure du cylindre (fig. 268) tantôt la partie supérieure (fig. 269), ce qui détermine un mouvement d'allée et venue du piston. La condensation de la vapeur se fait par l'intermédiaire d'un tube O qui reste constamment en communication avec le tiroir et qui par conséquent se trouve tantôt en communication avec le tube *d e* (fig. 268), tantôt avec le tube *f g* (fig. 269).

La figure 271 montre les détails du *condenseur*. La vapeur venant du piston par l'intermédiaire du tiroir, arrive par le tube *m n* dans la chambre de condensation

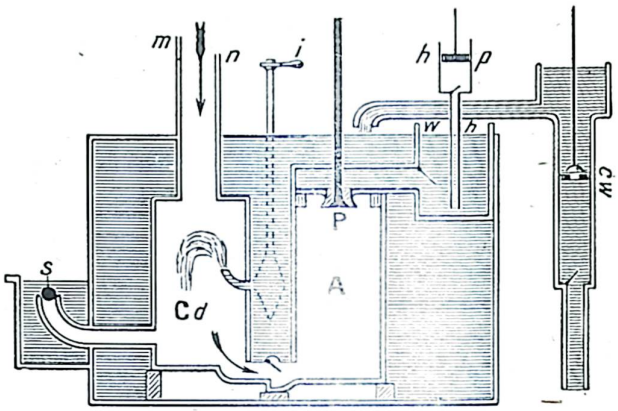


Fig. 270

C *d*. L'eau servant à la condensation s'écoule sous forme de pluie par le tube *i* communiquant avec un réservoir d'eau froide. L'eau de ce dernier est sans cesse renouvelée par la pompe *c w*. L'eau provenant de la condensation s'écoule dans le corps de la pompe A d'où elle est épuisée par une pompe à air *p* ; elle est chassée

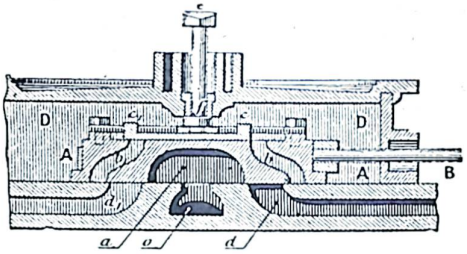


Fig. 271

dans un réservoir *w h* (eau chaude) d'où elle est reprise par une autre pompe *h p*. S est une soupape de sûreté.

Les machines à vapeur sont dites *à haute pression* ou à *basse pression* selon la pression avec laquelle la vapeur arrive aux cylindres. Dans les machines à basse pression, la tension de la vapeur varie entre 1,5 atmosphère et 2 ou 3 atmosphères. Dans les machines à haute pression, la tension atteint 8, 10 atmosphères et quelquefois plus.

Dans ces dernières, on peut supprimer le condenseur et laisser la vapeur se dégager librement dans l'atmosphère par l'intermédiaire du tiroir ; la pression atmosphérique s'exerce alors sur l'une des faces du piston et la pression efficace est la différence entre la tension de la vapeur et la pression atmosphérique.

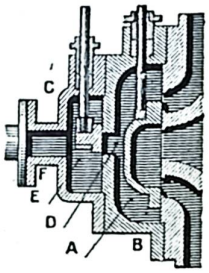


Fig. 272

Dans certaines machines, on ne laisse pas le cylindre en communication avec la chaudière pendant toute la durée d'un mouvement d'allée ou de venue du piston. La partie où se trouve la vapeur active est isolée à la fois, pendant un certain temps, de la chaudière et du condenseur ; par suite, la vapeur continue à agir par sa pression, mais cette pression diminue au fur et à mesure que le piston recule devant elle et que la capacité du cylindre augmente ; la vapeur se détend et la machine est dite alors *à détente*. Ce dispositif permet d'économiser de la vapeur. On peut le réaliser en calculant convenablement les dimensions du tiroir (fig. 271) ou au moyen d'un obturateur indépendant du tiroir (D, fig. 272).

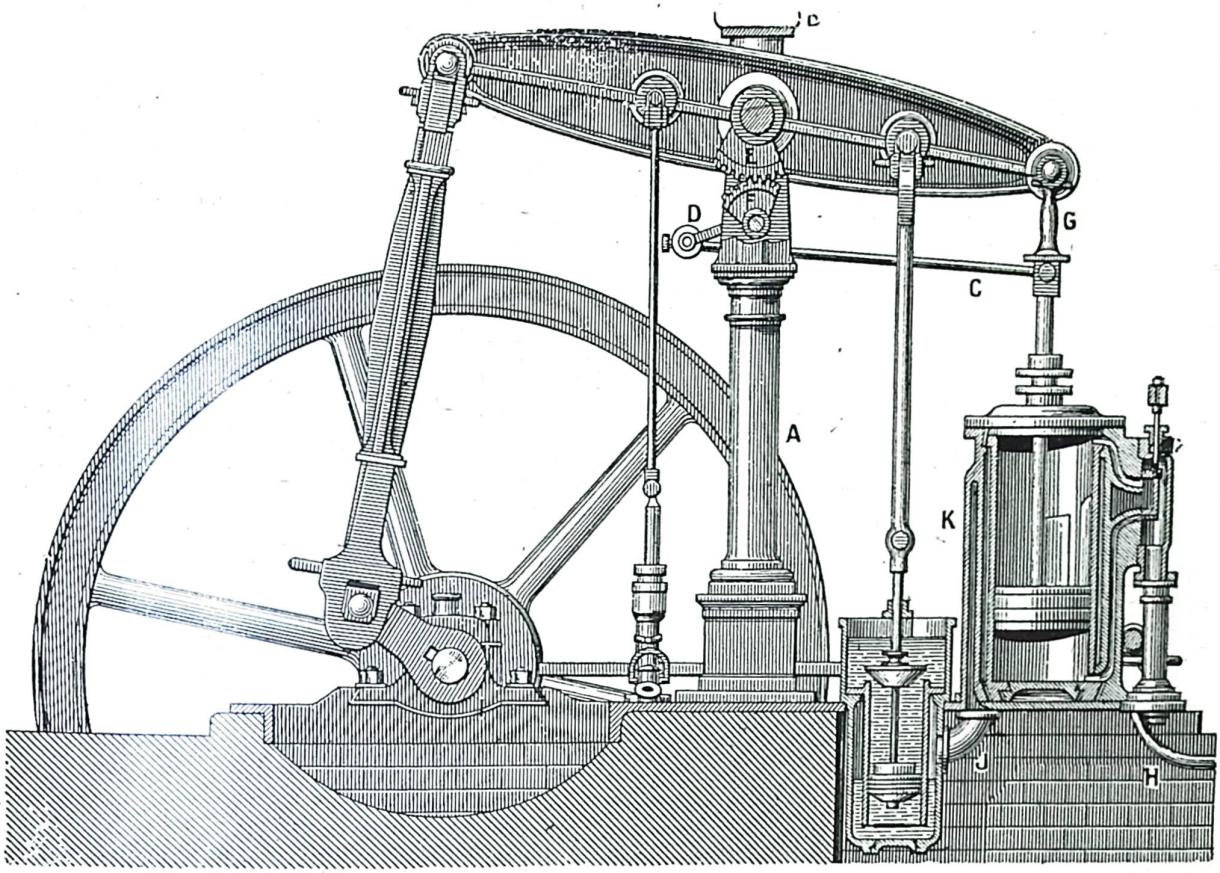


Fig. 273

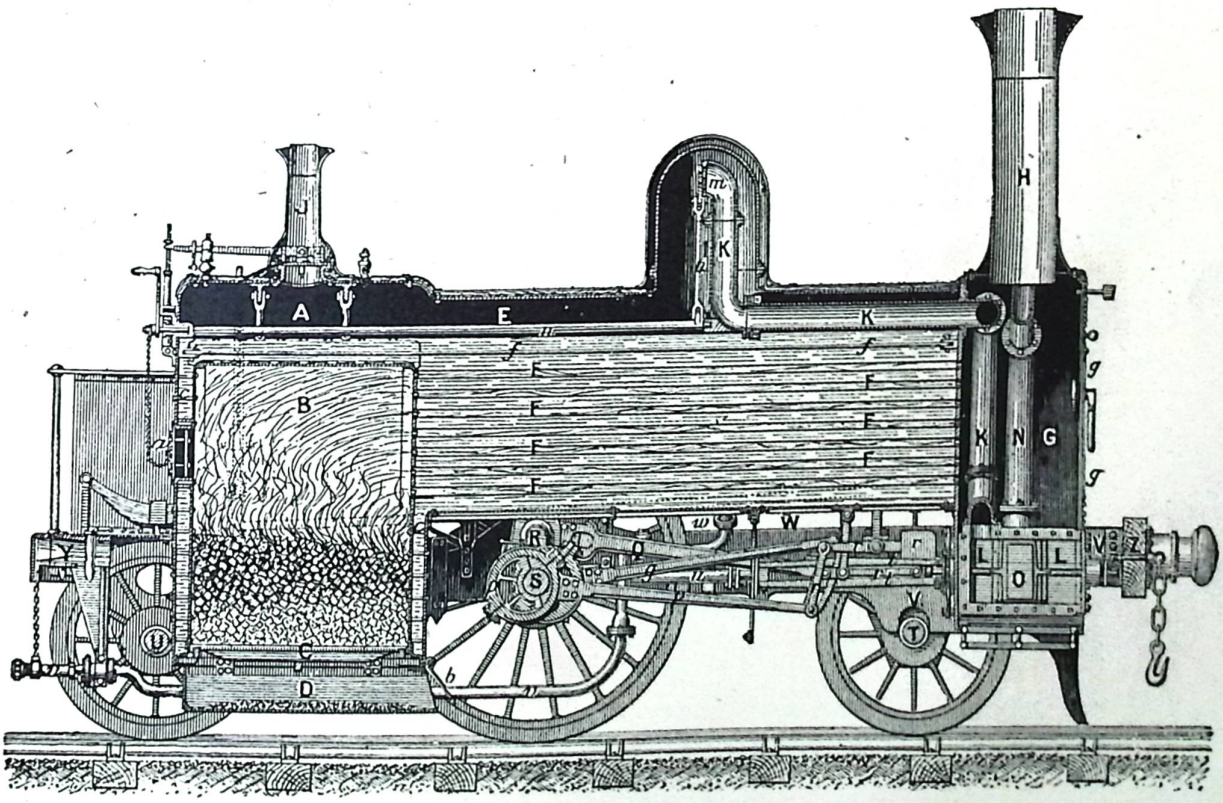


Fig. 274

Les locomotives sont toujours des machines à vapeur à haute pression, tandis que les machines des bateux sont à basse pression.

Quand on dispose de peu de place, comme c'est le cas dans les locomotives, on a avantage à réduire le plus possible les dimensions de la chaudière. Or ce qui importe, surtout dans un générateur, au point de vue de son rendement, c'est la *surface de chauffe*, c'est-à-dire la surface par laquelle le foyer est en contact avec l'eau. Pour augmenter cette surface tout en restreignant le volume de la chaudière, Marc Séguin a imaginé les chaudières tubulaires (fig. 274). La flamme du foyer B traverse une série de tubes F F avant de s'échapper dans la boîte à fumée G ; la surface de chauffe se trouve ainsi considérablement multipliée.

Problèmes.

1. — Une machine à vapeur fonctionne à pleine vapeur et sans condenseur pendant 10 heures ; la vapeur est à une pression de 6 kg. par cm², le piston a un diamètre de 0,50 m. et une course de 0,80 m. ; l'arbre fait 20 tours à la minute. Calculer : 1° la force exercée sur le piston ; 2° le travail fourni par cette machine pendant le temps donné ; 3° la puissance.

Solution

Remarquer que : 1° la vapeur arrive sur les deux faces du piston et par conséquent, il y aura lieu de multiplier par 2 la course de celui-ci. L'arbre faisant 20 tours à la minute, le piston fait 40 tours simples ; 2° la machine est sans condenseur ; la résistance qu'offre la pression atmosphérique au déplacement du piston doit entrer en ligne de compte pour 1 kg. par cm². L'effort utile exercé sur le piston est donc seulement de 5 kg. par cm².

L'effort utile exercé est de :

$$5 \text{ kg.} \times 3{,}1416 \times 25 \times 25 = 9817{,}5 \text{ kg.}$$

Le travail en kilogrammètres est égal à l'effort en kg. multiplié par le chemin parcouru :

$$9817{,}5 \text{ kg.} \times 0{,}8$$

Et la puissance en kilogrammètres-seconde est égale au travail effectué en une seconde :

$$9817{,}5 \times 0{,}8 \times \frac{40}{60} = 5236 \text{ kgm/s.}$$

Le cheval-vapeur valant 75 kgm/s. la puissance de la machine en chevaux-vapeur est :

$$\frac{5236}{75} = 69{,}45 \text{ ch. par défaut.}$$

En 10 heures ou 36.000 secondes, le travail fourni par la machine est égal à :

$$5236 \text{ kgm.} \times 36.000 = 188496000 \text{ kilogrammètres.}$$

2. — Dans une machine à vapeur fonctionnant à double effet et sans condenseur, la vapeur exerce sur le piston une pression de 10 kg. par cm² ; la pression atmosphérique servant de contrepression est 1 kg. par cm² ? Le diamètre du piston est 40 cm. ; sa course 80 cm. ; le volant exécute 45 tours à la minute. On demande quelle est en chevaux-vapeur la puissance de la machine ?

Solution

$$\text{Puissance en ch.} = \frac{\text{Puissance en kilogrammètres}}{75}$$

Puissance en kgm. = Travail en 1 seconde.

Travail en kgm. = Force en kg × déplacement en mètres.

Puissance de la machine :

$$\frac{(9 \times 20^2 \times 3{,}1416) \times 0{,}8 \times 45 \times 2}{60 \times 75} = 180{,}95 \text{ ch.}$$

CHAPITRE VIII

PROPAGATION DE LA CHALEUR

La chaleur peut se propager :

1° Par conductibilité ;

2° par rayonnement :

3° par convection.

Conductibilité. — C'est le mode de propagation par lequel la chaleur se transmet *lentement* de *proche* en *proche* par l'intermédiaire d'un corps dont les particules s'échauffent l'une après l'autre.

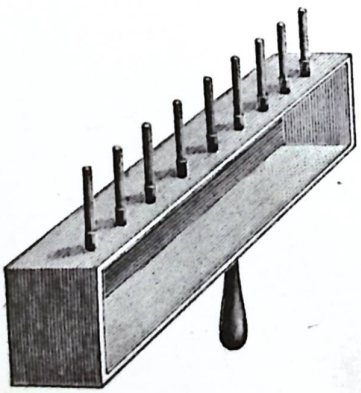


Fig. 275

Conductibilité des solides. — Certains corps conduisent bien la chaleur : ce sont les corps dits : *bons conducteurs* ; d'autres la conduisent mal : ce sont les corps *mauvais conducteurs* (les métaux sont de bons conducteurs ; le bois, le charbon, le soufre sont de mauvais conducteurs).

Les métaux sont inégalement conducteurs comme on peut s'en assurer à l'aide de l'appareil d'Ingenhouz (fig. 275) et comme l'indique le tableau suivant.

1° *Classement des métaux par ordre de conductibilité* :

argent,
cuivre,
or,
laiton,
zinc,
étain,
fer,
plomb,
platine.

2° Classement des substances non conductrices :

verre,
marbre,
porcelaine,
charbon,
bois,
substances organiques végétales (chanvre, coton),
substances organiques animales (soie, plume).

Applications. — La *grande conductibilité des métaux* est utilisée dans *l'emploi des toiles métalliques* (fig. 276 et 277) : celles-ci ne se laissent pas traverser par les flammes ; la chaleur d'une flamme est répartie par le métal sur une grande surface, le gaz se trouve refroidi et il ne brûle pas

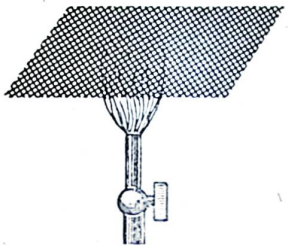


Fig. 276

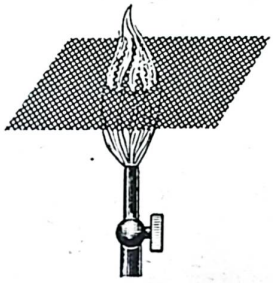


Fig. 277

de l'autre côté de la toile. On se sert d'une toile métallique, dans les laboratoires, pour chauffer les instruments de verre ou de porcelaine ; on intercale la toile entre la flamme et l'objet chauffé.

On utilise la même propriété dans la *lampe des mineurs* (fig. 278). Si un mineur arrive, porteur de sa lampe, dans une région où il y a émanation de *grisou*, le mélange détonant d'air et de grisou s'enflamme à l'intérieur de la lampe qui s'éteint ; mais la combustion ne s'étend pas à l'extérieur car la toile métallique a refroidi les gaz de la combustion. L'explosion est évitée.

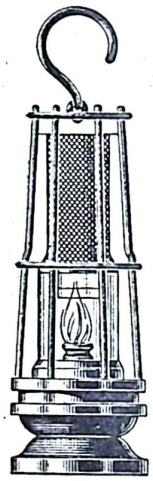


Fig. 278

La *faible conductibilité du bois* le fait employer pour fabriquer les manches des outils susceptibles d'être introduits dans un foyer, les anses des ustensiles de cuisine.

Plusieurs phénomènes s'expliquent par la bonne ou la mauvaise conductibilité des corps ; 1° rupture de vases de verre brusquement chauffés ou brusquement refroidis ; 2° sensations différentes données par des corps différents à la même température : marbre, bois, acier, verre.

Conductibilité des liquides. — *Les liquides sont mauvais conducteurs de la chaleur* exception faite pour le mercure.

On peut s'en convaincre par une expérience simple (fig. 279) : *on fait bouillir de l'eau* dans la partie *supérieure* d'un tube à essai en tenant l'autre extrémité dans la main.

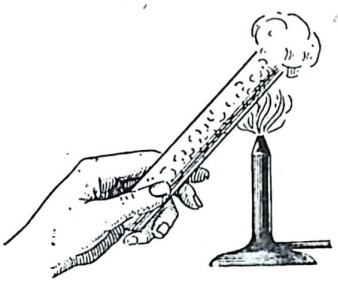


Fig. 279

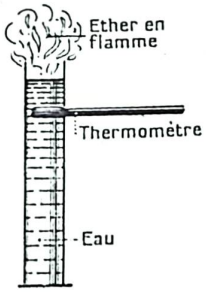


Fig. 280

On peut encore, dans une éprouvette spéciale, enflammer de l'éther à la partie supérieure sans que le thermomètre qui traverse l'éprouvette au dessous ne traduise l'élévation de température (fig. 280).

Applications. — Pour prendre la température d'une certaine quantité de liquide, bain par exemple, il faut agiter le liquide. L'égalité de température, grâce à la mauvaise conductibilité de l'eau, ne se fait pas au sein des rivières et des lacs, la partie supérieure peut être à 0°, la partie profonde reste à 4° (maximum de densité de l'eau). Le mercure, bon conducteur de la chaleur, est utilisé dans les thermomètres pour prendre rapidement la température du milieu où il est placé.

Conductibilité des gaz. — Les gaz sont très *mauvais conducteurs* de la chaleur. Ils ne s'échauffent que par convection.

Applications. — Chaque fois que l'on veut empêcher un corps de s'échauffer ou de se refroidir par contact avec le milieu ambiant, on l'en isole à l'aide de substances non conductrices qui retiennent beaucoup d'*air* entre leurs particules. C'est ainsi que s'expliquent le rôle des vêtements, des fourrures, des couvertures de laine, des édredons ; l'emploi de la paille pour entourer les pompes, les compteurs, les conduites d'eau, les légumes, les plantes fragiles pendant l'hiver ; le rôle de l'écore du liège, protecteur de l'arbre contre la gelée ; le fonctionnement de la marmite norvégienne (fig. 281) ; la manière de construire les glacières ; l'emploi des doubles fenêtres, des murs à doubles cloisons dans les habitations de pays froids.

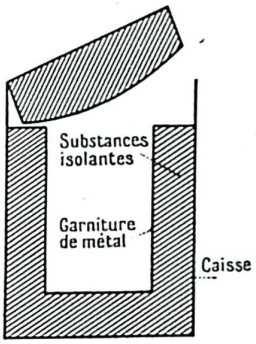


Fig. 281

Le vide ne conduit pas la chaleur. — Pour conserver les liquides froids ou chauds on se sert de bouteilles à double enveloppe entre les deux parois desquelles on a fait le vide (bouteilles thermos, fig. 282, vase d'Arsonval, fig. 283).

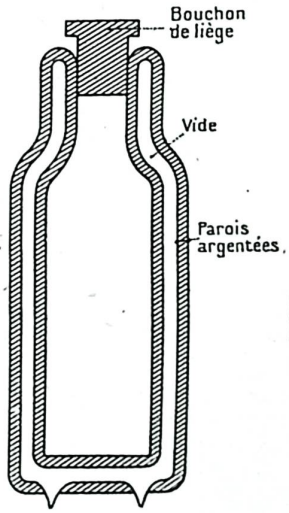


Fig. 282

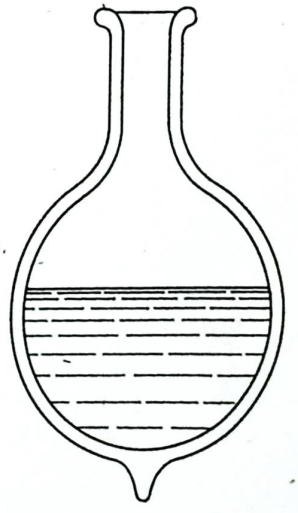


Fig. 283

Propagation de la chaleur par rayonnement. — Le ballon d'Arsonval est un ballon (fig. 283) à double paroi ; dans l'intervalle on a fait le vide aussi parfait que possible et les surfaces en regard de cette double paroi sont argentées afin de diminuer le rayonnement.

La bouteille thermos (fig. 282) est un ballon d'Arsonval.

Définition. — *Le rayonnement est la propagation de la chaleur se faisant rapidement à de grandes distances, et sans échauffer l'espace intermédiaire.*

Quand on approche la main d'un corps chaud, d'un foyer, on éprouve une sensation de chaleur et parfois même de brûlure, bien qu'on n'ait pas touché

le corps chaud. La chaleur s'est donc propagée dans l'espace, comme ferait la lumière. Le phénomène ne se produit pas seulement pour l'air ; on peut interposer d'autres corps entre la source calorifique et la main ou un thermomètre, on peut interposer par exemple un morceau de verre ou de cristal de roche, ou un gaz différent de l'air contenu dans un vase de verre. La chaleur peut donc traverser un certain nombre de corps et nous savons qu'elle nous arrive du soleil propagé par l'éther à la façon des *rayons lumineux*. Par comparaison avec ces derniers, on dit que la source calorifique *rayonne* de la chaleur, et la chaleur qui se manifeste dans ces conditions prend le nom de *chaleur rayonnante*.

On démontre du reste que la chaleur rayonnante est comparable à la lumière par toutes ses propriétés, à la seule différence que la chaleur rayonnante n'est pas perçue par l'œil. Encore cette différence n'est-elle pas absolue, car il y a des rayons qui sont à la fois chauds et visibles. L'étude du spectre solaire est très concluante à cet égard. Quand on décompose au moyen du prisme la lumière du soleil, on obtient des rayons de couleurs différentes dont les principales sont, par ordre, et en allant des rayons les plus déviés par le spectre aux moins déviés : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge. Le spectre visible s'arrête donc d'un côté au rouge, de l'autre au violet, mais si l'on place un thermomètre un peu au delà du rouge, dans l'obscurité, ce thermomètre accuse une élévation de température, et on peut, par ce procédé, établir qu'il existe, en deçà du rouge, une région infra-rouge correspondant à des rayons calorifiques invisibles et dont l'étendue est égale à plus du tiers du spectre visible. En explorant le spectre au moyen du thermomètre depuis le violet jusqu'au bout de la région infra-rouge, on constate que les radiations violettes sont froides ; puis la température du spectre s'élève graduellement de l'indigo à l'infra-rouge pour atteindre un maximum un peu en deçà du rouge visible, dans l'infra-rouge ; ensuite la température de l'infra-rouge diminue graduellement jusqu'à redevenir nulle. Ainsi les rayons visibles d'une partie du spectre, de l'indigo au rouge, sont aussi des rayons calorifiques ; mais il y a, en deçà du rouge, des rayons calorifiques invisibles.

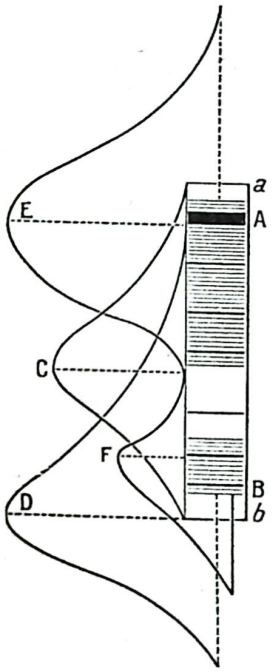


Fig. 284

Des expériences analogues, effectuées au moyen de substances chimiques sensibles aux rayons lumineux, montrent que le pouvoir chimique du spectre passe par un maximum dans le violet, il est nul pour l'orangé, le rouge et l'infra-rouge, mais il existe au delà du violet une région, dite *ultra-violette*, à laquelle correspondent des *rayons chimiques* dont le pouvoir décroît peu à peu à partir du violet. L'étendue de la région ultra-violette est de la moitié environ du spectre visible (fig. 284).

La chaleur rayonnante peut donc se caractériser ainsi :

1° Elle est transmise directement de la source calorifique (séchage devant un foyer, chaleur solaire) ;

2° elle se propage avec la même vitesse que la lumière (300.000 km. à la seconde) ;

3° elle se propage dans le vide ;

4° elle n'échauffe pas les corps qu'elle traverse.

Pouvoir diathermane. — On dit qu'un corps est *diathermane*, quand il laisse passer la chaleur rayonnante, de la même façon qu'un corps transparent laisse passer la lumière.

Tous les corps transparents ne sont pas nécessairement diathermanes ; ils peuvent arrêter certaines radiations calorifiques du spectre, les absorber. Dans ce cas, ils s'échauffent aux dépens des rayons absorbés. Mais un corps parfaitement diathermane ne s'échauffe pas quand on l'expose à un foyer calorifique même très intense.

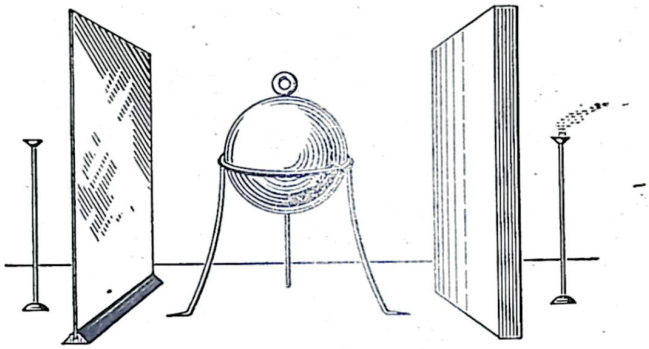


Fig. 285

Le verre est diathermane, mais seulement pour les radiations voisines du rouge, comme l'indique la courbe F de la figure 284. Il s'ensuit qu'un spectre obtenu au moyen d'un prisme de verre ne présente qu'une région infra-rouge très courte. Pour obtenir une région infra-rouge très étendue, il faut se servir d'un prisme de sel gemme, car le sel gemme est doué d'un très grand pouvoir diathermane pour les rayons infra-rouges.

On peut mettre en évidence la différence des pouvoirs du verre et du sel gemme par l'expérience suivante. On place une boule de fer portée au rouge entre deux écrans, l'un de sel gemme, à droite (fig. 285), l'autre de verre, à gauche. Derrière chacun des écrans on dispose, sur un pied, une petite coupelle contenant un fragment de phosphore. Le phosphore placé derrière l'écran de sel gemme s'enflamme ; l'autre fragment ne paraît pas influencé par la chaleur, même si l'écran de verre est beaucoup plus mince que l'écran de sel gemme.

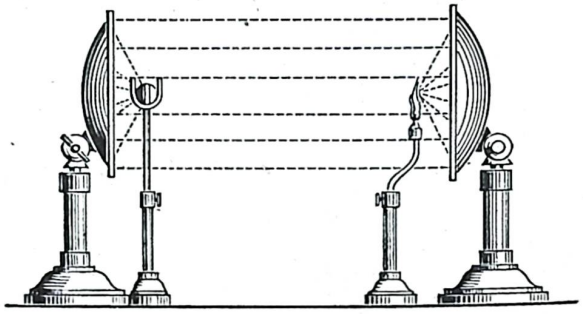


Fig. 286

La glace est diathermane. C'est ainsi qu'on peut enflammer un morceau de phosphore en concentrant la chaleur d'une flamme au moyen d'une lentille de glace.

On prouve que les rayons calorifiques et les rayons lumineux sont de même nature en répétant pour la chaleur rayonnante les expériences que l'on fait sur la lumière.

C'est ainsi que la chaleur rayonnante se réfléchit suivant les mêmes lois que la lumière. Disposons par exemple deux miroirs concaves l'un en face de l'autre (fig. 286) et plaçons au foyer de l'un une source calorifique, soit une bougie, et au foyer de l'autre

un thermomètre ou un fragment de phosphore. Le thermomètre indique une élévation de température ou le phosphore s'enflamme. La chaleur a été réfléchie comme la lumière au foyer du miroir.

Le vide seul est rigoureusement diathermane, le *verre* et *l'air humide* sont *transparents* pour la *chaleur lumineuse* et *opaques* pour la chaleur obscure. Ainsi s'explique en agriculture le rôle des cloches, châssis, serres et le rôle de la vapeur d'eau atmosphérique sur la température.

Mode de propagation de la chaleur par convection

Définition. — C'est le transport de la chaleur par le *déplacement* des couches liquides ou gazeuses.

Ce mode de transmission peut être mis en évidence par une expérience simple : on fait chauffer dans un ballon de l'eau dans laquelle on a mis une pincée de sciure de bois : on observe que les parties du liquide en contact avec le récipient chauffé s'élèvent tandis que les parties plus froides descendent (fig. 287).

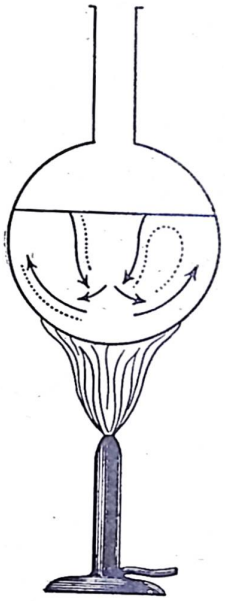


Fig. 287

C'est le mode de propagation particulier aux liquides et aux gaz.

Ceci explique les courants d'air que l'on observe dans une pièce chauffée tant que l'air n'a pas pris une température à peu près égale.

Pouvoir réflecteur. — Les corps polis réfléchissent la chaleur tout comme la lumière. Toutefois, ce pouvoir réflecteur varie avec la nature de la substance, une partie de la chaleur est absorbée. Leslie a déterminé le *pouvoir réflecteur* de différentes substances. En désignant par 100 le pouvoir réflecteur du cuivre poli, on peut établir le tableau comparatif suivant.

Cuivre poli	100
Argent	90
Etain	80
Acier	70
Plomb	60
Encre de Chine	13
Etain amalgamé	10
Verre	10
Verre huilé	5
Noir de fumée	0

Le pouvoir réflecteur absolu est le rapport de la quantité de chaleur réfléchie à la quantité de chaleur reçue.

Desains et de la Provostaye ont donné les chiffres suivants pour la chaleur rayonnante réfléchie sous un angle de 50° :

Argent	0,97
Or	0,95
Cuivre	0,93
Platine	0,83
Acier	0,82
Zinc	0,81
Fer	0,77
Fonte de fer	0,74

Les métaux qui réfléchissent le mieux la lumière sont aussi ceux qui réfléchissent le mieux la chaleur.

Jamain a montré aussi que le pouvoir réflecteur dans des régions limitées du spectre est à peu près le même pour la chaleur et pour la lumière :

MÉTAL	POUVOIR RÉFLECTEUR pour le vert		POUVOIR RÉFLECTEUR pour le rouge	
	Chaleur	Lumière	Chaleur	Lumière
Platine	59	—	60	—
Zinc	65	62	60	58
Tain des miroirs	58	62	65	69
Cuivre	63	62	75	72

Le pouvoir réflecteur du verre pour la chaleur croît très rapidement avec l'angle d'incidence, suivant la même loi que pour la lumière. Le pouvoir réflecteur des surfaces métalliques varie très lentement.

Des nombreuses expériences faites à ce sujet, il résulte que :

1° La *chaleur obscure est réfléchie* dans une très forte proportion par les métaux *comme la lumière* ;

2° La chaleur est soumise aux mêmes lois que la lumière pour la réflexion sur le verre ou sur les surfaces métalliques ;

3° La *chaleur comme la lumière* est susceptible de subir la *réflexion diffuse* à la surface des corps ;

4° La *chaleur d'une certaine région du spectre est réfléchie* par une surface dans la même proportion que la lumière de cette région du spectre.

Il résulte de là que les rayons calorifiques et les rayons lumineux sont de même nature, et que l'action calorifique et l'action lumineuse d'une région donnée du spectre sont causées par les mêmes rayons.

Pouvoir absorbant. — Le pouvoir absorbant d'une substance pour la chaleur est le rapport de la quantité de chaleur absorbée par la substance à la quantité de chaleur reçue.

Il est évident que la quantité de chaleur absorbée est la différence de la quantité de chaleur reçue et de la somme des quantités de chaleur transmise et réfléchie. Donc, un corps très diathermane ou très réfléchissant est peu absorbant.

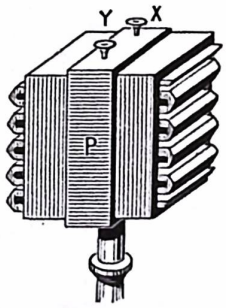


Fig. 288

Melloni a déterminé le pouvoir absorbant d'un certain nombre de corps au moyen de sa pile thermo-électrique (fig. 288). La quantité de chaleur reçue étant représentée par 100, il a trouvé les nombres suivants pour la quantité de chaleur absorbée :

Noir de fumée	100
Céruse	100
Colle de poisson	91
Encre de Chine	85
Sepia	72
Métaux	13

Tyndall a étudié le pouvoir absorbant des gaz pour la chaleur obscure. Il a constaté que le pouvoir absorbant de l'air sec est très faible et qu'il est au moins sextuplé quand l'air est chargé de vapeur d'eau.

On appelle *pouvoir émissif* d'une substance la faculté que possède cette substance d'émettre une quantité de chaleur plus ou moins grande à une température donnée. Leslie, en représentant le pouvoir émissif du noir de fumée par 100, a trouvé les nombres suivants :

Noir de fumée	100
Céruse	100
Papier	98
Cire à cacheter	95
Verre ordinaire	90
Encre de Chine	88
Colle de poisson	80
Plombagine	75
Plomb terni	45
Mercure	20
Plomb poli	19
Fer poli	15
Or	12
Cuivre, argent, etc.	12

Le pouvoir émissif est justement inverse du pouvoir absorbant. Desains et de la Provostaye ont trouvé pour les métaux des nombres plus faibles que ceux de Leslie :

Noir de fumée	100,
Platine en feuilles	10,80
Platine poli	9,50
Argent (précipité)	5,36
Cuivre en feuilles	4,90
Or en feuilles	4,28
Argent laminé	3,00
Argent poli	2,50
Argent précipité et poli	2,25

Dulong et Petit ont montré l'identité du pouvoir émissif et du pouvoir absorbant. Un grand thermomètre différentiel est construit de la façon suivante : un tube mince deux fois recourbé et contenant un liquide coloré est terminé à ses deux extrémités par deux renflements cubiques remplis d'air sec. Quand la température des deux cubes est la même, le liquide monte au même niveau dans les deux branches (fig. 289) sinon le liquide baisse du côté du cube le plus chaud (fig. 290).

La face *p* de l'un des cubes A est polie ; la face *c* du cube B est enduite de noir de fumée. Au milieu, entre les deux cubes et exactement au centre de l'intervalle, se trouve un troisième cube C, dont la face *p* est polie et la face *c* enduite de noir de fumée. On verse un liquide chaud dans ce cube central, si la face *c* enduite de noir de fumée du cube C est opposée à la face polie *p* du cube A, et la face *p* polie de C, opposée à la face *c* de B (fig. 289), le thermomètre n'accuse aucune différence de température parce que la face *p* de C qui émet peu de chaleur se trouve en présence de la face *c* de B qui en absorbe beaucoup, et la face *c* de C qui émet beaucoup de chaleur est exposée à la face *p* de A qui en absorbe peu. Les quantités de chaleur émise et absorbée par les deux faces *p* sont rigoureusement égales.

Si, au contraire, on expose la face *p* de C à la face *p* de A (fig. 290), et la face *c* de C à la face *c* de B, la quan-

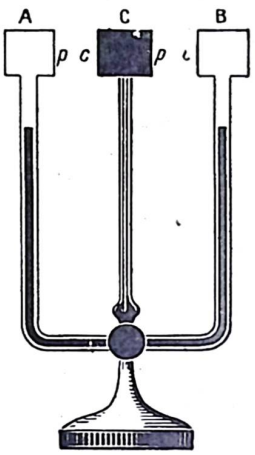


Fig. 289

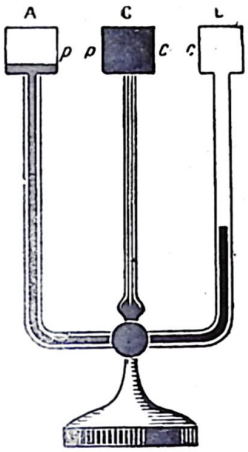


Fig. 290

tité de chaleur absorbée par le cube B est beaucoup plus grande que la quantité absorbée par A ; le thermomètre accuse une grande différence de température.

La figure 291 représente une autre forme de l'expérience. Un cylindre A rempli d'eau chaude est enduit

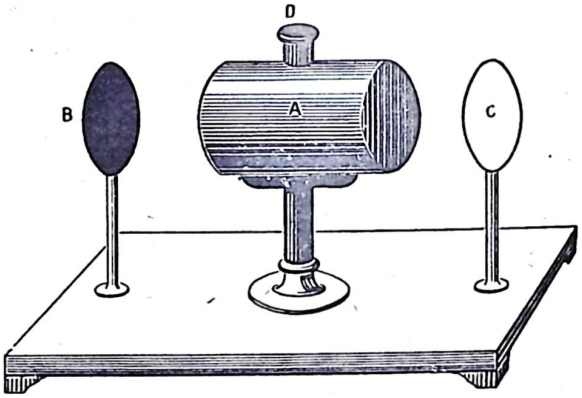


Fig. 291

de noir de fumée sur l'une de ses bases et argenté sur l'autre. Il est placé entre deux disques B et C, l'un B enduit de noir de fumée, l'autre C argenté. A chacun de ces disques est adapté un thermomètre indiquant la température, si le disque C est placé en face de la base argentée, l'élévation de la température est la même de part et d'autre.

ACOUSTIQUE

CHAPITRE PREMIER

ETUDE DU SON

TRANSMISSION, RÉFLEXION, ÉCHO

Nature du son. — Le son est un phénomène que nous percevons par l'intermédiaire de l'ouïe. Il n'existe pas de son pour un sourd, pas plus qu'il n'existe de lumière, à proprement parler, pour un aveugle.

Toutefois la sensation de son correspond à un phénophénomène naturel qui existe en lui-même, indépendamment de tout être vivant capable de le percevoir. C'est ce phénomène naturel que la physique se propose d'étudier. L'étude de la sensation qui lui correspond est plus particulièrement réservée, d'une part à la physiologie, d'autre part à la musique.

En général, quand nous entendons un son, un bruit quelconque, nous attribuons à ce bruit une origine, un siège bien défini. Par exemple si, en frappant contre un mur avec un marteau, on produit un son, on dit que le mur résonne : c'est le mur qui, dans notre pensée, est le siège du phénomène. Le fait est encore plus évident avec une cloche, un timbre, un diapason, un canon, etc. Nous disons que la cloche, le timbre, le mur, etc., sont des corps sonores.

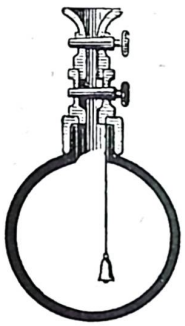


Fig. 292

Dans le langage courant, on entend par corps sonore, un objet capable de produire un son quand il est soumis à certaines actions. Pour nous, nous entendrons plus particulièrement par *corps sonore celui qui est en train de rendre un son.*

Soit un corps sonore quelconque, par exemple une clochette qu'on maintient continuellement agitée au bout d'un fil. Tant que cette clochette demeure dans l'air nous l'entendons, pourvu qu'on ne l'éloigne pas trop. Supposons qu'on la suspende dans un ballon de verre (fig. 292) rempli d'air et vissé sur le tuyau d'une machine pneumatique. Nous continuerons à entendre la clochette à travers la paroi de verre, pourvu que nous restions dans son voisinage.

Faisons le vide dans le ballon. Au fur et à mesure que la machine pneumatique raréfie l'atmosphère du récipient, le son rendu par la clochette devient de plus en plus faible et, finalement, quand le vide est très avancé, on ne l'entend plus. Si on laisse rentrer l'air progressivement dans le ballon, le son redevient distinct et de plus en plus fort, jusqu'à ce qu'il ait acquis son intensité primitive.

Dans cette expérience, nous voyons que l'air était indispensable à la production du son. Mais quel rôle a-t-il joué dans le phénomène? Puisque la clochette n'a cessé de s'agiter toujours de la même façon et que c'est elle, en définitive, qui est l'origine du son puisque sans elle ce dernier n'aurait par pris naissance, l'air n'a pu jouer que le rôle de transmetteur.

Nous pouvons conclure de cette première expérience qu'*un son ne saurait exister si un milieu transmetteur n'est interposé entre le corps sonore et notre oreille.*

Dans notre expérience, ce milieu c'est l'air. Si le milieu transmetteur est supprimé ou interrompu, comme il arrive quand on fait le vide dans le ballon, on cesse de percevoir le son.

Mais ce milieu n'est pas nécessairement l'air : on peut remplacer ce dernier par un gaz quelconque, par exemple : le gaz carbonique, l'hydrogène, etc. Les sons se propagent aussi dans les liquides, comme le prouve l'emploi des cloches sous-marines, et dans les solides, car un coup frappé contre un mur s'entend de l'autre côté du mur dans une pièce fermée où le son n'a pu être transmis par l'air. On sait que les mineurs entendent les coups frappés contre le roc dans une galerie voisine indépendante de celle où ils travaillent. Une expérience classique consiste à prendre entre les dents l'anneau d'une montre et à se boucher les oreilles, on entend le tic tac de la montre qui est transmis à l'oreille par les os de la mâchoire et du crâne.

Pour faire résonner un timbre, nous constatons qu'il faut le frapper d'un coup sec avec un objet dur et nous constatons aussi qu'il cesse de rendre un son si nous appuyons le doigt ou un objet mou à sa surface. Cette simple expérience nous autorise déjà à penser que la sonorité d'un corps est due à un mouvement particulier de ce corps, mouvement déterminé par le choc et annulé par le contact avec un objet mou. Mais le phénomène devient encore plus net si nous l'étudions sur une tige

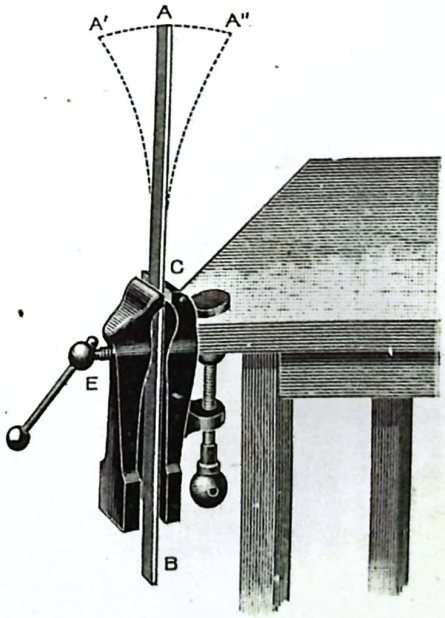


Fig. 293

métallique flexible, assujettie dans un étau par l'une de ses extrémités et libre par l'autre, ou sur une corde de violon tendue entre deux points fixes. Dans ces conditions, pourvu que nous choisissions une tige métallique ou une corde assez longue, nous *voyons* le mouvement du corps sonore : il suffit de tirer de côté la tige ou la corde avec le doigt, et de les lâcher brusquement, pour leur voir prendre un mouvement de va-et-vient plus ou moins rapide, c'est-à-dire pour les voir *entrer en vibration* ; en même temps on perçoit un son. A la vérité, quand la vibration est très rapide, on ne distingue plus nettement les positions successives de l'objet, celui-ci paraît seulement plus épais, plus large, prolongé de chaque côté par une zone transparente (fig. 294). Cela vient de ce que notre œil conserve les impressions pendant un dixième de seconde environ : lorsque la lame ou la corde vibrante abandonnent une position pour y revenir après une oscillation, l'impression visuelle n'a pas le temps de s'effacer dans l'intervalle : il s'ensuit que nous voyons en même temps l'objet dans toutes ses positions successives.

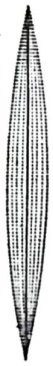


Fig. 294

C'est par suite de ce dernier phénomène que nous ne voyons pas vibrer un objet sonore quand la vibration est très rapide et que ses positions extrêmes sont très voisines l'une de l'autre ; tels les cas du timbre, du verre de cristal qu'on fait résonner, d'une corde de violon très tendue, d'un diapason. Mais, d'une manière ou d'une autre, on peut toujours démontrer expérimentalement *qu'un corps sonore est animé d'un mouvement vibratoire.*

Pour le diapason, par exemple, on peut fixer avec un peu de colle à l'extrémité d'une des branches de l'instrument une barbe de plume, et placer cette dernière en contact avec une feuille de papier enduite de noir de fumée qu'on fait déplacer d'un mouvement uniforme devant le diapason, perpendiculairement au plan des deux branches parallèles. On peut coller cette feuille sur un cylindre, en adoptant un dispositif analogue à celui qui a été employé dans la machine du général Morin pour déterminer les lois de la chute des corps. Ce dispositif permettra d'*enregistrer* les vibrations invisibles, ou à peu près, du diapason, sous la forme d'une courbe sinueuse dessinée sur la feuille enduite

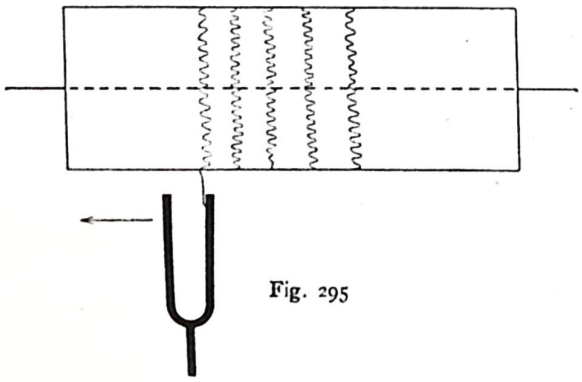


Fig. 295

de noir de fumée, par l'extrémité de la barbe de plume dans les mouvements d'allée et venue de la branche du diapason (fig. 295).

On conçoit aisément qu'un dispositif analogue pourrait être appliqué à l'étude d'autres corps sonores : corde , timbre, etc.

On appelle plus particulièrement *vibration le mouvement d'allée et venue d'un corps vibrant*, c'est-à-dire le mouvement que fait ce corps partant d'une certaine position initiale pour revenir, une première fois, à cette même position.

La méthode d'enregistrement que nous venons d'indiquer permet de compter le nombre de vibrations auxquelles un corps est soumis en un espace de temps donné, soit une seconde. Supposons par exemple, qu'on fasse tourner le cylindre enregistreur pendant 10 secondes et que la courbe tracée présente 3000 sinuosités, on saura que le diapason a fait 3000 vibrations en 10 secondes et par conséquent $\frac{3\,000}{10}$ en une seconde, ou 300 vibrations.

En étudiant les corps vibrants, on constate bientôt qu'il ne suffit pas qu'un corps vibre pour émettre un son, il faut que la rapidité du mouvement vibratoire (*ou le nombre des vibrations en une seconde*) soit comprise entre certaines limites : *au moins* 20 *vibrations et au plus* 23000 *vibrations.*

Ainsi, de ce qui précède, nous pouvons conclure que le son *est dû à un mouvement vibratoire et qu'il suppose l'existence d'un milieu capable de le transmettre.* (Un tel milieu est dit milieu élastique).

Transmission du son. — La transmission du son n'est *pas instantanée.* Si l'on regarde d'une distance de deux ou trois cents mètres, un ouvrier frapper à coups de marteau sur une enclume ou un objet sonore quelconque, on voit le marteau en contact avec cet objet avant d'entendre le bruit du choc. Quand ce bruit parvient à notre oreille, le marteau est déjà relevé pour frapper un autre coup. *Le son a donc mis un certain temps pour nous parvenir.*

Les exemples de ce phénomène sont fréquents : on voit la fumée d'un coup de fusil avant d'entendre le bruit de la détonation ; on voit l'éclair avant d'entendre le tonnerre ; quand on observe de loin des joueurs de ballon, on n'entend les coups des joueurs qu'après avoir vu lancer le ballon.

La vitesse de propagation du son a été déterminée en 1738 par l'Académie des sciences et, avec plus d'exactitude, en 1822, par le Bureau des longitudes. La méthode était d'ailleurs la même dans les deux séries d'expériences.

Un canon étant placé en une station A, des observateurs occupant une station B, à une distance d connue, observaient la lumière et le bruit d'un coup de canon tiré en A. La vitesse de la lumière pouvant être considérée comme infiniment grande, l'intervalle de temps écoulé, entre l'observation de la lumière du coup et celle du bruit, était le temps t que le son avait mis à parcourir la distance d; t étant mesuré en secondes et d en mètres, la vitesse du son dans l'air, c'est-à-dire le nombre de mètres parcourus par le son en une seconde, est :

$$v = \frac{d}{t}$$

Ces études ont permis de constater tout d'abord que, la pression et la température restant invariables, le quotient $\frac{d}{t}$ est constant, quelle que soit la valeur de d. Donc *le mouvement de propagation du son est un mouvement uniforme.*

On a reconnu d'autre part que *la vitesse du son n'est pas modifiée par le vent* et *qu'elle croît avec la température.*

A la température de 15° centésimaux, la vitesse de propagation *du son est de* 340 *mètres par seconde* ; à 0°, elle est de 331 mètres.

Les expériences du Bureau des longitudes furent effectuées entre les hauteurs de Villejuif et de Montlhéry.

Des expériences analogues ont été faites par Sturm et Colladon, en 1827, pour déterminer la vitesse du son dans l'eau. Ces deux savants opéraient sur le lac de Genève. Une cloche était suspendue sous l'eau en une station A ; un dispositif spécial permettait d'enflammer un petit tas de poudre au moment précis où un

marteau s'abattait sur la cloche (fig. 296). Un observateur placé en B, à une distance connue de la station A, observait la lumière produite par la déflagration de la poudre, et le son de la cloche au moyen d'un cornet acoustique plongé dans le lac. Le temps écoulé entre les deux observations était le temps que le son avait mis à parcourir dans l'eau la distance A B.

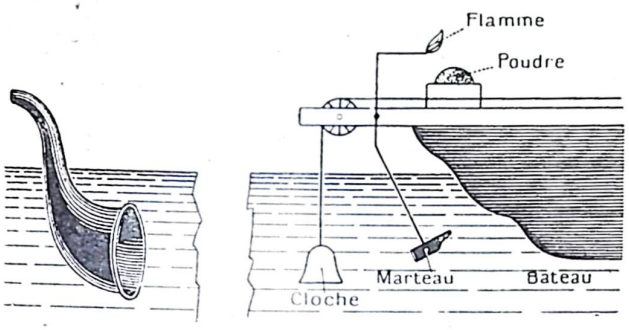


Fig. 296

Les observateurs trouvèrent que la vitesse de propagation du son dans *l'eau était de* 1.435 *mètres par seconde, à la température de* 8° *centésimaux.*

Enfin Biot a déterminé la vitesse de propagation du son dans la fonte de fer. Profitant de l'établissement d'une conduite de fonte de près d'un kilomètre de longueur (951 m. 25), Biot faisait frapper un coup sur un timbre fixé à une extrémité de la conduite. A l'autre bout, un observateur appliquait une oreille contre la paroi de la conduite et entendait, d'une part, le son transmis par la fonte ; d'autre part, le son transmis par l'air. Le son transmis par l'air parvenait à l'observateur 2,5 secondes après le son transmis par la fonte. La vitesse de propagation du son dans l'air étant de 340 mètres, si on représente par x la vitesse de propagation dans la fonte, on a :

$$\frac{951{,}25}{340} - \frac{951{,}25}{x} = 2{,}5 \qquad (1)$$

$\frac{951{,}25}{340}$ étant le temps que met le son à parcourir 951 m. 25 dans l'air ; et $\frac{951{,}25}{x}$ le temps que met le son à parcourir 951 m. 25 dans la fonte. On trouve ainsi que la vitesse du son dans la fonte est environ neuf fois plus grande que dans l'air.

Nous donnons ci-dessous la vitesse de propagation du son dans différents gaz, liquides et solides. Ces nombres ont été obtenus par des méthodes diverses.

Vitesse de propagation du son dans les gaz à 0°.

Air	331
Oxygène	315
Oxyde de carbone	335
Hydrogène	1261
Anhydride carbonique	260
Chlore	205

Vitesse de propagation du son dans les liquides.

	Température	
Eau de rivière (Seine)	13° C	1 428 m.
	30	1 519 —
	60	1 714 —
Eau de mer (artificielle)	20	1 444 —
Solution de sel marin	18	1554 —
— chlorure de calcium	23	1 967 —
— sulfate de sodium	20	1 573 —
— carbonate de sodium	22	1 584 —
— nitrate de sodium	21	1 659 —
Alcool ordinaire	20	1 278 —
Alcool absolu	23	1 167 —
Essence de térébenthine	24	1 204 —
Ether sulfurique	0	1 151 —

Vitesse de propagation du son dans les métaux.

	20° C	100° C	200° C
Plomb	1 221	1 197	
Or	1723	1 709	1 702
Argent	2 591	2 623	2 461
Platine	2 671	2 556	2 448
Cuivre	3 544	3 273	2 936
Fil de fer	4 887	5 068	
Acier fondu	4 966	4 894	4 759
Fil d'acier (anglais)	4 687	5 212	4 967
Fil d'acier	4 855	4 982	

Vitesse de propagation du son dans le bois.

	Dans les sens des fibres	Transversalement aux fibres	Annulairement
Pin	3 303	1 397	789
Hêtre	3 222	1 826	1 407
Chêne	3 824	1 526	1 281
Erable	3 072	1 529	1 030
Orme	4 095	1 413	1 007
Peuplier	4 257	1 394	1 043
Sycomore	4 436	1 489	1 129
Sapin	4 611	1 328	779
Aune	4 638	1 361	1 037
Frêne	4 640	1 384	1 255
Acacia	4 686	14 66	1 344
Tremble	5 053	1 302	905

La transmission du son dans un corps solide dépend de l'arrangement des molécules de ce corps. Dans le bois, par exemple, on voit que le son se transmet plus rapidement dans le sens des fibres que perpendiculairement aux fibres. On sait aussi que le son ne se transmet que très difficilement dans les corps mous, dans les étoffes ; on utilise cette propriété pour étouffer le son dans les appartements.

Etude particulière de la transmission du son par l'air. — Supposons *qu'on fasse vibrer une lame à l'entrée d'un tuyau cylindrique indéfini, rempli d'air.*

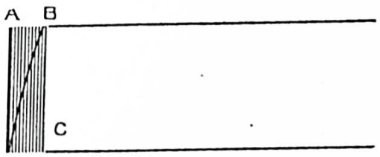


Fig. 297

Supposons que la lame, partant d'une position initiale A (fig. 297), se rapproche de l'intérieur du tube en passant à une nouvelle position B. En se mouvant de A en B, la lame a comprimé l'air devant elle, de sorte que, au moment où elle atteint sa position extrême B, il existe

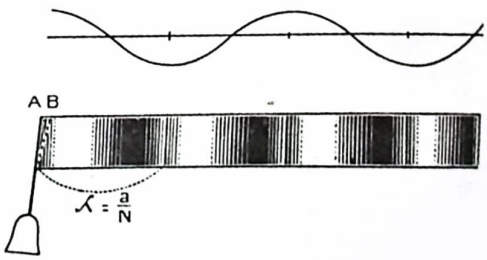


Fig. 298

à l'entrée du tube une tranche *d'air comprimé, c* (fig. 298). Mais, à partir de l'instant où la lame a commencé à se mouvoir, chassant devant elle les molécules d'air, l'air comprimé a tendu à reprendre son état d'équilibre primitif en chassant devant lui les molécules d'air voisines, c'est-à-dire que la compression s'est transmise

de proche en proche et justement avec la vitesse de propagation du son. Au moment où la lame arrive en B, la tranche comprimée occupe donc dans le tube une certaine longueur qu'il est aisé de calculer, connaissant la vitesse de propagation du son dans l'air et le nombre de vibrations à la seconde de la lame.

En effet, soit n le nombre de vibrations par seconde, et a le nombre de mètres parcourus par le son en une seconde. Le mouvement de A en B de la lame est une demi-vibration, il dure

$$\frac{1}{2n} \text{ de seconde}$$

et, pendant ce temps, la compression se propage à une distance

$$\frac{a}{2n}$$

La tranche d'air comprimé de longueur $\frac{a}{2n}$ s'appelle une demi-onde comprimée.

La lame vibrante étant arrivée dans la position B revient vers A et, dans ce mouvement, elle dilate l'air derrière elle à l'entrée du tuyau cylindrique. Il se formera donc à l'entrée de ce tuyau une demi-onde dilatée d de longueur $\frac{a}{2n}$, tandis que la demi-onde comprimée aura progressé à la distance $\frac{a}{2n}$. La réunion d'une demi-onde comprimée et de la demi-onde dilatée qui lui succède constitue une onde sonore. La longueur d'onde λ est donc donnée par la formule :

$$\lambda = \frac{a}{n}$$

La lame continuant à vibrer on voit que les ondes se succèderont indéfiniment dans le tube, une demi-onde comprimée étant toujours suivie d'une demi-onde dilatée. Au bout d'une seconde, il y aura donc dans le tube n demi-ondes comprimées c, c', c'' etc., et n demi-ondes dilatées d, d', d'', etc., suivant le schéma :

$$d^n\ c^n\ d^{n-1}\ c^{n-1} \ldots d''\ c''\ d'\ c'\ d\ c$$

la première onde $c\ d$ produite se trouvant naturellement au point le plus éloigné de la lame vibrante.

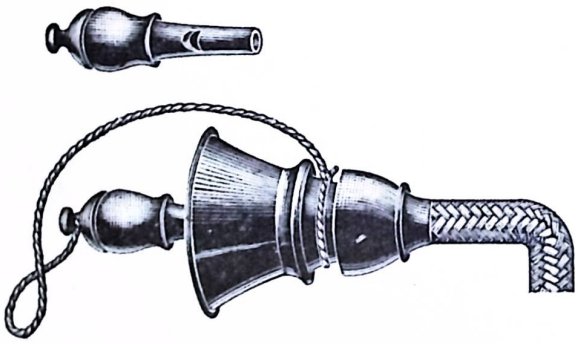


Fig. 299

Dans un tuyau cylindrique, comme le volume de la tranche d'air comprimé ou dilaté reste constant, la pression de cette tranche reste constante aussi, quelle que soit sa distance à la lame vibrante. Le son qui est dû à cette succession de compressions et de dilatations *ne s'affaiblit donc pas, du moins en théorie, au fur et à mesure qu'il est perçu à une plus grande distance de son origine. En pratique il s'atténue peu à peu à cause du frottement de l'air contre la paroi du tube.*

Cependant le son se conserve assez bien dans un tube de ce genre pour qu'on puisse, par ce moyen, transmettre la voix à d'assez grandes distances. Tout le monde a eu l'occasion de voir des *tuyaux acoustiques* (fig. 299) ou de se servir de ces appareils : l'appareil est un simple tube métallique de 2 centimètres de diamètre environ qui se rend, au besoin par des détours, d'une pièce dans une autre, d'un étage d'une maison à un autre étage. Le tube est terminé à ses deux extrémités par des cornets devant lesquels on place la bouche pour parler ou qu'on applique à l'oreille pour écouter.

Le phénomène de la transmission n'est plus aussi simple lorsque le son se propage dans un milieu indéfini. Cette fois, chaque demi-onde comprimée ou dilatée se propage en même temps dans tous les sens.

A la fin de la première demi-vibration, la demi-onde correspondante occupe un volume sphérique ayant pour centre le corps sonore, et pour rayon la demi-longueur d'onde $\frac{a}{2n}$. Lorsqu'une fraction de seconde égale à $\frac{1}{2n}$ se sera écoulée, cette demi-onde occupera le volume compris entre deux sphères de même centre ayant pour rayon l'une $\frac{a}{n}$, et l'autre $\frac{a}{2n}$. Après une nouvelle fraction de seconde $\frac{1}{2n}$, elle occupera le volume compris entre deux sphères de rayons $\frac{a}{2n}$ et $\frac{3a}{2n}$, et ainsi de suite.

Ce volume se répartit sur une surface sphérique. Si nous appelons E la quantité d'énergie de la lame vibrante, à une distance d de la source sonore cette énergie se repartit sur une surface $4\pi d^2$. Chaque centimètre carré de cette surface reçoit donc une quantité d'énergie

$$e = \frac{E}{4\pi d^2}$$

De même à une distance d' elle est $e' = \frac{E}{4\pi d'^2}$

On a donc $\frac{e}{e'} = \frac{d'^2}{d^2}$

Les quantités d'énergie de son perçues par l'oreille sont inversement proportionnelles aux carrés des distances du corps sonore à l'oreille.

Les ondes sonores qui prennent naissance dans l'atmosphère par suite de la vibration d'un corps peuvent être comparées aux arches qui se forment à la surface d'une eau tranquille quand on y jette une pierre. On sait que ces cercles deviennent de moins en moins nets, au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de leur centre d'origine.

Pour éviter la perdition du son dans toutes les directions, on emploie souvent le *porte-voix*. Cet appareil consiste en une sorte de cône très allongé, au sommet duquel est placée une embouchure ; il oblige les sons de la parole à se propager dans un champ limité et leur donne ainsi plus de portée dans ce champ en les empêchant de s'étendre dans le reste de l'espace. Inversement, on construit des *cornets acoustiques* qui ont pour but de recueillir les vibrations sonores dans un espace beaucoup plus grand que le pavillon de l'oreille, et de les concentrer sur le tympan.

Réflexion du son, écho. — Supposons qu'un corps sonore soit placé en O à une certaine distance d devant une surface plane P, un mur par exemple. Supposons qu'une tranche d'air comprimé correspondant à une demi-vibration du corps sonore soit parvenue à la distance d. A ce moment, l'air, comprimé contre le mur et ne pouvant continuer à se détendre en avant pour transmettre sa compression à d'autres tranches d'air, se détendra dans la seule direction qui lui est ouverte, c'est-à-dire en sens inverse de son mouvement primitif.

Autrement dit, cette demi-onde comprimée *se réfléchira* sur le mur, et il en sera de même des demi-ondes successives, comprimées ou dilatées. Ce phénomène

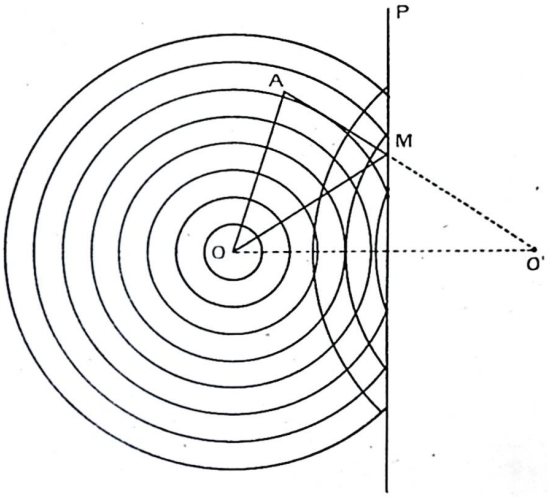


Fig. 300

est celui de la *réflexion du son*. L'oreille placée en A recevra directement le son suivant OA et indirectement suivant O'MA comme s'il émanait du point O' symétrique de O par rapport à la surface plane réfléchissante P. Il peut y avoir *écho*.

Comme toutes les impressions de nos sens, les impressions auditives persistent un certain temps, environ un dixième de seconde. C'est grâce à cette persistance que le phénomène de l'écho est relativement rare.

En effet, sans elle nous devrions entendre répéter le son chaque fois que nous sommes à portée d'un corps sonore et d'une surface plane capable de réfléchir les ondes émanées de ce corps, comme cela se produit dans les pièces de nos appartements : notre oreille reçoit d'abord les ondes émanées directement du corps, puis celles qui ont été réfléchies par la surface.

Mais, en un dixième de seconde, le son parcourt $\frac{340}{10} = 34$ mètres dans l'air. Si, par conséquent, le son réfléchi n'a pas au moins 34 mètres de plus à faire, pour parvenir à notre oreille, que le son qui nous parvient directement, nous ne le distinguons pas de *celui-ci qui nous paraît seulement renforcé, plus intense* : on dit qu'il y a *phénomène de résonance*.

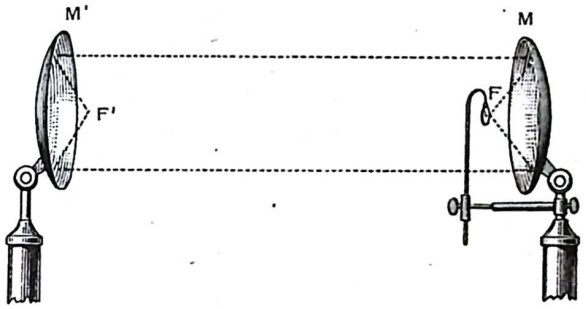


Fig. 301

Pour que le son réfléchi ait au moins 34 mètres de plus à faire que le son direct, il faut que le corps sonore soit au moins à 17 mètres de la surface réfléchissante, l'onde ayant alors 17 mètres à parcourir pour aller heurter la surface et 17 mètres encore à parcourir pour revenir à son point de départ, ce qui fait, en somme, 34 mètres.

A partir de cette limite, le son direct et le son réfléchi sont distincts pour un auditeur convenablement placé, *il y a écho*. Et l'écho devient d'autant plus net que cette limite est plus dépassée et que le son réfléchi arrive plus tard après le son direct. Pour vérifier que la réflexion suit les mêmes lois que la lumière, on peut employer les miroirs conjugués (fig. 301). Au foyer F' du miroir concave M' l'oreille perçoit le tic-tac d'une montre placée au foyer F du miroir concave M.

CHAPITRE II

QUALITÉS DU SON

Bruit et son musical. — On distingue souvent deux catégories de sons : les *bruits* et les *sons musicaux*.

Cette distinction est assez superficielle. Nous entendons *généralement par bruit, un son qui ne nous procure aucune sensation agréable et, par son musical, un son qui flatte notre oreille*. Mais, en réalité, un son ne devient musical, à proprement parler, que s'il est associé à d'autres sons de même caractère avec lesquels il présente certains rapports simples.

Cela est si vrai qu'un son, considéré d'ordinaire comme un bruit, devient musical, si on le place dans une succession de bruits de même caractère présentant entre eux certains rapports. Les harmonicas improvisés par les clowns avec toute sorte d'objets, en apparence incompatibles avec la musique, en sont la preuve.

Qualité des sons. — Les sons présentent trois qualités : l'*intensité*, la *hauteur* et le *timbre*.

L'intensité est la qualité que possède le son d'impressionner plus ou moins fortement l'oreille.

La hauteur est la qualité qui fait distinguer un son grave d'un son aigu, et qui joue un rôle essentiel dans la musique.

Le timbre est la qualité qui permet de distinguer deux sons d'égale hauteur mais qui proviennent de deux instruments différents, de deux voix différentes, etc. Par exemple, tout le monde distingue au premier instant une même note rendue par un violon ou par une flûte, par une voix de femme ou par une voix d'homme, etc.

Etude de l'intensité. — L'intensité d'un son dépend de la valeur de la différence de pression entre les demi-ondes comprimées et les demi-ondes dilatées. En reprenant l'exemple que nous avons cité plus haut, nous remarquerons que la variation de pression produite par le déplacement A' A" de la lame vibrante AB sera d'autant plus grande que ce déplacement sera plus grand.

On peut énoncer la loi de la manière suivante :

L'intensité d'un son dépend de l'amplitude des vibrations et de la distance du corps sonore à l'oreille.

Etude de la hauteur. — En employant la méthode d'enregistrement indiquée plus haut au moyen du cylindre enduit de noir de fumée, on constate que la *hauteur d'un son dépend du nombre des vibrations.*

A un son donné correspond toujours le même nombre de vibrations, quelle que soit du reste son intensité.

On peut mesurer exactement le nombre de vibrations correspondant à un son donné par la méthode d'enre-

gistrement dont nous venons de parler ; mais il existe aussi d'autres méthodes plus anciennes, en particulier celle *des roues dentées de Savart* et celle de la *sirène* inventée par *Cagniard de Latour*.

L'appareil de Savart se compose essentiellement d'un bâti *a* (fig. 302) sur lequel sont montées une roue à manivelle *b* servant à actionner l'appareil, et une roue dentée *c* reliée à la première par une courroie *x*. La roue dentée tourne devant une lamelle flexible contre laquelle les dents viennent heurter successivement, déterminant ainsi un mouvement vibratoire d'autant plus rapide que la roue tourne plus vite.

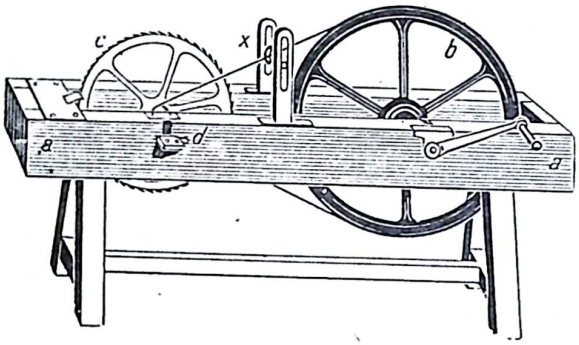


Fig. 302

Le nombre de tours de la roue est enregistré par un petit compteur *d*.

Pour mesurer la hauteur d'un son, on procède de la manière suivante :

On fait tourner l'appareil au moyen de la roue motrice *b* et on règle la vitesse jusqu'à ce que la roue dentée rende un son de même hauteur que le son à étudier, c'est-à-dire : à l'*unisson* de ce dernier. A ce moment, on déclenche un ressort qui met la roue dentée en prise sur le compteur et on note le temps ; on maintient l'unisson le plus longtemps possible, puis on déclenche le compteur en notant le temps. On sait que l'appareil a fait *n* tours de roue en *t* secondes, le nombre *d* des dents de la roue étant connu d'autre part, on sait que la lamelle a fait *n d* vibrations en *t* secondes. Le nombre de vibrations correspondant au son donné est donc :

$$\frac{n\,d}{t}$$

La *sirène* (fig. 303) est un appareil un peu plus compliqué.

Il se compose essentiellement de deux plaques cylindriques, ou disques, percées de trous, A et B, dont la disposition est suffisamment indiquée par les trois figures. Ces deux disques comportent un même nombre de trous qui se correspondent. Ces trous ont une forme cylindrique, et l'axe de chacun d'eux est perpendiculaire à un rayon du disque, mais oblique par rapport au plan de ce disque, tous les trous du disque supérieur étant obliques dans un certain sens, et tous ceux du disque inférieur étant obliques en sens contraire, de sorte qu'un trou *n* du disque supérieur et un trou *m* du disque inférieur, placés l'un en face de l'autre, représentent les deux branches d'un V très ouvert. Le disque inférieur est fixe, tandis que le disque supérieur est mobile autour de son centre, parallèlement au disque inférieur.

Ce dernier forme le couvercle d'une boîte O mise en communication avec une soufflerie. Quand on insuffle de l'air en O, cet air s'échappe par les trous *m*, puis par les trous *n*, mais en passant de *m* en *n*, le courant éprouve un brusque changement de direction et par réaction, exerce une poussée sur le disque supérieur dans un sens perpendiculaire aux rayons. Le disque A se met à tourner, et il tourne d'autant plus vite que la poussée est plus énergique, c'est-à-dire que le courant d'air est plus intense.

Supposons pour un instant que le disque supérieur n'ait qu'un trou, tout ce que nous venons de dire au sujet de la propulsion du disque subsiste. Imaginons donc que A se mette à tourner ; le trou *n* cesse de coïncider avec le trou *m* et vient se placer en face d'une partie pleine de B, dans l'intervalle de deux trous. Le courant d'air est intercepté. Mais le disque A continuant à tourner, grâce à la vitesse acquise, le trou *n* vient en coïncidence avec le trou suivant de B, l'air passe de nouveau et communique une nouvelle impulsion à A. Le phénomène se répète ainsi avec une succession de passages et d'interruptions du courant d'air, à mesure que le trou *n* vient se placer en face d'un trou du disque B, et qu'il l'abandonne. Chacun de ces passages brusquement interrompu est comparable à une petite explosion qui ébranle l'atmosphère en déterminant une demi-onde comprimée. La succession de semblables explosions engendre un son, dès que leur nombre dépasse vingt à trente à la seconde. Le son d'abord très grave devient de plus en plus aigu au fur et à mesure que la vitesse de rotation du disque A augmente.

Nous avons supposé, pour la simplicité du raisonnement, que le disque A n'avait qu'un trou. Mais nous avons dit, en décrivant la sirène, que les deux disques A et B avaient le même nombre de trous. Cette circonstance ne modifie pas notre raisonnement, car, au moment où l'un des trous de A est en coïncidence avec un des trous de B, tous les autres trous des deux disques sont en coïncidence et l'air passe dans tous. Au moment où l'un des trous de A est en face d'une partie pleine de B dans l'intervalle de deux trous, tous les autres trous de A sont obstrués par des parties pleines de B et l'air est intercepté partout à la fois. Il y a donc un même nombre de passages et d'interruptions que si le disque A n'avait qu'un trou. Le nombre de vibrations par seconde et, par conséquent, la *hauteur* du son restent les mêmes, seulement l'*intensité* est plus grande.

Pour étudier un son au moyen de la sirène, on procède tout à fait comme avec la roue dentée de Savart. On règle la force du courant d'air amené par la soufflerie jusqu'à ce que la sirène parle à l'unisson du son à étudier. A ce moment, on note le temps et on engrène sur la vis sans fin P, entraînée par l'axe T, la roue dentée d'un compteur automatique. Cette roue compte les tours : tous les cent tours, elle pousse d'une dent

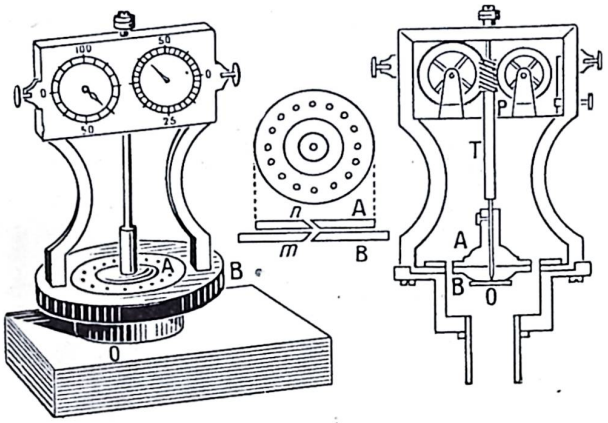


Fig. 303

une autre roue dentée qui compte les centaines de tours. on maintient l'unisson le plus longtemps possible, puis on arrête le compteur en dégageant la vis sans fin de l'engrenage, et on note le temps.

On connaît ainsi le temps pendant lequel le son a persisté, le nombre de tours *n* du disque A ; connaissant d'autre part le nombre de trous *r* du disque, on sait qu'il s'est produit *rn* vibrations en *t* secondes et, par conséquent, le nombre de vibrations par seconde est

$$\frac{r\,n}{t}$$

L'étude de la hauteur des sons au moyen de ces diverses méthodes démontre qu'*un son est d'autant plus aigu que le nombre de vibrations par seconde, qui lui correspond, est plus considérable.*

Intervalles musicaux. — *On appelle intervalle de deux sons le rapport du nombre de vibrations par seconde du plus aigu au nombre de vibrations par seconde du plus grave.*

Si l'on étudie les intervalles des sons usités dans la musique, c'est-à-dire des sons qui composent la gamme, on constate que ces *intervalles musicaux* sont représentés par des fractions relativement simples, et d'autant plus simples que les deux sons considérés forment une consonance plus parfaite.

L'intervalle d'octave par exemple est justement égal à 2.

Nous allons étudier la gamme. La gamme majeure employée dans notre musique moderne se compose de sept sons ou *notes* :

ut *ré* *mi* *fa* *sol* *la* *si* *ut*

Si on représente par 1 le nombre de vibrations de la première note *ut*, les intervalles d'*ut* aux notes successives de la gamme seront :

ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

On se rend mieux compte de la succession de ces divers intervalles en multipliant tous les nombres par le même facteur 24, ce qui revient à représenter par 24 le nombre de vibrations correspondant à *ut*.

ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut*
24	27	30	32	36	40	45	48

On voit que les rapports les plus simples dans cette succession sont ceux qui correspondent à l'intervalle d'octave :

$$ut \qquad ut = 2$$

et à l'intervalle de quinte :

$$ut \qquad sol = \frac{3}{2}$$

Ce sont en effet ces sons qui donnent la consonance la plus parfaite.

Si, maintenant, au lieu de considérer les intervalles des différentes notes de la gamme à la première, *ut*, qui porte le nom de *tonique*, on considère les intervalles de chaque note à celle qui précède immédiatement, on trouve les nombres suivants :

ut_1	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	ut_2
$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	

Ces intervalles reçoivent des noms particuliers qu'il faut connaître :

ut_1 à *ré*	$\frac{9}{8}$	ton majeur.
ré à *mi*	$\frac{10}{9}$	ton mineur.
mi à *fa*	$\frac{16}{15}$	demi-ton.
fa à *sol*	$\frac{9}{8}$	ton majeur.
sol à *la*	$\frac{10}{9}$	ton mineur.
la à *si*	$\frac{9}{8}$	ton majeur.
si à ut_2	$\frac{16}{15}$	demi-ton.

Nous comparerons plus aisément ces nombres en les réduisant au même dénominateur 360. Les intervalles sont alors exprimés par

ut_1	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	ut_2
$\frac{405}{360}$	$\frac{400}{360}$	$\frac{384}{360}$	$\frac{405}{360}$	$\frac{400}{360}$	$\frac{405}{360}$	$\frac{384}{360}$	

$\frac{405}{360}$ ton majeur.

$\frac{400}{360}$ ton mineur.

$\frac{384}{360}$ demi-ton.

Ces nombres permettent de calculer le nombre de vibrations correspondant à une note quelconque de la gamme, connaissant le nombre de vibrations de la tonique.

Dans les orgues ordinaires et dans les plus grands pianos, les sons comprennent 7 octaves de l'ut_{-1} correspondant à 32,625 vibrations, à l'ut_7 correspondant à 4176 vibrations à la seconde. Dans certaines orgues, on ajoute une octave à la basse, descendant jusqu'à 16,3125 vibrations par seconde. Mais des notes aussi graves ne donnet plus guère d'impression musicale, car elles sont à la limite des sons perceptibles et beaucoup de personnes ne les entendent plus. Quoi qu'il en soit, on peut représenter dans le tableau suivant l'ensemble des octaves usitées dans la musique moderne :

Grandes orgues, pédales	ut_{-2}	16,3125	vibrations par sec.
Clavier du piano	ut_{-1}	32,625	—
	ut_1	65,25	—
	ut_2	130,5	—
	ut_3	261	—
	ut_4	522	—
	ut_5	1044	—
	ut_6	2088	—
	ut_7	4176	—
Petite flûte	$ré_7$	4698	—

Au moyen de ce tableau nous pouvons calculer le nombre de vibrations d'une note quelconque, le *la* de la 5e octave par exemple. L'intervalle de *ut* à *la* étant $\frac{5}{3}$ le nombre de vibrations d'ut_4 étant d'autre part de 522, le nombre de vibrations de la_4 est :

$$522 \times \frac{5}{3} = 870$$

Du reste les nombres de vibrations des octaves successives du premier *ut*, sont entre eux comme les nombres 2, 4, 8, etc., c'est-à-dire comme les puissances successives de 2. Il suffit donc de connaître le nombre de vibrations du premier *ut* ou d'une seule note quelconque de la suite des gammes pour en déduire les nombres de vibrations de toutes les autres notes.

D'après les conventions adoptées en France, l'*ut* grave du violoncelle, qu'on représente par ut_1, correspond à 65,25 vibrations par seconde. Le diapason normal donne la note la_3, c'est-à-dire le *la* de la troisième octave à partir de ut_1. Ce la_3 *correspond à 435 vibrations par seconde.*

Construction d'une gamme ayant une note quelconque pour tonique. — Les gammes usitées en musique ne commencent pas nécessairement par un *ut*. Toutes les personnes qui ont étudié tant soit peu la musique savent qu'ils existe des tons différents et qu'on peut jouer par exemple la gamme de *sol*, la gamme de *ré*, etc.

Supposons qu'on veuille construire la gamme de *sol*, en prenant pour tonique la quinte d'*ut*. Les intervalles se présenteront de la manière suivante :

sol

$\frac{10}{9}$ ton.

la

$\frac{9}{8}$ ton.

si

$\frac{16}{15}$ demi-ton.

ut

$\frac{9}{8}$ ton.

ré

$\frac{10}{9}$ ton.

mi

$\frac{16}{15}$ demi-ton.

fa

$\frac{9}{8}$ ton.

sol.

Si nous ne tenons pas compte de la distinction des tons majeurs et des tons mineurs qui, ainsi que nous le verrons, est peu sensible, nous remarquons que les intervalles des six premiers degrés de cette gamme sont les mêmes que pour la gamme d'*ut*. La succession est en effet : *demi-ton, ton,* au lieu de : *ton, demi-ton.*

Pour rendre à l'intervalle *mi-fa* la valeur d'un ton, soit $\frac{10}{9}$, il faut multiplier le numéro de vibrations de fa par un nombre x que donne l'équation :

$$\frac{16}{15} \times x = \frac{10}{9}$$

on en tire :

$$x = \frac{10 \times 15}{16 \times 9}$$

$$x = \frac{25}{24}$$

La *nouvelle note* fa *ainsi obtenue prend le nom de* fa dièse *et s'écrit* fa ♯. L'intervalle de *fa* ♯ à *sol* se trouve ainsi multiplié par $\frac{24}{25}$ ce qui fait :

$$\frac{9}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$$

La fraction $\frac{27}{25}$ est bien voisine de $\frac{16}{15}$. Il est facile de s'en rendre compte en réduisant ces deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{27}{25} = \frac{27 \times 3}{25 \times 3} = \frac{81}{75} \qquad \frac{16}{15} = \frac{16 \times 5}{15 \times 5} = \frac{80}{75}$$

Leur rapport est :

$$\frac{81}{75} \times \frac{75}{80} = \frac{81}{80}$$

qui ne diffère de l'unité que de $\frac{1}{80}$. Cette différence, nommée **comma**, est insensible à l'oreille. Ainsi la gamme se trouve rétablie avec les mêmes intervalles que la gamme d'ut.

ut — *sol*

$\frac{9}{8}$ — $\frac{10}{9}$ ton.

ré — *la*

$\frac{10}{9}$ — $\frac{9}{8}$ ton.

mi — *si*

$\frac{16}{15}$ — $\frac{16}{15}$ demi-ton.

fa — *ut*

$\frac{9}{8}$ — $\frac{9}{8}$ ton.

sol — *ré*

$\frac{10}{9}$ — $\frac{10}{9}$ ton.

la — *mi*

$\frac{9}{8}$ — $\frac{10}{9}$ ton.

si — *la* ♯

$\frac{16}{15}$ — $\frac{16}{15}$ demi-ton.

ut — *sol*

Seulement nous voyons que les tons majeurs $\left(\frac{9}{8}\right)$ et les tons mineurs $\left(\frac{10}{9}\right)$ ne sont pas placés de la même façon. Mais cette différence n'est pas sensible, car le ton majeur et le ton mineur ne diffèrent que d'un comma, comme le prouve le calcul suivant :

$$\frac{9}{8} = \frac{9 \times 9}{8 \times 9} = \frac{81}{72} \qquad \frac{10}{9} = \frac{10 \times 8}{9 \times 8} = \frac{80}{72} \qquad \frac{81}{72} \times \frac{72}{80} = \frac{81}{80}$$

Ayant construit la gamme de *sol*, si nous voulons construire la gamme de *ré*, ayant pour tonique la *quinte* de *sol*, il nous suffira de *diéser* le septième degré *ut* de la gamme de *sol*, comme nous avons diésé le septième degré *fa* de la gamme d'*ut* pour former la gamme de *sol* (quinte d'*ut*).

ut — *sol* — *ré*

$\frac{9}{8}$ — $\frac{10}{9}$ — $\frac{10}{9}$ ton.

ré — *la* — *mi*

$\frac{10}{9}$ — $\frac{9}{8}$ — $\frac{10}{9}$ ton.

mi — *si* — *fa* ♯

$\frac{16}{15}$ — $\frac{16}{15}$ — $\frac{16}{15}$ demi-ton.

fa — *ut* — *sol*

$\frac{9}{8}$ — $\frac{9}{8}$ — $\frac{10}{9}$ ton.

sol — *ré* — *la*

$\frac{10}{9}$ — $\frac{10}{9}$ — $\frac{9}{8}$ ton.

la — *mi* — *si*

$\frac{9}{8}$ — $\frac{10}{9}$ — $\frac{10}{9}$ ton.

si — *fa* ♯ — *ut* ♯

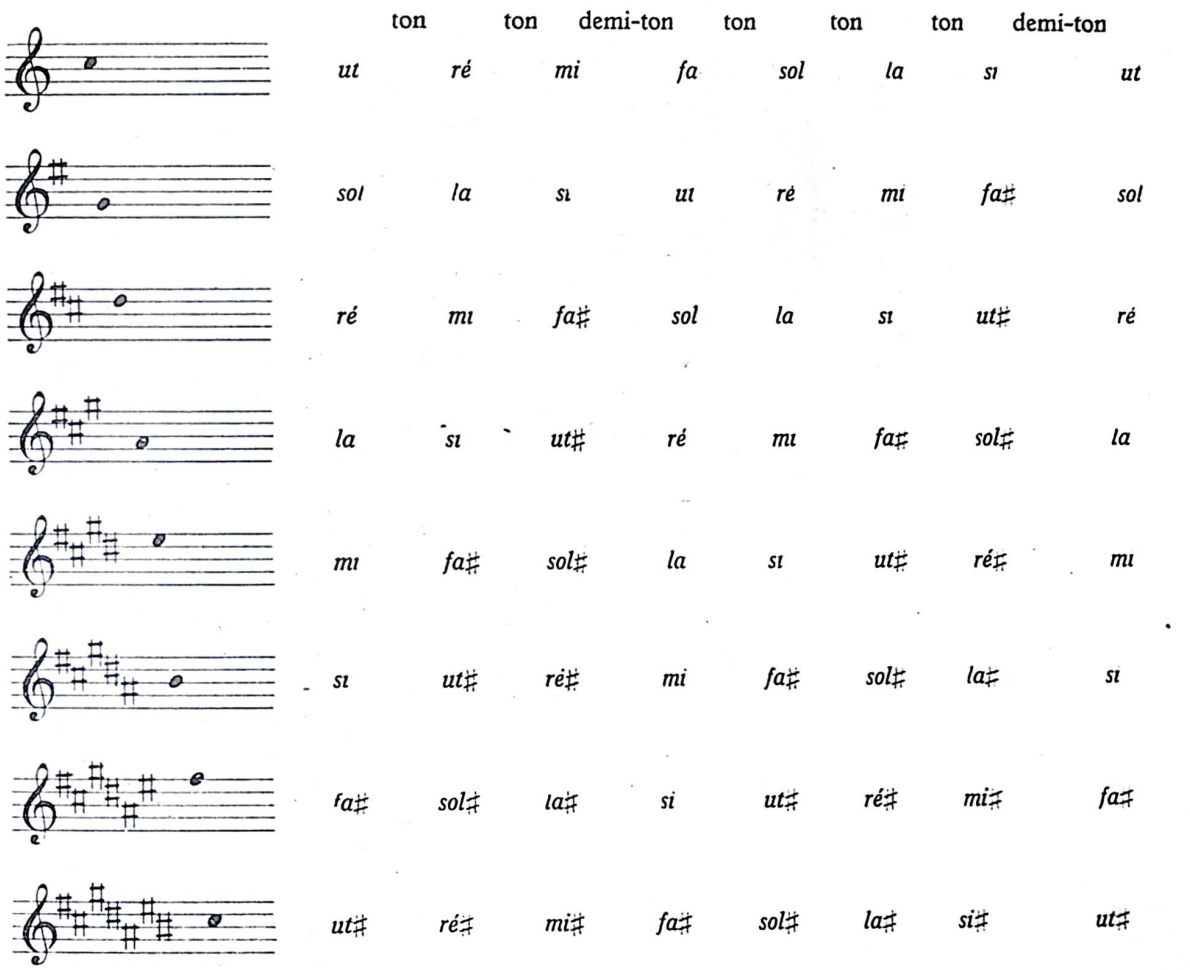
$\frac{16}{15}$ — $\frac{16}{15}$ — $\frac{16}{15}$ demi-ton.

ut — *sol* — *ré*

Nous aurons une gamme avec deux dièses. En construisant la gamme de *la*, à la quinte de *ré*, nous trouverons trois dièses, car il nous faudra diéser le *sol* de la gamme de *ré*.

Le tableau de la page suivante indique la construction des gammes successives en montant de quinte en quinte.

Au lieu de monter de quinte en quinte, on aurait pu descendre de quinte en quinte. Ainsi, cherchons à construire la gamme de *fa* ayant pour tonique la *quinte*



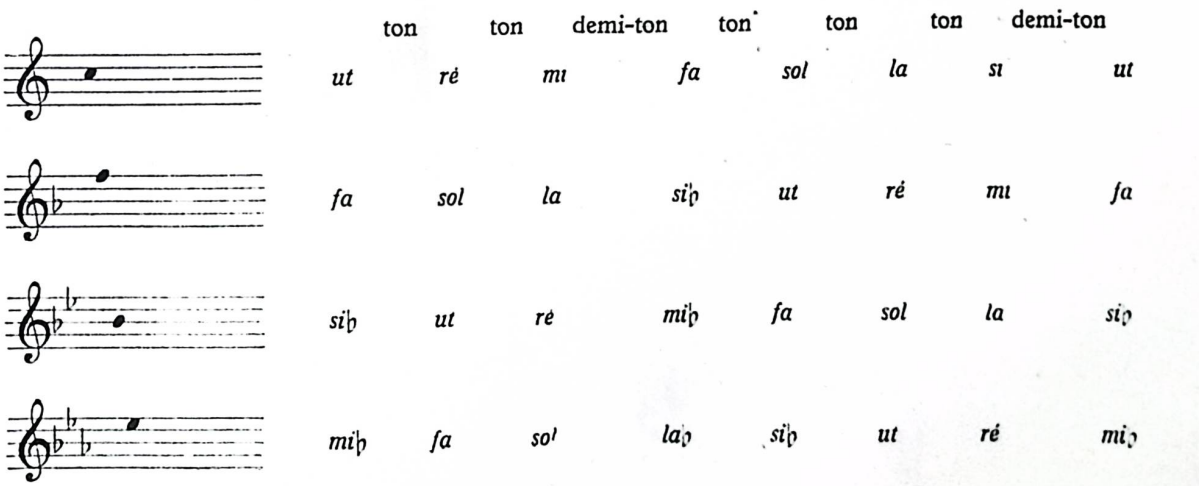
inférieure d'*ut*. La suite des intervalles à partir de *fa* se présente ainsi :

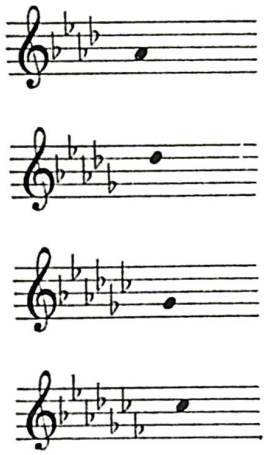
fa
ton
sol
ton
la
ton
si
demi-ton
ut
ton
ré
ton
mi
demi-ton
fa

Cette fois, c'est entre le troisième et le quatrième degré et entre le quatrième et le cinquième que la succession des intervalles se trouve dérangée. Pour la rétablir dans l'ordre de la gamme d'*ut*, il faut diminuer l'intervalle *la si*, et augmenter l'intervalle *si ut*, ce qui s'obtiendra en multipliant le nombre de vibrations de *si* par $\frac{24}{25}$. La note ainsi modifiée prend le nom de *si* bémol (*si* ♭).

Si, en partant de la gamme de fa, on veut construire la gamme de *si b* ayant pour tonique la quinte inférieure de *fa*, il faudra *bémoliser* le quatrième degré de la nouvelle gamme qui comportera alors deux *bémols* : *si b* et *mi b*.

Le tableau suivant indique la formation des gammes successives, de quinte en quinte, en descendant :





la♭ si♭ ut ré♭ mi♭ fa sol la♭

ré♭ mi♭ fa sol♭ la♭ si♭ ut ré♭

sol♭ la♭ si♭ ut♭ ré♭ mi♭ fa sol♭

ut♭ ré♭ mi♭ fa♭ sol♭ la♭ si♭ ut♭

Gamme tempérée. — D'après ce que nous venons de dire, il faudrait, pour jouer toutes les gammes, disposer dans une même octave de vingt et une notes différentes : 7 notres naturelles, 7 dièses et 7 bémols. Cependant, dans les instruments à sons fixes, comme le piano, on se contente de douze notes dont l'ensemble constitue ce qu'on nomme la *gamme tempérée.*

En effet, on considère que les tons majeurs et les tons mineurs étant sensiblement identiques à l'oreille, on peut les remplacer par des tons moyens,exactement décomposables en deux demi-tons moyens égaux. *La gamme entière comprend alors douze demi-tons moyens : ut♯ se confond avec ré ♭, mi ♯ avec fa naturel, fa♯ avec sol ♭, et ainsi de suite.*

Pour trouver la valeur du demi-ton moyen, il suffit de remarquer que le produit des douze demi-tons moyens qui composent la gamme tempérée doit être égal à l'intervalle d'octave, c'est-à-dire à 2. La valeur x du demi-ton moyen est donc déterminée par l'équation

$$x^{12} = 2$$

d'où on tire : $x = \sqrt[12]{2}$

ce qui est égal sensiblement à 1,060.

CHAPITRE III

ETUDE SPÉCIALE DES CORPS VIBRANTS

Vibrations des cordes. — Une corde tendue entre deux points fixes peut entrer en vibration, par exemple si on la *pince* avec le doigt ou si on la frotte avec un archet.

Une corde peut vibrer de deux manières, ou bien transversalement, ce qui est le cas le plus ordinaire, ou bien longitudinalement.

Une corde vibre *transversalement,* si on l'écarte de sa position d'équilibre avec le doigt et si on l'y laisse revenir brusquement. Le déplacement vibratoire se produit alors perpendiculairement à la direction initiale de la corde. On détermine aussi des vibrations transversales en frottant la corde avec un archet perpendiculairement à sa direction.

Les vibrations *longitudinales* se produisent dans le sens même de la corde. On peut les déterminer par exemple en frottant la corde dans le sens de sa longueur au moyen d'un morceau de drap imprégné de colophane.

Vibrations transversales des cordes. — Pour étudier les lois des vibrations transversales des cordes, en emploie un appareil appelé *sonomètre* (fig. 304).

Cet appareil se compose essentiellement d'une caisse résonnante supportant deux chevalets *a a, bb.* Sur ces chevalets, on peut tendre des cordes. En général, on en tend deux : l'une, celle qui est en arrière sur la figure, est fixée à ses deux extrémités par des chevilles dont l'une *s* peut être tournée au moyen d'une manivelle pour régler la tension ; cette première corde est destinée à fournir un terme de comparaison. L'autre corde est celle qu'on se propose plus particulièrement de soumettre aux expériences : elle est fixée à l'une de ses extrémités (à droite sur la figure) au moyen d'une cheville ; son autre extrémité passe sur une poulie et et se termine par un crochet *c* auquel on peut suspendre des poids.

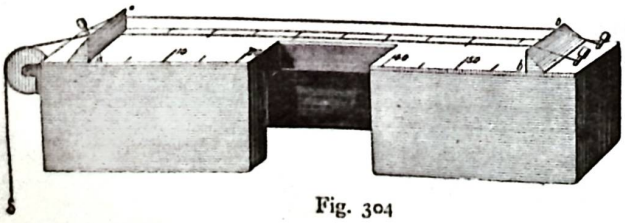


Fig. 304

Au moyen de cet appareil, on démontre quatre lois :

1° *Le nombre des vibrations d'une corde est inversement proportionnel à la longueur de cette corde.*

2° *Il est inversement proportionnel au diamètre de la corde.*

3° *Il est directement proportionnel à la racine carrée de la tension.*

4° *Il est inversement proportionnel à la racine carrée de la densité.*

1° Pour vérifier la première loi, on dispose la corde à étudier *c a b,* en suspendant en *c* un poids suffisant pour la tendre. Puis on règle la tension de la corde témoin *a b s* de façon qu'elle vibre à l'*unisson* de la première, c'est-à-dire qu'elle rende un son de même hauteur (la même note).

L'appareil étant ainsi réglé, supposons que les deux cordes rendent le son *ut.* On réduit à la moitié la corde *c a b* en plaçant au-dessous un chevalet sur lequel elle repose, juste au milieu de la distance des deux chevalets fixes *a* et *b.* On constate alors que la corde réduite ainsi à la moitié de sa longueur primitive rend un son à l'octave du son de la corde témoin, c'est-à-dire ut_2. Or nous savons que l'intervalle d'octave

vaut 2, c'est-à- dire qu'ut_2 correspond à un nombre de vibrations deux fois plus grand qu'ut_1.

Si, au lieu de réduire la corde à sa moitié, on la réduit au tiers, on constate qu'elle rend la note sol_2, quinte de l'octave supérieure du son primitif. Or, l'intervalle de quinte ut_2 sol_2 est égal à $\frac{3}{2}$, comme nous l'avons vu, d'autre part l'intervalle d'octave ut_1 sol_2 est donc égal à

$$2 \times \frac{3}{2} = 3$$

Ainsi la corde réduite au tiers fournit un nombre de vibrations triple de celui que donne la corde entière.

En réduisant la corde au quart, on trouve qu'elle rend l'ut_3, ce qui correspond à quatre fois plus de vibrations que pour ut_1.

2° Pour vérifier la seconde loi, on choisit plusieurs cordes de même substance et de diamètre connu ; on dispose l'une d'elles sur le sonomètre en la tendant au moyen d'un poids P connu, et on règle la tension de la corde témoin pour la faire résonner à l'unisson. On remplace ensuite la première corde successivement par les autres, en les tendant avec le même poids P, et on note les sons obtenus.

Supposons que les diamètres soient entre eux comme les nombres entiers successifs : 1, 2, 3, 4 ; si la corde de diamètre 1 rend le son ut_2, la corde de diamètre 2 rend le son ut_3, la corde 3 rend le son fa_2, la corde de diamètre 4 rend le son ut_4. Or les intervalles de ces notes sont, à partir de ut_2

ut_2	fa_2	ut_3	ut_4
1	$\frac{4}{3}$	2	4

En divisant tous ces nombres par 4, pour mieux les comparer, nous trouvons qu'ils se rangent suivant une série inversement proportionnelle à la série 4, 3, 2, 1 ; on a en effet

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad 1$$

3° Pour vérifier la troisième loi, on règle la tension au moyen de poids connus. La même corde étant tendue successivement par deux poids P et P', tel que l'on ait :

$$\frac{P}{P'} = \frac{4}{1}$$

les nombres des vibrations dans les deux cas seront comme 2 à 1. C'est à-dire que les deux sons seront à l'octave l'un de l'autre.

4° La dernière loi se vérifie toujours par la même méthode, en adaptant successivement au sonomètre des cordes de même diamètre, soumises à la même tension, et de densité différente.

Les quatre lois des cordes vibrantes s'expriment au moyen d'une formule mathématique :

Soient n le nombre de vibrations par seconde, l la longueur de la corde, r son rayon (diamètre $= 2r$), T la tension exprimée en poids, g l'accélération due à la pesanteur, d la densité de la corde, π le rapport de la circonférence au diamètre. On a

$$n = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{gT}{\pi d}}$$

Ces quatre lois sont appliquées couramment dans la construction des instruments à cordes et en particulier du violon (fig. 305). Dans ce dernier instrument de musique, les cordes sont tendues entre le chevalet et une arête située à l'extrémité du manche. Les quatre cordes sont *accordées* suivant les quintes successives sol_2, $ré_2$, la_3, mi_4 ; pour rendre les notes intermédiaires ou les notes plus hautes que mi_4, l'artiste raccourcit les cordes en les pressant avec les doigts de la main gauche sur le manche de son instrument. On fait entrer les cordes en vibration au moyen d'un archet.

Le violoncelle, la contrebasse sont conçus d'après les mêmes principes. La mandoline, la guitare sont construites d'une manière analogue, seulement on fait vibrer les cordes en les pinçant et non plus en les attaquant avec un archet.

Les instruments à sons fixes, tels que le piano et la harpe, possèdent une corde pour chaque note de la gamme. Dans le piano, les cordes résonnent sous l'action de marteaux mis en mouvement au moyen de touches. Il y a une corde pour chacun des demi-tons de la gamme

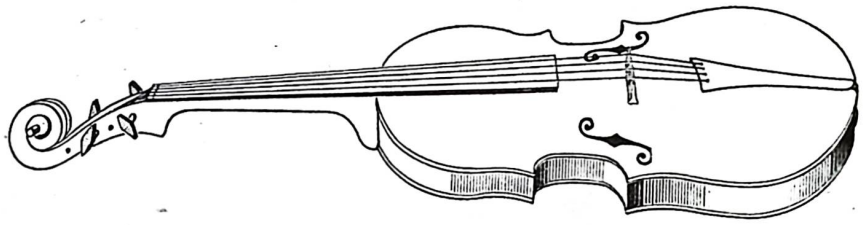


Fig. 305

chromatique tempérée. Dans la harpe, l'artiste pince les cordes avec les doigts pour les faire vibrer, les dièses et les bémols sont obtenus à l'aide de pédales qui permettent de raccourcir légèrement les cordes correspondant aux notes naturelles de la gamme.

Harmoniques des cordes. — Quand on attaque en son milieu, une corde A B C, tendue entre deux points, elle vibre dans toute son étendue et rend un son qu'on appelle le son fondamental de la corde (fig. 306).

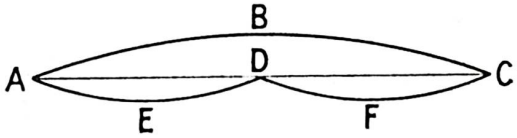


Fig. 306

Les extrémités fixes de la corde demeurent immobiles naturellement, on donne le nom de *nœuds* à ces points immobiles A et C. Le centre B de la corde qui se trouve animé du mouvement vibratoire le plus ample prend le nom de *ventre*.

Si on applique légèrement le doigt au milieu D de la corde et qu'on attaque celle-ci avec l'archet dans l'une de ses deux moitiés, en E par exemple, on entend l'*octave* du *son fondamental*, la partie que l'on a attaquée représentant une corde moitié moins longue que la corde soumise à l'expérience ; ce résultat est conforme à la première des lois énoncées plus haut.

Fig. 307

Mais non seulement la moitié attaquée A E D entre en vibration, mais aussi l'autre moitié D F C. On le constate aisément en plaçant sur la corde de petits cavaliers de papier qui sont renversés aussitôt qu'on attaque la corde avec l'archet.

Les trois points A D C sont immobiles ; ce sont des nœuds. Les points E et F sont des ventres.

Si on applique légèrement le doigt au tiers D de la corde (fig. 307) et qu'on fasse vibrer avec l'archet le tiers A D, on constate que la corde vibre dans ses trois tiers en rendant la quinte de l'octave supérieure

du son fondamental, c'est-à-dire en vibrant trois fois plus vite. Cette fois, il y a quatre nœuds A, D, D', C, et trois ventres.

En répétant la même expérience pour le quart, le cinquième, le sixième, etc., de la corde, on voit qu'on lui fera rendre des sons dont les nombres de vibrations seront entre eux comme 4, 5, 6., la corde vibrant dans toute son étendue, mais par fractions, avec un certain nombres de nœuds entre A et C.

Les sons ainsi obtenus, et dont les nombres de vibrations se succèdent comme la série des nombres entiers, s'appellent *harmoniques* du son fondamental.

Or, ces harmoniques ne prennent pas seulement naissance quand on appuie le doigt sur la corde. Ils se produisent aussi, en même temps que le son fondamental quand on fait vibrer la corde dans toute son étendue, avec cette seule restriction que le point où l'on fait agir l'archet est toujours un ventre et que, par conséquent, les harmoniques qui supposent un nœud en ce point ne peuvent prendre naissance.

Cause du timbre. — Les harmoniques ne se produisent pas tous avec la même intensité. Selon *le point où la corde est attaquée*, c'est telle ou telle série d'harmoniques qui prend naissance. *L'intensité des divers harmoniques dépend aussi de la substance de la corde.*

Ainsi d'une façon générale, un son fondamental est accompagné d'un certain nombre d'harmoniques qui résonnent en même temps que lui avec des intensités

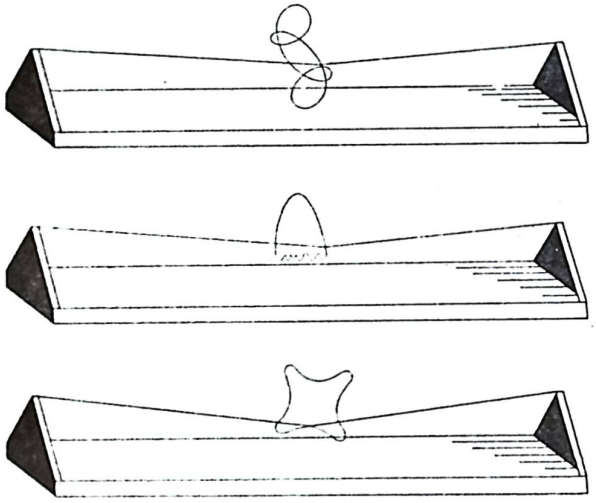


Fig. 308

variables. C'est la présence de ces harmoniques qui, ainsi que l'a démontré Helmholtz, produit les différences de *timbre*. Deux cordes qui rendent le même son fondamental ne donnent pas exactement la même impression parce que les harmoniques qui accompagnent ce son ne sont pas les mêmes pour chacune d'elles.

Le mouvement vibratoire d'une corde est donc, en général, complexe ; la superposition de la vibration fondamentale et des vibrations partielles fait que chaque point de la corde décrit une courbe plus ou moins compliquée au lieu de décrire une ligne droite. La figure 308 représente quelques-unes de ces courbes.

Vibrations longitudinales des cordes. — Le son fondamenta rendu par une corde animée de vibrations longitudinales dépend de la longueur l de la corde et de la vitesse v de propagation du son dans la substance dont cette corde est constituée.

n étant le nombre des vibrations par seconde, on a :

$$n = \frac{v}{2l}$$

Vibration des verges. — Les verges élastiques peuvent vibrer transversalement et longitudinalement suivant les lois des cordes.

Une verge assujettie par ses deux bouts vibrera dans son entier (fig. 309); elle se divisera aussi en deux parties vibrantes (fig. 310), en trois ou en un plus grand nombre de parties (fig. 311). Mais les lois qui détermirent la hauteur des harmoniques successifs sont différentes de celles qui sont relatives aux cordes.

Fig. 309

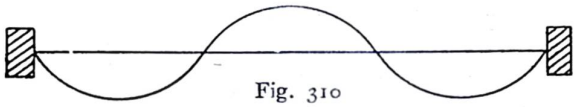


Fig. 310

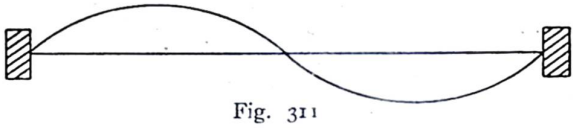


Fig. 311

Quand une corde est divisée en deux parties vibrantes, chacune des deux moitiés vibre avec une vitesse double de la corde entière, et produit ainsi l'octave du son fondamental.

Dans le cas des verges, chacun des segments vibre avec une vitesse à peu près trois fois plus grande que la verge entière. Le rapport est exactement de 9 à 25, c'est-à-dire du carré de 3 au carré de 5.

Le nombre des nœuds situés entre les deux extrémités fixes de la verge (qui sont elles-mêmes des nœuds) étant 0, 1, 2, 3, 4, etc., les nombres des vibrations sont entre eux comme les nombres 9, 25, 49, 81, 121, etc., c'est-à-dire comme les carrés de 3, 5, 7, 9, 11, etc.

Les lois des vibrations des verges élastiques ont été énoncées pour la première fois par Léonhard Euler, mathématicien de Bâle, en 1741. Elles se résument dans la formule

$$N = \frac{n^2 e}{l^2}\sqrt{\frac{q r}{\delta}}$$

dans laquelle N représente le nombre de vibrations par seconde, e l'épaisseur de la verge dans la direction des vibrations, δ la densité de la matière dont elle est composée, r son élasticité, et n une constante qui correspond à la manière dont la verge est assujettie et au nombre de nœuds formés.

Ces lois sont au nombre de quatre :

1° *Le nombre des vibrations d'une verge est indépendant de la largeur de cette verge* (c'est-à-dire de son épaisseur dans une direction perpendiculaire au plan des vibrations).

2° *Il est proportionnel à l'épaisseur de la verge* (dans le sens des vibrations).

3° *Il est inversement proportionnel au carré de la longueur de la verge.*

4° *Il est inversement proportionnel à la racine carrée de la densité de la verge.*

Fig. 312

Quand on fixe une verge élastique par une extrémité seulement, l'autre restant libre, les vibrations résultent de l'élasticité même de la matière et non plus d'une tension externe.

Si on tire de côté l'extrémité libre (fig. 312) et qu'on la lâche brusquement, la verge vibre dans son entier. L'extrémité fixe correspond à un nœud ; l'extrémité libre à un ventre. Mais on peut faire vibrer la verge d'une

autre manière : si, par exemple, on pose le doigt en un point pour amortir les vibrations, de manière à déterminer en ce point la production d'un nœud, et qu'on frappe un coup sec sur la verge entre ce point et son point d'attache, la verge se met à vibrer en deux parties (fig. 313). Dans ce cas, la verge vibre dans ses segments et vibre en même temps dans son entier ; il y a superposition du son fondamental et de ses harmoniques. L'amplitude des vibrations des segments dépend de la nature du choc : si le coup a été donné mollement, les harmoniques sont faibles par rapport au son fondamental; si le coup a été bref et vigoureux, c'est le contraire qu'on observe.

Le *diapason est une verge d'acier à laquelle on a donné la forme d'une fourche*. Pour lui faire rendre le son fondamental, on le frappe d'un coup sec au voisinage de l'extrémité, on bien on fait passer de force entre les deux branches un petit cylindre de bois ou de métal.

Les *boîtes à musique* sont constituées par des petites verges d'acier rendant les différentes notes de la gamme. Un cylindre armé de pointes tourne devant ces verges, disposées parallèlement les unes aux autres et perpendiculairement à l'axe du cylindre. Les pointes font vibrer tour à tour les différentes verges, et leur position est calculée pour produire la mélodie désirée. Les sons de ces boîtes à musique sont remarquables par leur pureté.

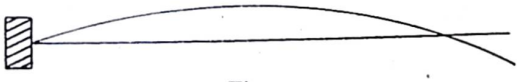


Fig. 313

Le *triangle*, usité dans les orchestres, est une verge courbée en forme de triangle et que l'artiste fait vibrer par de petits coups secs.

Wheatstone imagina une méthode ingénieuse pour étudier les vibrations des verges assujetties par l'une de leurs extrémités. Il fixait une petite perle de verre argentée à l'extrémité libre de la verge, et il faisait tomber sur cette perle les rayons du soleil ou d'une lampe. Ce dispositif détermine la formation d'un point brillant au bout de la verge. Quand celle-ci entre en vibration, le point lumineux décrit une courbe dont la forme indique le caractère de la vibration.

Il suffit pour que la ligne décrite par le point lumineux devienne une courbe, au lieu de rester sensiblement une droite, de combiner la vibration directe avec une vibration transverse, dans un rapport variable. L'appareil ainsi réalisé a reçu le nom de *Kaléidophone*. L'effet peut être rendu plus frappant par l'emploi de deux sources lumineuses différentes qui produisent un enchevêtrement de deux courbes de couleur ou d'intensité différentes.

Chladni a déterminé expérimentalement les lois des vibrations des verges libres à leurs deux extrémités. Si on tient une verge aux deux bouts entre le pouce et l'index à une certaine distance des extrémités et qu'on frappe la verge dans son milieu, elle se met à vibrer entre les deux points fixes en décrivant la surface d'un fuseau. Les extrémités libres se déplacent en éventail.

Le son fondamental d'une verge fixée à ses deux extrémités est plus élevé que le son fondamental de la même verge fixée à une seule de ses extrémités ; les nombres des vibrations sont entre eux comme 25 et 4. Le nombre des vibrations croît avec le nombre des nœuds suivant la proportion ci-dessous :

Nombre de nœuds	2,	3,	4,	5,	6,	7.
Nombre de vibrations ...	2^2,	5^2,	7^2,	9^2,	11^2,	11^2,

On emploie souvent, dans les instruments de musique, des verges libres à leurs extrémités avec deux points nodaux ; par exemple dans les *harmonicas*. Les points nodaux correspondent à la figure 313.

Le *diapason* est une verge libre à ses deux extrémités et fixée au centre. Des harmoniques peuvent se superposer au son fondamental d'un diapason et l'intervalle du son fondamental au premier harmonique est plus grand que pour une corde vibrante (fig. 314).

Les dessins de la figure 315 ont été obtenus par la méthode de Lissajou qui permet de comparer les vibrations de deux diapason s. La méthode est basée sur la persistance des images visuelles sur la rétine. Elle consiste à fixer à l'une des branches d'un diapason un petit miroir métallique, l'autre branche supportant un contrepoids destiné à rétablir la régularité des vibrations détruite par le poids du miroir. A une petite distance du miroir, on place une lampe enfermée dans

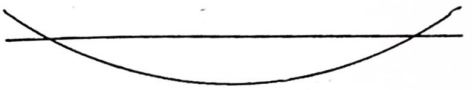


Fig. 314

une cheminée qui ne laisse passer qu'un mince faisceau de lumière. Ce faisceau est dirigé sur le miroir qui présente alors l'aspect d'un point lumineux. Après s'être réfléchi il est dirigé sur un écran au moyen d'un second miroir fixe et d'une lentille achromatique convenablement placée.

Quand on met le diapason en mouvement, l'image du point lumineux sur l'écran s'allonge pour former une ligne persistante dont les proportions diminuent au fur et à mesure que les vibrations du diapason s'éteignent. Si on fait tourner le miroir durant la période des vibrations, par exemple en soumettant le diapason à un mouvement de rotation sur son axe, la ligne droite d'abord obtenue sur l'écran prend la forme d'une ligne sinueuse.

En faisant vibrer ensemble deux diapasons préparés de la même façon , Lissajou a obtenu des combinaisons optiques des plus intéressantes. Quand les deux diapasons vibrent à l'unisson, l'image lumineuse diminue graduellement en dimensions au fur et à mesure que l'amplitude des vibrations décroît. Mais, si la hauteur

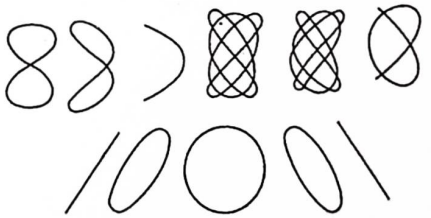


Fig. 315

de l'un des sons est nettement différente de celle de l'autre, les dimensions de l'image varient périodiquement en même temps que l'oreille perçoit les battements résultant de la discordance des sons.

Vibrations des plaques. — Une plaque métallique, ou une substance capable d'entrer en vibration, étant fixée par un de ses points, si on en frotte le bord avec un archet enduit de colophane, elle rend un son qui dépend de la nature de la substance, du point par lequel la plaque est fixée et de l'endroit où le frottement est appliqué.

On peut mettre les vibrations en évidence, les rendre pour ainsi dire visibles, en semant du sable fin à la surface des plaques. Dès que celles-ci entrent en vibration, le sable se trouve projeté et soumis à une série de petits bonds qui finissent par le faire tomber à terre. Mais toute la surface de la plaque ne se débarrasse pas ainsi du sable qu'on y a semé. Des grains se rassemblent et demeurent immobiles dans certaines directions, suivant certaines lignes qui, évidemment, *ne vibrent pas*. Les lignes déterminées par cette simple expérience sont des lignes nodales. Dans l'intervalle de ces nœuds la plaque vibre, mais le sens de la vibration de deux parties

séparées par une ligne nodale est inverse. Les figures 316, 317, 318 et 319 représentent les lignes nodales ainsi obtenues dans quelques cas. Les régions marquées + sont supposées vues au moment où la vibration les amène au-dessus du plan de la figure, et les régions marquées —, au moment où la vibration les amène au-dessous du plan de la figure.

Le dessin de la figure 317 est obtenu en posant le doigt au milieu de la plaque pour amortir les vibrations

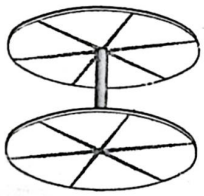


Fig. 316

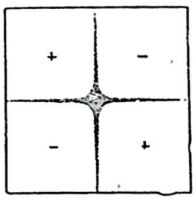


Fig. 317

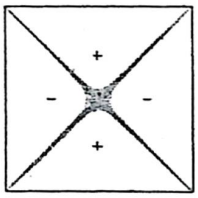


Fig. 318

et en frottant avec l'archet au voisinage de l'un des coins. Si on attaque avec l'archet au milieu de l'un des côtés, on obtient le dessin de la figure 318. Les dessins varient suivant la direction dans laquelle la plaque est attaquée. C'est ce que montrent aussi les schémas de la figure 319. Les vibrations des plaques sont régies par la loi suivante :

Dans des plaques de même substance et de même forme, donnant le même système de lignes nodales, le nombre de vibrations par seconde est directement proportionnel à l'épaisseur de la plaque et inversement proportionnel à son aire.

Les membranes, étant donné leur souplesse, ne peuvent vibrer à moins d'être tendues, comme cela a lieu pour la peau d'un tambour. Elles sont en ceci tout à fait comparables aux cordes. Le son qu'elles produisent est d'autant plus aigu qu'elles sont moins grandes et plus fortement tendues.

Le *tambour* est une sorte de caisse cylindrique fermée aux deux bouts par des peaux tendues. Quand une des peaux est mise en vibration, l'air contenu dans la caisse entre lui-même en vibration, et le son se trouve considérablement renforcé.

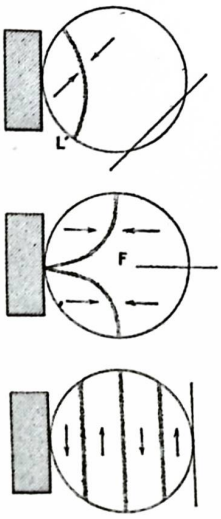


Fig. 319

Au point de vue de la formation des lignes nodales et du nombre des vibrations, les *cloches* sont tout à fait comparables à des disques. Quand elle rend le son le plus grave, une cloche se divise en quatre segments vibrants, par quatre lignes nodales *a, b, c, d* (fig. 320) allant du bord de la cloche à son sommet *o*. Le point où le battant heurte la cloche est toujours le milieu d'un segment vibrant. Si on suppose qu'on pratique à un moment donné une section perpendiculaire à l'axe vertical d'une cloche en vibration, cette section n'affecte pas une forme circulaire, elle est ovale et, d'un instant à l'autre, la forme de cet ovale change, le petit axe étant remplacé par le grand axe, et réciproquement. Mais, il y a quatre points immobiles sur l'ovale, ce sont ceux qui se trouvent sur les lignes nodales *a o, b o, c o, d o*.

Le nombre des vibrations d'une cloche, en un temps donné, est directement proportionnel à l'épaisseur de la cloche et inversement proportionnel à son diamètre.

La cloche peut se diviser en un nombre pair quelconque de segments vibrants à la façon des disques. Comparés au son fondamental, les harmoniques correspondant au mode de division d'une cloche représentent les nombres de vibrations suivants :

Divisions	4,	6,	8,	10,	12
Nombres de vibrations .	2^2,	3^2,	4^2,	5^2,	6^2

Lorsque les bords de la cloche sont épais, la tendance à la formation de nombreuses lignes nodales est très accentuée et les harmoniques étouffent le son fondamental. Du reste, il est très difficile de couler des cloches ayant une épaisseur uniforme dans toutes les directions et une régularité de figure absolue. Aussi, les diverses parties ne vibrent-elles pas en concordance. La cloche rend des sons différents qui tantôt se superposent, tantôt se succèdent ; c'est ainsi que le plus souvent une cloche nous fait l'effet de rendre deux sons différents. Les lignes nodales du son fondamental et des différents harmoniques ne coïncident pas et il n'y a pas de points véritablement immobiles.

Résonateurs. — Un diapason ayant été mis en vibration, supposons qu'on en applique la tige sur le *bord d'un vase de verre* ; le *son est renforcé*. Si on verse de l'eau dans le vase, de manière à en diminuer le vide, le son croît, en général, d'intensité jusqu'à ce que l'eau ait atteint un certain niveau, puis il s'affaiblit et finit par être aussi peu distinct que si l'on tient le diapason suspendu dans l'air libre.

Dans cette expérience, l'air contenu dans le vase est entré en vibration sous l'influence du diapason, et, en communiquant ensuite son mouvement à l'air ambiant, a renforcé le son du diapason. Naturellement, ce renforcement a lieu aux dépens de l'énergie représentée par le diapason vibrant, il a pour effet de rendre plus rapide la déperdition de cette énergie et de ramener plus tôt l'instrument au silence. Mais cette circonstance est sans intérêt pour nous.

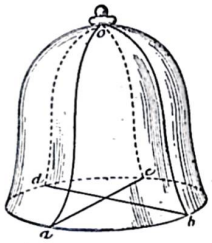


Fig. 320

Notre expérience nous permet de constater que le maximum de renforcement est obtenu pour une colonne d'air d'une hauteur bien définie. S'il y a trop peu ou trop d'eau dans le vase, l'air ne *résonne* plus avec autant d'intensité. On peut énoncer la loi suivante :

La longueur de la colonne d'air qui résonne sous l'influence des vibrations d'un diapason est égale au quart de la longueur de l'onde sonore émise par le diapason.

Etude du timbre. — Helmholtz a basé, sur les phénomènes de résonance, une méthode propre à analyser les sons composés.

Imaginons une série de cornets calculés de façon que la colonne d'air qu'ils renferment ne vibre, en produisant une résonance, que sous l'influence d'un son bien déterminé. Helmholtz a choisi des *sphères creuses* qui ne résonnent sensiblement que pour le son fondamental indiqué par la loi énoncée ci-dessus. Ces sphères creuses portent d'un côté un petit tuyau destiné à être introduit dans l'oreille de l'observateur : de l'autre côté se trouve une sorte de cornet qu'on tourne vers le corps sonore.

L'observateur se bouche une oreille et applique successivement à l'autre oreille les divers *résonateurs de la série*. Chaque fois que le résonateur correspond à une note émise par le corps sonore, l'auditeur perçoit cette note ; sinon il n'entend rien. L'auditeur n'est sensible chaque fois que pour le son fondamental de son résonateur.

Dans ces conditions, il est facile de reconnaître les différentes notes émises par un corps vibrant. On a réalisé la décomposition, *l'analyse du son*.

Cette méthode a permis d'établir avec sûreté la cause du timbre. Si deux corps sonores rendant la même note ne nous donnent pas la même impression, cela vient uniquement de ce que les harmoniques superposés au son fondamental ne sont pas les mêmes.

Les gros tuyaux fermés des orgues n'ont pour ainsi dire pas d'harmoniques : aussi les sons qu'ils rendent manquent-ils d'éclat. Il n'en est pas de même des tuyaux ouverts des orgues ou des grosses cordes des pianos qui présentent les six premiers harmoniques et qui, pour cette raison, donnent une impression de plénitude. Le violon possède un grand nombre d'harmoniques ; les harmoniques élevés sont, en particulier, très distincts avec cet instrument, aussi les sons du violon ont-ils une tendance à devenir criards dès que l'artiste n'est pas très habile.

Helmholtz a complété sa démonstration de la nature du timbre en faisant la *synthèse des sons* qu'il avait analysés.

Si on superpose les différentes notes représentant le son fondamental et les harmoniques d'un son musical en leur donnant les intensités relatives convenables, on doit, si l'explication donnée pour le timbre est juste, reproduire ce son musical.

C'est ce que l'expérience confirme. Helmholtz, pour réaliser cette expérience, employa une série de diapa-

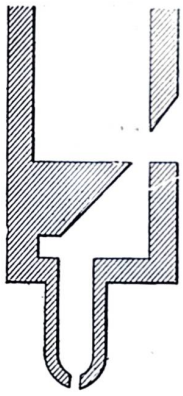


Fig. 321

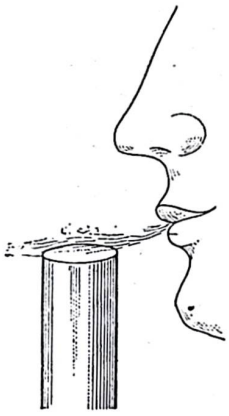


Fig. 322

sons dont chacun ne rendait que le son fondamental. En faisant vibrer ces diapasons devant des résonateurs, il pouvait donner à chaque note l'intensité voulue. Il put ainsi reproduire un grand nombre de sons et *même les voyelles de la voix humaine.*

Ces découvertes reçoivent aujourd'hui une application courante dans la construction des orgues. On sait que cet instrument permet d'imiter le timbre de la plupart des autres instruments et même de la voix humaine. Ce résultat est obtenu au moyen de *registres*, c'est-à-dire de tiges commandant un système d'ouvertures et de tiroirs. Quand on tire, par exemple, le registre *violon*, tous les tuyaux correspondant aux notes du violon sont mis en communication avec ceux qui représentent les harmoniques de ces notes, et l'arrivée d'air est réglée de façon que l'intensité des harmoniques soit exactement par rapport au son fondamental ce qu'elle est dans le violon.

Instruments à vent. — Tuyaux sonores. — La figure 321 représente, en coupe, la bouche d'un tuyau sonore (de certains tuyaux d'orgue par exemple). L'air étant chassé dans le tuyau par la partie inférieure vient se briser contre une lame taillée en biseau, la lèvre de l'instrument, et entre en vibration.

Si la bouche n'est pas surmontée d'un tuyau, le son rendu par l'instrument s'élève progressivement au fur et à mesure que le courant d'air est chassé avec plus de force. Mais, quand l'instrument est complété par un tuyau, il ne peut plus parler que pour les sons à l'égard desquels le tuyau fonctionne comme résonateur.

Si on souffle un peu obliquement à l'orifice d'un tube (fig. 322), ce tube rend toujours le même son, quelle que soit la force du souffle. Mais, lorsque le souffle devient très fort, le son s'élève brusquement en passant au premier harmonique du son primitif.

Les choses se passent tout à fait de la même façon pour un tuyau d'orgue. Si on fait parler l'instrument en augmentant graduellement la force du courant d'air, le tuyau résonne d'abord pour une certaine note que nous appellerons son fondamental. Le son se maintient à la même hauteur en augmentant d'intensité jusqu'à ce que la force du souffle ait atteint une certaine valeur ; à ce moment le son monte brusquement et le tuyau résonne pour un harmonique du son fondamental. En continuant l'expérience, on fait parler successivement le tuyau pour plusieurs harmoniques, quatre, cinq, et même six pour un tuyau long et étroit.

Si l'on fait, par exemple, cette expérience avec un tuyau de verre ; on pourra faire descendre dans l'intérieur du tuyau, supposé ouvert à son extrémité supérieure, une petite balance semée de grains de sable. Tant que le tuyau parle, on constate que les grains de sable dansent sur la nacelle, ce mouvement prouve que l'air du tuyau est en vibration. Pourtant, si on descend la nacelle à différentes hauteurs, on constate qu'en certains points le sable demeure immobile. En ce points, l'air n'est pas en mouvement, ce sont des *nœuds* de vibration. En d'autres points, au contraire, l'agitation du sable est plus grande que partout ailleurs, ces points sont des *ventres*.

L'existence des nœuds et des ventres s'explique par la nature même du mouvement vibratoire de l'air dans un tuyau. Nous avons expliqué plus haut la façon dont se propagent, dans un tuyau indéfini, les ondes sonores. Lorsque ces ondes arrivent à l'extrémité du tuyau, elles éprouvent une réflexion. Si le *tuyau est fermé*, une *demi-onde dilatée* donne en se réfléchissant une *demi-onde dilatée* ; une *demi-onde comprimée* donne une *demi-onde comprimée*. Si le tuyau *est ouvert*, une *demi-onde comprimée*, en arrivant à l'extrémité du tuyau, se détend brusquement dans l'atmosphère et détermine par réaction un vide partiel, une dilatation à l'orifice. Cette dilatation se propage à son tour, *en sens inverse*, en revenant de l'orifice du tuyau à la bouche. Réciproquement, une demi-onde dilatée donne naissance à une demi-onde réfléchie comprimée.

Dans ces conditions, en un point quelconque du tuyau, le mouvement de l'air est la résultante de deux mouvements vibratoires, l'un direct, l'autre réfléchi. La théorie démontre que les *nœuds sont des tranches d'air dans lesquelles la compression ou la dilatation atteignent un maximum mais dans lesquelles la vitesse vibratoire est constamment nulle*, et que *les ventres sont des tranches d'air où la vitesse vibratoire atteint un maximum, mais où il n'y a jamais ni compression, ni dilatation.*

La bouche d'un tuyau correspond toujours à un ventre; l'extrémité d'un tuyau ouvert correspond aussi à un ventre. Mais l'extrémité d'un tuyau fermé coïncide avec un nœud.

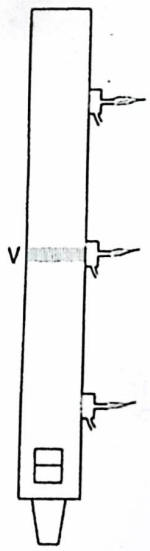


Fig. 323

Kœnig a mis en évidence les variations de pression qui se produisent dans les nœuds par un dispositif ingénieux. A l'endroit d'un nœud, on pratique dans le tuyau sonore une ouverture qu'on ferme par une membrane de caoutchouc. Contre celle-ci on applique une capsule portant un bec à gaz ordinaire, de manière à former une espèce de boîte dont la membrane constitue l'une des parois et dans laquelle on fait déboucher une conduite de gaz (fig. 323).

On allume le bec. Lorsque le tuyau sonore ne parle pas, la flamme demeure constante ; mais, si on le fait parler, la flamme subit une série de secousses extrêmement rapides : elle vibre synchroniquement avec l'air du tuyau, en suivant les mouvements de la membrane de caoutchouc, poussée tour à tour vers l'intérieur puis vers l'extérieur, par suite des compressions et des dilatations successives.

A cause de la persistance des impressions sur la rétine, la vibration de la flamme ne serait guère perceptible si on l'observait directement. Mais, en tirant parti justement de cette persistance, *Kœnig a imaginé de faire tourner devant la flamme et parallèlement à l'axe de cette flamme, un prisme dont les faces sont des miroirs.* Quand on observe la flamme dans ce miroir composé, son image changeant d'orientation à chaque instant, elle apparaît sous *l'aspect d'une bande lumineuse.* Si la flamme

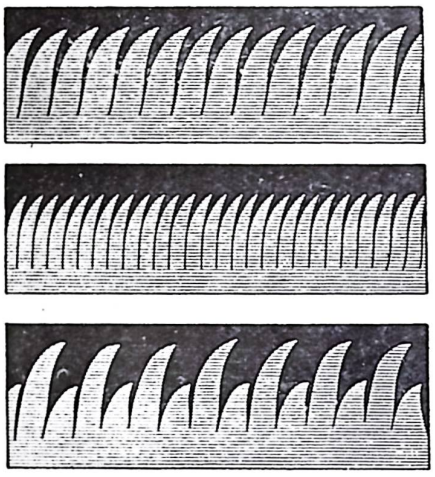


Fig. 324

vibre, la *bande s'échancre en dents de scie.* La figure 324 nous présente quelques-uns des aspects que l'image peut prendre suivant que les vibrations sont simples ou qu'il y a deux mouvements vibratoires superposés.

Puisque, dans un ventre, il n'y a ni compression, ni dilatation, on peut sans inconvénient mettre en ce point l'air du tuyau en communication avec l'air extérieur, en ouvrant, par exemple, un trou dans la paroi. Au contraire, si on perce la paroi en un autre point et particulièrement à la place d'un nœud, l'équilibre de pression tendant à se rétablir entre l'intérieur et l'extérieurdu tuyau, on déterminera en ce point la *formation d'un ventre, et on changera par conséquent la nature et la répartition des ondes sonores.*

Cette remarque permet de déterminer expérimentalement la position des nœuds et des ventres dans un tuyau sonore et, par suite, la distance d'un ventre au nœud qui le suit ou qui le précède immédiatement.

Appelons d cette distance, et l *la longueur d'onde correspondant au son émis par le tuyau,* qu'il s'agisse du son fondamental ou de ses harmoniques, on a toujours :

$$d = \frac{l}{4}$$

Naturellement, les ventres et les nœuds alternent toujours ; par conséquent, dans un tuyau fermé, comme il y a *un ventre à la bouche* et *un nœud à l'extrémité,* les segments égaux à d, déterminés par les ventres et les nœuds successifs, sont toujours en nombre impair. Dans un tuyau ouvert, comme il y a un ventre à chaque bout, les segments sont en nombre pair.

Si nous appelons L la longueur du tuyau, et si nous désignons par $(2p + 1)$ le nombre impair des segments déterminés dans un *tuyau fermé* par les nœuds et par les ventres, nous avons :

$$L = (2p + 1)\, d$$

ou :

$$L = (2p + 1)\frac{l}{4} \qquad (1)$$

l désignant la longueur d'onde.

Si p est nul, cela signifie qu'il y a ni nœuds ni ventres entre la bouche et l'extrémité, la formule se réduit à :

$$L = \frac{l}{4}$$

Donc, *le son fondamental d'un tuyau fermé est celui dont la longueur d'onde est égale à quatre fois la longueur du tuyau.*

Nous avions énoncé cette loi, sous une autre forme, à propos des résonateurs.

La formule (1) peut se mettre sous une autre forme plus intéressante. Nous savons que la longueur d'onde l, correspondant à un son donné, est égale à la vitesse v de propagation du son, divisée par le nombre n de vibrations correspondant au son donné :

$$l = \frac{v}{n}$$

En portant cette valeur dans la formule (1), nous obtenons :

$$L = (2p + 1)\frac{v}{4n}$$

D'où on peut tirer, par simple transformation, l'expression de n :

$$n = (2p + 1)\frac{v}{4L} \qquad (2)$$

En remplaçant, dans cette formule (2), p par les nombres entiers successifs, on obtient *les nombres de vibrations de tous les sons que peut rendre un tuyau fermé, de longueur* L. On voit immédiatement que *ces nombres*

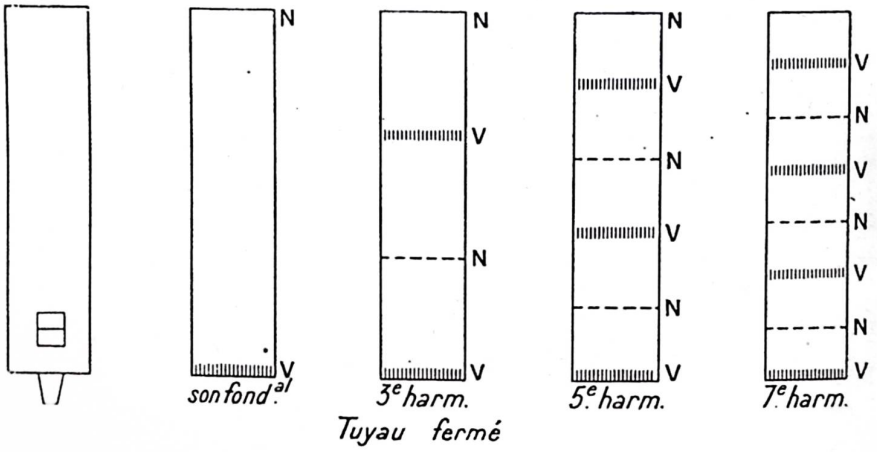


Fig. 325

varient comme la série des nombres impairs (fig. 325).

1, 3, 5, 7, 9, 11, etc.

Considérons maintenant un tuyau ouvert. Le nombre des segments déterminés par les nœuds et les ventres étant toujours pair, on pourra écrire la relation :

$$L = 2pd$$

$2p$ représentant nécessairement un nombre pair.

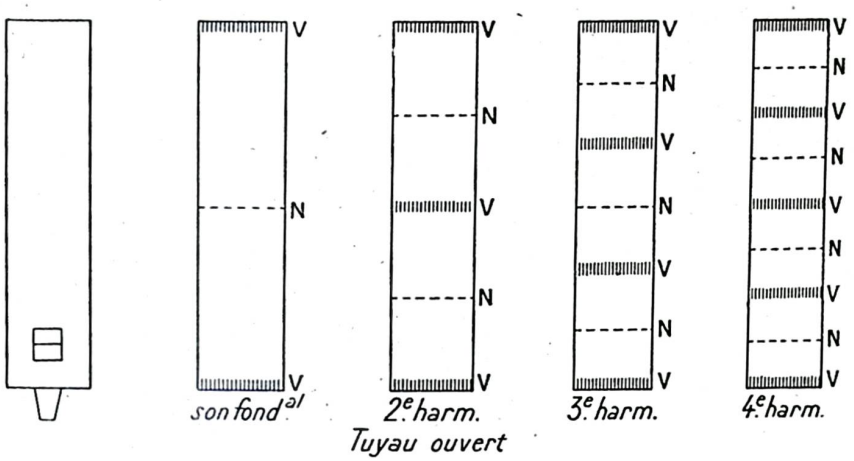


Fig. 326

Fig. 327

Fig. 328

On en tire :

$$L = 2p\frac{l}{4}$$

$$L = p\frac{l}{2} \qquad (3)$$

ou enfin :

$$L = p\frac{v}{2n}$$

$$n = p\frac{v}{2L} \qquad (4)$$

En faisant $p = 1$ dans la formule (3), on arrive à l'énoncé suivant :

Dans un tuyau ouvert, la longueur d'onde du son fondamental est égale au double de la longueur du tuyau.

Dans la formule (4), on peut remplacer p par la série des nombres entiers, ce qui permet de dire que :

Dans un tuyau ouvert, les nombres de vibrations du son fondamental et des harmoniques successifs sont entre eux comme les nombres entiers successifs : 1, 2, 3, 4... (fig. 326).

L'expérience vérifie tous ces résultats. Il suffit de déterminer, au moyen de la sirène par exemple, la hauteur des harmoniques successifs.

En rapprochant les lois des tuyaux ouverts et des tuyaux fermés, on voit que le *son fondamental d'un tuyau ouvert est à l'octave du son fondamental d'un tuyau fermé de même longueur*, et qu'un tuyau fermé a moins d'harmoniques qu'un tuyau ouvert.

Si, dans la formule (4), on connaît $n\,p$ et L, on peut en déduire v. Par conséquent, on peut baser sur cette formule une méthode de détermination *de la vitesse du son*. On fait parler un tuyau et on détermine n, au moyen de la sirène par exemple. Puis on mesure expérimentalement la distance d qui permet de calculer p.

Cette méthode est particulièrement applicable aux gaz autres que l'air, et aux liquides.

Applications. — On emploie, dans les instruments de musique, différentes sortes de tuyaux sonores. Nous avons parlé des tuyaux à la bouche dits encore *à embouchure de flûte* (fig. 327 et 328). On place souvent en face des lèvres du tuyau une petite lame appelée *languette* et qui forme le fond du tuyau (fig. 329, 330 et 331). Cette languette entre en vibration, et la qualité du son dépend de la forme et de l'épaisseur de la languette ainsi

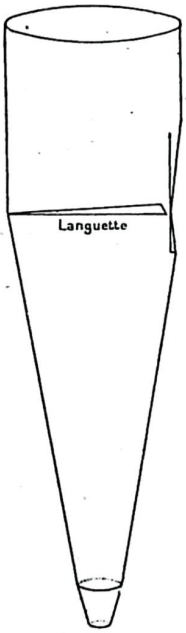


Fig. 329

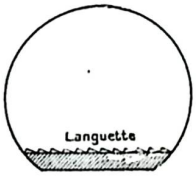


Fig. 330

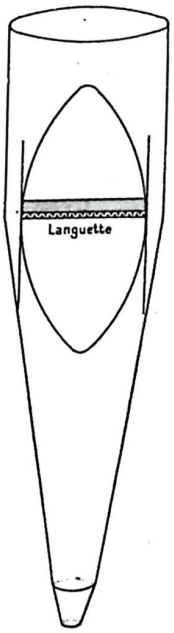


Fig. 331

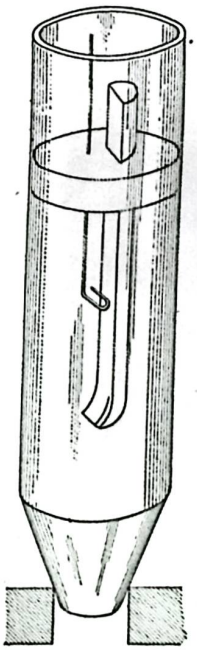


Fig. 332

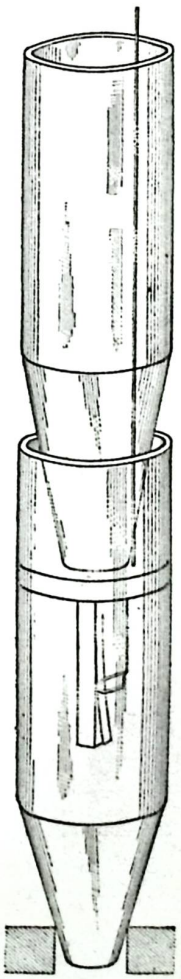


Fig. 333

que des dimensions et de l'écartement des lèvres. Une bouche large et haute donne un son plein et puissant ; une bouche étroite un son plus criard ; une bouche étroite et basse donne un son délicat et, si la bouche est très large et très haute, le son est creux et moins pur. Il y a des limites à ces variations : *si la bouche est trop étroite, le tuyau parle à l'octave du son fondamental*; si la lèvre supérieure est trop haute, le tuyau rend une note sourde ou ne résonne pas du tout.

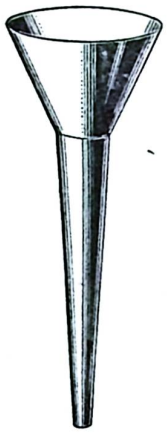


Fig. 334

On construit des tuyaux fermés et des tuyaux ouverts, et aussi des tuyaux à demi-fermés ; ces derniers produisent des sons particulièrement agréables, *liquides*.

Dans les *tuyaux à anche*, l'embouchure est fermée latéralement par une lame flexible qu'on appelle *anche* et qui doit vibrer pour livrer passage à l'air. On distingue deux espèces d'anches : l'*anche battante* (fig. 332) dont les bords s'appliquent sur les bords de la rigole qui doit livrer passage à l'air; dans ce dispositif l'anche lorsqu'elle entre en vibration bat contre les bords de la rigole, d'où son nom ; et l'*anche libre*, qui se meut librement de part et d'autre de l'ouverture servant au passage de l'air (fig. 333). Dans les deux dispositifs, on limite la partie vibrante de l'anche au moyen d'une tige de fer réglable qu'on nomme *rasette*.

Dans les tuyaux à anche, celle-ci se place d'ordinaire à la partie supérieure du tuyau et, par conséquent, l'air la traverse au moment où il s'échappe dans l'atmosphère. On rend le son plus agréable en surmontant l'anche d'un *cornet d'harmonie* (fig. 334 et 335) qui joue le rôle de résonateur. L'anche libre rend des sons beaucoup plus purs que ceux de l'anche battante qui nasille un peu.

Les différents instruments à vent sont des tuyaux sonores, comparables à des tuyaux d'orgue. Le *flageolet* et la *flûte* sont des tuyaux à bouche, percés de trous dans la paroi. Lorsque les trous sont fermés, l'instrument se comporte entièrement comme un tuyau sonore de même longueur. En débouchant les trous, l'exécutant crée un ventre à l'endroit du trou, ce qui revient à diminuer la longueur du tuyau.

La *clarinette* est un tuyau à anche. L'anche est représentée par une lamelle de bois flexible sur laquelle s'appuie la lèvre de l'exécutant. C'est la lèvre qui remplace la rasette des tuyaux d'orgue à anche. L'instrument porte des trous comme la flûte et le flageolet.

Les instruments de cuivre possèdent une embouchure spéciale, dite *embouchure de cor*. C'est une cavité conique ou hémisphérique contre laquelle l'exécutant applique les lèvres légèrement entr'ouvertes. Ce sont les lèvres qui jouent le rôle d'anches.

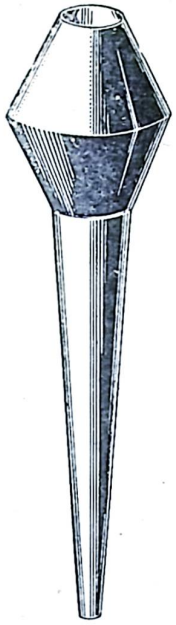


Fig. 335

CHAPITRE IV

LA VOIX — LE PHONOGRAPHE

L'organe de la *voix* est un instrument d'une admirable perfection. La *trachée*, qui joue le rôle d'un tuyau sonore, est un tube qui aboutit d'une part aux poumons, de l'autre au larynx, véritable organe de l'émission des sons.

Le larynx (fig. 336) est constitué par un certain nombre de cartilages assemblés par différents muscles et des tendons. Les muscles, grâce à l'action qu'ils exercent sur les cartilages peuvent changer dans une certaine mesure la forme du larynx. En particulier, ils agissent sur deux membranes élastiques, les cordes vocales, fixées côte à côte à la base du larynx. Selon leur tension, les cordes vocales laissent subsister entre elles une fente plus ou moins large appelée la *glotte*. Quand l'air, chassé par les poumons, passe dans la glotte, il entre en vibration comme s'il passait entre les lèvres d'un tuyau d'orgue, pourvu toutefois que les cordes vocales soient suffisamment tendues. Le nombre de vibrations correspondant au son émis varie avec la tension des cordes vocales. L'égalité et la douceur de la voix dépendent de la régularité de la tension des cordes vocales. La promptitude et la facilité avec lesquelles l'appareil vocal s'adapte aux différents sons en fait le plus parfait des instruments de musique..

La formation des voyelles a attiré l'attention des savants. Wheatstone a le premier apporté la lumière dans cette question. Les voyelles peuvent être émises à une hauteur quelconque, et la différence du son tient à ce que, pour former une voyelle donnée on ajoute au son fondamental une ou plusieurs notes caractéristiques toujours les mêmes ; celles-ci changent avec la syllabe prononcée, mais elles ne dépendent ni de la hauteur du son fondamental, ni de la personne qui l'émet.

La bouche joue, par rapport à l'organe phonétique, le rôle de résonateur ; sa forme change à volonté, elle s'allonge ou se raccourcit selon le son prononcé. De cette façon, elle permet constamment à certains harmoniques du son fondamental de prendre naissance

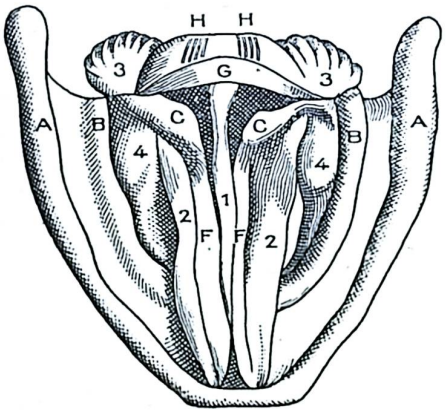


Fig. 336

Les muscles sont désignés par des chiffres, les cartilages par des lettres. 1. Crico-thyroïdien; 2. Thyro-aryténoïdien ; 3. Crico-aryténoïdien postérieur; 4. Crico-arténoïdien latéral; 5. Aryténoïdien transverse et oblique. A. Cartilage (corps thyroïde); B. Cricoïde; C. Aryténoïdes; F. Cordes vocales inférieures; H. Ligaments crico-aryténoïdiens. Le crico-thyroïdien tend les cordes vocales. Le thyro-aryténoïdien les relâche. Le crico-aryténoïdien postérieur ouvre la glotte. Le crico-aryténoïdien latéral et l'aryténoïdien postérieur la retrécissent ou la ferment.

plutôt que d'autres. C'est ainsi qu'en prononçant successivement les voyelles *o, a, é, i,* on constate que la bouche se rétrécit. Du reste on remarque facilement que, dans le chant, il est plus aisé de prononcer certaines voyelles sur certaines notes que sur d'autres. On prononce plus aisément *a* et *o* sur les notes graves, et *i* sur les notes aiguës. Nous avons dit dans le chapitre précédent comment Helmholtz avait reconstitué les voyelles en combinant les sons de plusieurs diapasons. Quant à la production des consonnes, elle est due à la superposition de notes secondaires au son fondamental.

Phonographe. — Le phonographe, inventé par Charles Cros et par Edison, est un appareil qui permet

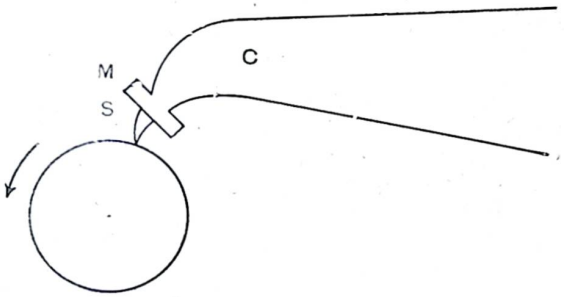


Fig. 337

d'enregistrer les sons, quels qu'ils soient, de manière à pouvoir les reproduire exactement au bout d'un temps quelconque.

Son principe est basé sur la remarque suivante :

Si on fait résonner un bruit quel qu'il soit devant une membrane flexible, cette membrane se met à vibrer en concordance avec l'air au contact duquel elle se trouve. Mais, réciproquement, si on fait vibrer une membrane, l'air ambiant participe à son mouvement. Il s'ensuit que si on peut faire reproduire à une membrane tous les mouvements que des vibrations sonores lui ont imprimés, ces vibrations sonores elles-mêmes seront reproduites.

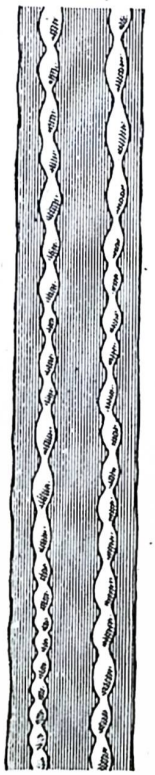


Fig. 338

L'appareil de M. Edison se compose essentiellement d'une membrane élastique M, tendue au fond d'une sorte de cornet acoustique C et en contact par derrière avec un stylet mobile S auquel elle imprime en vibrant une série d'allées et venues. Le stylet lui-même appuie à la surface d'un cylindre enduit de cire. Le cylindre est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe et, en même temps, d'un mouvement de déplacement latéral uniforme.

La membrane restant fixe et le filet étant appliqué sur le cylindre, la pointe creuse dans la cire un sillon régulier en hélice. Mais, si la membrane entre en mouvement parce qu'elle participe aux vibrations sonores de l'air ambiant, le stylet n'appuie plus uniformément sur le cylindre ; et, au lieu de tracer un sillon régulier, il creuse une série de trous plus ou moins profonds, plus ou moins longs et plus ou moins rapprochés comme l'indique l'agrandissement de la figure 338. Le son, la parole ou la musique se trouvent ainsi enregistrés.

Supposons maintenant qu'on ait durci, par un procédé convenable, la cire ainsi impressionnée, et qu'on replace le stylet dans le sillon au point de départ; si on fait tourner l'appareil dans le même sens que la première fois, le stylet (qu'on a pu du reste remplacer par une pointe mousse) repasse dans tous les trous et subit une série de petites secousses qui se transmettent

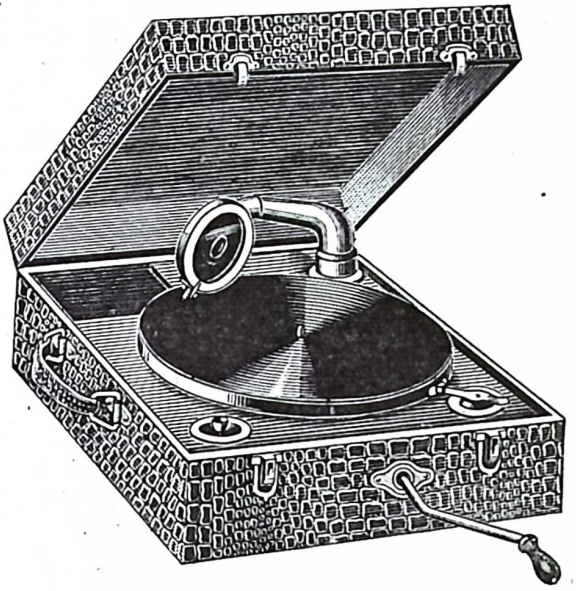


Fig. 339

à la membrane et reproduisent ainsi les vibrations dont celle-ci était animée au moment de l'enregistrement. Les vibrations se communiquent par le cornet à l'air ambiant, et l'auditeur entend le son reproduit dans ses moindres détails.

On remplace souvent le cylindre par un disque en ébonite sur lequel le stylet décrit une courbe en spirale.

Vibrations produites par l'écoulement d'un fluide. — Les expériences de Savart sur l'écoulement des liquides à travers les orifices étroits démontrent que le frottement du fluide sur les bords de l'orifice s'exerce suivant un certain rythme et peut produire une vibration sonore.

Si, par exemple, on remplit d'eau un tube dont l'extrémité est fermée par une plaque métallique percée d'un trou, et si le diamètre de ce trou est égal à l'épaisseur de la plaque, quand l'eau coule par le trou dans le tube, il en résulte un son musical. Le son est dû à l'intermittence de l'écoulement qui détermine une vibration de la colonne liquide.

La même intermittence s'observe dans le passage des gaz à travers un tube, ou dans leur frottement sur des obstacles quelconques. C'est ainsi que le vent siffle ou gronde dans les branches des arbres, à travers les interstices d'une cloison, d'une porte ; les balles et les boulets fendent l'air en produisant un bruit caractéristique.

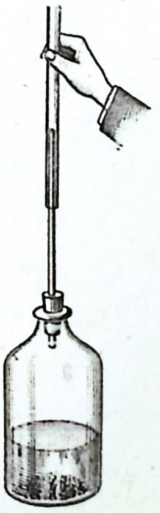


Fig. 340

On peut déterminer de semblables vibrations en établissant au moyen d'une flamme, un courant gazeux dans un tube. L'harmonica chimique (fig. 340) en est un exemple. Cet appareil se compose essentiellement d'un flacon à hydrogène surmonté d'un tube à dégagement. On enflamme l'hydrogène à l'extrémité du tube à dégagement et on introduit la flamme dans un tube de verre assez large. L'air contenu dans ce tube se met à vibrer, ce que l'on reconnaît aux mouvements de la flamme, et on entend un son dont la hauteur varie avec la longueur du tube et la position que la flamme occupe dans ce dernier.

Problèmes.

1. — Une lame métallique dont l'une des extrémités est encastrée fait 348 vibrations par seconde, quand, écartée de sa position d'équilibre, on la laisse osciller librement. On demande :

1° la note qui sera perçue ;
2° la longueur d'onde correspondante ;
3° la longueur de corde qui donnerait la même note sachant que 1 mètre de la même corde, avec la même tension, donne le la normal (435 vibrations).
Vitesse de son 331 mètres.

Solution

Le la donne 435 vibrations

le do $\frac{435 \times 3}{5} = 261$

Le rapport $\frac{348}{261} = \frac{4}{3}$

La note est donc le *fa*.

2) La longueur d'onde $l = \frac{n}{v} = \frac{348}{331} = 1{,}051$ m

3) La formule des ondes vibrantes $n = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{gT}{\pi d}}$

d'une part $435 = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{gT}{\pi d}}$

d'autre part $331 = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{gT}{\pi d}}$

En divisant membre à membre

$$\frac{435}{331} = l$$

$$l = \frac{435}{331} = 1{,}31 \text{ m.}$$

2. — En passant sur un pont, on veut savoir son élévation au-dessus du niveau de la rivière. Pour cela, on laisse tomber une pierre du haut du pont dans la rivière et on mesure avec un chronomètre l'intervalle de temps écoulé entre le moment où l'on a lâché la pierre et le moment où l'on a entendu le bruit de la chute dans l'eau. On a trouvé 4 sec. 23.
Quelle est la hauteur du pont ?
Accélération due à la pesanteur, 9,80 m/s.
Vitesse du son, 340 mètres par seconde.

(Baccal. Besançon).

Solution

Soit x la hauteur du pont.

On a $x = \frac{1}{2} g t^2$

t étant la durée de la chute en secondes.

D'autre part

$$t + \frac{x}{340} = 4{,}23.$$

d'où $t = 4{,}23 - \frac{x}{340}$

et $x = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \left(4{,}23 - \frac{x}{340}\right)^2$

$$x = 4{,}9 \frac{(4{,}23 \times 340 - x)^2}{340^2}$$

$$340^2 x = 4{,}9 (4{,}23 \times 340)^2 - 4{,}9 \times 2 \times 4{,}23 \times 340 x + 4{,}9 \times x^2$$

ou $4{,}9 x^2 - (9{,}8 \times 4{,}23 \times 340 + 340^2) x + 4{,}9 (4{,}23 \times 340)^2 = 0$

$$4{,}9 x^2 - 129694{,}36 x + 4{,}9 \times 2071429{,}24 = 0$$

Il suffit de résoudre cette équation.

OPTIQUE

CHAPITRE PREMIER

LA LUMIÈRE — PROPAGATION — PHOTOMÈTRES

Définitions. — Le fond de l'œil est tapissé par une membrane appelée rétine formée par l'épanouissement du nerf optique. Les impressions reçues par cette membrane sont transportées au cerveau qui les transforme en sensations.

On donne *le nom de lumière à la cause qui provoque ces sensations*, et l'optique étudie les phénomènes lumineux.

On sait aujourd'hui que c'est le résultat de l'émission par le corps lumineux de particules lumineuses appelées *photons* associées à une onde dite *onde-pilote*. Cette structure est postulée du fait que la lumière est *pesante*, qu'elle subit l'attraction newtonienne et que les ondes lumineuses interfèrent, c'est-à-dire qu'elles se rencontrent en donnant lieu à des phénomènes d'interférence.

Tous les corps visibles émettent de la lumière, c'est-à-dire sont le centre du mouvement vibratoire particulier que nous appelons lumière. Cette lumière peut provenir directement d'eux-mêmes, comme c'est le cas pour le soleil, les étoiles, le feu, la flamme de nos appareils d'éclairage, etc., on dit alors que ces corps sont lumineux par eux-mêmes, ce sont des *sources de lumière*. Ou bien elle est empruntée directement ou indirectement à des sources de lumière, et les corps ne font que la renvoyer, la réfléchir, la diffuser, comme c'est le cas pour la lune et les planètes qui nous renvoient la lumière du soleil, ainsi que pour la plupart des objets qui nous entourent et qui cessent d'être visibles dès qu'ils ne sont plus exposés aux radiations d'une source de lumière.

Lorsqu'un corps laisse passer la lumière, mais sans qu'on puisse distinguer les objets au travers, on dit qu'il est *translucide*. Un corps qui n'est ni transparent, ni translucide, est dit *opaque*.

Propagation de la lumière. — Par définition, un corps opaque empêche la lumière de se propager dans une certaine direction. On constate que, si une source de lumière, assez petite pour être considérée pratiquement comme un point et un objet opaque, une carte de visite p. exemple, sont placés dans le même milieu, la lumière cesse de se propager au delà de la surface du corps opaque sur toute droite joignant un point de cette surface au point lumineux.

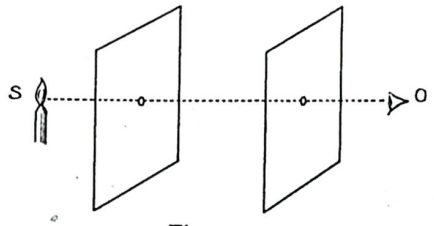


Fig. 341

Ce corps opaque est appelé écran.

Si nous interposons plusieurs écrans percés d'un trou d'épingle entre notre œil O et une source lumineuse S, on constate que cette source n'est visible pour notre œil que si ce dernier, les trous et la source sont en ligne droite (fig. 341.

De cette expérience on peut donc conclure que: *Dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite.*

On vérifie encore cette loi, sur laquelle est basée toute l'optique géométrique, en laissant pénétrer dans une chambre noire une certaine quantité de rayons solaires par un petit trou pratiqué dans un volet. Ce faisceau illumine les poussières sur son passage et dessine une ligne droite.

Rayon lumineux. — On nomme rayon lumineux une droite telle que S O suivant laquelle se propage la lumière.

Faisceau lumineux. — Un faisceau lumineux est un ensemble de rayons lumineux.

Le faisceau est dit *divergent* si l'ensemble des rayons émanent d'un même point et se propagent dans des directions différentes. *Tels sont les rayons émanant d'une bougie.* Il est dit *parallèle* si les rayons se propagent suivant une direction donnée. Tels sont *les rayons solaires.*

Enfin il est dit *convergent* si l'ensemble des rayons se dirigent vers un même point. Tels sont les rayons qui après avoir *traversé une lentille, convergent vers le foyer.*

Ombre. — Cas d'un point lumineux. — Soient S une source lumineuse assez petite pour être assimilée à un point lumineux, O une sphère opaque et, en arrière de celle-ci, un écran E. (fig. 342).

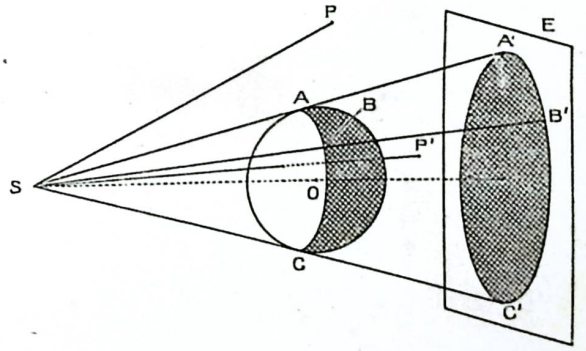


Fig. 342

Si nous considérons l'ensemble des rayons tels que S A, S B, S C, tangents à cette sphère, ils constituent une surface conique qui coupe l'écran E suivant un cercle A' B' C' (l'écran E étant perpendiculaire à la direction S O). Tout point P pris à l'extérieur de ce cône S A' B' C' reçoit les rayons émanant de S, il est dit en *pleine lumière.*

Tout point P' pris à l'intérieur de ce cône ne peut recevoir de rayons émanant de S : il est dit dans *l'ombre.*

De même l'écran E se trouve divisé par le cercle A′ B′ C′ en deux régions, l'une extérieure située en pleine lumière, l'autre intérieure dans l'ombre.

L'ensemble des points P′ situés à l'intérieur de A B C A′B′C′ constitue *l'ombre propre* de la sphère O.

La surface du cercle A′ B′ C′ est appelée *l'ombre portée* sur l'écran E.

Cas d'une source quelconque. — Remplaçons le point lumineux S par une bougie A B et considérons les rayons tangents à la sphère, menés par les points A et B (fig. 343).

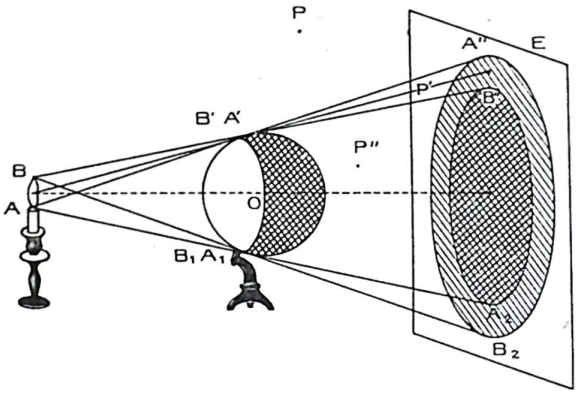


Fig. 343

Tout point P pris à l'extérieur de $A' A_1 A'' B^2$ est en *pleine lumière*. Tout point P′ pris à l'intérieur de A′ A″ B′ B″, A_1 A_2 B_1 B_2 reçoit d'autant moins de lumière de A B qu'il est situé plus près du rayon B′B″, A_1 A_2 on dit qu'il est dans la *pénombre*.
Tout point P″ pris à l'intérieur de B′ B″ A_1 A_2 est dans l'*ombre*.

L'espace se trouve donc divisé en trois régions :

Une région de lumière, une de pénombre et une d'ombre.

Remarque. — Si le corps lumineux est une sphère lumineuse plus grande que la sphère opaque, on voit, comme l'indique la figure 344 que la région d'ombre est un cône appelé *cône d'ombre*

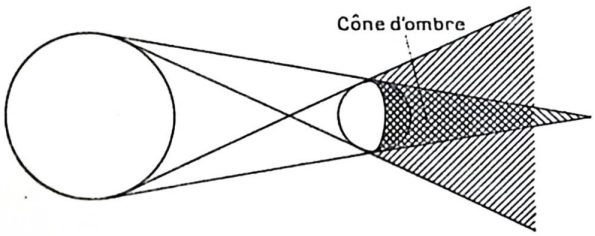


Fig. 344

Application. — Les éclipses sont des conséquences de la théorie des ombres.

Eclipse de la lune. — Si la lune pénètre dans le cône d'ombre projeté par la terre, il se produit une éclipse de lune (fig. 345).

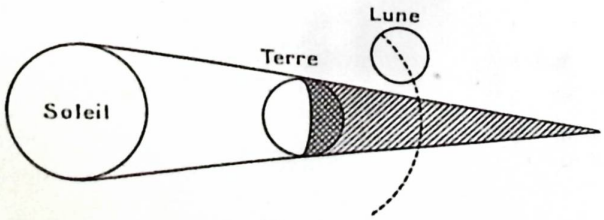


Fig. 345

Eclipse de soleil. — Si le cône d'ombre projeté par la lune touche la terre il se produit pour les points balayés par le cône d'ombre une éclipse totale de soleil ; pour les autres points placés dans la pénombre il se produit une éclipse partielle de soleil (fig. 346).

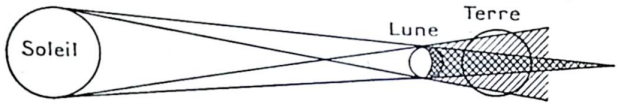


Fig. 346

Eclipse annulaire de soleil. — Si le prolongement du cône d'ombre projeté par la lune atteint la terre il y a pour ces points atteints, éclipse annulaire de soleil (fig. 347).

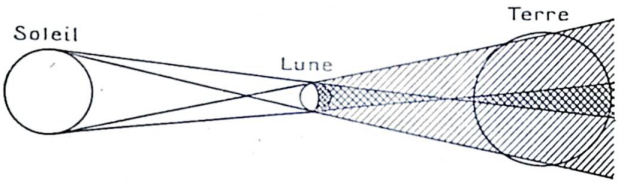


Fig. 347

Image donnée par les petites ouvertures. — Photographie sans objectif. — Si nous perçons un petit trou dans le volet d'une chambre noire, nous voyons se peindre sur le mur opposé, l'image renversée des objets situés à l'extérieur en face de l'ouverture.

Le rayon lumineux émané d'un point A de l'un de ces objets envoie par l'ouverture un faisceau lumineux très dilué qui coupe le mur opposé suivant une surface très petite, *a*, qui peut être considérée comme l'image du point A (fig. 348).

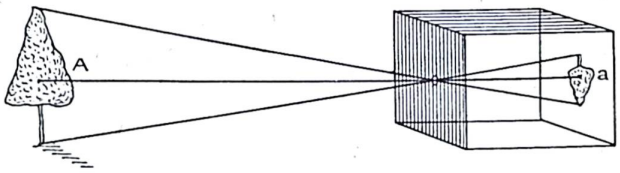


Fig. 348

Vitesse de la lumière. — L'expérience montre que la lumière se propage d'un mouvement uniforme dont la vitesse varie avec la nature du milieu traversé.

Dans l'air : V = 300.000 kilomètres à la seconde.

Dans l'eau : $V' = \frac{V \times 3}{4}$

Dans le verre : $V'' = \frac{V \times 2}{3}$

Photométrie. — La photométrie a pour but la comparaison des intensités lumineuses de deux sources.

Loi de Képler. — *Dans un milieu homogène parfaitement transparent, la quantité de lumière reçue par une surface S donnée est inversement proportionnelle au carré de la distance de cette surface à la source éclairante.*

Soient O un point lumineux, A B et C D les sections par le plan de la figure de deux surfaces planes parallèles représentant les sections d'un cône C O D aux distances O B et O D du sommet O (fig. 349).

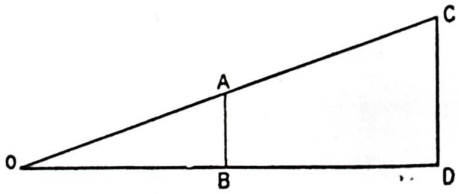


Fig. 349

Les sections du cône sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet.

$$\frac{\text{section A B}}{\text{section C D}} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OD}^2}$$

Or, toute la lumière qui frappe l'écran A B, frappera aussi l'écran C D en vertu de la loi de la propagation rectiligne de la lumière ; c'est-à-dire que les deux écrans A B et C D reçoivent la *même quantité de lumière*. La quantité de lumière reçue par unité de surface de l'un et de l'autre de ces deux écrans est inversement proportionnelle à la surface des deux sections. En effet, soit Q la quantité de lumière reçue par unité de surface de A B, et Q′ la quantité reçue par unité de surface de C D ; soit enfin R la quantité totale de lumière reçue aussi bien par A B que par C D ; on a :

$$R = Q \times \text{section A B}$$

$$R = Q' \times \text{section C D}$$

$$\frac{R}{Q} = \text{section A B}$$

ou

$$\frac{R}{Q'} = \text{section C D}$$

et en divisant membre à membre

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\text{section A B}}{\text{section C D}} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OD}^2}$$

ce qui démontre la loi.

Eclairement. — Intensité lumineuse. — L'œil permet de reconnaître que deux surfaces sont également *éclairées* ou que l'une est plus éclairée que l'autre.

Cette faculté permet de définir l'intensité lumineuse, par comparaison.

On dit que deux sources de lumière ont la même *intensité lorsque, placées à la même distance d'un même écran, elles y produisent le même éclairement.*

On peut définir, en partant de là, une intensité multiple d'une autre : on dit qu'une source lumineuse a une intensité double, triple, etc. d'une autre, lorsqu'elle produit, sur un même écran et à la même distance, un éclairement égal à celui que produisent deux, trois, etc. sources lumineuses de même intensité que cette dernière.

Dans ces conditions, *l'intensité absolue peut être définie par l'éclairement produit sur une surface placée à l'unité de longueur de la source.*

Théorème. — *Si deux sources lumineuses d'intensité* I *et* I′ *produisent le même éclairement sur un écran placé à la distance* D *de la première source et* D′ *de la seconde, les intensités sont proportionnelles aux carrés des distances à l'écran.*

En effet, soit E l'éclairement produit par les deux sources sur l'écran, I et I′ étant, par définition, les éclairements produits à l'unité de distance, on a, pour la première source :

$$\frac{E}{I} = \frac{1}{D^2}$$

et pour la seconde :

$$\frac{E}{I'} = \frac{1}{D'^2}$$

En divisant membre à membre ces deux égalités, on a :

$$\frac{I}{I'} = \frac{D^2}{D'^2}$$

Photomètres. — Ce théorème fournit une méthode de comparaison des intensités lumineuses.

Le *photomètre de Foucault*, par exemple, consiste essentiellement en un écran translucide A B que l'expérimentateur observe par transparence ; un autre écran opaque C D, perpendiculaire au premier, divise l'espace en deux parties (figure 350).

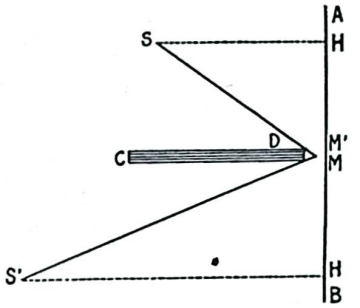


Fig. 350

On dispose les deux sources S et S′ à comparer de part et d'autre de l'écran C D et on règle leurs distances S H et S′H′ à l'écran A B de manière que l'expérimentateur voie celui-ci également éclairé dans ses deux moitiés M A et M′B. L'écran C D empêche la source S d'éclairer la partie M B, et la source S′ d'éclairer la partie M′A. Il suffit de mesurer les distances S H et S′H′ pour avoir l'intensité de l'une des sources par rapport à l'autre.

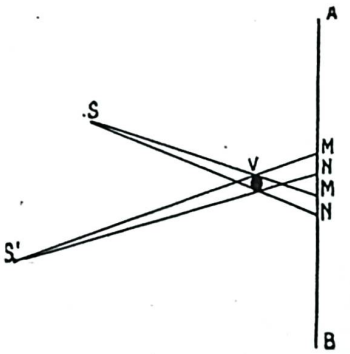


Fig. 351

On a constaté que l'observation est plus facile quand on laisse une petite bande M M′ éclairée à la fois par les deux sources. Ce résultat s'obtient aisément en écartant légèrement l'écran C D de l'écran A B.

Le *photomètre de Rumford* consiste simplement en un écran translucide et une verge verticale opaque V portant ombre sur cet écran (figures 351 et 352).

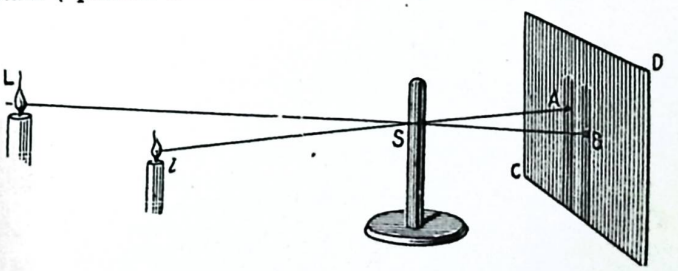


Fig. 352

La source S projette sur l'écran l'ombre M N, la source S′ projette l'ombre M′N′. Or, la partie M N de l'écran n'est éclairée que par la source S′, la partie M′N′ n'est éclairée que par la source S, tandis que le reste de l'écran est éclairé par les deux sources en même temps.

Donc, quand les deux ombres paraissent également foncées, c'est que les sources lumineuses produisent le même éclairement sur l'écran.

Le *photomètre à tache d'huile* se compose d'un simple écran de papier blanc portant une tache d'huile en son centre. Quand l'écran est également éclairé sur ses deux faces, la tache devient indistincte. Avec ce photomètre on place donc les sources lumineuses de part et d'autre de l'écran, et non du même côté comme avec les précédents.

Unités utilisées en optique.

1° **Intensité :** L'unité est la **bougie décimale** (b d) qui a une intensité égale à 1/20 de celle de l'étalon Violle (loi d'avril 1919).

L'étalon Violle est représenté par l'intensité de la lumière émise par une aire de 1 centimètre carré prise à la surface d'un bain de platine rayonnant normalement à sa température de solidification. (1775°).

Le *Carcel*, autrefois utilisé en France, vaut 9,61 bd.
Le *Hefner*, employé en Allemagne, vaut 0,895 bd.
Le *Vernon-Harcourt* (Angleterre et U.S.A.): 9,95 bd.

2° **Flux lumineux :** L'unité est le **lumen** (lu) : c'est le flux lumineux émanant d'une source uniforme de dimensions très petites et d'intensité 1 bd, rayonné en 1 seconde dans l'angle solide qui découpe une aire de 1 mètre carré sur la sphère de 1 mètre de rayon ayant pour centre la source.

3° **Eclairement :** L'unité est le **lux** (lx) : c'est l'éclairement de la surface de 1 mètre carré recevant chaque seconde un flux de 1 lu uniformément réparti.

Le **phot** vaut 10^4 lux ; le **foot candie** (Angleterre et U.S.A.) vaut 9,29 lux.

Problèmes

1. — A quelle distance d'un écran faut-il placer une flamme pour qu'une autre flamme d'intensité lumineuse triple, placée à 0,60 m. plus loin de cet écran, y produise le même éclairement ?

Solution

Soit x la distance cherchée, nous avons :

$$\frac{I}{x^2} = \frac{3I}{(x + 60)^2}$$

d'où : $3x^2 = x^3 + 120x + 3600$

ce qui donne :

$$2x^2 - 120x - 3600 = 0$$

$$\text{et} \quad x = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 + 2 \times 60^2}}{2}$$

d'où $x = 30(1 + \sqrt{3})$ cm. = 81,96 cm.
l'autre solution ne convenant pas.

2. — Une lampe et une bougie sont distantes de 4 m. 15 ; leurs intensités sont dans un rapport de 6 à 1. A quelle distance de la bougie doit-on placer un écran perpendiculaire aux rayons, sur la ligne qui joint les deux sources de lumière, pour qu'il soit également éclairé ?

Solution

Soit x la distance de l'écran à la bougie et y celle de l'écran à la lampe.

Nous pouvons écrire les deux équations :

$$(1)\ x + y = 415$$

$$\text{et} \quad (2)\ \frac{I}{x^2} = \frac{6I}{y^2}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{y}{x} = \sqrt{6}$$

$$\text{ce qui donne : } x(1 + \sqrt{6}) = 415$$

$$\text{et} \quad x = \frac{415}{1 + \sqrt{6}} = 1{,}20 \text{ m.}$$

d'où $y = 3{,}25$ m.

3. — Sachant que la lumière met 8 m. 16 s. pour aller du soleil à la terre, calculer la distance de ces deux astres.

Solution

La vitesse de la lumière est de 300.000 kilomètres à la seconde.

8 minutes 16 secondes font : 480 + 16 = 496 secondes.

Donc il y a entre la terre et le soleil une distance de :
300.000 × 496 = 148.800.000 kilomètres.

CHAPITRE II

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

Réflexion sur une surface plane. — Lorsqu'un rayon lumineux rencontre une surface plane polie, il est réfléchi. La surface polie reçoit le nom de *miroir*; le point où le rayon rencontre le miroir s'appelle *point d'incidence* ; la partie du rayon comprise entre le point de départ de ce rayon et le point d'incidence est le *rayon incident* ; à partir du point d'incidence le rayon prend le non de *rayon réfléchi*.

L'angle que fait le rayon incident SI (fig. 353) avec la normale IN (c'est-à-dire la perpendiculaire au plan du miroir au point d'incidence) est *appelé angle d'incidence* ($\hat{i}$).

L'angle que fait le rayon réfléchi I R avec cette normale est l'*angle de réflexion* ($\hat{r}$).

Le plan formé par le rayon incident et la normale s'*appelle plan d'incidence*.

Lois de la réflexion.

1° *Le rayon réfléchi est dans le plan de l'angle d'incidence.*

2° *L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.*

Ces lois se vérifient par leurs conséquences. Cependant il est possible d'en obtenir une vérification directe. Dans une chambre noire on fait tomber un faisceau de rayons solaires sur un miroir plan disposé horizontalement et on place perpendiculairement à ce miroir un rapporteur de façon que le rayon incident soit dans le plan du rapporteur et le point d'incidence au centre *o* du rapporteur (fig. 354).

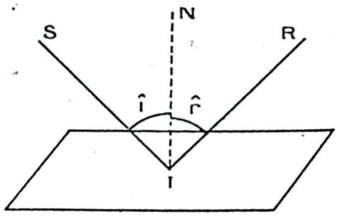


Fig. 353

Diffusion. — Une substance mate présente une infinité de petites aspérités qui peuvent être considérées comme autant de petits miroirs plans qui réfléchissent la lumière dans toutes les directions (fig. 355). La lumière ainsi réfléchie est dite diffusée.

C'est grâce à la *diffusion que nous voyons les objets qui nous entourent et qui ne sont pas lumineux par eux-mêmes.*

Image d'un point fournie par un miroir plan. — Les lois que nous venons d'énoncer étant supposées vraies, nous allons démontrer qu'un *miroir plan fournit d'un point une image qui est un point symétrique du premier par rapport au miroir.*

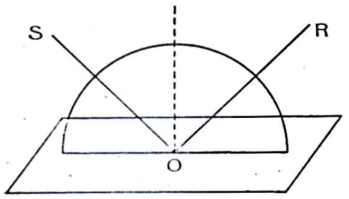


Fig. 354

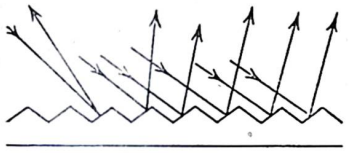


Fig. 355

Soient un miroir M M', A un point lumineux, A I un rayon incident, I N la normale, I R le rayon réfléchi (fig. 356). La première loi nous permet de représenter ces divers éléments en choisissant pour plan incident le plan de la figure.

Abaissons du point A la perpendiculaire A H au miroir, elle est parallèle à I N, et par conséquent elle est dans le plan de la figure. Prolongeons-la d'une longueur H A' = A H ; le point A' ainsi obtenu est le symétrique de A par rapport au miroir.

Je dis que le rayon réfléchi I R, prolongé, passe par A'. En effet, d'après la deuxième loi de la réflexion. les angles A I N et N I R sont égaux.

$$A\,I\,N = N\,I\,R$$

Cette égalité entraîne celle des angles

$$I\,A\,H = I\,A'\,H$$

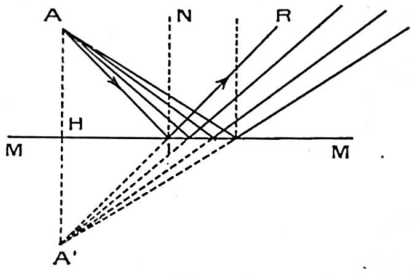


Fig. 356

ce qui fait que e triangle I A A' est isocèle. Comme I H est hauteur, elle est aussi médiane. Donc A et A' sont symétriques.

Cette démonsatrtion est indépendante de la position du point I. Il s'ensuit que tous les rayons incidents émanés du point A donnent naissance à des rayons réfléchis dont le prolongement passe par A'. Le faisceau de rayons réfléchis se comporte donc exactement comme un faisceau de rayons émanés directement du point A'. Il s'ensuit que si on place l'œil sur le trajet de ce faisceau, on voit un point en A', c'est l'image de A.

Image d'un objet quelconque. — De la loi de formation de l'image d'un point on déduit celle de la formation de l'image d'un objet quelconque. En effet, l'image de chacun des points de l'objet étant le symétrique de ce point par rapport au miroir, l'image de l'objet qui est l'ensemble des images des différents points de l'objet, est elle-même le symétrique de celui-ci (fig. 357).

Il faut se souvenir à ce propos que le symétrique d'un solide quelconque a toutes ses dimensions et tous ses angles égaux à ceux du solide, mais n'est pas égal à ce solide : il ne lui est pas superposable, ses éléments étant disposés en sens inverse. Ainsi une personne qui se mire dans une glace voit son oreille droite à la place de la gauche et réciproquement.

Les images ainsi formées n'ont pas d'existence réelle, elles n'existent que pour notre œil qui recueille les faisceaux lumineux et les concentre. On les appelle *images virtuelles.* L'image d'une droite A B est une droite A' B' symétrique de A B par rapport au miroir.

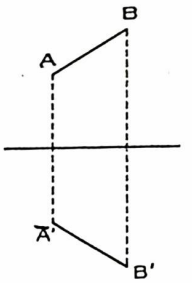


Fig. 357

Réflexions produites par deux miroirs. — Deux cas peuvent se présenter :

1° Les deux miroirs plans sont parallèles ;

2° Ils font un angle.

Supposons d'abord deux miroirs plans parallèles M et M' et un point lumineux A entre eux (fig. 358).

Le point A fournit dans le miroir M' une image A_1 symétrique de A par rapport au miroir. Mais un rayon réfléchi une première fois sur le miroir M' se comporte absolument comme s'il venait du point A_1 et, par conséquent, quand il se réfléchira sur le second miroir M, en I_2 par exemple, il semblera venir du symétrique de A_1 par rapport à M, c'est-à-dire de A_2. Pour la même raison, les rayons qui auront subi trois réflexions, tels que le rayon I_3 I_4, sembleront venir du symétrique A_2 par rapport à M', c'est-à-dire de A_3.

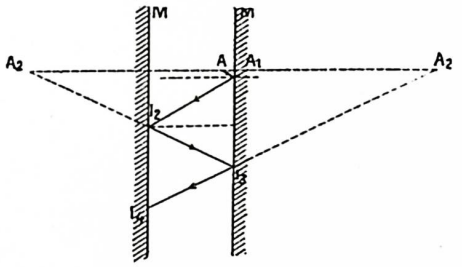


Fig. 358

Ce raisonnement nous montre que les rayons issus du point A donnent, après une première réflexion sur le miroir M', une série infinie d'images de plus en plus éloignées du point A. Le même raisonnement s'applique aux rayons émanés de A et se réfléchissant pour la première fois sur le miroir M : ils fournissent eux aussi une série infinie d'images intercalées parmi les précédentes.

Si au lieu d'un point A, c'est un objet de forme quelconque qui se trouve placé entre les deux miroirs, les deux séries d'images ne sont pas identiques, les unes reproduisant une des faces de l'objet, et les autres une autre.

Supposons maintenant que les miroirs forment un angle. Soient, par exemple, les deux miroirs O M et O M' (fig. 359). Soit un point A placé dans l'angle, et envisageons d'abord les images formées après une première réflexion sur le miroir O M. Ces images seront successivement :

A_1	symétrique de	A	par rapport	à	O M
A_2	«	A_1	«	«	O M'
A_3	«	A_2	«	«	O M
A_4	«	A_3	«	«	O M'
A_5	«	A_4	«	«	O M

Un rayon issu du point A, et se réfléchissant d'abord sur O M, suivra par exemple le parcours A I_1 I_2 I_3 I_4 R. Il faut remarquer que, tant que les images successives se forment en dehors de l'angle opposé par le sommet à M O M', le rayon réfléchi qui semble venir de l'une de ces images rencontre toujours l'autre miroir pourvu que la surface de ce dernier soit suffisamment prolongée. Ainsi le rayon I_4 R qui semble venir de A_4 irait rencontrer le miroir O M. Mais dès qu'une image se forme dans l'angle opposé par le sommet à l'angle des miroirs, comme A_5 par exemple, les rayons réfléchis,

tels que C D, qui semblent venir de cette image ne peuvent plus rencontrer l'autre miroir et, par conséquent, cette image A_5 est la dernière de la série.

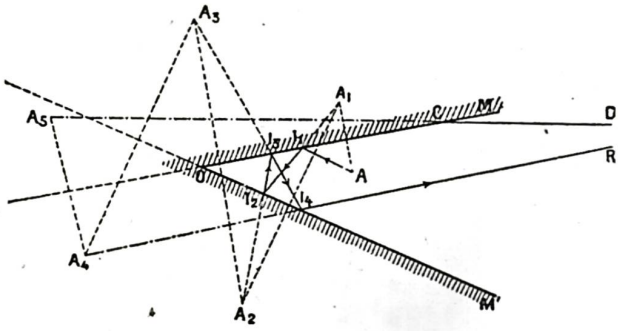


Fig. 359

Naturellement, il y a une deuxième série d'images provenant des rayons qui se sont d'abord réfléchis sur O M'.

Le cas où les deux miroirs sont à angle droit est intéressant (fig. 360).

En effet, dans ce cas, le point A a une image A_1 symétrique de A par rapport à O M, résultant d'une première réflexion dans le miroir O M; il a une image A', symétrique par rapport à O M', résultant d'une première réflexion dans le miroir O M'. A chacune de ces deux images A_1 et A', succède une image symétrique de A_1 et de A' par rapport à O M' pour A_1, et à O M pour A'. Or ces deux symétriques de A_1, et de A' coïncident en A_1', point symétrique de A par rapport au point O. Donc, un système de deux miroirs à angle droit ne fournit que trois images (dont une double) d'un même point.

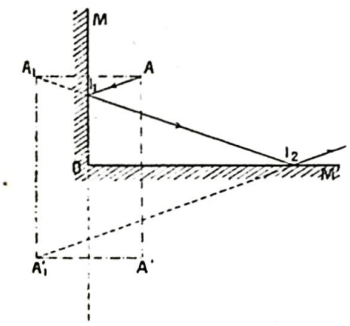


Fig. 360

Cette coïncidence de deux images d'ordre *n* peut se produire pour d'autres angles que l'angle droit ; il suffit pour cela que l'angle des deux miroirs soit contenu un nombre pair de fois dans 360° (ou 4 droits).

On tire parti de ce phénomène dans le kaléidoscope, appareil composé essentiellement de deux miroirs M et M' faisant entre eux un angle de 60° et entre lesquels on a placé de petits morceaux de verre colorés. Ceux-ci forment avec leurs images, au nombre de 5, des rosaces régulières du plus bel effet (fig. 360 bis).

Problèmes

1. — L'œil étant placé en un point o devant un miroir de forme rectangulaire, dans quelle région de l'espace doit se trouver un objet pour que son image soit visible du point O (fig. 361).

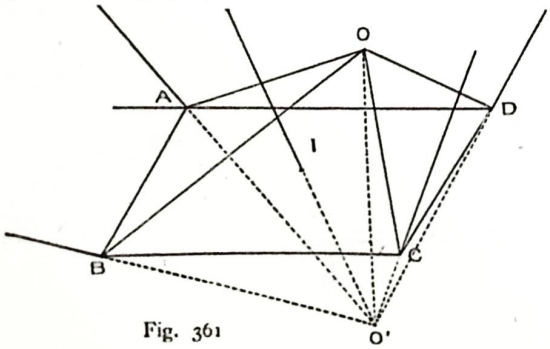


Fig. 361

Solution

1. — L'image de O est O' symétrique de O par rapport au miroir. — Un rayon incident tel que S I se réfléchit en I O et S I prolongé passe par O'. Il faut donc que l'objet sont placé dans la région de l'espace située au *dessus du miroir* et limitée par la pyramide O' A B C D. — Cette région de l'espace s'appelle *champ du miroir*.

2. — On donne 2 miroirs plans parallèles M et N dont la distance est d ; un point lumineux S est placé sur la droite A B perpendiculaire aux miroirs à une distance a de A. Un autre point o est placé aussi à une distance a du miroir M et à une distance h de S. On demande en quels points ces 2 points sont rencontrés (1°) par un rayon lumineux parti de S se réfléchissant sur N et passant par o (2°) par un rayon parti de S se réfléchissant sur N puis sur M et passant par o. Les points du miroir seront définis par leur distance à A et B (fig. 362).

Réponses

$$\begin{cases} BI = \dfrac{h}{2} \\ AD = \dfrac{(2d - a)h}{2a} \\ CB = \dfrac{(d - a)h}{2d} \end{cases}$$

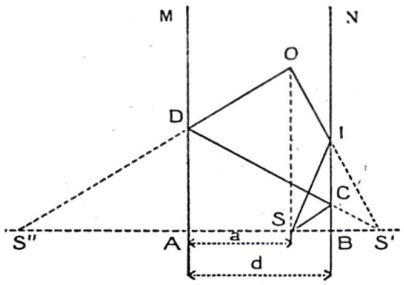


Fig. 362

3. — Démontrer que si un rayon lumineux S I rencontre successivement les faces de deux miroirs plans M et N faisant un angle α. le rayon réfléchi fait avec la direction du rayon incident S I un angle 2α (fig. 363).

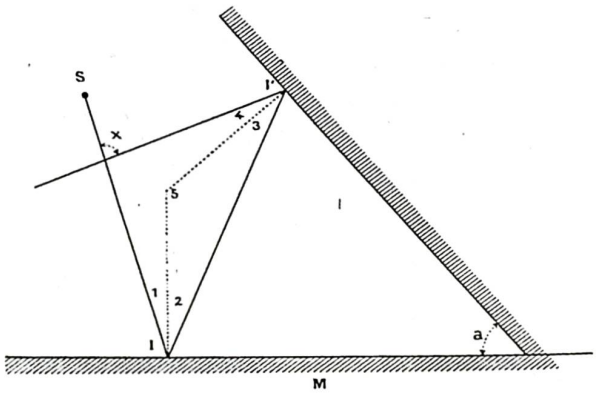


Fig. 363

Solution

Considérons un rayon SJ que se réfléchit suivant I I' sur M et I' R sur N. Désignons par x l'angle demandé

$$\hat{x} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{2} + \hat{3} + \hat{2} + \hat{3}$$

$$\text{Mais } \hat{2} + \hat{3} = 180° - 5 = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$$

$$\hat{x} = 2\alpha$$

CHAPITRE III

MIROIRS SPHÉRIQUES

Miroir sphérique. — On *donne le nom de miroir sphérique à toute surface sphérique réfléchissante.*

Le miroir est dit concave ou convexe selon que la face réfléchissante est tournée ou non vers le centre O de la sphère à laquelle appartient le miroir. O est le centre de courbure et OA le *rayon de courbure* (fig. 364).

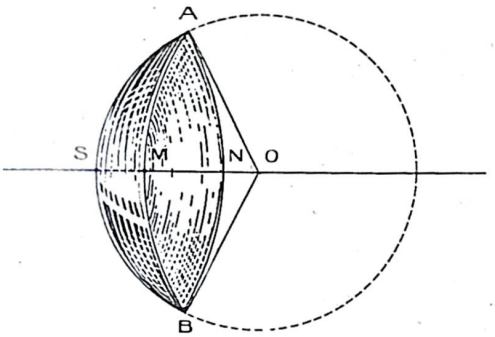


Fig. 364

On appelle *ouverture du miroir* l'angle AO B sous lequel on voit du centre de courbure le diamètre de la base.

Dans l'étude des miroirs sphériques nous ne considérerons que des miroirs de faible ouverture et de grand rayon de courbure.

On appelle *axe principal du miroir,* la perpendiculaire O S abaissée du centre de courbure sur la base du miroir. Il rencontre la sphère en un point S que l'on appelle *sommet du miroir.*

On appelle *axe secondaire* tout autre rayon de la sphère.

Miroirs concaves. — *Foyer principal, foyers secondaires, plan focal.* Si nous dirigeons un miroir concave de façon que son axe principal soit parallèle aux rayons solaires ; ceux-ci après réflexion donnent un faisceau de rayons convergents ainsi que nous pouvons le constater en promenant un petit écran E devant le miroir (fig. 365). Lorsque la tache produite sur cet écran est la plus petite possible elle est très brillante et très chaude ; c'est l'image du soleil.

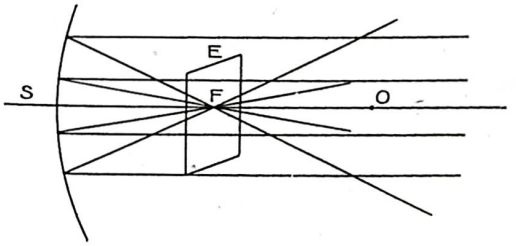


Fig. 365

Le point F où elle se forme est appelé *foyer principal* du miroir et on peut constater qu'il se trouve *au milieu de* S O. La distance S F est appelée *distance focale* on a

$$SF = \frac{SO}{2} = f.$$

Si maintenant nous dirigeons le miroir de façon que la direction des rayons solaires soit quelconque on constate que la tache se forme en un point F_1 situé sur l'axe secondaire à une distance SF_1 sensiblement égale à F et qu'on appelle *foyer secondaire* (fig. 366).

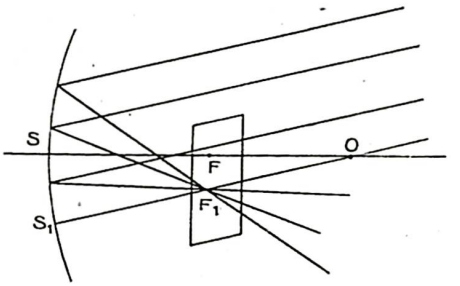


Fig. 366

En inclinant le miroir dans diverses positions nous constatons que tous les foyers secondaires se trouvent dans le plan perpendiculaire à l'axe principal et qu'on appelle *plan focal.*

L'application des lois de la réflexion conduit aux mêmes résultats.

En effet, considérons un miroir concave d'axe principal C O et un rayon S I parallèle à cet axe principal (fig. 367), il se réfléchit en I suivant I R comme sur un miroir plan tangent en I au miroir en faisant un angle $\widehat{r} = i$.

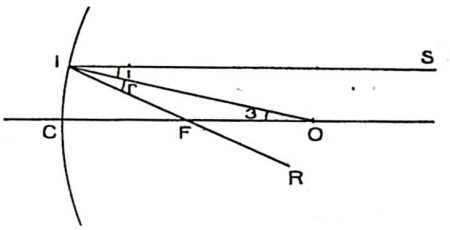


Fig. 367

Dans le triangle I F O l'angle $\widehat{3}$ est égal à l'angle i comme alterne interne, il en résulte que ce triangle est isoscèle et que

$$IF = FO$$

Mais comme nous considérons des miroirs de faible ouverture et de très longs rayons de courbure I F *est sensiblement égal à* CF, *on peut donc dire que F est le milieu de CO.*

On démontrerait de même, que le foyer secondaire F_1 (fig. 368) est situé au milieu de OC_1.

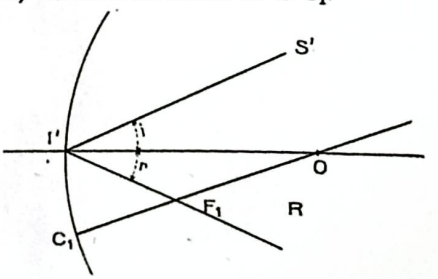


Fig. 368

Principe du retour inverse des rayons. — L'expérience montre et l'application des lois de la réflexion vérifie que si F est un point lumineux le faisceau diver-

gent des rayons incidents se réfléchit suivant un faisceau cylindrique composé de rayons réfléchis parallèlement à l'axe principal.

De même si F_1 devient un point lumineux les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe secondaire passant par F_1.

Ce phénomène reçoit son application dans certains types de projecteurs qui consistent en un miroir concave au foyer duquel on place une source lumineuse puissante.

Image d'un objet. — On vérifie expérimentalement avec une bougie dont la flamme est placée sur l'axe principal du miroir que :

1° *Si la bougie est très éloignée,* on obtient une image *réelle* (c'est-à-dire pouvant être reçue sur un écran) *renversée, très petite* et *voisine du foyer.*

2° *Si la bougie est approchée du centre optique* O l'image est toujours *réelle* et *renversée,* mais s'éloigne de F vers O *en grandissant* (fig. 369).

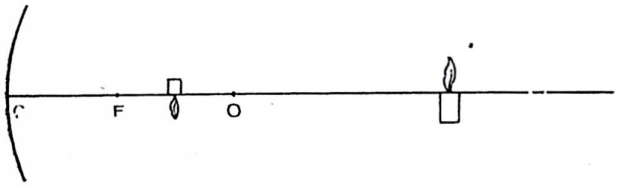


Fig. 369

3° *Lorsque la bougie arrive en* O *on constate que son image est disposée symétriquement par rapport à l'axe principal* (fig. 370).

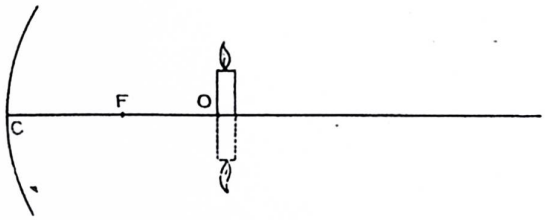


Fig. 370

4° *Lorsque la bougie se trouve entre* O et F l'image est toujours *réelle* et *renversée* mais *plus grande* que la bougie et au delà de O.

5° *Lorsque la bougie se trouve en F* l'image est à l'infini.

6° *Enfin lorsque la bougie se déplace de F vers C* l'œil aperçoit derrière le miroir *une image virtuelle droite* et *agrandie* qui s'approche du miroir en même temps que la bougie (fig. 371).

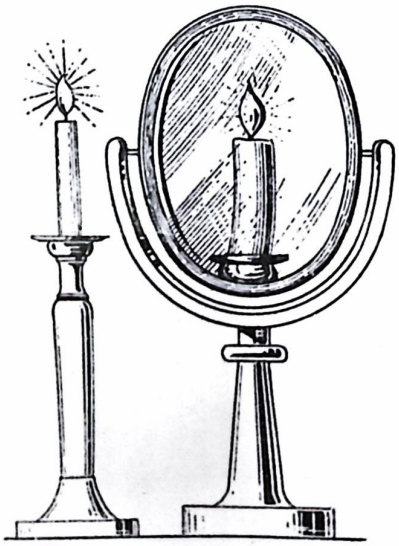


Fig. 371

7° *En C la bougie et l'image se confondent.*

En partant des lois de la réflexion on peut arriver aux mêmes résultats.

1° Soit une *droite lumineuse* A B placée devant un miroir concave M perpendiculairement à l'axe principal. Son image sera perpendiculaire à l'axe principal. Il suffit pour la déterminer de construire l'image du point A.

1° *A B est très éloignée.* — Parmi les rayons émanés de A il en est un qui est parallèle à l'axe principal et qui se réfléchit en passant par le foyer et un autre A O passant par le centre de courbure et qui se réfléchit sur lui-même. Ces deux rayons se rencontrent en A' image de A et l'on a en A' B' perpendiculaire à l'axe principal l'image de AB. Elle est *réelle, renversée, plus petite que l'objet et située entre F* et O (fig. 372).

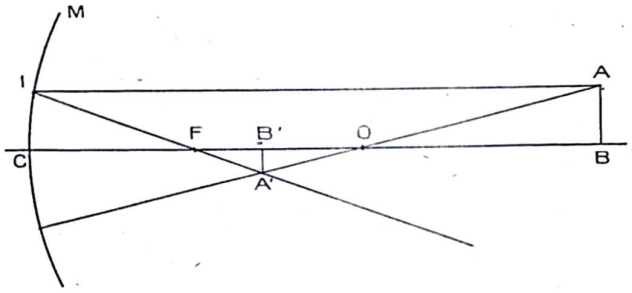


Fig. 372

On construirait de même l'image de A B à la distance 2 F.

A B = A' B' (fig. 373)

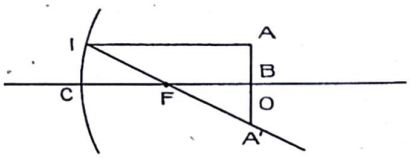


Fig. 373

l'image de A B située entre O et F

A' B' > A B (fig. 374)

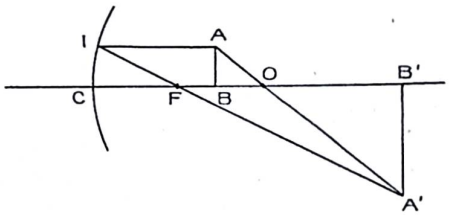


Fig. 374

l'image de A B entre F et C

A' B' > A B, mais virtuelle (fig. 375)

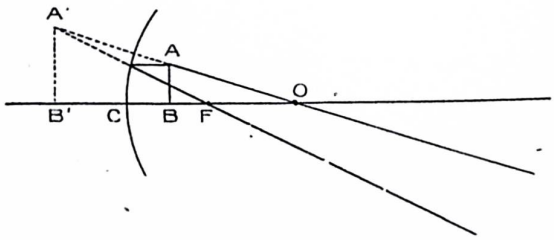


Fig. 375

Remarque. — Au lieu de considérer le rayon AO, on peut considérer le rayon AC qui se réfléchit en passant par A, symétrique de A par rapport à l'axe principal.

La figure 376 donne la marche d'un faisceau lumineux.

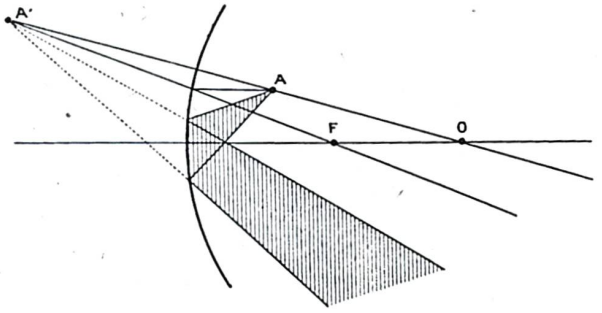


Fig. 376

Formules des miroirs. — Reprenons la construction de l'image de l'objet A B et considérons les rayons A C et A' C (fig. 377). Les angles A C B et A' C B' sont égaux d'après les lois de la réflexion; les 2 triangles rectangles A C B et A' C B' sont donc semblables et nous avons les rapports de similitude

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{CB'}{CB}$$

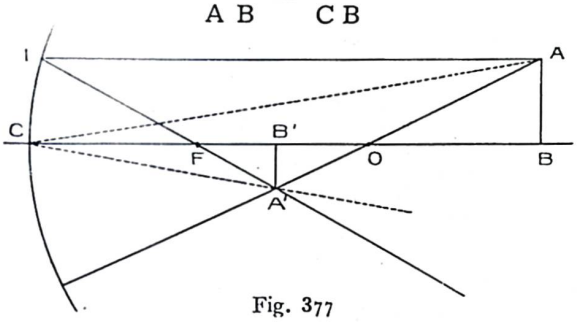


Fig. 377

Ce qui nous donne en posant $CB = p$ distance de l'objet au miroir ; $CB' = p'$ distance de l'image au miroir :

$$AB = o \text{ objet}$$
$$A'B' = i \text{ image}$$
$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$$

D'autre part les 2 triangles rectangles semblables A O B et A' B' O permettent d'écrire

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC - CB'}{OB - OC}$$

Ce qui donne $\frac{i}{o} = \frac{2f - p'}{p - 2f}$

ou $\frac{p'}{p} = \frac{2f - p'}{p - 2f}$

Faisons le produit des extrêmes et des moyens

$$pp' - 2p'f = 2pf - pp'$$
$$2pf + 2p'f = 2pp'$$

En divisant par $2pp'f$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Dans cette formule *f est toujours positif* : *p* et *p' sont positifs* s'ils sont du *même côté de C que le centre optique* O, *négatifs dans le cas contraire*. Il s'ensuit que les valeurs *positives* correspondent à des objets et images *réels*, les valeurs *négatives* à des objets et images *virtuels*.

Discussion de la formule des miroirs concaves : Nous allons faire varier dans cette formule la valeur de *p* depuis l'infini $+\infty$ jusqu'au miroir, nous continuerons même au-delà du miroir jusqu'à $-\infty$, l'objet devenant alors virtuel.

1° Lorsque *p* est infini l'image se forme au foyer ; en effet, nous aurons :

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

d'où $\frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ et $p' = f$

Puis, lorsque l'objet se rapproche, le terme $\frac{1}{p}$ d'abord nul augmente, $\frac{1}{p'}$ diminue et par suite p' augmente ; l'image s'éloigne du foyer, en même temps elle grandit, car $\frac{p'}{p}$ augmente ; pour $p = 2f$ nous aurons $p' = 2f$ et l'image sera de même dimension que l'objet.

Puis, tandis que l'objet s'approche du foyer, l'image qui ne cesse de grandir et qui est maintenant plus grande que l'objet, continue à s'éloigner vers l'infini.

2° Lorsque l'objet dépasse le foyer, l'image qui était d'abord réelle et renversée, passe brusquement derrière le miroir à $-\infty$. Elle est droite et virtuelle. Elle se rapproche du miroir lorsque l'objet se rapproche également de celui-ci (fig. 378).

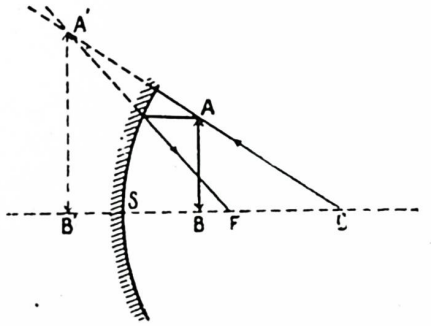


Fig. 378

3° Enfin lorsque l'objet, virtuel, est entre le miroir et $-\infty$, on a :

$$\frac{1}{p'} > \frac{1}{f}$$

d'où $p' < f$

L'image est réelle, droite, entre le foyer et le miroir. Ce dernier cas n'est d'ailleurs que la réciproque du cas précédent.

Remarquons que le rapport $\frac{i}{o}$ est positif lorsque l'objet et l'image sont de même nature, négatif dans le cas contraire ; positif lorsque l'image est renversée par rapport à l'objet et négatif lorsqu'elle est droite.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans un tableau :

p	$-\infty$	→	$2f$	→	f	→	0	→	$+\infty$	
p'	f	→	$2f$	→	$+\infty$	→	0	→	f	$-\infty$
$\frac{i}{o}$	0	→	1	→	$+\infty$	→	-1	→	0	$-\infty$
			objet et image réels image renversée				objet réel; image virtuelle et droite		objet virtuel, image réelle et renversée	

Fig. 379

Déformation des images obtenues au moyen d'un miroir concave : Les images obtenues au moyen d'un miroir concave sont déformées, nous pouvons le montrer de la manière suivante : prenons un miroir concave et plaçons devant lui un petit rectangle ABDE dont le côté BE est sur l'axe principal du miroir (fig. 380).

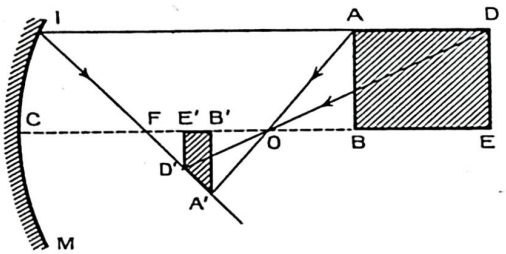


Fig. 380

En construisant l'image nous obtenons un petit parallélépipède rectangle A'B'D'E'.

Ceci nous montre que les images sont déformées lorsque les objets ne sont pas plans et perpendiculaires à l'axe principal du miroir :

Miroirs convexes. — Les miroirs convexes sont beaucoup moins importants que les précédents, et leur étude est analogue à celle de ceux-ci.

Les principaux résultats sont les suivants :

1° *Il existe un foyer situé au milieu de la distance comprise entre le centre et le sommet du miroir ; comme ce foyer est derrière le miroir, il est virtuel.*

2° *Tout rayon parallèle à l'axe principal s'écarte de celui-ci après réflexion et son prolongement passe par le foyer.*

3° *Tout rayon dont le prolongement passe par le centre du miroir n'est pas dévié après réflexion.*

Par conséquent, lorsque l'objet est réel, l'image est toujours virtuelle, droite et plus petite que l'objet (fig. 381). Lorsque l'objet s'approche du miroir, l'image grandit.

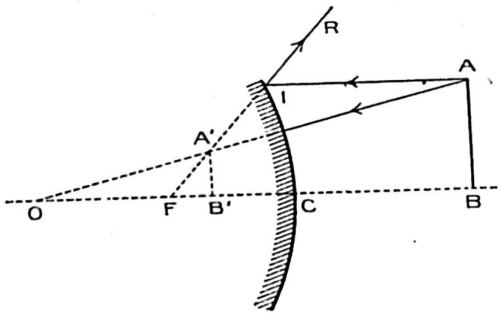


Fig. 381

La formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ s'applique aux miroirs convexes à condition de considérer f comme négatif.

Exemple. — *Trouver la position de l'image A' d'un point lumineux A situé à 15 mètres d'un miroir convexe dont la distance focale est de 3 mètres.*

Nous avons : $p = +15$ et $f = -3$

d'où, en appliquant la formule :

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{-3}$$

d'où :

$$-\frac{1}{p'} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15}$$

On en tire : $p' = -2{,}50$ m.

L'image est donc virtuelle, à 2 m. 50 en arrière du miroir.

Détermination de la distance focale d'un miroir. — Pour déterminer la distance focale d'un miroir, il suffit de trouver la position de l'image d'un point lumineux suffisamment éloigné pour être pratiquement considéré comme situé à l'infini.

Remarquons que la détermination du foyer entraîne celle du centre et réciproquement.

On peut déterminer géométriquement le centre au moyen du *sphéromètre* : cet appareil se compose d'un trépied qui repère 3 points sur la calotte sphérique, et d'une vis qui permet de connaître la distance du sommet de la calotte au plan déterminé par les 3 points précédents.

Problèmes

1. — Une droite lumineuse a 10 cm. de longueur, on la place à 50 cm. d'un miroir concave dont la distance focale est de 20 cm. ; construire graphiquement l'image de cette droite, la mesurer sur le graphique ainsi que sa distance au miroir. Vérifier les résultats par le calcul (fig. 382).

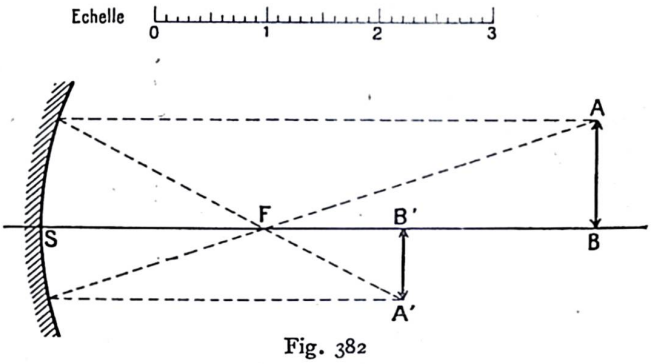


Fig. 382

Solution

On trouve $SB' = 33$ cm.

$A'B' = 6$ cm. 6

Vérification : Nous avons les formules :

$$\frac{1}{SB} + \frac{1}{SB'} = \frac{1}{SF}$$

d'où : $\frac{1}{SB'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{50} = \frac{3}{100}$

et : $SB' = \frac{100}{3} = 33{,}33$ cm

et : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB}$

d'où : $A'B' = 10 \times \frac{33{,}33}{50} = 6{,}66$ cm.

2. — Sur l'axe principal d'un miroir concave de distance focale f et suivant la direction de cet axe, on place une droite lumineuse AB de longueur 2l ; à quelle distance du sommet faut-il placer le point A pour que l'image A'B' de AB se superpose à cette droite ?

Solution

Remarquons en construisant l'image A'B' de AB que cette image est en sens contraire de l'objet (fig. 383) ; par conséquent B' viendra en A et A' en B :

Nous aurons donc en appliquant la formule :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

les deux équations :

(1) $$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA + 2l} = \frac{1}{f}$$

(2) $$\frac{1}{SB} + \frac{1}{SB - 2l} = \frac{1}{f}$$

Ces deux équations sont identiques et il vient :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2l} = \frac{1}{f}$$

d'où : $x^2 - 2(f - l)x - 2fl = 0$

et $x = f - l \pm \sqrt{(f - l)^2 + 2fl}$

Ce qui donne : $x = f - l\sqrt{f^2 - l^2}$

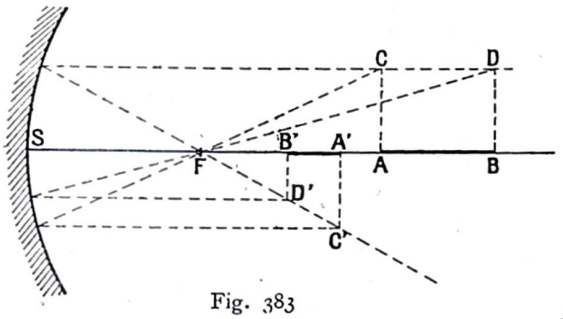


Fig. 383

3. — Deux miroirs sphériques concaves, égaux, de distance focale f, sont placés à une distance d l'un de l'autre, les surfaces concaves en regard et ayant même axe principal. En quel point de l'axe faut-il placer un objet lumineux pour que les rayons réfléchis par un miroir puis par l'autre, forment une image en ce point ? Calculer le rapport de grandeur de l'image à l'objet. Application : d = 1 m. ; f = 0 m. 10.

Solution

1° Soit x la distance cherchée, nous aurons pour le premier miroir :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

d'où : $$p' = \frac{fx}{x - f}$$

et pour le deuxième miroir :

$$\frac{1}{d - p'} + \frac{1}{d - x} = \frac{1}{f}$$

d'où : $$\frac{d - x + d - p'}{(d - p')(d - x)} = \frac{1}{f}$$

et : $d(d - 2f) = x(d - f) + (d - f - x)p'$

et en remplaçant p' par sa valeur on obtient en définitive :

$$x^2 - dx + fd = 0$$

d'où : $$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$$

Remarque : si $d = 2f$, $x = \frac{d}{2} - f$

2° Nous avons :

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{x}$$

et $$\frac{i'}{i} = \frac{d - x}{d - p'}$$

d'où : $$\frac{i'}{o} = \frac{p'}{x} \times \frac{d - x}{d - p'} = \frac{(d - x)f}{dx - fd - fx}$$

Application : $d = 100$ cm. $f = 10$ cm.

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10^4 - 4 \times 10^2 \times 10}}{2} = 88{,}7 \text{ cm}$$

$$\frac{i'}{o} = \frac{113}{6983}$$

4. — Trouver la position de l'image A' d'un point lumineux A situé à 12 mètres d'un miroir concave dont la distance focale est de 4 mètres.

Solution

On a : $p = +12$ $f = +4$

La formule (2) donne :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

d'où :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

On en tire :

$$p' = +6 \text{ mètres}$$

Réponse : Le point A' se trouve à 6 mètres en avant du miroir, l'image est réelle.

5. — Le rayon d'un miroir conçave est R = 1 mètre; on demande la position de l'image A' d'un point lumineux situé à 0 m. 25 du miroir.

Solution

On a :

$p = +25$ $f = +50$

La formule (2) donne :

$$\frac{1}{50} = \frac{1}{25} + \frac{1}{p'}$$

d'où :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{50} - \frac{1}{25} = \frac{1}{50} - \frac{2}{50} = -\frac{1}{50}$$

On en tire :

$$p' = -50 \text{ cm.}$$

Réponse : Le point A' se trouve à 50 cm en arrière du miroir ; l'image est virtuelle.

CHAPITRE IV

RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE

Un bâton A B C plongé dans l'eau paraît brisé en B et relevé en B C' (fig. 384). En réalité si l'œil croit voir en C' le point C c'est que les rayons émanés de C lui parviennent comme s'ils venaient de C', *autrement dit les rayons émanés de C sortent de l'eau en subissant une déviation.*

D'une façon générale, lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu transparent dans un autre, il subit, en traversant la surface de séparation des deux milieux, une déviation brusque qu'on appelle *réfraction.*

La réfraction est soumise aux deux lois suivantes énoncées par Descartes :

1° *Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale au point d'incidence sont dans un même plan.*

2° *Le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est constant.*

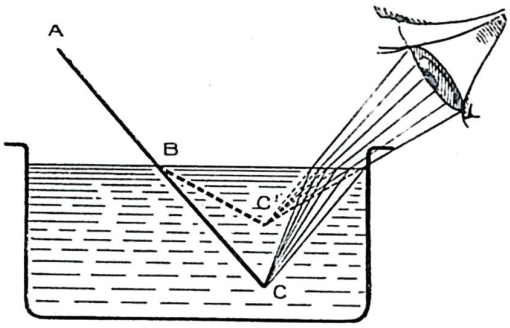


Fig. 384

Première loi. — On peut marquer sur le fond d'une cuve la trace d'un plan d'incidence, puis, après avoir versé de l'eau dans cette cuve, vérifier que le rayon réfracté rencontre cette trace xy (fig. 385).

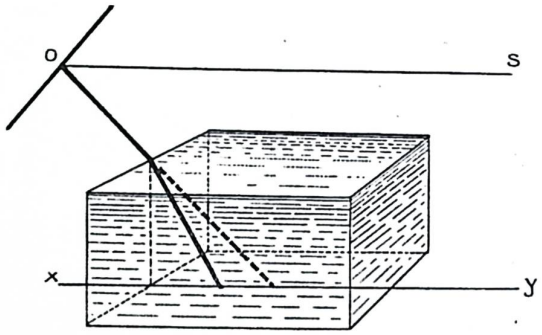


Fig. 385

Deuxième loi. — Une cuve de verre (fig. 386) dont la paroi A B est disposée sur une table horizontale et reçoit d'un miroir M le rayon réfléchi O A d'un rayon incident S O. Ce rayon laisse dans l'ombre la portion A B H.

On remplit d'eau la cuve, on constate que l'ombre est alors limitée en A B K.

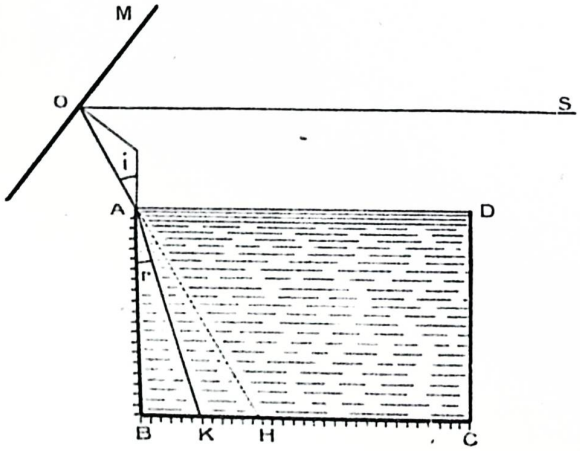


Fig. 386

On mesure à l'aide d'une règle graduée ou mieux sur des divisions pratiquées sur les parois A B et B C les longueurs A B, B H, B K et on en déduit :

$$\sin \widehat{i} = \frac{BH}{AH} = \frac{BH}{\sqrt{AB^2 + BH^2}}$$

$$\sin \widehat{r} = \frac{BK}{AH} = \frac{BK}{\sqrt{AB^2 + BK^2}}$$

En formant le quotient $\frac{\sin i}{\sin r}$ on trouve $\frac{4}{3}$

En faisant varier i on constate que ce quotient *reste constant*. De plus si on remplace l'eau par une autre substance ce quotient prend une autre valeur qui dépend de la *substance*.

Remarques. — Il résulte de ces expériences que si un rayon lumineux passe de *l'air dans l'eau il se rapproche de la normale*. On dit que le *second milieu est plus réfringent que le premier*.

Réciproquement l'expérience montre que si un rayon passe de l'eau dans l'air, *il s'écarte de la normale, le second milieu est dit moins réfringent que le premier*. D'une façon générale un milieu est d'autant plus réfringent qu'il est *plus dense*.

Le rapport constant $\frac{\sin i}{\sin r}$ définit une substance transparente par rapport à une autre. *On l'appelle indice de réfraction du milieu dans lequel se propage le rayon réfracté par rapport au milieu dans lequel se propage le rayon incident.*

On pose $\frac{\sin i}{\sin r} = n$

Le phénomène de la réfraction est dû à ce que la *vitesse de la lumière* n'est pas la même dans les deux milieux ; si V et V′ sont les vitesses de la lumière dans l'air et dans l'eau on a

$$n = \frac{V}{V'}$$

n étant l'indice du second milieu par rapport au premier. Si n' est l'indice du premier milieu par rapport au second on a :

$$n' = \frac{V'}{V} = \frac{1}{n}$$

Conséquence. — *A l'angle d'incidence $\widehat{i}$ dans l'air correspond l'angle de réfraction $\widehat{r}$ dans l'eau, réciproquement à l'angle d'incidence $\widehat{r}$ dans l'eau correspond l'angle de réfraction $\widehat{i}$ dans l'air :*

$$\frac{\sin \widehat{i}}{\sin \widehat{r}} = n$$

$$\frac{\sin \widehat{r}}{\sin \widehat{i}} = \frac{1}{n} = n'$$

C'est le principe du retour inverse de la lumière.

On appelle indice de réfraction absolue d'une substance son indice par rapport au vide.

INDICES DE RÉFRACTION

1° Solides et Liquides

Diamant	2,47 à 2,75
Phosphore	2,224
Soufre	2,115
Grenat	1,815
Saphir	1,794
Sulfure de carbone	1,768
Verre (Flint glass)	1,575
Sel gemme	1,550
Cristal de roche	1,548
Ambre	1,547
Verre à vitres	1,542

Verre (Crown glass)	1,534
Huile de ricin	1,490
Essence de térébenthine	1,475
Huile d'olive	1,470
Alun	1,457
Acide sulfurique	1,434
Acide nitrique	1,410
Ether	1,358
Eau	1,336
Glace	1,310
Topaze	1,294

Gaz

Chlore	1,000772
Ethylène	1,000678
Anhydride carbonique	1,000449
Ammoniaque	1,000385
Azote	1,000300
Air	1,000294
Oxygène	1,000272
Hydrogène	1,000138

Discussion de la deuxième loi de Descartes: $\sin \widehat{i} = n \sin \widehat{r}$. 1er **Cas:** $n > 1$. Soit xy la surface de séparation. Nous nous proposons de chercher ce que deviennent tous les rayons incidents qui rencontrent cette surface xy au point I (fig. 387).

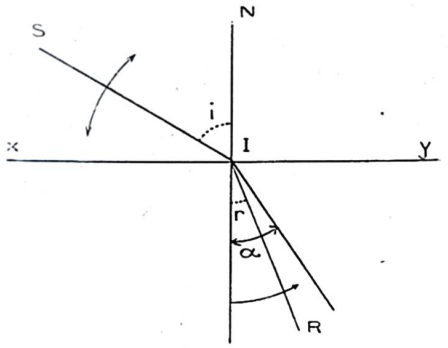


Fig. 387

Parmi ces rayons, N I traverse la surface sans déviation. Un autre rayon tel que S I se réfracte en faisant un angle $\widehat{r} < \widehat{i}$.

Si le rayon se déplace de N I vers S I l'angle $\widehat{i}$ croît, l'angle $\widehat{r}$ croît aussi mais en restant plus petit que $\widehat{i}$.

Lorsque $\widehat{i} = 90^\circ$ $\widehat{r}$ prend la valeur maximum donnée par :

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha} = n$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}$$

α est appelé l'angle limite.

Tous les rayons incidents se réfractent à l'intérieur du cône dont l'angle au sommet est α

Valeurs de l'angle limite α

Eau	$\alpha =$ 48° 27′40″
Crown glass	40° 31′
Flint glass	38° 41′
Diamant	23° 42′
Chromate de plomb	19° 28′

2e **Cas:**

$$\sin i = n \sin r \qquad n < 1$$

Autrement dit le deuxième milieu est plus réfringent que le premier, c'est le cas des rayons qui pénètrent de l'eau dans l'air.

Soit xy la surface de séparation des deux milieux et S un point lumineux (fig. 388).

Le rayon normal S I traverse sans déviation. Un rayon S I′ se réfracte suivant I′ R. $\widehat{i}$ étant plus grand que $\widehat{r}$.

Parmi ces rayons il en est un S I″ qui se réfracte suivant I″y en faisant un angle $\widehat{r} = \widehat{\alpha}$ donné par l'équation :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = n' = \frac{1}{n}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{n'}$$

L'angle limite α est le plus grand que puisse prendre l'angle d'incidence pour que le rayon incident traverse la surface de séparation.

Que deviennent les rayons tels que S I‴, dont l'angle i est $> \alpha$.

L'expérience montre qu'ils se réfléchissent sur xy.

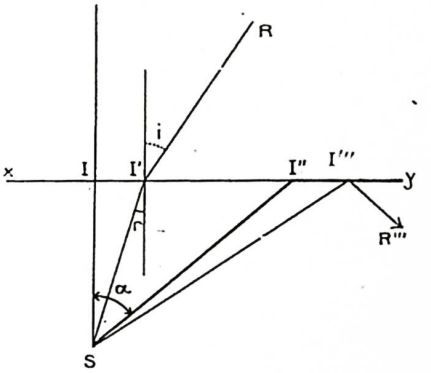


Fig. 388

On dit qu'ils *subissent la réflexion totale parce qu'alors l'intensité du faisceau réfléchi est égale à celle du faisceau incident* ce qui n'a pas lieu dans les miroirs ordinaires.

On met ce phénomène en évidence de la façon suivante :

Sur un flotteur F on enfonce une épingle A O : L'œil croit apercevoir en A′ la tête de l'épingle (fig. 389).

Cette expérience permet de calculer α

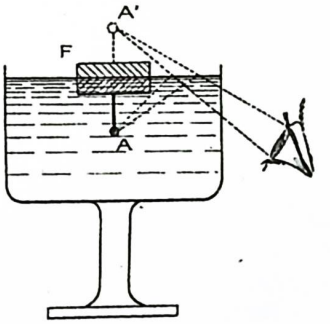


Fig. 389

Problème d'Huyghens. — On donne la surface xy de séparation des milieux, n étant l'indice de réfraction de deuxième milieu par rapport au premier, S I un rayon incident.

Du point I dans le deuxième milieu on décrit deux circonférences de rayon R et R′ tel que :

$$\frac{R}{R'} = n$$

On prolonge S I jusqu'à sa rencontre K avec R′ ; de K on abaisse la perpendiculaire P K qui coupe la deuxième circonférence en R.

Je dis que I R est le rayon réfracté.

En effet les deux triangles rectangles I P K et I R P permettent d'écrire :

$$IP = IK \sin \widehat{i}$$

$$IP = IR \sin \widehat{r}$$

donc $$I K \sin \widehat{i} = I R \sin \widehat{r}$$

$$\frac{\sin \widehat{i}}{\sin \widehat{r}} = \frac{I R}{I K} = n$$

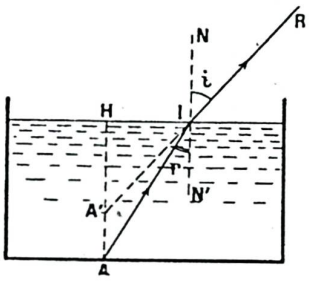


Fig. 390

Applications de la réfraction. — Relèvement des images. — Lorsque nous observons un objet dans un liquide, cet objet paraît relevé ; nous pouvons calculer ce relèvement.

Soit par exemple le point A qui paraît en A', dans le triangle AHI (fig. 390) nous avons :

$$(1) \qquad A H = H I \times \frac{1}{\operatorname{tg} r}$$

Car $\widehat{H A I} = \widehat{A I N'} = r$ comme alternes-internes.

D'autre part, dans le triangle A' I H, l'angle H A'I est égal à l'angle A'I N' comme alternes-internes et A'I N' est égal à l'angle d'incidence i nous avons donc :

$$(2) \qquad A' H = H I \times \frac{1}{\operatorname{tg} i}$$

Des deux égalités (1) et (2) nous tirons :

$$\frac{A' H}{A H} = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i}$$

Mais les angles étant très petits, nous pouvons confondre les tangentes avec les sinus et écrire :

$$\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1}{n}$$

d'où : $$A' H = \frac{A H}{n}$$

et : $$A A' = A H - \frac{A H}{n} = \frac{n-1}{n} \times A H$$

Il s'ensuit qu'au travers d'une lame d'épaisseur e et d'indice n la lumière se comporte comme si elle traversait une lame d'air d'épaisseur $\frac{e}{n}$.

Pour l'eau $$A A' = \frac{e}{4} \text{ environ}$$

Réfraction par un milieu transparent non homogène. — Mirages. — Quand un rayon lumineux traverse un milieu transparent non homogène, il ne se propage plus en ligne droite. En effet, il passe à chaque instant d'une couche douée d'un certain pouvoir réfringent dans une autre couche douée d'un autre pouvoir réfringent, et il subit une série de réfractions, de sorte que sa trajectoire cesse d'être rectiligne et devient curviligne.

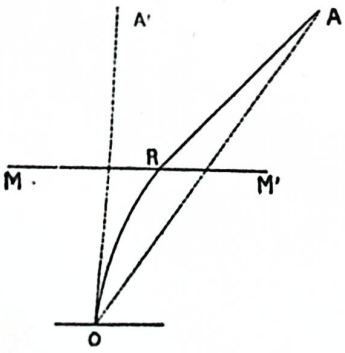


Fig. 391

Ainsi, quand on observe un astre de la surface de la terre, le rayon lumineux qui vient de cet astre traverse, avant d'atteindre l'œil de l'observateur, l'atmosphère dont les couches inférieures sont beaucoup plus denses que les couches supérieures (fig. 391). Si l'astre est en A, le rayon AR est dévié au moment où il pénètre en M M' dans l'atmosphère et suit une direction curviligne R O. L'observateur, placé en O, ne voit pas l'astre dans la direction O A, mais dans la direction O A' de la tangente en O à la courbe O R A. On doit tenir compte de ce déplacement apparent des astres dans les observations astronomiques.

Les mirages s'expliquent par un phénomène analogue. Ils se produisent dans les régions où la température des couches inférieures de l'atmosphère est sensiblement différente de celles des couches situées immédiatement au-dessus : c'est-à-dire dans les pays chauds, dans les déserts ou au bord de la mer. Dans un désert

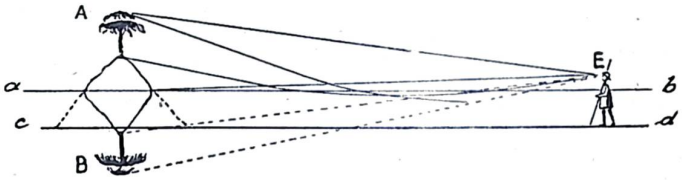


Fig. 392

de sable par exemple, le sol étant surchauffé, les couches d'air immédiatement en contact avec lui à moins d'un mètre sont plus chaudes que les couches supérieures et, par suite, moins réfringentes. Un observateur, placé en E (fig. 392) voit le palmier A dans la direction de la droite E A ; mais certains rayons émis par l'objet en arrivant au-dessous d'un certain niveau *ab*, subissent une série de réfractions qui leur donnent une trajectoire curviligne ; ils peuvent parvenir aussi à l'observateur qui voit alors une image de l'objet au-dessous de l'objet lui-même. Il peut même arriver que les rayons issus du sommet et de la base de l'objet se croisent et l'image B est renversée. L'observateur croit voir l'objet se refléter dans une nappe d'eau.

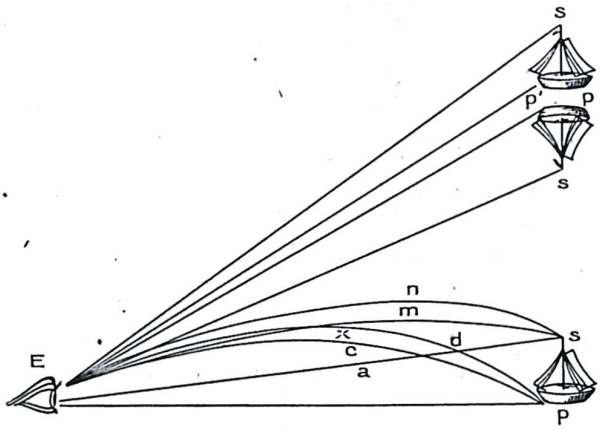


Fig. 393

Si les couches inférieures sont au contraire plus froides que les couches supérieures, comme cela se produit parfois au contact de la mer, les rayons réfractés suivent un trajet inverse et l'image se forme au-dessus et non plus au-dessous de l'objet. Il peut même arriver qu'il se forme deux images : l'une droite, l'autre renversée (fig. 393). Dans certains cas, on aperçoit ainsi des objets qui sont au-dessous de l'horizon et qu'on ne verrait pas sans cela.

Problème

L'angle limite du verre par rapport à l'air est 40°. Quel est l'indice de réfraction de ce verre par rapport à l'air ?

Réponse : n = 1,55

CHAPITRE V

RÉFRACTION A TRAVERS LES LAMES PARALLÈLES — PRISME

Quand un rayon lumineux S I *rencontre des lames parallèles il est déplacé sans être dévié.*

Autrement dit le rayon réfracté est parallèle au rayon incident.

C'est là une conséquence *du retour inverse de la lumière.*

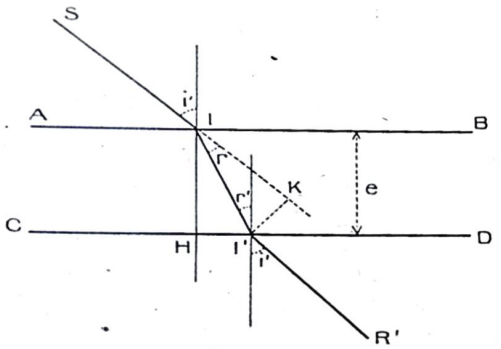


Fig. 394

Soit le rayon S I rencontrant les lames parallèles A B et C D (fig. 394).

Ce rayon pénètre dans un milieu plus réfringent en se rapprochant de la normale et suivant le chemin I I', en I' il passe dans un milieu moins réfringent et se réfracte suivant I' R' en s'écartant de la normale. I' R' est parallèle à S I.

En effet :

$$\widehat{i} = n \sin \widehat{r}$$
$$\widehat{i'} = n \sin \widehat{r'}$$

Mais $\widehat{r} = \widehat{r'}$ donc $\widehat{i} = \widehat{i'}$

Calcul du déplacement. — La distance I' K mesure le déplacement. Si nous appelons I H = e l'épaisseur de la lame, dans le triangle rectangle I K I' on a

$$I'K = I\,I' \sin (i - r)$$
$$I\,H = e = I\,I' \cos r$$

donc $$I\,I' = \frac{e}{\cos r}$$

et $$I'\,K = \frac{e}{\cos r} \sin (i - r)$$

$$I'\,K = \frac{e}{\cos r} \sin i \cos r - \frac{e \sin r \cos i}{\cos r}$$

$$I'K = e (\sin i - \operatorname{tg} r \cos i)$$

Prismes. — *On appelle prisme, en optique, un milieu réfringent limité par deux surfaces planes qui font entre elles un certain angle.* Cet angle dièdre porte le nom d'*angle réfringent.* La partie qui limite la base du prisme du côté opposé à l'angle réfringent est la *base du prisme.*

Soit B A C la section d'un prisme par un plan perpendiculaire à l'arête de l'angle réfringent (fig. 395). Supposons, ce qui est le cas général, que le milieu dont le prisme est constitué est plus réfringent que le milieu ambiant et soit R I un rayon incident, dans le plan de la figure.

En pénétrant dans le prisme en I, le rayon R I est dévié suivant la direction I I', faisant avec la normale N I M un angle de réfraction r plus petit que l'angle d'incidence i.

Le rayon I I' ressort du prisme en I' et prend une direction I' E faisant en I' avec la normale M I' N' un angle d'émergence i' plus grand que l'angle r'.

On voit que ces deux déviations ont pour effet de rejeter le rayon lumineux au-dessous de sa direction primitive R I R', c'est-à-dire de le dévier vers la base du prisme. L'angle R'H E que fait la nouvelle direction I'E avec la première R I R', s'appelle *l'angle de déviation.*

L'angle R'H E, extérieur au triangle I H I', est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents

(1) $$R'HE = HII' + HI'I$$

Or, on a :

$$HII' = HIM - I'IM = i - r$$
$$HI'I = HIM - II'M = i' - r'$$

et, si on pose R'H E = D, l'égalité (1) peut s'écrire

(2) $$D = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r')$$

n étant l'indice de réfraction du prisme par rapport au milieu ambiant, on a, d'autre part :

(3) $$\sin i = n \sin r$$

(4) $$\sin i' = n \sin r'$$

Enfin, le quadrilatère A I M I' a deux angles droits en I et en I', il s'ensuit que l'angle M est supplémentaire de l'angle A. D'autre part, dans le triangle M I I', l'angle M est supplémentaire de la somme $r + r'$. On a donc finalement :

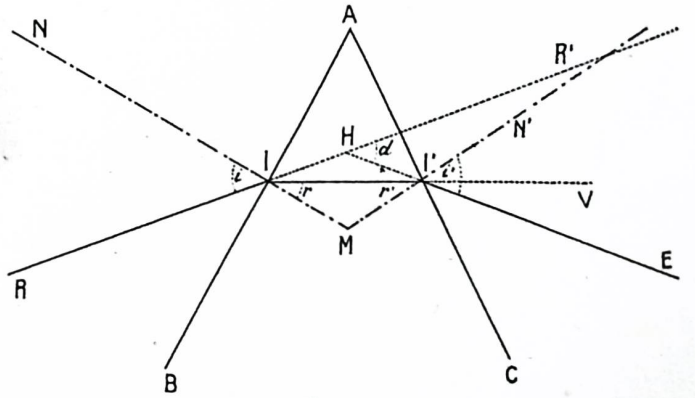


Fig. 395

(5) $$A = r + r'$$

(6) $$D = (i + i') - A.$$

Les quatre équations 2, 3, 4 et 6 sont dites : *équations du prisme.* Elles contiennent six quantités ; deux de ces quantités étant données, on peut déterminer les quatre autres par le calcul.

La déviation D dépend donc de n, de A et de i.

Il est évident qu'elle augmente avec n, car les différences $i - r$ et $i' - r'$ augmentent. On le vérifie expérimentalement au moyen de prismes de même angle réfringent et de substances différentes.

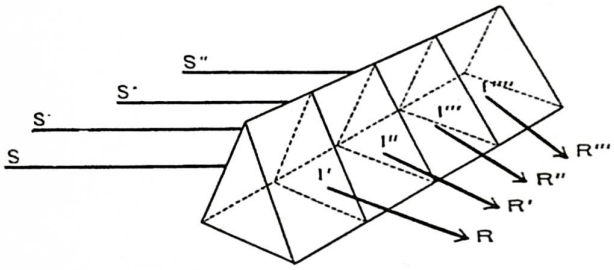


Fig. 396

A cet effet on se sert du polyprisme lequel comprend habituellement des prismes d'angles égaux accolés par leur section principale (fig. 396). On fait tomber un faisceau de lumière incidente sous le même angle et on constate que les faisceaux émergents I'R, I''R', I'''R'', I''''R''' présentent des déviations différentes, et la plus grande déviation correspond au plus grand indice de réfraction.

L'expérience montre aussi que D augmente avec A. On le vérifie au moyen d'un prisme formé par une petite auge remplie d'eau, dont les deux faces sont transparentes et mobiles autour de deux charnières parallèles. Au fur et à mesure qu'on incline davantage ces deux faces l'une par rapport à l'autre, la déviation d'un rayon lumineux intercepté par le prisme augmente.

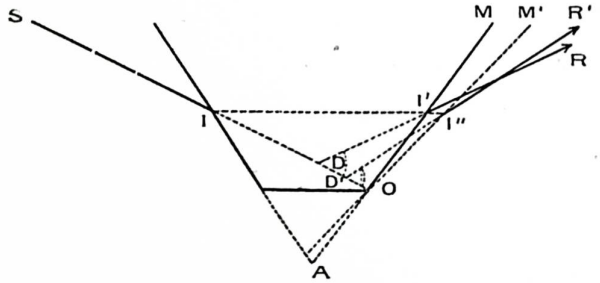


Fig. 397

En faisant tourner O M, on augmente A et on constate que la déviation D augmente (fig. 397).

L'expérience montre enfin que si on fait varier i de 0° à 90°, D varie en passant par un *minimum* pour une valeur de i telle que

$$i = i'$$

A ce moment $r = r' = \frac{A}{2}$

donc $$\sin i = \sin i' = n \sin \frac{A}{2}$$

Dans ce cas la valeur de la déviation minima donnée par la relation (2) est :

$$d = 2i - 2r = 2i - A$$

Pour le vérifier on dispose un prisme comme l'indique la figure 398.

En faisant tourner le prisme autour de A, la tache sur l'écran ne dépasse pas R. Elle correspond au minimum de déviation S A B'.

On utilise cette propriété du minimum de déviation pour déterminer l'indice de réfraction des corps solides ou liquides. On réalise un prisme avec la substance à étudier et on cherche par tâtonnements à faire tomber sur ce prisme un rayon lumineux suivant l'indice correspondant au minimum de déviation :

On a : $$2i = d + A$$

$$i = \frac{d + A}{2}$$

et en remplaçant i et r par leurs valeurs dans la formule

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

on a :

$$\frac{\sin \frac{d + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = n$$

Il suffit de mesurer A et d pour avoir n.

Prisme à réflexion totale. — Si le rayon intérieur SI' tombe sur la face A C du prisme suivant un angle d'incidence supérieur à l'angle limite, il ne peut sortir ; il subit la réflexion totale.

Nous savons que, pour le verre, l'angle limite est d'environ 40°. On construit des prismes de verre dits à *réflexion totale* qu'on utilise comme miroirs. Ce sont des prismes tels que BAC, dont l'angle réfringent B est de 45°. La base du prisme est limitée par une face plane parallèle à l'arête B et faisant aussi un angle de 45° avec B C.

On a réalisé ainsi un prisme isocèle ABC, rectangle en A (fig. 399).

Les rayons lumineux tels que RI, peu inclinés sur la normale, rencontrent la face BC suivant un angle d'incidence voisin de 45°, ils subis-

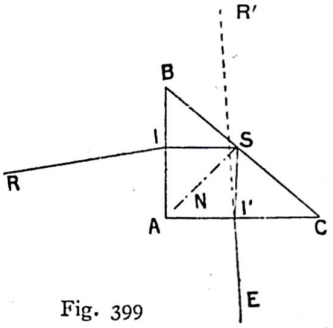


Fig. 399

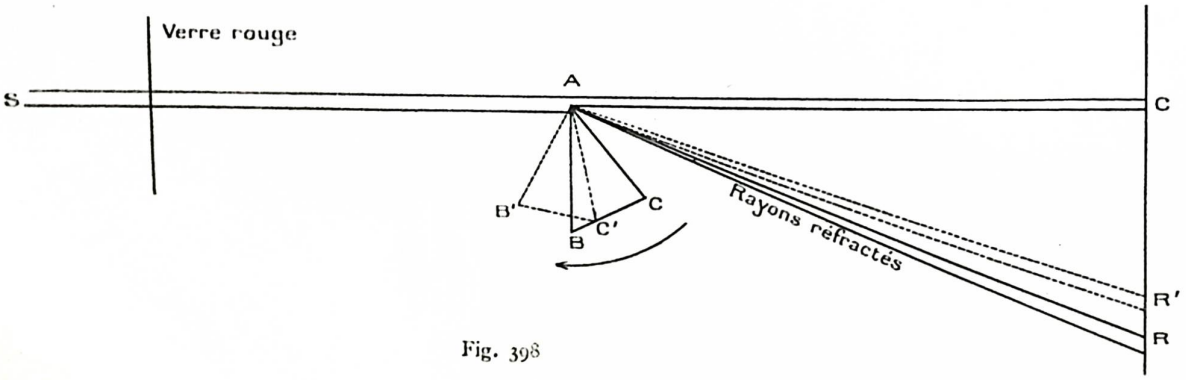


Fig. 398

sent donc en S la réflexion totale et émergent suivant I'E. Un observateur, placé sur le prolongement de I'E, voit un objet R en R'.

Il est facile de voir que si on faisait tourner autour du point S la partie SI'E de la figure de manière à amener SI' dans le prolongement de SI, le rayon I'E deviendrait parallèle à RI. Ainsi l'emploi d'un prisme à réflexion totale ne déforme pas plus les objets que l'interposition d'une lame à faces parallèles entre les objets et l'œil de l'observateur.

Problèmes

1. — Un rayon lumineux homogène tombe normalement sur un écran en un point A. On place sur le trajet de ce rayon une lame à faces parallèles inclinée sur lui à 45°. Ce rayon frappe maintenant l'écran en un point B. Trouver la distance A B sachant que la lame a pour indice $\sqrt{2}$ et pour épaisseur 10 cm.

Solution

Dans le triangle C D E (fig. 400), nous avons :

$$DE = CD \sin (i - r)$$

Mais $CD = CH \cos r = e \cos r$

d'où :

$$AB = DE = e \cos r \sin (i - r)$$

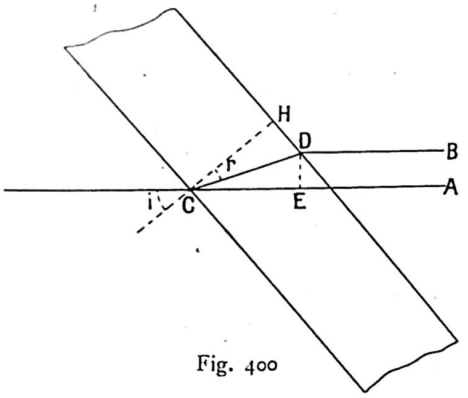


Fig. 400

D'autre part, d'après les lois de la réfraction nous avons :

$$\sin i = n \sin r$$

d'où

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}$$

Ce qui donne d'après les données du problème :

$$\sin r = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

d'où : $r = 30^\circ$

et $AB = 10 \cos 30^\circ (\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ)$.

$$= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 0^{cm},67$$

2. — Sur un prisme à angle variable, rempli d'un liquide réfringent on fait tomber normalement sur l'une des faces un rayon de lumière blanche. On demande :

1° L'angle à donner au prisme pour que le rayon violet se réfléchisse totalement sur l'autre face ;

2° Et dans ce cas, l'angle de déviation du rayon rouge émergent.

L'indice du liquide est de 1,55 pour le rayon violet et 1,51 pour le rouge (fig. 401).

Solution

1° Pour que le rayon violet se réfléchisse totalement, il faut que l'angle de réflexion soit égal à 90° ; d'où :

$$\sin 90^\circ = n \sin i$$

$$\text{d'où} \quad \sin i = \frac{1}{1,55}$$

On en tire : $i = 40^\circ\ 10'\ 40''$

Mais : $\widehat{i} = \widehat{A}$ comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires : donc $\widehat{A} = 40^\circ\ 10'\ 40''$.

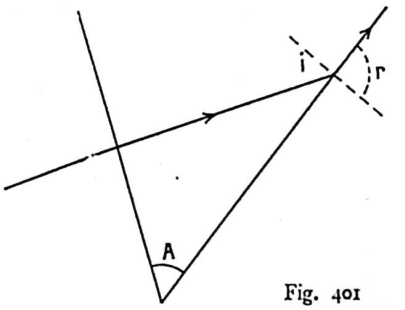


Fig. 401

2° D'autre part, pour le rayon rouge, nous aurons en appelant x l'angle de sortie du rayon rouge :

$$\sin x = 1,51 \sin i = \frac{151}{155}$$

D'où : angle de sortie du rayon rouge :

$$x = 76^\circ\ 57'\ 20''$$

CHAPITRE VI

LENTILLES SPHÉRIQUES

Lentilles sphériques. — On appelle *lentilles sphériques* un milieu réfringent limité par deux surfaces sphériques ou par une surface plane et une surface sphérique.

On divise les lentilles sphériques en deux groupes : 1° celles qui sont plus épaisses au centre que sur les bords : ce sont les *lentilles à bords minces*, souvent appelées à cause de leurs propriétés optiques *lentilles convergentes* ; 2° celles qui sont moins épaisses au centre que sur les bords ; ce sont les lentilles à *bords épais*, appelées aussi *lentilles divergentes*.

Les figures ci-contre représentent en coupe les différentes formes de lentilles. Le plan des figures passe par les centres des surfaces sphériques (fig. 402).

Les lentilles CC' et C'' sont *à bords minces* ou *convergentes*. Les lentilles D, D', D'' sont à *bords épais* ou *divergentes*.

La lentille C limitée par deux surfaces sphériques convexes, est dite *biconvexe*. La lentille C' limitée par une surface sphérique convexe et par une surface plane est *plan convexe*. La lentille C'' limitée par une surface convexe et par une surface concave est un *ménisque convergent*.

La lentille D, limitée par deux surfaces concaves, est *biconcave*. La lentille D′, limitée par un plan et une surface concave est *plan concave*. La lentille D″ limitée par une surface convexe et une surface concave est un *ménisque divergent*.

Toutes les lentilles de chacun des deux groupes se comportent de la même façon.

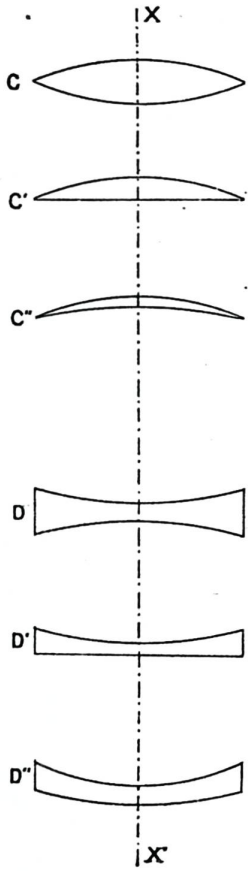


Fig. 402

On appelle *axe principal* d'une lentille la droite qui joint les centres des surfaces sphériques ou la perpendiculaire abaissée du centre de l'une des faces sur l'autre si cette dernière est plane.

Lentilles convergentes. — Les 3 types jouissent des mêmes propriétés, nous ne nous occuperons que des lentilles biconvexes.

Marche des rayons. — Dans un plan de section principale, considérons un rayon S I. En I il pénètre dans un milieu plus réfringent, se rapproche de la normale et suit le chemin I I′ puis en I′, il passe dans un milieu moins réfringent. Ces deux réfractions ont pour effet de diriger les rayons vers l'axe principal (fig. 403). Le résultat serait le même avec tout autre rayon.

La lentille fait converger tous les rayons vers l'axe principal d'où son nom de convergente.

Remarque. — *Tout se passe comme si le rayon avait traversé un prisme de faces tangentes aux faces de la lentille.*

Dans l'étude qui va suivre, nous ne considérerons que des *lentilles de faible diamètre et des rayons centraux.*

Foyer principal. — Si on dirige l'axe principal d'une lentille convergente vers le centre du soleil, on constate qu'après réfraction, les rayons solaires vont concourir en un point de l'axe principal qui est l'image très petite et très brillante du soleil et que l'on appelle *foyer principal* F (fig. 404).

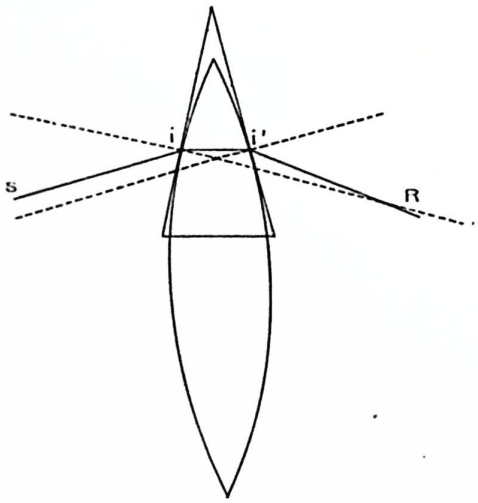


Fig. 403

L'application des lois de la réfraction conduit au même résultat. Soit un faisceau de rayons parallèles à l'axe principal. Considérons parmi eux un rayon tel que S I, il se réfracte suivant I R qui coupe l'axe principal en F (fig. 405).

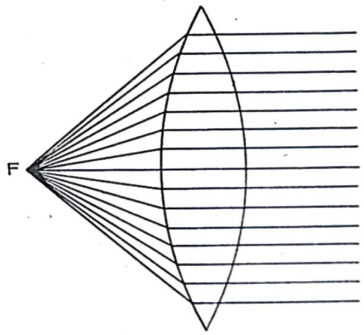


Fig. 404

Tous les rayons symétriques de S I par rapport à l'axe principal subissent la même déviation et vont rigoureusement concourir au point F.

Quant aux autres, ils coupent l'axe principal en des points *si voisins de* F que pratiquement on les confond avec ce point.

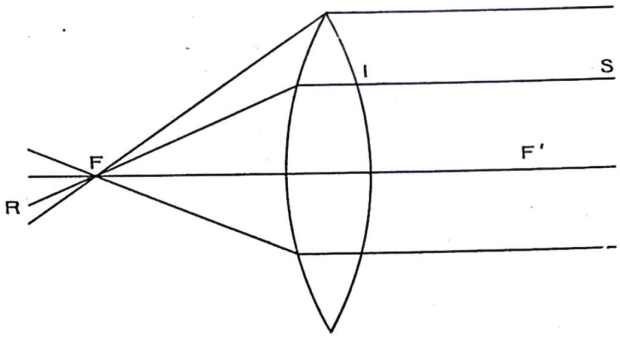


Fig. 405

Si le faisceau rencontre la lentille en sens inverse, il va concourir en un même point F′ dont la distance à la lentille est la même que celle du point F (fig. 406). Comme nous ne considérerons que des lentilles infiniment minces que nous supposerons réduites au plan diamétral nous représenterons *une lentille par une droite limitée par deux petits prismes* (fig. 407) *et nous poserons.*

$$CF = CF' = F = \text{distance focale.}$$

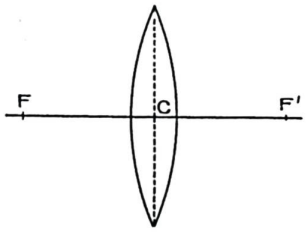


Fig. 406

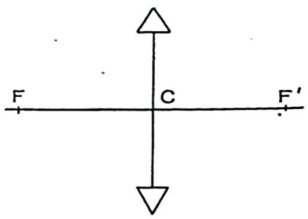


Fig. 407

Puissance d'une lentille. — *On appelle convergence ou puissance d'une lentille le quotient* $\frac{1}{f} = p$.

Elle s'évalue en *dioptries*, f étant exprimé en mètres. *La dioptrie est la convergence d'une lentille de distance focale* 1 m.

Pour une distance focale de 0 m. 50, on a: $p = \frac{1}{0.5}$ = 2 dioptries.

Si F est un point lumineux, *à cause du principe du retour inverse de la lumière*, le faisceau divergent émané de F, sort de la lentille parallèlement à l'axe principal.

Calcul de *f*. — Soit un rayon S I parallèle à l'axe principal O O', il se réfracte suivant I F' (fig. 408).

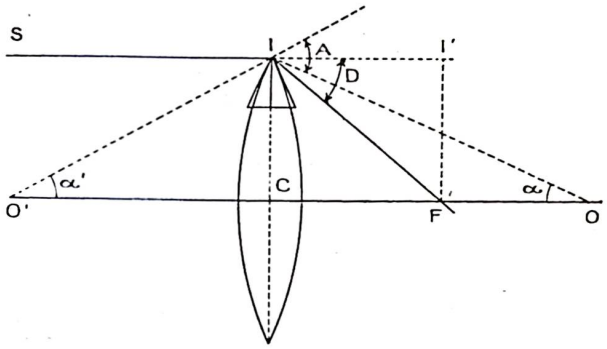


Fig. 408

En se plaçant dans l'hypothèse des petits angles, la dérivation donnée par la formule du prisme

$$D = \widehat{i} + \widehat{i'} - A$$

devient en confondant les *sinus avec les angles*

$$i = nr$$

$$i' = nr'$$

$$D = nr + nr' - A$$

$$D = n(r + r') - A = nA - A$$

ou (1) $D = (n - 1)A$.

Mais en confondant les angles avec leurs tangentes

$$D = \frac{I'F}{II'} = \frac{IC}{CF} = \frac{IC}{f}$$

D'autre part dans le triangle O' I O l'angle extérieur A est égal à la mesure des angles intérieurs non adjacents

$$A = (\alpha + \alpha')$$

En appelant R et R' les rayons de courbure O I et O' I et en confondant les angles avec les tangentes

$$A = \frac{IC}{OC} + \frac{IC}{O'C} = \frac{IC}{OI} + \frac{IC}{IO'} = \frac{IC}{R} + \frac{IC}{R'}$$

L'équation (1) devient donc :

$$\frac{IC}{f} = (n - 1)\left(\frac{IC}{R} + \frac{IC}{R'}\right)$$

ou $$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

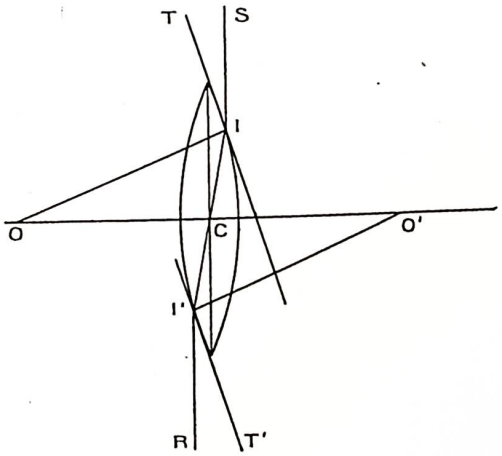


Fig. 409

Centre optique. — *C'est un point de la lentille tel que tout rayon lumineux qui passe par ce point traverse la lentille sans déviation.*

Soit dans un plan de section principale deux rayons de courbure parallèles O I et O' I' (fig. 409) : joignons I I'. Il existe un rayon S I qui traverse la lentille suivant I I' et qui sort suivant I' R. On peut le considérer comme traversant une lame à faces parallèles T T' limitées par les tangentes TC et T'C à la lentille aux points I et I'.

I I' coupe O O' en C. Les deux triangles semblables O I C et I' C O' permettent d'écrire:

$$\frac{OC}{O'C} = \frac{OI}{O'I'} = \frac{R}{R'}$$

équation qui montre que la droite O O' est partagée par C *en deux segments proportionnels* à R et R'.

Autrement dit la position de C est constante et par suite tout rayon qui passe par C traverse la lentille sans déviation. Ce point C *est appelé Centre optique.*

Foyers secondaires. — Plans focaux. — Soit un faisceau de rayons parallèles entre eux mais obliques par rapport à l'axe principal. Parmi ces rayons, il en est un qui traverse la lentille sans déviation S C, un autre passe par F et sort parallèlement à l'axe principal suivant I F'_1 (fig. 410). Ces deux rayons se coupent au point F'_1, *appelé foyer secondaire.*

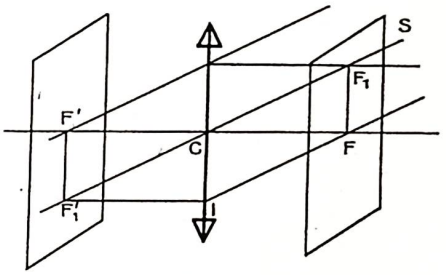


Fig. 410

De même, on établirait que F', est un deuxième foyer secondaire.

La droite F_1' C F_1 *s'appelle axe secondaire.* Il y a autant de foyers secondaires que d'axes secondaires, c'est-à-dire une infinité et l'on voit que le lieu de ces foyers est un plan perpendiculaire à l'axe principale en F, on *l'appelle plan focal.* Il en existe un deuxième en F'.

Pour déterminer expérimentalement les plans focaux, il suffit de faire tomber sur la lentille un faisceau de rayons solaires parallèles entre eux mais non parallèles à l'axe principal. Ils donnent une image du soleil dans le plan focal.

Image d'un objet. — Une lentille convergente donne d'un objet une image réelle et renversée quand cet objet se trouve au delà de F et une image virtuelle et droite quand l'objet est placé entre F et la lentille.

La vérification se fait en chambre noire avec une lentille convergente et une bougie que l'on déplace le long de l'axe principal.

1° *L'objet est très éloigné.* L'image est réelle, renversée, très petite et voisine du foyer (fig. 411).

Fig 411

2° *L'objet se rapproche de la lentille.* L'image s'éloigne de la lentille en grandissant (fig. 412).

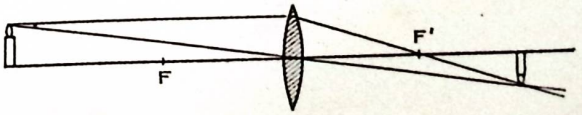


Fig. 412

3° *L'objet est à la distance 2 f.* L'image est alors égale à l'objet (fig. 413).

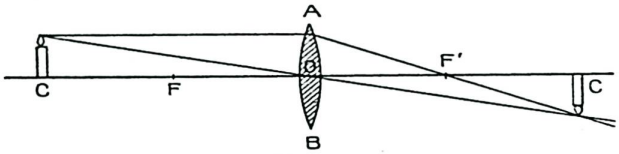


Fig. 413

4° *L'objet se rapproche jusqu'au foyer.* L'image s'éloigne en grandissant jusqu'à l'infini (fig. 414).

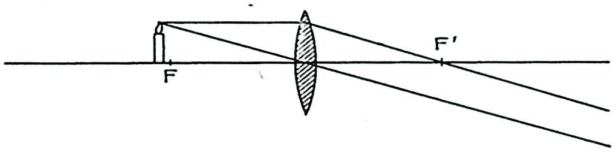


Fig. 414

5° *L'objet se déplace du foyer jusqu'à la lentille.* On constate que l'image est virtuelle droite et agrandie et qu'elle va décroissant pour devenir égale à l'objet au centre de la lentille (fig. 415).

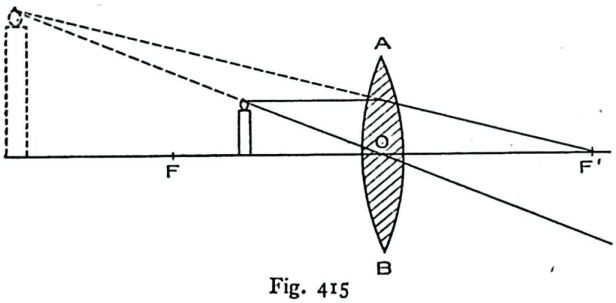


Fig. 415

L'application des lois de la réfraction conduit aux mêmes résultats.

Image d'un point pris sur l'axe principal. — *Un faisceau de rayons lumineux émané du point* P *pris sur l'axe principal va concourir en un point de cet axe* P' *qui est l'image du point* P (fig. 416).

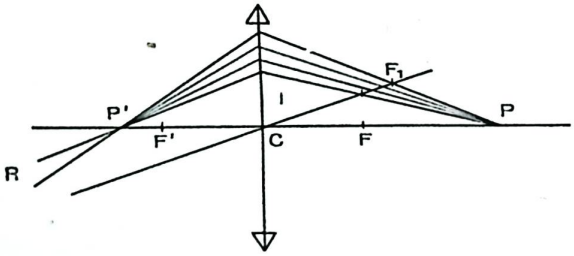


Fig. 416

En effet, un rayon P I se réfracte suivant I R parallèlement à l'axe secondaire CF_1, tandis que P C passe sans déviation. Ces deux rayons se coupent en P' image de P.

Posons $PC = p$

$P'C = p'$

Les deux triangles semblables PCF_1 et PIP', permettent d'écrire

$$\frac{PC}{PP'} = \frac{PF_1}{PI} = \frac{PF}{PC}$$

ou $$\frac{p}{p+p'} = \frac{p-f}{p}$$

$$p^2 = p^2 + pp' - pf - p'f$$

$$pp' = pf + p'f$$

en divisant par ppf

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

ou $$p' = \frac{pf}{p-f}$$

Réciproquement, en *vertu du principe du retour inverse de la lumière,* si P' est un point lumineux P est une image ; on dit que P et P' sont *conjugués.*

Image d'un point pris hors de l'axe principal. — Soit P ce point (fig. 417). Parmi les rayons émanés de P il en est un P I parallèle à l'axe principal qui se réfracte en passant par le foyer F et un autre P C qui traverse sans déviation. Ces deux rayons se coupent en P' image de P.

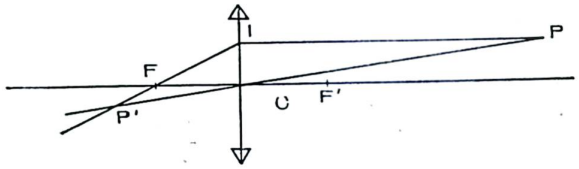


Fig. 417

Image d'un objet A B perpendiculaire à l'axe principal. — Son image est aussi *perpendiculaire à l'axe principal.* Elle est connue en même temps que celle du point A. La construction est donc ramenée à celle du cas précédent.

1° *L'objet* A B *est très éloigné.*

L'image A' B' est *réelle, renversée, très petite et voisine de* F (fig. 418).

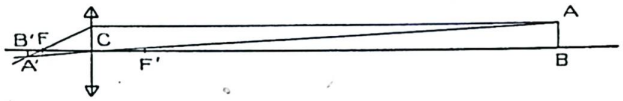


Fig. 418

2° *L'objet* A B *se rapproche de la lentille.*

L'image A'B' *réelle, renversée, grandit et s'éloigne de* F (fig. 419).

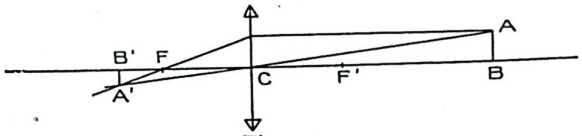


Fig. 419

Remarque. — Dans les triangles semblables A B C et A' B' C on peut écrire :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C}{CB}$$

ou $$\frac{I}{O} = \frac{p'}{p}.$$

3° *L'objet* A B *est placé à la distance 2 f.*

L'image A' B' *réelle, renversée, égale à* A B est située à la *distance 2 f* de l'autre côté de la lentille (fig. 420).

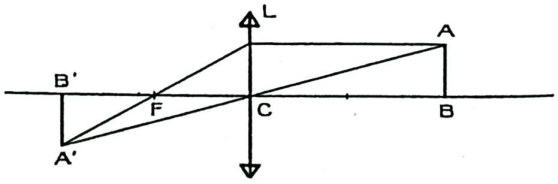


Fig. 420

4° *L'objet* A B se rapproche de F.

L'image A′ B′ *renversée, réelle s'éloigne de* F en grandissant pour devenir infiniment grande lorsque A B est en F′ (fig. 421).

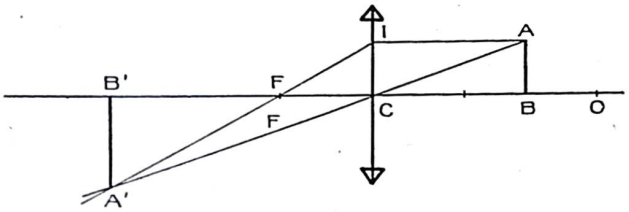


Fig. 421

5° *L'objet* A B *se déplace de* F′ *en* C.

L'image A′ B′ devient *virtuelle, droite, plus grande* que A B et diminue progressivement pour se confondre avec A B lorsque ce dernier est en C (fig. 422).

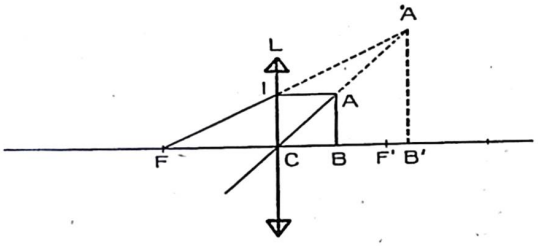


Fig. 422

6° *L'objet A B est virtuel.*

Parmi les rayons qui tendent à former le point A, S C traverse sans déviation et S′ I se réfracte en passant par F et rencontre S C en A′ image réelle de A. L'image A′ B′ est *réelle, droite, plus petite que l'objet* (fig. 423).

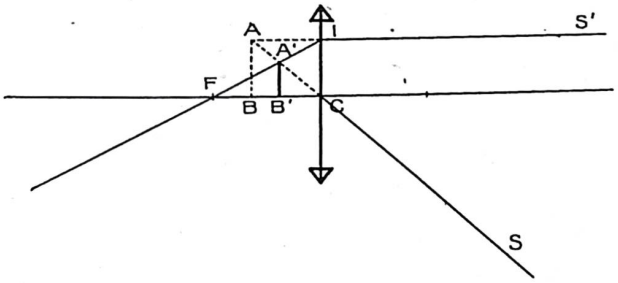


Fig. 423

Nous pouvons résumer ces résultats sur le tableau suivant :

p	p'	p'/p val.	p'/p signe	Nature de l'image	Sens	Grandeur
$-\infty$	f	0	+			I < O
↓					Renversée	↗
$2f$	$2f$	1	+	Réelle		I = O
↓						↗
f	$+\infty$ / $-\infty$	∞	+ / —			I > o
↓				Virtuelle		↘
o	o	1	—		droite	I = O
↓				Réelle		I < O ↘
$-\infty$	f	o	—			I = O

Lentilles divergentes. — Marche des rayons. — Nous n'étudierons que les lentilles biconcaves. En raisonnant comme pour les lentilles convergentes on démontrerait qu'un rayon S I se réfracte suivant I R en s'écartant de l'axe principal (fig. 424), d'ou leur nom de *lentilles divergentes.*

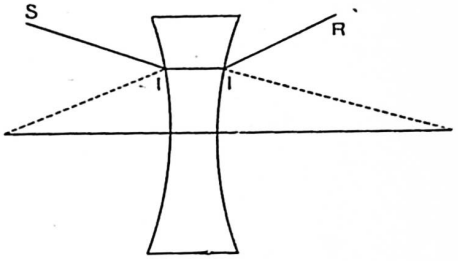


Fig. 424

Fig. 425

En supposant la lentille *extra-mince,* on peut la représenter par *une droite limitée par deux prismes dont la base est en dehors* (fig. 425).

Foyer principal. — En dirigeant le foyer principal d'une lentille divergente vers le soleil, l'œil placé dans le faisceau divergent aperçoit en F une image très petite, très brillante du soleil. Le point F est appelé *foyer principal virtuel* (fig. 426).

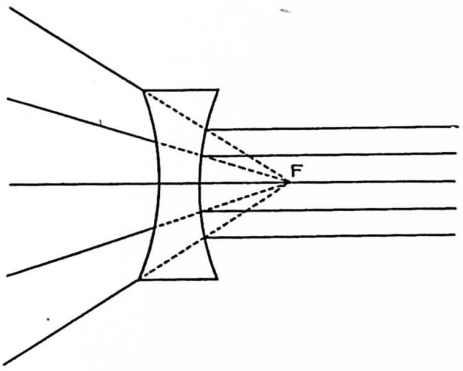


Fig. 426

L'application des lois de la réfraction donne les mêmes résultats.

En effet, un rayon tel que S I se réfracte suivant I R en s'écartant de l'axe principal et son prolongement passe par le point F. Quant aux autres rayons, ils coupent l'axe principal en des points tellement voisins de F qu'on peut les confondre avec ce point F appelé *foyer principal virtuel* (fig. 427).

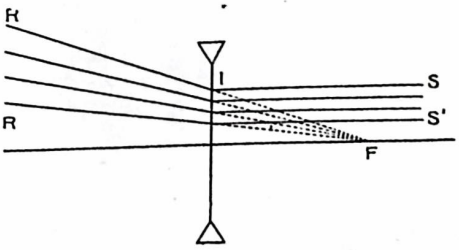


Fig. 427

Il existe un autre foyer principal virtuel F′ symétrique du premier par rapport à la lentille.

Réciproquement, en vertu du principe de retour inverse de la lumière, si on considère un faisceau de rayons lumineux qui tendent à converger vers le point F, ces rayons se réfractent parallèlement à l'axe principal.

Puissance. — On a $p = -\frac{1}{f}$

Ex. La puissance d'une lentille divergente de distance focale $f = 0$ m. 5 est

$$p = -\frac{1}{0,5} = -2 \text{ dioptries}$$

Centre optique. — On établirait comme précédemment pour les lentilles convergentes qu'il existe un point C appelé centre optique par lequel les rayons passent sans déviation (fig. 428).

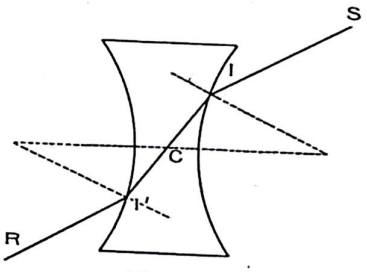


Fig. 428

Foyers secondaires — Plans focaux.

Considérons un faisceau de rayons parallèles entre eux, mais obliques par rapport à l'axe principal (fig. 429). Il en est un S C qui passe sans déviation, on l'appelle axe secondaire, un autre S' I' qui se réfracte parallèlement à l'axe principal et dont le prolongement coupe S C au point F_1 appelé foyer secondaire. On remarque que I' F_1 F C est un rectangle et que par suite.

$$I'F_1 = CF = f.$$

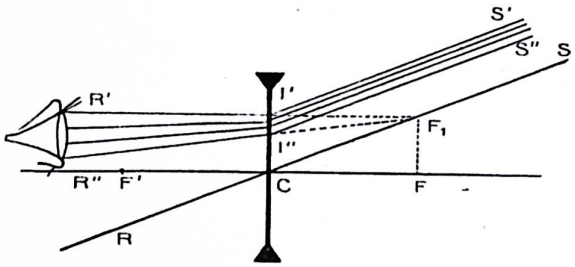


Fig. 429

On peut en conclure que le lieu des foyers secondaires est un plan perpendiculaire à l'axe principal au point F. *On l'appele plan focal.* Il en existe un deuxième en F'.

Points conjugués. — Soit un point P situé sur l'axe principal. Parmi les rayons émanés de P, le rayon P C traverse sans déviation, le rayon P I se réfracte suivant I R parallèlement à l'axe secondaire C F_1 et son prolongement coupe P C au point P' image de P (fig. 430).

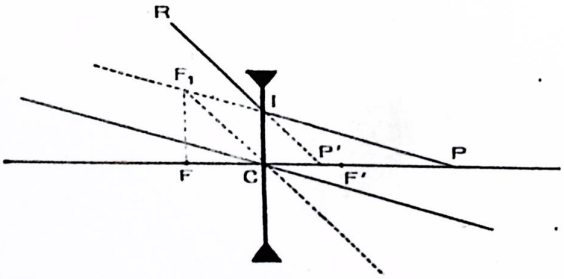


Fig. 430

Cette image est virtuelle et on établirait géométriquement que l'on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f}$$

p étant égal à P C et p' à P' C

Les 2 points P et P' *sont dits conjugués.*

Image d'un objet. — Objet réel : 1° *L'objet A B est très éloigné.*

L'image A' B' est *virtuelle, droite, très petite et très voisine de* F (fig. 431).

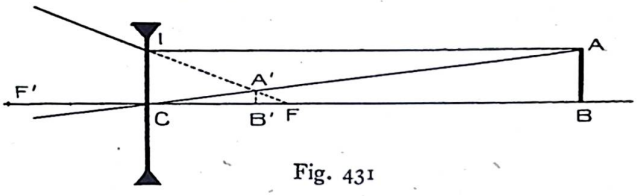


Fig. 431

2° *L'objet se rapproche de la lentille.*

L'image grandit en se rapprochant de C pour devenir égale à l'objet en C ou image et objet se confondent (fig. 432).

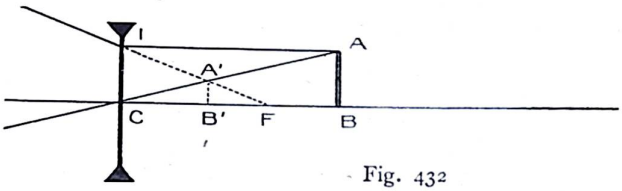


Fig. 432

Remarque. — Les triangles rectangles C A' B' et C A B permettent d'écrire :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{CB'}{CB}$$

ou

$$\frac{I}{O} = \frac{p'}{p}$$

Objet virtuel: A B *est placé entre F et* C (fig. 433).

Parmi les rayons qui tendent à former le point A, S C traverse sans déviation, S' I parallèle à l'axe principal se réfracte suivant I R et rencontre S C en A' image de A.

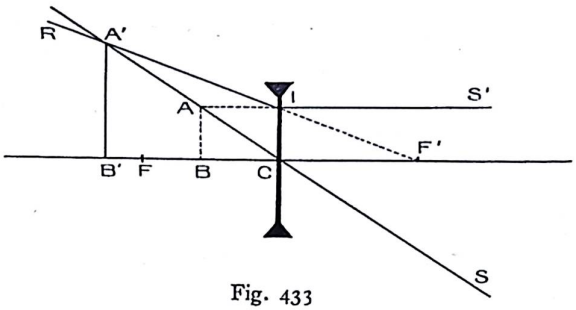


Fig. 433

A' B' est donc l'*image réelle, droite et agrandie de l'objet virtuel* A B.

A B *est placé au delà de* F (fig. 434).

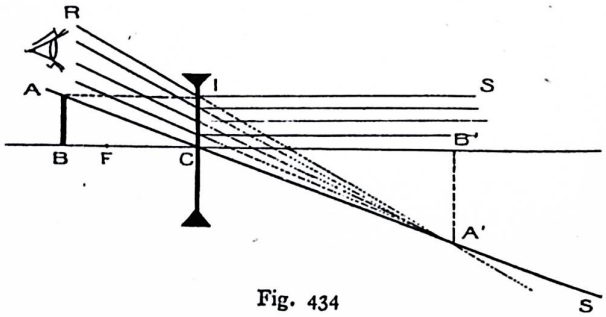


Fig. 434

L'image A' B' *est virtuelle, renversée, agrandie.*

La vérification expérimentale se fait en chambre noire comme pour les lentilles convergentes.

Distance focale et puissance de deux lentilles accolées. — Considérons une lentille L convergente de distance focale f sur laquelle tombe un faisceau de rayons parallèles à l'axe principal (fig. 435). Elle le fait converger en F. Si nous plaçons une deuxième lentille L′ de distance focale f' à une distance d de L, on constate que le point F se rapproche du centre C en F_1.

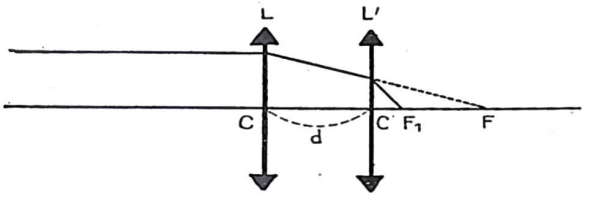


Fig. 435

Si nous appelons φ la distance focale du système des deux lentilles.

On a, en appliquant l'équation:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

$$-\frac{1}{f-d} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f'}$$

Si nous faisons $d = 0$

$$-\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f'}$$

d'où

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$$

D'une manière générale :

$$\frac{1}{\varphi} = \Sigma \frac{1}{f}$$

f étant affecté du signe + ou — selon que la lentille est convergente ou divergente. Σ signifie : *somme de.*

Aberration de sphéricité. — Si la lentille n'est pas absolument mince, l'angle du *prisme va croissant de l'axe principal au bord de la lentille,* par suite un faisceau de rayons lumineux parallèle à l'axe principal ne converge pas rigoureusement au point F, mais en des *points de plus en plus proches du centre* C. Le foyer devient une petite sphère lumineuse et non un point. Il s'en suit que les images données par une telle lentille sont déformées. Cette déformation a reçu le nom d'*aberration de sphéricité.* On remédie à cet inconvénient en accolant des lentilles *de substances différentes* et dont les rayons de courbure sont choisis de telle sorte que l'aberration *soit minimum* (fig. 436 et 437).

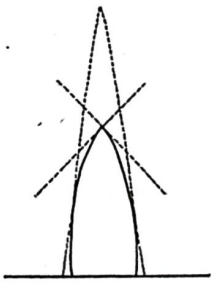


Fig. 436

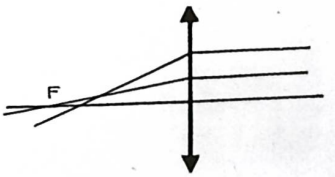


Fig. 437

Fresnel a imaginé des *lentilles à échelons.* Une lentille à échelons (fig. 438) se compose d'une lentille centrale plan convexe et d'une série de couronnes concentriques en verre soudés entre elles à la colle de poisson. La courbure des différentes couronnes est calculée de telle sorte que les rayons parallèles à l'axe principal viennent rigoureusement converger au foyer de la lentille centrale.

Application des lentilles. — On utilise les lentilles convergentes dans les loupes, les verres correcteurs des hypermétropes et des presbytes, les appareils de projections, les objectifs d'appareils photographiques, les lentilles des microscopes, des lunettes, etc.

Au contraire, les lentilles divergentes servent à fabriquer les lunettes pour myopes, les jumelles de théâtre et surtout à établir par association avec des lentilles convergentes les systèmes *achromatiques* des objectifs et oculaires des principaux appareils d'optique.

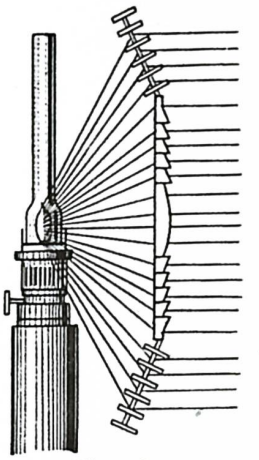


Fig. 438

Problèmes.

1. — On place devant une lentille convergente de distance focale 2 m., une règle de 0,20 m, perpendiculaire à l'axe principal, à une distance de 6,50 m. Trouver la position, la grandeur et la nature de l'image.

Solution

C'est le cas de la figure 439:

$$p = 6{,}5 \quad f = 2$$

On a :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{6{,}5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6{,}5} = \frac{6{,}5-2}{13} = \frac{4{,}5}{13}$$

$$p' = \frac{13}{4{,}5} = 2{,}889 \text{ m.}$$

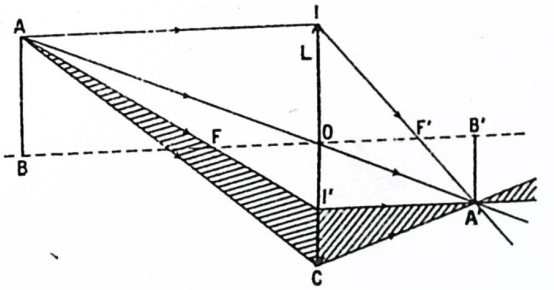


Fig. 439

L'image sera à 2 m., 889 de la lentille et du côté de F puisque p est positif ; c'est-à-dire qu'elle sera réelle et renversée. Sa grandeur est donnée par la formule :

$$\frac{I}{O} = \frac{2{,}889}{6{,}5}$$

$$\frac{I}{0{,}2} = \frac{2\,889}{6{,}5} \qquad I = \frac{0\,5778}{0{,}5} = 0{,}089 \text{ m.}$$

L'image aura sensiblement 89 millimètres.

2. — On place devant une lentille divergente de distance focale 1 m., et à 3 m. de cette lentille, une règle de 0,50 m, perpendiculaire à l'axe principal. Trouver la position, la nature et la grandeur de l'image.

Solution

$$p = -3 \qquad f = 1$$

p est négatif puisque l'objet (réel) est du côté de F. On a :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{p'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$p' = 0{,}75 \text{ m.}$$

L'image est à 0,75 m. de la lentille et du côté de F, puisque p' est positif ; c'est-à-dire qu'elle est virtuelle. Elle est droite et sa grandeur est donnée par

$$\frac{I}{O} = \frac{0{,}75}{-3}$$

$$\frac{I}{0{,}5} = \frac{0{,}75}{-3}$$

$$I = -\frac{0{,}375}{3} = -0 \text{ m. } 125$$

L'image a 0,125 m. et le signe — indique qu'elle n'est pas de même nature que l'objet ; celui-ci étant réel, l'image est virtuelle, comme nous venons de le faire remarquer.

3. — Une lentille convergente à 100 cm. de distance focale, on place à 50 cm. de cette lentille un objet lumineux de longueur égale à 10 cm. Construire l'image. On fera la figure à l'échelle de 1/10 et on indiquera d'après les mesures faites sur le dessin, la nature, la grandeur et la position de l'image.

Solution

Pour construire l'image, on prend deux rayons issus du point A l'un parallèle à l'axe principal de la lentille qui se réfracte en passant par le foyer F' et l'autre passant par le centre optique qui n'est pas dévié. Les rayons étant divergents ne se rencontrent pas, ce sont leurs prolongements géométriques qui donnent le point A', image virtuelle du point A ; du point A' on abaisse la perpendiculaire sur l'axe principal de la lentille et on a l'image A' B' de la droite A B (fig. 440).

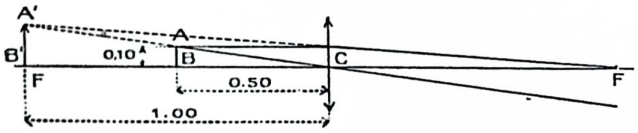


Fig. 440

Cette image est virtuelle, elle se forme au foyer et elle est deux fois plus grande que l'objet. En effet, les deux triangles semblables ABC et A'B'C donnent

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C}{BC}$$

ou $\frac{A'B'}{10} = \frac{100}{50}$ d'où A' B' = 20 cm.

(Dans la construction faite avec soin selon l'échelle indiquée on obtient les longueurs 2 cm. pour l'image et 1 cm. pour l'objet).

4. — On veut obtenir l'image agrandie d'un objet lumineux sur un écran placé à 4 mètres de l'objet au moyen d'une lentille convergente de distance focale égale à 36 cm. On demande de fixer la position que la lentille doit occuper. Quelle sera la grandeur de l'image par rapport à celle de l'objet ?

(Baccal. Rennes).

Solution

$$BB' = p + p' = 400 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{400 - p} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{400 - p + p}{p(400 - p)} = \frac{1}{36}$$

$$400p - p^2 = 36 \times 400$$

$$p^2 - 400p + 36 \times 400 = 0$$

$$p = 200 \pm \sqrt{40000 - 36 \times 400}$$

$$p = 200 \pm 160$$

$$p' = 360$$

$$p'' = 40$$

Ces deux positions sont symétriques par rapport au milieu de B B'

Grandeur de l'image

$$\frac{I}{O} = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}$$

$$I = \frac{1}{9} \text{ de l'objet}$$

ou bien

$$\frac{I}{O} = \frac{360}{40} = 9$$

$$I = 9 \text{ fois l'objet.}$$

5. — Construire géométriquement la position d'un objet qui placé devant une lentille de foyer $CF = f$ donne une image égale à 4 fois l'objet.

On calculera ensuite cette distance et on vérifiera que la figure est exacte. — Applications numériques $f = 36$ mm., hauteur de l'objet 1 cm.

Solution

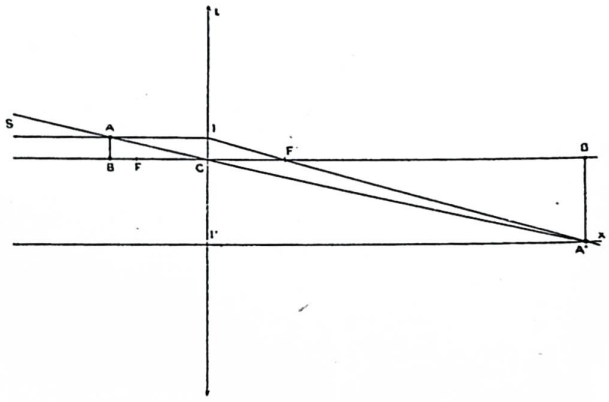


Fig. 440 a

Portons sur C'L une longueur CI = O = 1 cm. et CI' tel que CI' = 4O = 4 cm. Menons une parallèle à FF'. Joignons IF' et prolongeons jusqu'en A' rencontre avec la droite I'x. Ce point A' est l'image de A. Joignons alors A'C et prolongeons jusqu'en A rencontre avec IS. Le point A nous donne la position de l'objet AB.

Si au lieu de porter CI' en dessous de l'axe optique, ou le porte en dessus, on obtient le point A et l'image A' B' est virtuelle.

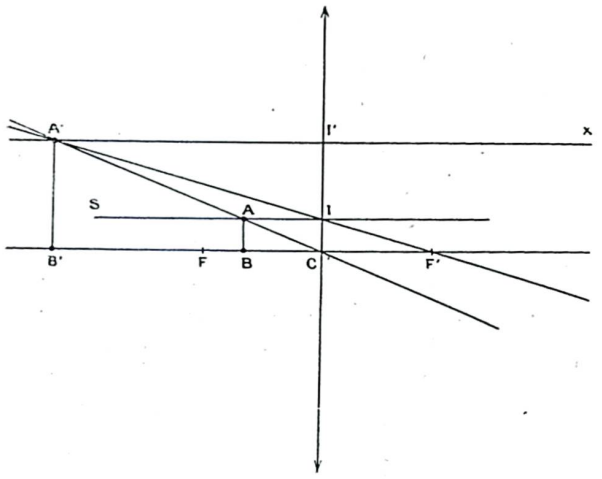


Fig. 440 b

Calcul.

(1)
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{0} = 4$$
$$p' = 4\,p$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{4p} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{4+1}{4p} = \frac{1}{f}$$
$$p = \frac{5f}{4}$$
$$p = \frac{5 \times 36}{4} = 45 \text{ mm.}$$

(2)
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{4p} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{4-1}{4p} = \frac{1}{f}$$
$$p = \frac{3f}{4} = \frac{3 \times 36}{4} = 27 \text{ mm.}$$

6. — A l'aide d'une lentille convergente, on projette sur un écran l'image d'une épreuve photographique carrée de 10 cm. de côté. La surface de l'image lumineuse sur l'écran est de 4 m². D'autre part la distance de l'épreuve photographique à l'écran est 8,82 m. Quelle est la distance focale de la lentille ?

Solution

Hauteur de l'image $\sqrt{40000} = 200$ cm.
$$\frac{I}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{200}{10} = 20$$
d'où $p' = 20\,p$
$$p + p' = 20\,p + p = 21\,p = 882$$
$$p = \frac{882}{21} = 42$$
$$p' = 42 \times 20 = 840$$
d'où
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{840} + \frac{1}{42} = \frac{1+20}{840}$$
$$f = \frac{840}{21} = 40 \text{ cm.}$$

CHAPITRE VII

INSTRUMENTS D'OPTIQUE — PHOTOGRAPHIE

Les instruments d'optique sont destinés à augmenter la puissance de la vision. Nous allons donner la description des plus importants.

Lanterne à projections. — La *lanterne à projections*, appelée aussi, à tort du reste, *microscope solaire*, se compose essentiellement d'une lentille convergente. Elle est destinée à projeter, sur un écran, l'image agrandie d'un objet quelconque, en général un objet transparent, par exemple une photographie ou une peinture sur verre. La lanterne magique est une lanterne à projections (fig. 441 et 442).

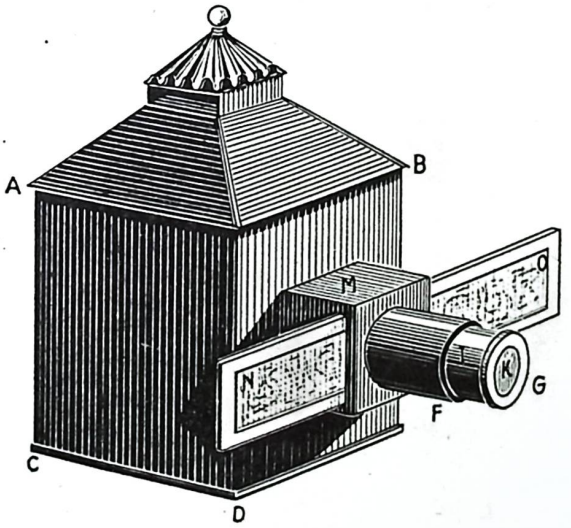


Fig. 441

L'objet A B se place à une distance de la lentille un peu plus grande que la distance focale. Dans ces conditions, nous savons que la lentille O doit fournir de l'objet une image A' B' agrandie, réelle, renversée par rapport à l'objet. On reçoit cette image sur un écran (fig. 443).

L'agrandissement est d'autant plus considérable que l'objet A B est plus rapproché du symétrique du foyer de la lentille.

L'objet doit être très éclairé ; son intensité lumineuse et celle de l'image sont, en effet, en raison inverse des surfaces de l'objet et de l'image. Si, par conséquent, le *grossissement linéaire* est a, le grossissement superficiel sera a^2 et l'éclairement de l'image sera à celui de l'objet dans le rapport $\frac{1}{a^2}$.

On voit que si le grossissement superficiel est seulement de 100 par exemple, il faut que l'objet soit éclairé avec une grande intensité pour que l'image soit nette. Aussi adjoint-on toujours à la lanterne à projections un dispositif destiné à concentrer sur l'objet une grande quantité de lumière.

On adopte naturellement n'importe quelle source lumineuse, la lumière du soleil, si possible, qu'on dirige au moyen d'un miroir plan dans l'axe de l'appareil et qu'on concentre sur l'objet au moyen d'une lentille convergente auxiliaire. C'est cette disposition parti-

culière pour le soleil qui a fait donner improprement à cet instrument d'optique le nom de microscope solaire. Mais, en général, la source lumineuse adoptée est une lampe ou la lumière Drummond. Ainsi, c'est toujours le cas pour les lanternes à projections cinématographiques.

On utilise aujourd'hui des lampes électriques à incandescence de 1.400 bougies.

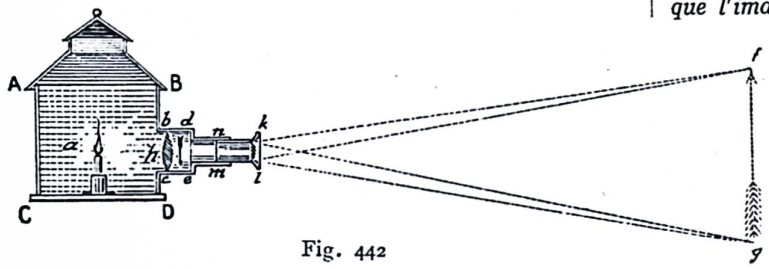


Fig. 442

Loupe. — Dans la lanterne à projections, la lentille convergente est utilisée pour sa propriété de donner des images réelles et agrandies. Dans la *loupe* ou *microscope simple* on l'utilise pour sa propriété de donner des images virtuelles (fig. 444).

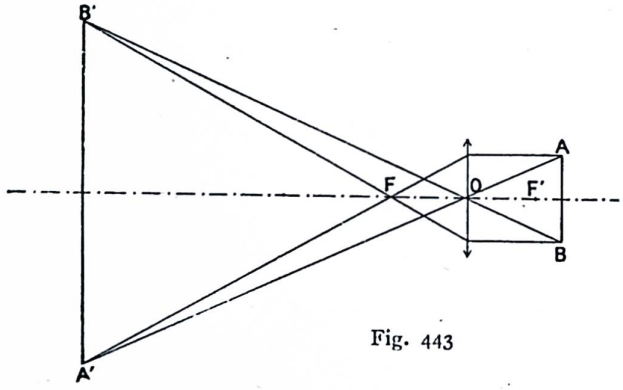


Fig. 443

La loupe se compose essentiellement d'une lentille convergente qu'on place entre l'œil et l'objet à examiner. Ce dernier doit se trouver à une distance de la loupe inférieure à la distance focale. Dans ces conditions, la lentille convergente fournit d'un objet A B une image A'B' virtuelle agrandie et droite par rapport à l'objet.

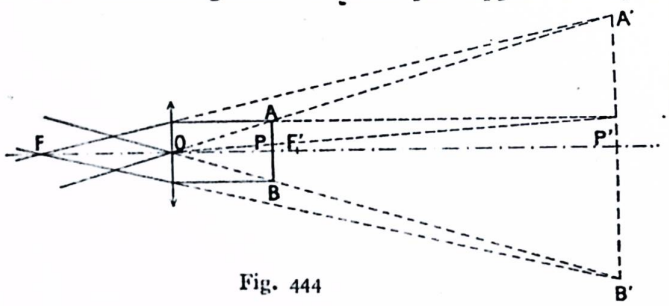


Fig. 444

Il n'apparaît pas, au premier abord, qu'une loupe augmente la puissance de la vision. En effet, soit p la distance O P de l'objet à la lentille et p' la distance O P' de l'image. Si on appelle O et I deux dimensions homologues de l'objet et de l'image, on a :

$$\frac{I}{O} = \frac{p'}{p}$$

Par conséquent, si l'image virtuelle est plus grande que l'objet, elle est aussi plus éloignée de l'œil que ce dernier et justement dans le même rapport. L'angle visuel, c'est-à-dire sous lequel on voit une dimension donnée, est donc le même pour I et pour O, du moins en supposant l'œil assez rapproché de la lentille pour qu'on puisse le considérer comme placé en O. Il semble donc qu'on n'ait aucun avantage à examiner un objet à la loupe.

Toutefois, il faut remarquer que pour examiner un objet avec beaucoup de détails, on a avantage à le rapprocher de l'œil le plus possible. Or, il existe une limite à la *faculté d'accommodation* de l'œil, de sorte qu'on ne peut distinguer nettement un objet placé à à une distance donnée qu'on appelle distance minima de la vision distincte.

Si on suppose la loupe et l'objet disposés de telle façon que l'image virtuelle se forme à une distance p' égale au minimum D' de la vision distincte, l'objet sera, dans ce cas, beaucoup plus rapproché de l'œil que si l'on n'avait pas de loupe et par conséquent on le verra sous un angle visuel beaucoup plus grand.

Il ressort de cette explication que, pour se servir d'une loupe, il ne faut pas la placer, comme on le fait quelquefois, à une grande distance de l'œil ; il faut, au contraire, l'appliquer contre l'œil et rapprocher ensuite l'objet le plus possible, jusqu'à ce que l'image se forme au minimum de la vision distincte.

Si on fait $p' = -D$ dans la formule des lentilles, celle-ci devient :

$$-\frac{1}{D} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$$

d'où on tire :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{1}{D}$$

On a, d'autre part, en appelant α l'angle A O P

$$\frac{AP}{OP} = \operatorname{tg} \alpha$$

et, en remarquant que :

$$\frac{AP}{OP} = AP \times \frac{1}{p}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{D}\right) AP$$

Dans la parenthèse, le second terme est d'autant plus grand que la distance D est plus petite. Par conséquent, l'observateur verra l'objet d'autant plus agrandi que la distance minima de vision distincte sera plus petite pour son œil. Autrement dit, un myope verra à l'aide de la loupe A B, sous un diamètre apparent plus grand qu'une personne douée d'une vue normale.

D'un autre côté, si la distance focale de la lentille est très petite, le terme $\frac{1}{D}$ pourra être regardé comme négligeable vis-à-vis de $\frac{1}{f}$ et on pourra alors admettre qu'on a sensiblement

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{f} \times AP$$

Le coefficient $\frac{1}{f}$ caractérise la *puissance* de la loupe : la puissance d'une loupe est exprimée par l'inverse de sa distance focale.

On appelle plus particulièrement microscope simple une loupe fixée sur un pied, de telle sorte que la personne qui observe un objet avec cette loupe peut conserver les deux mains libres.

On appelle grossissement d'une loupe, pour un observateur déterminé, le rapport du diamètre apparent, sous lequel cet observateur voit au travers de la loupe une dimension déterminée de l'objet, au diamètre apparent sous lequel il verrait cette même dimension à l'œil nu à la distance minima de la vision distincte.

D'après ce que nous venons de dire de la puissance, une dimension A B de l'objet est vue, au travers de la loupe, sous un diamètre apparent $\frac{AB}{}$: à l'œil nu, elle

est vue sous un diamètre apparent $\frac{A\,B.}{D}$ Le grossissement G est donc exprimé par $G = \frac{D}{f}$ f étant invariable, le grossissement dépend de la valeur de D, il augmente et il diminue proportionnellement à D. Donc, plus la distance minima de la vision distincte sera grande, plus le grossissement sera fort, c'est-à-dire que, pour un œil presbyte ou hypermétrope, le grossissement est plus grand que pour un œil myope. Cela se comprend du reste aisément, car un myope qui regarde à l'œil nu peut placer l'objet très près de son œil, et le voit par conséquent sous un diamètre apparent très grand, même sans se servir d'une loupe.

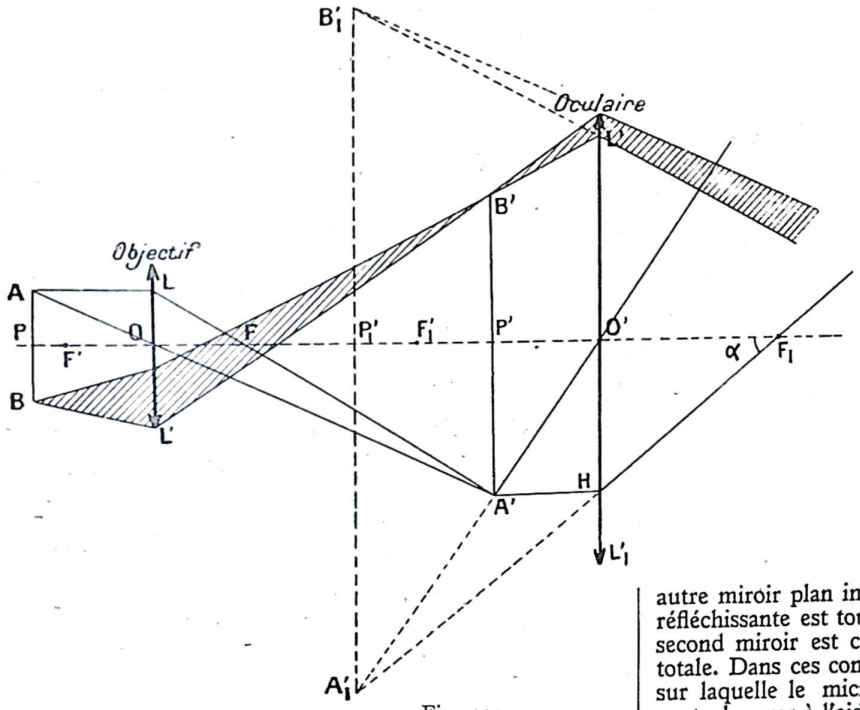


Fig. 445

Microscope composé. — *Le microscope composé* peut être considéré comme la combinaison d'une lanterne à projections et d'une loupe. Il est constitué, en effet, par deux lentilles convergentes dont l'une O, appelée *objectif*, fournit de l'objet A B à examiner une image réelle A'B' plus grande que l'objet et renversée par rapport à lui (fig. 445). L'autre lentille O', nommée *oculaire*, fonctionne comme une loupe vis-à-vis de l'image A'B' qui peut être considérée par rapport à elle comme un objet réel. L'oculaire fournit donc de A'B' une image A'_1 B'_1 par conséquent renversée par rapport à A B.

Comme dans la lanterne à projections il est nécessaire d'éclairer fortement l'objet A B.

On appelle *grossissement d'un microscope* le rapport du diamètre apparent sous lequel on voit une dimension donnée de l'objet à travers le microscope, et du diamètre apparent sous lequel on voit la même dimension à l'œil nu à la distance minima de vision distincte.

Supposons l'œil placé au foyer F_1 de l'oculaire, appelons α l'angle A'_1 F_1 P'_1 sous lequel on voit une dimension de l'image à travers le microscope on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A'_1\,P'_1}{F_1\,P'_1} = \frac{O'\,H}{F_1\,O'} = \frac{A'\,P'}{O'\,F_1}$$

ce qu'on peut écrire

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{A'\,P'}{A\,P} \times \frac{1}{F_1\,O'}\right) A\,P$$

dans la parenthèse, le premier facteur représente l'agrandissement de l'image A'B' fournie par l'objectif par rapport à l'objet A B ; le second facteur est la puissance de l'oculaire considéré comme une loupe. Ainsi la grossissement d'un microscope est égal au produit des grandissements fournis par l'objectif et l'oculaire. La *puissance* du microscope est donnée par le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image à la longueur de l'objet. Elle est numériquement égale au produit du grandissement de l'objectif par la puissance de l'oculaire.

On peut mesurer expérimentalement la puissance d'un microscope au moyen d'un appareil connu sous le nom de *chambre claire* (fig. 446). *Cet instrument se compose essentiellement d'un petit miroir plan incliné à 45° par rapport au plan oculaire du microscope et placé devant ce dernier. Un petit trou ménagé au centre de ce miroir permet aux rayons venant du microscope de passer et de parvenir à l'œil de l'observateur.* Ce dernier voit en même temps les rayons réfléchis par le miroir dans une direction convenable. Par conséquent, il peut distinguer à la fois l'image d'un objet examiné au microscope et celle d'un objet vu à l'œil nu par réflexion dans le miroir plan. Ces deux images visuelles se projettent l'une sur l'autre à la condition qu'elles soient observées toutes les deux de la même distance, au minimum de vision distincte. Pour rendre la chambre claire plus pratique on adapte en face du miroir un autre miroir plan incliné lui aussi à 45° et dont la face réfléchissante est tournée vers le premier, en général ce second miroir est constitué par un prisme à réflexion totale. Dans ces conditions, on peut placer, sur la table sur laquelle le microscope est posé, l'objet que l'on veut observer à l'aide de la chambre claire. Après deux réflexions, les rayons lumineux frappent l'œil dans une direction parallèle à la direction primitive.

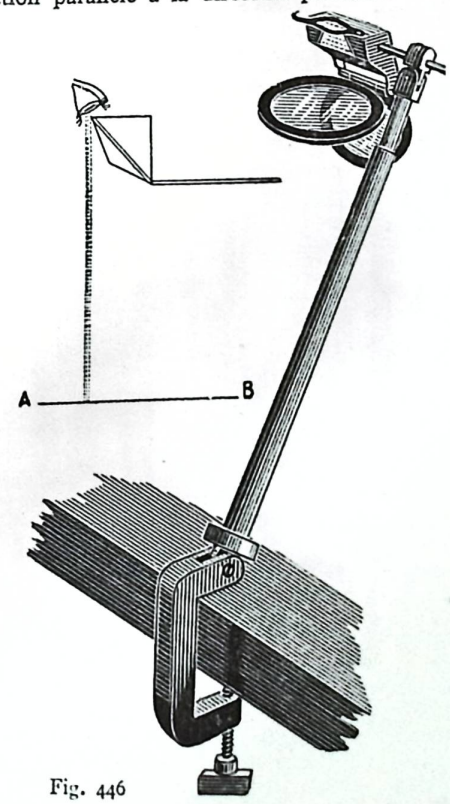


Fig. 446

Pour mesurer la puissance du microscope on place sur le porte-objet de l'instrument un micromètre divisé en centièmes de millimètre, et sur la table on dispose une règle divisée en millimètres. *L'observateur voit à la fois le micromètre à travers le microscope, et la règle ; il s'arrange pour que les deux images coïncident,* et il compte alors le nombre de divisions de la règle qui sont couvertes par une division de l'image grossie du micromètre. Supposons qu'une division du micromètre couvre par exemple cinq divisions de la règle. Le diamètre apparent sous lequel on voit à l'œil nu cinq millimètres à la distance D est $\frac{0,005}{D}$, D étant mesuré en mètres. Le diamètre apparent sous lequel on voit dans le microscope 1 centième de millimètre : $0,00001 \times P$. Ces deux diamètres apparents sont égaux.

$$\frac{0,005}{D} = 0,00001 \times P.$$

d'où on tire : $P = \frac{0,005}{0,00001 \times D}$

Supposons que D vaille 0 m, 25, on aura :

$$P = \frac{500}{0,25} = 2.000$$

On trouve que le grossissement du microscope pour une vue déterminée est égal au produit de la puissance par la distance minima de la vision distincte. La puissance est elle-même à peu près indépendante de la vue de l'observateur, parce qu'une division grossie du micromètre couvre un nombre de divisions de la règle d'autant plus grand que la distance D est plus grande. Si on appelle G le grossissement on a :

$$G = P.D.$$

On appelle *champ d'un microscope* l'espace dans lequel doit se trouver un point placé devant l'objectif pour que son image puisse être aperçue à travers l'instrument.

Les rayons issus d'un point A quelconque placé devant l'objectif et qui rencontrent cet objectif forment un cône dont le point A est le sommet et l'objectif la base. Après avoir traversé la lentille, ce faisceau de rayons divergents donne un faisceau de rayons convergents dont le sommet est en A'. Pour que les rayons du faisceau convergent ainsi formé, aillent, en continuant leur chemin, rencontrer l'oculaire, il faut que la droite L A' rencontre l oculaire. L A' est d'ailleurs le dernier rayon qui puisse rencontrer l'oculaire lorsque le point A s'élève au-dessus de l'axe O O'. Pour que l'image A A'_1 soit nette il faut que tout le faisceau qui concourt à former le point A' rencontre l'oculaire. Par conséquent, il faut que le rayon $L'A_1$ rencontre l'oculaire. Dans ces conditions, on voit que l'image A'B' doit être comprise entre les deux droites $L'L_1$ et $L\,L'_1$ qui joignent les bords extrêmes des deux lentilles : objectif et oculaire. Le cône à deux nappes, ainsi formé, a pour sommet K et l'objet A B doit être placé dans le cône qui a pour sommet l'image du point K par rapport à l'objectif.

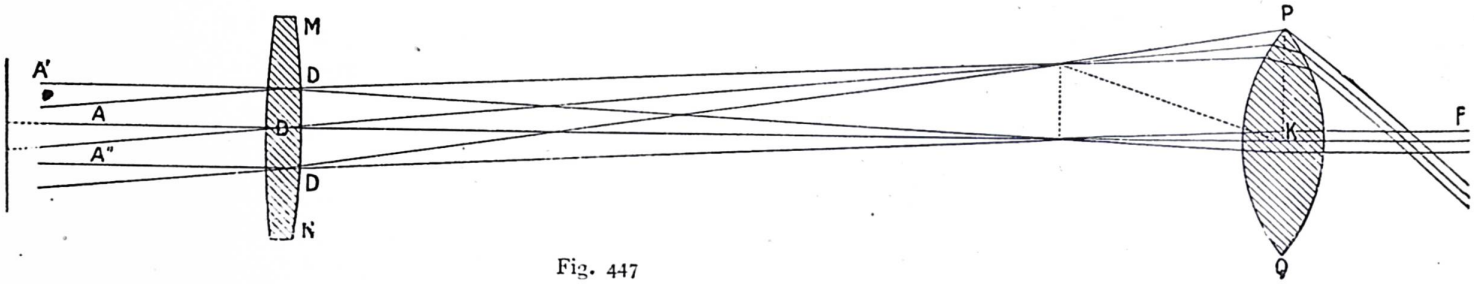


Fig. 447

L'endroit où l'on place l'œil en face de l'oculaire n'est pas indifférent, il faut en effet recevoir le plus de lumière possible et embrasser le champ. Or, au point de vue de leur marche dans le microscope, on peut considérer tous les rayons, qui traversent l'objectif, comme issus de l'objectif lui-même. Par conséquent, tous ces rayons, du moins ceux qui rencontrent l'oculaire, doivent passer, après avoir traversé l'oculaire, par une région de l'espace qui n'est autre que l'image de l'objectif par rapport à l'oculaire. Si on remarque que la longueur du microscope est toujours très grande relativement à la distance focale de l'oculaire, on voit que l'image de l'objectif par rapport à l'oculaire, doit se former sensiblement au foyer de ce dernier. Donc, il faut placer l'œil au foyer même de l'oculaire pour embrasser tout le champ du microscope. C'est ce qu'on appelle le *point oculaire.*

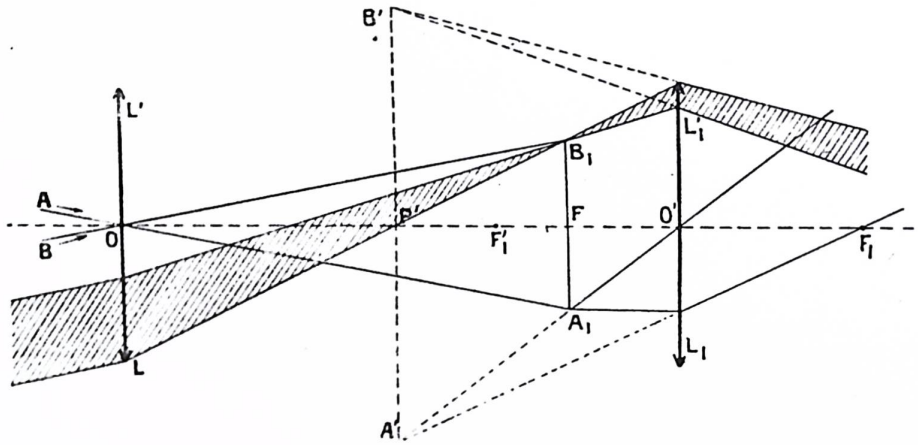


Fig. 448

Lunette astronomique. — La *lunette astronomique* se compose elle aussi de deux lentilles convergentes, l'objectif et l'oculaire (fig. 447). Cet instrument est *destiné à obtenir une image agrandie d'un objet situé à une distance infinie.* L'objectif fournit de l'objet une image située dans le plan focal de cette lentille (fig. 448). L'image $A_1\,B_1$ ainsi formée, réelle et renversée par rapport à l'objet, est observée au moyen de l'oculaire de la même façon que dans le microscope. On obtient donc en définitive une image A'B', virtuelle, agrandie, droite par rapport à $A_1\,B_1$ et par conséquent renversée par rapport à l'objet.

On appelle grossissement d'une lunette astronomique le rapport du diamètre apparent sous lequel on voit une dimension de l'objet à travers la lunette, et du diamètre apparent de la même dimension vue à l'œil nu.

Or, si on suppose l'œil placé au foyer de l'oculaire, on a :

$$\text{tang}\, P'\,F_1\,A' = \frac{A'\,P'}{F_1\,P'} = \frac{O'\,K}{O'\,F_1} = \frac{A_1\,F'}{O'\,F_1}$$

C'est le diamètre apparent de la dimension vue dans la lunette.

Le diamètre apparent de cette dimension vue à l'œil nu est égal à la tangente de l'angle B O X ou A_1 O F, et on a :

$$\text{tang. } A_1 O F = \frac{A_1 F}{O F}$$

Le grossissement est donc :

$$\frac{\text{tang. } A' F_1 P'}{\text{tang. } A_1 O F} = \frac{A_1 F \times O F}{O' F_1 \times A_1 F}$$

ou, en supprimant le facteur commun, A_1 F, et en appelant G le grossissement, F la distance focale de l'objectif, f la distance focale de l'oculaire.

$$G = \frac{F}{f}$$

On voit que le grossissement est égal au rapport de la distance focale de l'objectif à la distance focale de l'oculaire.

de lumière reçue par l'œil nu, l'image de l'*étoile vue à travers l'instrument est beaucoup plus brillante que l'étoile elle-même.* C'est ainsi qu'on distingue à l'aide de la lunette astronomique des étoiles qui sont invisibles à l'œil nu. De même, si on regarde, pendant le jour, une région du ciel à l'œil nu, l'éblouissement causé par la lumière du soleil empêche de voir les étoiles. Mais, en observant cette région du ciel avec la lunette, le fond du firmament sur lequel se projettent les étoiles est agrandi, et son éclairement reste le même qu'à l'œil nu, tandis que l'éclat des étoiles se trouve augmenté dans le rapport du grossissement ; aussi voit-on avec la lunette les étoiles pendant le jour.

La lunette astronomique est très employée en astronomie pour la détermination des directions. Quand une étoile se trouve dans le prolongement de l'axe de la lunette, son image se forme au foyer de l'objectif. L'étoile, le centre optique de l'objectif et l'image de

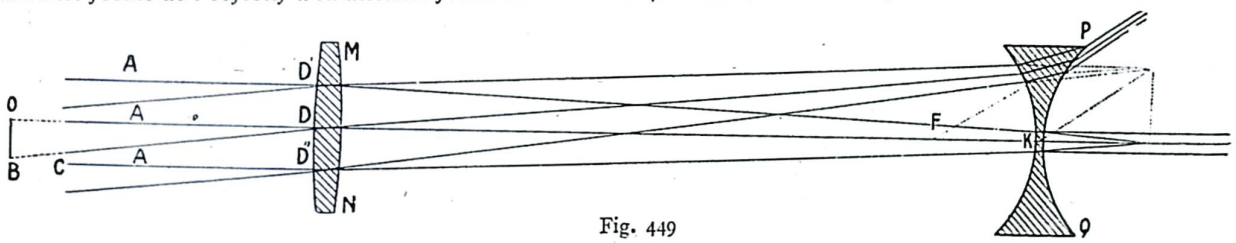


Fig. 449

Dans le cas de la lunette astronomique il est naturellement impossible d'éclairer l'objet que l'on veut observer. Aussi est-il nécessaire d'employer de grands objectifs pour recevoir le plus de lumière possible. Il existe dans la lunette astronomique, comme dans le microscope, un point oculaire situé au foyer de l'oculaire. Toute la lumière venue de l'objectif et reçue par l'oculaire passe au point oculaire dans l'image de l'objectif par rapport à l'oculaire. Si l'observateur place l'œil au point oculaire, et si l'on admet, ce qui est réalisé en effet par les constructeurs, que l'image de l'objectif soit un cercle sensiblement égal à celui de la pupille, toute la lumière reçue par l'oculaire pénètre dans l'œil de l'observateur.

Soit p le diamètre de la pupille, o le diamètre de l'objectif, étant donné que le diamètre de l'image de l'objectif de l'oculaire est sensiblement égal à p, on a :

$$\frac{o}{p} = \frac{O O'}{O F_1}$$

Or, dans la lunette astronomique, le foyer F de l'objectif et le symétrique F_1' du foyer de l'oculaire coïncident sensiblement. La distance O O' est donc égale à la somme des distances focales F + f. L'égalité précédente devient :

$$\frac{o}{p} = \frac{F + f}{f}$$

Pour un point situé dans le champ de la lunette, toute la lumière issue de ce point et qui rencontre l'objectif vient passer par le point oculaire. Les quantités de lumière reçues à l'œil nu et à travers la lunette sont proportionnelles au carré de p et de o. D'après l'égalité précédente ou voit que ce rapport est égal au carré du rapport $\frac{F + f}{f}$. Ce rapport est un peu plus grand que celui que nous avons trouvé pour le grossissement. *Dans la pratique, il est sensiblement égal au grossissement. Par conséquent, si un objet vu dans la lunette astronomique est grossi, par exemple 500 fois, la quantité de lumière par unité de surface de l'image sera la même que par unité de surface de l'objet vu à l'œil nu.*

Si l'objet ne peut être grossi, comme dans le cas d'une étoile, la quantité de lumière transmise par la lunette étant beaucoup plus grande que la quantité

l'étoile fournie par l'objectif sont en ligne droite. On utilise cette propriété en plaçant dans le plan focal de l'objectif un réticule formé de deux fils croisés (fils d'araignée, ou fils de platine extrêmement fins). On appelle axe optique de la lunette la ligne droite joignant le centre optique de l'objectif au croisement des fils du réticule. C'est toujours par rapport à cet axe optique que sont réglés les mouvements des instruments astronomiques, tels que le *théodolite*. Pour viser une étoile, on fait en sorte que son image fournie par l'objectif coïncide avec le croisement des fils du réticule. L'oculaire fournit naturellement, de l'étoile et du réticule, des images virtuelles qui coïncident.

Lorsqu'il s'agit d'observations terrestres, les lunettes

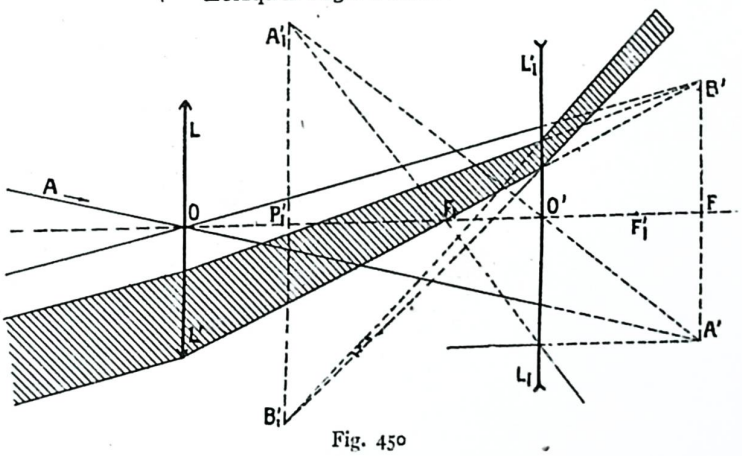


Fig. 450

astronomiques offrent un inconvénient, c'est de renverser les objets. Pour remédier à cela, on introduit dans l'instrument, entre l'oculaire et l'objectif, un système de deux lentilles convergentes de même puissance qui redressent l'image fournie par l'objectif. *C'est ce qu'on appelle le véhicule.*

Lunette de Galilée. — La *lunette de Galilée* (fig. 449) se compose essentiellement d'une lentille convergente, l'objectif, et d'une lentille divergente, l'oculaire. L'oculaire est placé entre l'objectif et son foyer, de manière que ce dernier soit à une distance un peu plus grande de l'oculaire que la distance focale de l'oculaire. L'image réelle fournie par l'objectif ne peut se former, les rayons étant interceptés par l'oculaire. Dans ces conditions,

l'image A'B', que fournirait l'objectif si l'oculaire n'existait pas, fonctionne comme objet virtuel par rapport à l'oculaire (fig. 450), et, comme cet objet est à une distance de la lentille divergente un peu plus grande que la distance focale, l'oculaire fournit de cet objet virtuel A'B' une image virtuelle $A'_1 B'_1$ plus grande que A'B' et renversée par rapport à elle, c'est-à-dire droite par rapport à l'objet.

Dans la pratique, le symétrique F_1' du Foyer F_1 de l'oculaire coïncide sensiblement avec le foyer F de l'objectif. Le diamètre apparent de l'objet vu à l'œil nu est comme pour la lunette astronomique

$$\text{tang. } A' O F = \frac{A' F}{O F}$$

le diamètre apparent de l'objet vu à travers la lunette est

$$\text{tang. } A'_1 P'_1 O' = \text{tang. } A' O' F = \frac{A' F}{O' F}$$

Le grossissement G étant égal au rapport des diamètres apparents on a :

$$G = \frac{\text{tang. } A'_1 O P'_1}{\text{tang. } A' O F} = \frac{O' F}{O F}$$

On voit que pour la lunette de Galilée, comme pour la lunette astronomique, le grossissement est sensiblement égal au rapport de la distance focale de l'objectif à la distance focale de l'oculaire.

Le foyer de l'objectif étant au delà de l'oculaire en dehors de la lunette, il n'existe pas de point oculaire et, pour recevoir le maximum de lumière et embrasser le champ le plus étendu, il faut placer l'œil aussi près que possible de l'oculaire. On ne peut pas non plus fixer de réticule dans l'instrument pour déterminer un axe optique. Il y a là un inconvénient grave pour les observations astronomiques. Mais la lunette de Galilée a aussi ses avantages ; elle est plus courte, à puissance égale que la lunette astronomique, et elle fournit des images droites sans qu'il soit nécessaire d'introduire de véhicule dans l'instrument. Ces avantages rendent la lunette de Galilée particulièrement commode pour les observations dans lesquelles il n'est pas nécessaire de déterminer une direction. Les jumelles marines, les jumelles de voyage et de théâtre sont formées de deux lunettes de Galilée accouplées.

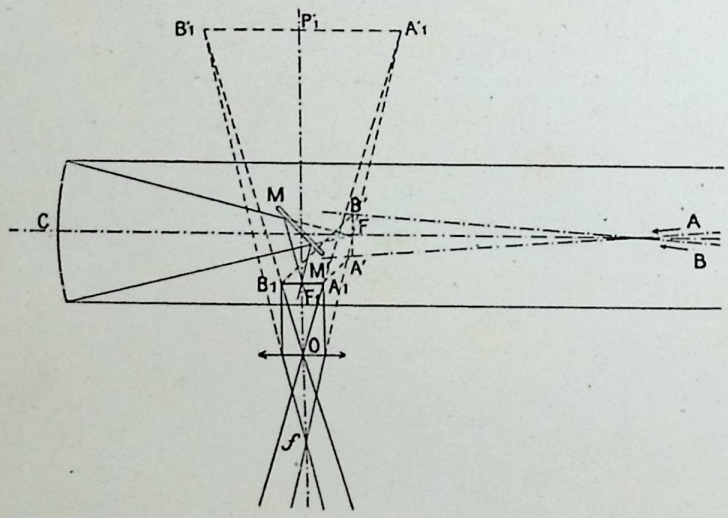


Fig. 451

Télescopes. — Un télescope se compose essentiellement d'un miroir concave C qui joue le rôle d'objectif et d'une lentille convergente O qui joue le rôle d'oculaire (fig. 451). Le miroir concave fournit, d'un objet A B se trouvant à l'infini, une image réelle A'B', située, dans le plan focal du miroir, réelle et renversée par rapport à l'objet. Mais on ne laisse pas cette image se former : on intercepte les rayons réfléchis qui concourent à sa formation au moyen d'un petit miroir plan, incliné à 45° sur l'axe principal du miroir. Ce miroir plan reporte l'image A'B' en $A_1 B_1$ dans une direction perpendiculaire à la première, le foyer F se trouvant lui-même rejeté en F_1.

On observe l'image réelle $A_1 B_1$ en se servant d'une lentille convergente O fonctionnant comme loupe, et on obtient ainsi de l'objet une image virtuelle $A'_1 B'_1$ droite par rapport à $A_1 B_1$ et par conséquent renversée par rapport à l'objet. Cet appareil est comparable à tous les points de vue à la lunette astronomique. Le grossissement est égal au rapport de la distance focale du miroir concave, objectif à la distance focale de l'oculaire. L'éclairement suit la même loi que pour la lunette astronomique. Le point oculaire est au foyer F de l'objectif ; enfin on peut placer un réticule dans le plan symétrique du plan focal de l'objectif par rapport au miroir plan M M'.

Dans les grands télescopes modernes, l'oculaire n'est pas une simple loupe ; c'est un oculaire composé qui fonctionne comme un véritable microscope.

L'inventeur du télescope, Newton, employait des miroirs sphériques en bronze ; mais ceux-ci présentaient le grave inconvénient de s'altérer à la longue au contact de l'air ; on était obligé de les repolir ; or, en les repolissant, on risquait de les déformer, l'opération devenait presque aussi compliquée que pour l'établissement d'un miroir neuf : c'était donc extrêmement coûteux. Foucault, le premier, remplaça le miroir métallique adopté par Newton par des miroirs de verre argenté. Actuellement, pour fabriquer un miroir de télescope, on commence par creuser dans un bloc de cristal une surface concave parfaitement régulière ; puis on argente le verre, en y déposant, par un procédé chimique, un précipité à base d'argent. Quand la couche d'argent est altérée, on la dissout par un réactif approprié et on argente à nouveau le verre qui, lui, n'a subi aucune altération. On utilise aujourd'hui des miroirs paraboliques obtenus en faisant tourner du mercure avec une grande vitesse.

Photographie. — On appelle *Photographie* un procédé inventé par Niepce et Daguerre, considérablement perfectionné depuis, et qui permet de reproduire, d'une façon définitive, sur des plaques de verre ou sur du papier, l'image des objets. L'appareil photographique se compose essentiellement d'une lentille convergente O placée devant un écran sensible à la lumière (plaques photographiques sensibles) (fig. 452). La lentille et l'écran sont montés sur une sorte de boîte noircie intérieurement pour éviter les réflexions et qu'on appelle chambre noire. Quand on veut photographier un objet A B situé à une distance O P de la lentille, nommée objectif, on règle la distance de l'objectif O à l'écran C D, de manière que l'image A'B' se forme sur cet écran.

Le réglage se fait grâce à un dispositif spécial, généralement un service de soufflet, qui permet d'allonger ou de raccourcir la boîte.

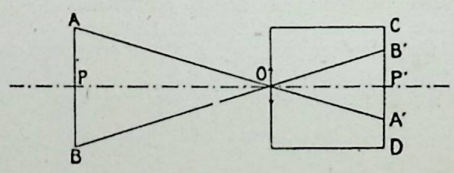
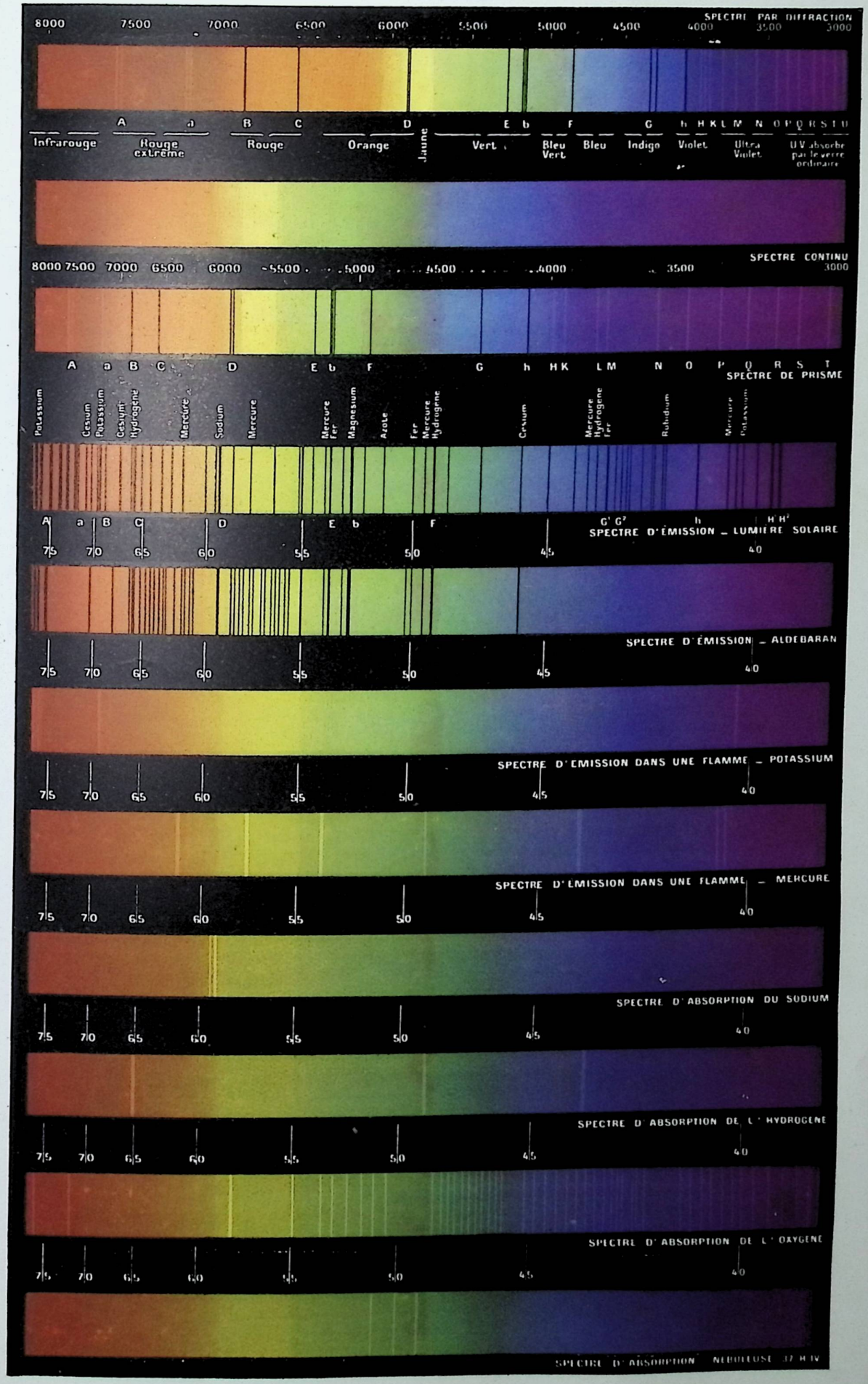


Fig. 452

On fait d'abord le réglage en remplaçant l'écran par une plaque de verre dépoli, sur laquelle vient se dessiner l'image de l'objet ; on intercepte alors le passage de la lumière au travers de l'objectif, et on remplace la plaque de verre dépoli par une plaque photographique sensible, en évitant soigneusement de l'exposer à la lumière.



Spectres du soleil, des étoiles, des nébuleuses, des gaz.

Alors, sans rien déranger, on découvre l'objectif de manière à laisser pénétrer la lumière. L'image de l'objet A B se forme en A'B' sur la plaque qui est *impressionnée* en tous les points frappés par la lumière.

On découvre cette image par des procédés chimiques sur lesquels nous n'insisterons pas ici. C'est ce qu'on appelle révéler l'image. Toutefois, la plaque sensible fournit ce qu'on appelle un négatif, c'est-à-dire une image dans laquelle toutes les parties qui correspondent aux ombres de l'objet sont transparentes. Le procédé est fondé sur la décomposition des sels d'argent par la lumière.

Le négatif sert à obtenir des positifs. Il suffit en effet de placer derrière le négatif une plaque ou un papier rendus sensibles par le même procédé que pour la plaque négative et de l'exposer à la lumière. Cette fois-ci, toutes les parties sombres du négatif empêchent la lumière de passer et donnent sur le positif des ombres qui correspondent aux ombres de l'objet.

Les avantages et les applications de la photographie sont innombrables. Cette invention est aujourd'hui trop connue de tous et trop entrée dans les mœurs pour qu'il soit nécessaire d'insister.

Problèmes.

1. — On accole deux lentilles convergentes de distances focales 50 cm. et 40 cm. Calculer la distance focale de l'ensemble. Dans une première expérience, on utilise la première lentille seule et l'on produit l'image d'une droite de 14 cm. placée à 1 m. de la lentille. On place la seconde lentille contre la première. Quel déplacement faut-il faire subir à l'écran qui recueille l'image ? Quelle est la grandeur de l'image obtenue dans ce dernier cas.

Solution

Le foyer φ de ce système est donné par la formule

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{40} + \frac{1}{50} = \frac{50+40}{40 \times 50} = \frac{90}{2000} = \frac{9}{200}$$

$$\varphi = \frac{200}{9}$$

1ère expérience $\frac{1}{100} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{50}$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{2-1}{100} = \frac{1}{100}$$

$$p' = 100$$

2ème expérience $\frac{1}{100} + \frac{1}{p'_1} = \frac{9}{200}$

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{9}{200} - \frac{1}{100} = \frac{9-2}{200}$$

$$p'_1 = \frac{200}{7} \text{ cm}$$

Le déplacement de l'écran est

$$p' - p'_1 = 100 - \frac{200}{7} = \frac{500}{7} \text{ cm}$$

3° Grandeur de l'image $\frac{I}{O} = \frac{p'}{p}$

$$\frac{I}{14} = \frac{500}{7 \times 100} = \frac{5}{7}$$

$$I = \frac{14 \times 5}{7} = 10 \text{ cm}$$

2. — Un objet est placé à 12 mm. de l'objectif d'un microscope composé. Cet objet a une distance focale de 10 mm., l'oculaire une distance focale de 2 cm. Le minimum de la distance de la vision distincte de l'observateur est de 46 cm. Quel est dans ces conditions le grossissement obtenu ?

(Bacct., Caen.)

Solution

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{12-10}{120} = \frac{2}{120}$$

$$p' = 60$$

grossissement de l'objectif $g = \frac{p'}{p} = \frac{60}{12} = 5$

L'oculaire joue le rôle d'une loupe à travers laquelle on regarde l'image donnée par l'objectif.

On a donc :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{46} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{46} = \frac{23+1}{46} = \frac{24}{46} = \frac{12}{23}$$

$$p_1 = \frac{23}{12} \text{ cm.}$$

Grossissement de l'oculaire :

$$g' = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{46}{\frac{23}{12}} = \frac{12 \times 46}{23} = 24$$

Grossissement obtenu par le microscope :

$$G = g \times g' = 5 \times 24 = 120$$

3. — Un objet de 2 mm. est regardé à travers une loupe de convergence égale à 100 dioptries. L'œil est à 1/2 cm. de la loupe ; l'image se fait à 25 cm. de celle-ci :

1° Quelle est la grandeur de l'image observée ?

2° Quel est le grossissement de la loupe ?

Solution

Nous avons :

$$\frac{1}{f} = 100$$

d'où $f = 0{,}01$ m. $= 1$ centimètre.

Nous avons : $-\frac{1}{D} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$

d'où : $\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{1}{D} = 1 + \frac{1}{25 + 0.5} = \frac{26{,}5}{25.5}$

Mais : $\frac{I}{O} = \frac{p'}{p}$

d'où : $i = 0.2 \times 25 \times \frac{26.5}{25.5} = 5^{\text{cm}}$ environ

Le grossissement est égal à : $G = \frac{D}{f} = \frac{25{,}5}{1} = 25{,}5$

CHAPITRE VIII

LA VISION

Nous ne saurions terminer cette étude sans parler d'un instrument naturel d'optique d'une grande perfection : c'est-à-dire de l'*œil*.

L'œil est tout à fait comparable à un appareil photographique, dont la plaque sensible serait remplacée par la *rétine* R, l'objectif par le *cristallin* C et les milieux transparents de l'œil (fig. 453).

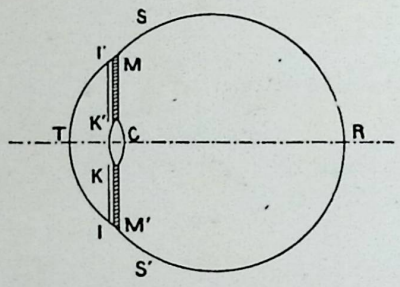


Fig. 453

En avant de l'œil se trouve la *cornée transparente T* qui se rattache à la *sclérotique* vulgairement appelée blanc de l'œil. Dans son ensemble l'œil affecte la forme d'une sphère, mais la cornée est un peu plus bombée que le reste. Le cristallin C est supporté par un anneau musculaire M M' dont la pression le fait bomber et le rend ainsi plus convergent. Dans un œil normal, quand le système musculaire M M', dit système *accommodateur*, est au repos, l'image des objets situés à une grande distance, pratiquement infinie, se forme sur la rétine comme sur la plaque sensible d'un appareil photographique.

Si l'objet se rapproche à une distance finie, son image tend à s'éloigner derrière le cristallin et à se former au delà de la rétine. A ce moment, les muscles accommodateurs entrent en fonction, et en faisant bomber le cristallin, c'est-à-dire en diminuant sa distance focale, ramènent l'image sur la rétine. Au fur et à mesure que l'objet se rapproche, le cristallin se bombe de plus en plus. Mais il arrive un moment où l'élasticité du cristallin n'est plus assez grande pour permettre l'accommodation. Alors, l'image tendant à reculer derrière la rétine, cesse de se former avec netteté sur le fond de l'œil. C'est à ce moment que l'objet dépasse la distance minima de vision distincte.

Le fond de l'œil est imprégné d'un *pigment noir* qui a pour but, comme dans la chambre noire de l'appareil photographique, d'empêcher la diffusion des rayons lumineux à l'intérieur de l'œil.

Les albinos, chez qui ce pigment fait défaut, ont le fond de l'œil rouge (c'est la couleur de la substance chimique sensible de la rétine, on l'appelle *pourpre rétinien*), ils sont constamment éblouis par les réflexions multiples qui se produisent à l'intérieur de leur œil.

Devant le cristallin se trouve une membrane, *l'iris*, percée d'un trou appelé *pupille*. Cet organe fonctionne tout à fait comme le diaphragme d'un appareil photographique. L'iris contient des muscles rayonnants et des muscles circulaires qui permettent à la pupille de s'agrandir ou de se rétrécir par un mouvement réflexe sous l'influence de certaines excitations, de manière à régler la quantité de lumière admise à traverser le cristallin. C'est grâce à ce mécanisme de l'iris que nous nous habituons peu à peu à l'obscurité et que nous finissons par distinguer dans les ténèbres des objets que nous n'apercevions pas tout d'abord en sortant d'un endroit éclairé. On sait que, inversement, nous nous accoutumons à la grande lumière qui nous éblouissait tout d'abord.

L'œil, instrument d'optique très parfait, mais très délicat, peut présenter diverses anomalies dont les principales sont : la myopie, l'hypermétropie, la presbytie, l'astigmatisme.

La myopie résulte d'une longueur exagérée de l'œil qui ne conserve plus une forme parfaitement sphérique. La rétine R est plus éloignée du cristallin C qu'elle ne devrait l'être. Il en résulte que l'image d'un objet situé à l'infini ne se forme pas exactement sur la rétine, mais en avant. Ce défaut de coïncidence ne peut être racheté par l'accommodation qui aurait pour effet de rapprocher encore davantage l'image du cristallin. Il s'ensuit qu'un myope ne voit pas distinctement les objet placés à une grande distance. Pour que la vision devienne distincte, il faut que les objets se trouvent à une distance finie assez faible pour que l'image se forme sur la rétine. A partir de cette distance, *distance maxima de la vision distincte*, les muscles accommodateurs entrent en fonction pour tous les objets plus rapprochés. Comme l'accommodation a commencé plus tard pour l'œil myope que pour l'œil normal, elle se poursuit à une distance plus faible. La distance minima de la vision distincte est donc plus faible pour un myope que pour une personne douée d'une vue normale, à condition toutefois, que le myope ne soit pas en même temps presbyte.

L'hypermétropie est le défaut inverse de la myopie. L'hypermétrope a l'œil trop court. Aussi les objets situés à une grande distance tendent à former leur image derrière la rétine. L'accommodation corrige ce défaut ; mais l'hypermétrope, étant obligé d'accommoder déjà pour les grandes distances, devient incapable de le faire à une distance minima relativement grande, d'où l'impossibilité, pour lui, de rapprocher suffisamment les objets dont il veut distinguer les détails, par exemple l'écriture ou les caractères d'imprimerie.

La presbytie, que l'on confond à tort souvent avec l'hypermétropie, est une infirmité de la vieillesse. Elle est due au manque de souplesse du cristallin, qui empêche les muscles accommodateurs de fonctionner normalement et de produire tout leur effet. Une personne douée d'une vue normale, et qui devient presbyte, voit encore distinctement les objets éloignés, mais, à partir d'une distance relativement grande, la faculté d'accommodation cesse de s'exercer et le presbyte ne voit plus assez nettement pour lire par exemple.

Cette infirmité peut se combiner avec les défauts dont nous venons de parler. Si un myope devient presbyte, la distance minima de sa vision distincte s'allonge et se rapproche de la distance maxima ; de sorte qu'un myope presbyte aura besoin de verres de myope pour voir de loin, et de verres de presbyte pour voir de près.

Si un hypermétrope devient presbyte, la faculté d'accommodation supplée plus difficilement à cette dernière infirmité. La distance minima de vision distincte s'allonge démesurément pour lui, et il peut même arriver qu'il ne voie plus distinctement à aucune distance, si grande soit-elle.

L'astigmatisme, qui peut aussi se combiner avec la presbytie, est un défaut de courbure du globe de l'œil qui fait que celui-ci est bombé différemment dans des plans longitudinaux différents ; par exemple, la courbure est plus grande de bas en haut que de droite à gauche. La conséquence en est que la vision est distincte pour des objets orientés d'une certaine façon et trouble pour les objets autrement orientés : par exemple, un astigmate verra distinctement les lignes verticales et verra mal les lignes horizontales. Les proportions des objets n'existent plus, un carré devient un rectangle dont la hauteur et la base ont des longueurs différentes.

Les infirmités dont nous venons de parler peuvent être corrigées au moyen de verres appropriés.

Devant l'œil du myope on place un verre divergent qui a pour effet de reculer l'image des objets et de la ramener sur la rétine.

L'hypermétropie est corrigée par le moyen de verres convergents qui obligent l'image à se former plus près du cristallin, pour la ramener par conséquent sur la rétine.

La presbytie disparaît elle aussi à l'aide de verres convergents, mais le presbyte, au contraire de l'hypermétrope, n'utilise ses lunettes que pour voir de près. Si un hypermétrope devient presbyte, il lui faut se servir de certains verres convergents pour voir de loin ; et de verres convergents, à plus court foyer que les premiers, pour voir de près.

L'astigmatisme se corrige au moyen de verres taillés dans des cylindres de cristal, parallèlement aux génératrices.

Vision binoculaire. — Stéréoscope. — Quand on regarde un objet assez rapproché, vers cet objet se dirige l'axe de chacun des yeux, de sorte que tous les deux ne regardent pas dans des directions parallèles mais bien dans des directions convergentes. Il s'ensuit que l'image qui se forme sur la rétine n'est pas la même pour les deux yeux. S'il s'agit d'un objet en relief, l'œil droit voit mieux la partie droite que l'œil gauche, et réciproquement. C'est ce phénomène, dit phénomène de la vision binoculaire, qui donne l'impression du relief.

Or, si on regarde un dessin ou une photographie, l'impression de relief n'existe plus, parce que l'image formée sur la rétine est identique pour les deux yeux.

Pour rétablir l'illusion du relief, on a imaginé la méthode stéréoscopique. Celle-ci consiste à tirer en même temps, de l'objet qu'on veut reproduire, deux photographies, avec deux objectifs situés parallèlement à la même distance l'un de l'autre que les deux yeux.

Ces photographies reproduisent ainsi exactement les images qui se formeraient sur la rétine des deux yeux d'un observateur ; si on dispose ensuite les deux photographies dans un appareil convenable (stéréoscope) de manière que chacune d'elles soit aperçue seulement par l'œil auquel elle correspond, l'observateur a tout à fait l'impression du relief.

CHAPITRE IX

DISPERSION DE LA LUMIERE — SPECTRE

Supposons qu'on reçoive sur un prisme BAC un faisceau cylindrique de lumière blanche, la lumière du soleil par exemple (fig. 454). Si on observe ce faisceau à sa sortie du prisme, on constate qu'il n'est plus cylindrique, il s'est étalé en éventail; en outre, la lumière qui le compose n'est plus blanche, elle est colorée en rouge sur un bord, en violet sur l'autre et entre le rouge et le violet, il y a une toute une série de couleurs intermédiaires. Imaginons qu'on intercepte sur un écran en SS' le faisceau émergent; on observe sur cet écran une bande *colorée qu'on appelle spectre.* Pour la lumière du soleil, et en général pour tout spectre résultant de la décomposition de la lumière blanche, les couleurs qui composent le spectre sont, en allant des plus réfrangibles aux moins réfrangibles : *violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge.* Ce sont du moins les *sept principales.*

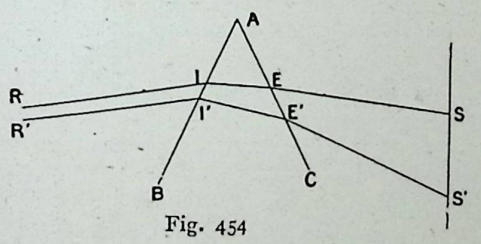


Fig. 454

La production du spectre s'explique en supposant que la lumière blanche est composée d'une série de radiations simples qui sont inégalement réfrangibles ; l'*indice de réfraction du violet est plus grand que l'indice de réfraction du rouge.* Comme, à la sortie du prisme, les radiations ont pris des directions différentes, elles ne peuvent plus se recomposer pour donner de la lumière blanche.

Si cette hypothèse est exacte, l'inégale réfrangibilité doit exister aussi pour les lentilles. En effet, si on reçoit un mince faisceau de lumière solaire sur une lentille convergente, et qu'on intercepte ce faisceau à la sortie de la lentille par un écran, la tache lumineuse qui se forme sur l'écran est colorée suivant un anneau concentrique.

En effet, les rayons violets étant plus réfrangibles que les rayons rouges, leur foyer V est plus rapproché de la lentille O que le foyer R des rayons rouges (fig. 455). Pour les autres couleurs du spectre, les foyers occupent des positions intermédiaires entre V et R. Supposons l'écran placé en EE', la lumière violette occupera le centre de l'écran en II', tandis que la lumière rouge formera le bord de la tache lumineuse en DD'. Si on place l'écran au delà de V, en MM', par exemple, le centre de la tache sera blanc, parce que le faisceau de lumière violette et le faisceau de lumière rouge se confondent dans cette région en KK'. Sur les bords, la tache sera colorée en violet en HH'. Naturellement, entre le rouge et le violet on observera des cercles concentriques correspondant aux différentes couleurs du spectre.

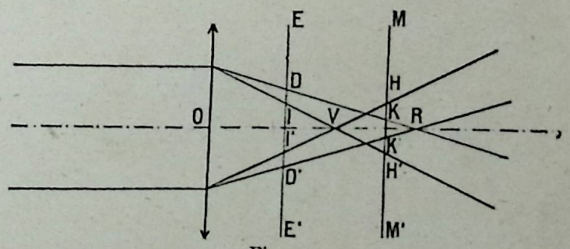


Fig. 455

On peut recomposer la lumière qui a été décomposée par un prisme ou par une lentille. Imaginons par exemple qu'on reçoive un faisceau cylindrique de lumière blanche R I R' I', sur un prisme B A C (fig. 456).

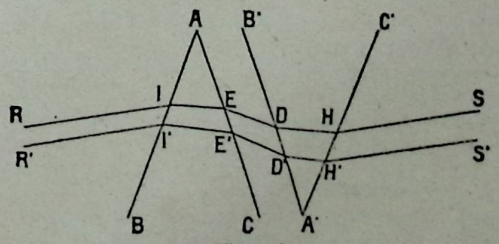


Fig. 456

Au sortir de ce prisme en EE′ le faisceau est coloré. Si on le reçoit sur un second prisme B′A′C′, orienté en sens inverse du premier, le faisceau, qui était devenu divergent au sortir du premier prisme, redeviendra cylindrique au sortir dn second en HH′. Le faisceau émergent H S H′S′, contenant des rayons de toutes les couleurs orientés dans la même direction, sera redevenu blanc. On a recomposé la lumière blanche.

Cette recomposition peut se faire au moyen d'une lentille convergente.

On peut démontrer encore d'une autre manière que la superposition sur la rétine des différentes couleurs du spectre donne la sensation de blanc. On sait que les impressions rétiniennes persistent un certain temps, un dixième de seconde environ. Se basant sur ce phénomène, Newton a imaginé l'expérience suivante qui a conservé le nom d'expérience du disque de Newton (fig. 457).

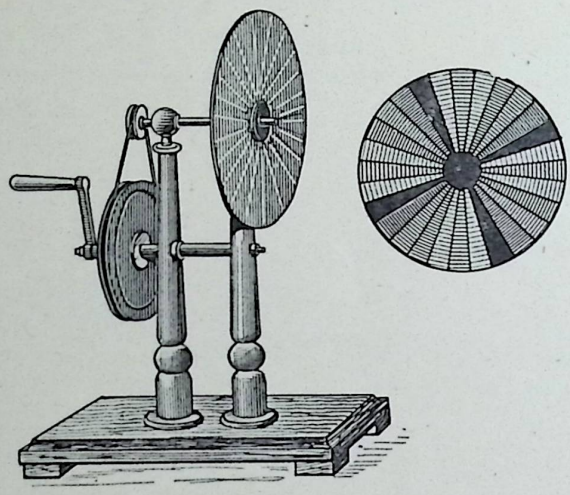


Fig. 457

Un disque mobile autour d'un axe passant par son centre porte une série de secteurs colorés suivant les différentes couleurs du spectre. Quand on fait tourner rapidement ce disque, l'œil perçoit en même temps tous les secteurs dans toutes les positions du disque, et ce dernier apparaît comme entièrement blanc.

Pour les lentilles, ce phénomène de dispersion est un inconvénient quand il s'agit de construire un instrument d'optique; il altère la netteté des images dont les contours paraissent irisés ; on l'appelle aberration de réfrangibilité.

Pour corriger l'aberration de réfrangibilité on emploie des lentilles composées : ce sont des systèmes de lentilles divergentes et convergentes de verres différents, verres pour lesquels la différence de réfrangibilité entre le rouge et le violet n'est pas la même.

En combinant par exemple une lentille divergente et une lentille convergente de verres différents, on peut obtenir un système qui fonctionne suivant la puissance des lentilles choisies, soit comme une lentille convergente, soit comme une lentille divergente, et pour lequel le foyer des rayons rouges coïncide avec celui des rayons violets. Dans un pareil système les irisations disparaissent presque complètement ; pourtant, les rayons des autres couleurs n'ont pas exactement le même foyer que le rouge et le violet et il y a encore une légère aberration de réfrangibilité qui peut être gênante. *Pour obtenir une correction parfaite on emploie des systèmes composés de trois lentilles qui permettent la coïncidence des foyers de trois couleurs différentes, le rouge, le jaune et le violet.* Dans ce cas, les autres couleurs ont sensiblement le même foyer que les trois premières.

Ces systèmes portent le nom de *lentilles achromatiques.*

Objets colorés. — Couleurs complémentaires. — Lorsque des objets nous paraissent colorés cela tient à ce qu'ils ne nous renvoient que les rayons colorés qui n'ont pas été absorbés. *Quand ils sont frappés par la lumière blanche, ces corps absorbent en effet un certain nombre de radiations et diffusent ou laissent passer les autres.* La lumière blanche est donc détruite. On peut facilement se rendre compte de l'absorption ainsi opérée par un objet coloré en regardant des objets éclairés par la lumière du soleil, à travers un morceau de verre coloré en rouge par exemple. Tous les objets blancs ou qui contiennent du rouge apparaissent rouges et éclairés ; tous les autres sont noirs, obscurs, car les rayons qui en proviennent ont été arrêtés, ou plutôt absorbés, par le verre.

Quand on combine un certain nombre de radiations du spectre, sans les prendre toutes, on obtient une couleur qui dépend des éléments dont elle est composée. Si on réunit maintenant les radiations qui sont absentes de la couleur qu'on vint d'obtenir, on obtient une autre couleur qu'on appelle *complémentaire* de la première. La superposition des deux couleurs complémentaires reproduit le blanc. Le rouge et le vert sont complémentaires, du moins, un certain rouge et un certain vert.

On peut trouver expérimentalement la couleur complémentaire d'une couleur donnée par une méthode assez simple basée sur la fatigue de la rétine. *Si on regarde longtemps avec fixité un carré de papier rouge et qu'on reporte ensuite les yeux sur une feuille blanche, on y voit se dessiner un carré vert.* Ce phénomène tient à ce que la rétine, étant fatiguée pour les radiations rouges, ne les perçoit plus aussi nettement que les autres radiations pour lesquelles elle n'est pas fatiguée ; or celles-ci composent justement la couleur complémentaire du rouge.

On peut s'assurer que deux couleurs sont complémentaires l'une de l'autre en employant le disque de Newton, qu'on recouvre de secteurs colorés suivant les deux couleurs à étudier ; quand on fait tourner le disque il doit paraître blanc.

Le noir est dû à l'absence de lumière ; quand un objet nous paraît noir, c'est qu'il absorbe toutes les radiations. Nous ne le voyons donc que par contraste avec les objets qui l'entourent, ou par suite de réflexions à sa surface.

Etude du spectre. — Quand on veut étudier avec précision le spectre de la lumière blanche, il importe, tout d'abord, d'obtenir un spectre très net dans lequel les couleurs n'empiètent pas les unes sur les autres. Pour atteindre ce but, on emploie la méthode de Newton.

On reçoit la lumière du soleil dans la pièce où l'on veut produire le spectre en laissant passer un rayon par une fente rectiligne très étroite, et on fait tomber le faisceau sur une lentille convergente placée dans la fente, à une distance double de sa distance focale. Dans ces conditions, la lentille fournit de la fente une image de même dimension que cette fente. Derrière la lentille on dispose un prisme qui intercepte les rayons réfractés. Ce prisme dévie différemment les diverses radiations de la lumière blanche et remplace l'image simple de la fente fournie par la lentille, par une infinité d'images colorées. On obtient ainsi une bande rectangulaire ayant pour largeur la longueur de la fente. Il faut, naturellement, que l'arête réfringente du prisme soit parallèle à la fente.

Quand on étudie le spectre du soleil obtenu par cette méthode, on observe un grand nombre de raies obscures parallèles au petit côté du rectangle, cela prouve que, dans la lumière du soleil il n'existe pas une suite ininterrompue de radiations. Il en manque un certain nombre correspondant à des degrés de réfrangibilité différents. Ces lignes obscures sont très nombreuses. Fraunhofer, en 1817, en a compté 600. On en a trouvé, depuis, un plus grand nombre. Or, si on remplace la lumière du soleil par la lumière que fournit un bloc de platine porté à l'incandescence on observe un spectre continu sans raies obscures. La production des raies obscures est donc due à une cause particulière que nous allons étudier maintenant.

L'observation des spectres ne peut se faire avec précision qu'au moyen d'un appareil nommé spectroscope.

Spectroscope. — Le spectroscope se compose :

1° d'*un collimateur* ;
2° d'*un prisme* ;
3° d'*une lunette* ;
4° d'*un micromètre* (fig. 458).

Collimateur. Il permet d'obtenir un faisceau de rayons parallèles. Il comprend une *fente verticale F* à bord parallèle dont on peut *varier la distance.* Cette fente est placée dans le plan focal d'une lentille convergente et située elle-même à l'intérieur d'un tube métallique T. Devant la fente, se trouve la source lumineuse à étudier. Les rayons de cette source après avoir traversé la fente rencontrent la lentille et sortent de celle-ci *parallèlement.*

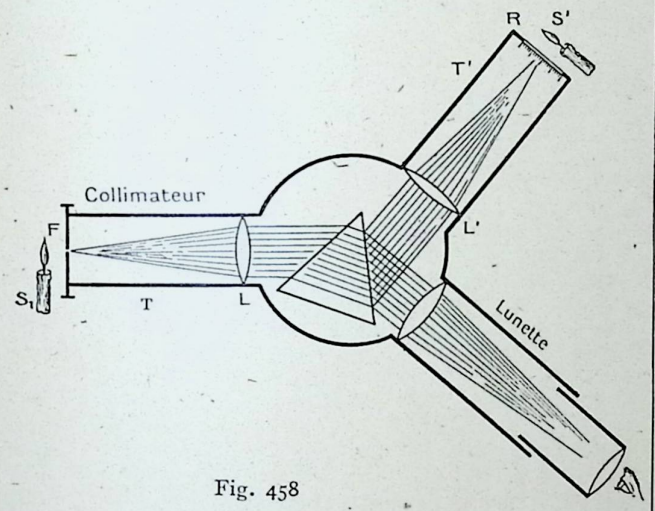


Fig. 458

Prisme. En sortant du collimateur, les rayons tombent sur un prisme *en flint* placé dans la *position du minimum* pour la région *moyenne du jaune* solaire ; les conditions du minimum sont alors réalisées pour les autres couleurs. Il est disposé sur une plate-forme horizontale et supporté par un trépied. De plus les arêtes du prisme sont perpendiculaires à cette plate-forme, c'est-à-dire parallèles à la fente F.

Enfin le prisme est recouvert par une boîte en laiton, noircie intérieurement, et dans laquelle sont ménagées des ouvertures pour le passage du collimateur et de la lunette.

Lunette. Les rayons sortant du prisme peuvent être reçus sur un écran, mais on les reçoit ordinairement dans une lunette astronomique qui donne du spectre une image *virtuelle et agrandie.*

Micromètre. Pour *repérer la position des différentes radiations* on fait usage du micromètre. C'est une règle graduée R placée à l'extrémité du tube T′ dans le plan focal d'une lentille convergente L′ et éclairée par une flamme S′. Les rayons émanés de cette flamme après avoir traversé la lentille L′, tombent parallèlement sous un grand angle sur le prisme, se réfléchissent et donnent du micromètre une image virtuelle et agrandie que l'on amène à *se superposer à celle du spectre.*

Remarque. — On peut étudier simultanément le spectre de deux sources lumineuses en éclairant chaque moitié de la fente F avec ces deux sources par l'intermédiaire d'un prisme à réflexion totale.

Spectre des différentes sources de lumière. — Quand on chauffe progressivement un corps solide ou liquide, à partir d'une certaine température (pourvu naturellement qu'il ne se décompose pas, ni ne se volatilise) il émet de la lumière. Les premières radiations qui apparaissent dans le spectre sont les moins réfrangibles, c'est-à-dire le rouge. Au fur et à mesure que la température s'élève, le spectre s'étend et les radiations plus réfrangibles apparaissent les unes après les autres jusqu'au violet (fig. 459).

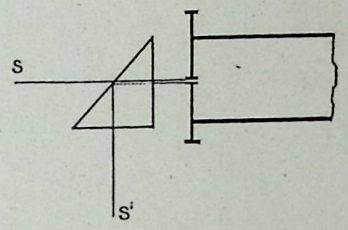


Fig. 459

Pour ces corps solides ou liquides, le spectre ne présente pas des raies obscures. *Il est continu.*

Quand on porte un corps gazeux à l'incandescence, il émet une lumière qui fournit au contraire un *spectre discontinu, formé seulement de quelques lignes brillantes, séparées les unes des autres par de larges intervalles obscurs.* Ces lignes brillantes occupent toujours la même position pour un gaz déterminé, elles sont caractéristiques du gaz.

Analyse spectrale. — Cette propriété remarquable a permis de fonder une méthode d'analyse des corps gazeux. Pour reconnaître la présence d'un corps dans un mélange donné, il suffit de porter celui-ci à l'incandescence en le faisant passer à l'état gazeux, s'il n'y est déjà. On observe alors le spectre des différents gaz qui composent le mélange, et repérant les raies brillantes on caractérise chacun de ces gaz.

La présence du sodium est accusée par exemple *par une raie jaune très brillante ; celle du lithium par une raie rouge et par une raie jaune différente de la raie du sodium.*

L'analyse spectrale est d'une sensibilité extrême ; elle permet de déceler, dans un mélange, la présence d'un corps qui entre dans sa composition pour un millionième seulement.

Renversement des raies. — Kirchhoff a montré que, *si on interpose, entre un corps solide incandescent (un bloc de platine par exemple) et le spectroscope, un gaz incandescent, celui-ci absorbe justement les radiations qu'il est incapable d'émettre.*

Par exemple, si on interpose, entre le bloc de platine et le spectroscope, une flamme d'alcool salé, qui fournit la raie du sodium, on observe sur le spectre, auparavant continu du platine, une raie obscure occupant la position de la raie du sodium. Le même phénomène se produit pour tous les corps gazeux, incandescents ou non. S'ils sont incandescents, en effet, les radiations qu'ils émettent sont beaucoup moins lumineuses que celles qu'ils absorbent.

De cette expérience, Kirchhoff a déduit une hypothèse qui explique l'existence des raies du spectre solaire.

Le soleil *est composé d'un noyau solide ou liquide incandescent,* et *d'une photosphère gazeuse* qui enveloppe le noyau. Seul, le noyau fournirait un spectre continu, mais la photosphère contient des gaz qui absorbent un certain nombre de radiations et donnent ainsi naissance à des raies.

L'observation de ces raies doit donc permettre d'étudier la composition de la photosphère du soleil. Cette analyse a été entreprise et a fourni des résultats remarquables. Elle a permis de constater en particulier que les matériaux qui entrent dans la composition de la photosphère du soleil se retrouvent sur la terre. On a même vu l'existence de certains métaux qu'on n'avait pas encore découverts sur la terre et qu'on a isolés plus tard.

La lumière du soleil, avant de nous parvenir, traverse aussi l'atmosphère terrestre. Celle-ci exerce son pouvoir absorbant, et fait apparaître dans le spectre du soleil de nouvelles raies qui n'y existaient pas tout d'abord. C'est ce qu'on appelle *les raies telluriques*. On parvient à se rendre compte de leur origine par les variations d'intensité qu'elles subissent suivant la position du soleil au-dessus de l'horizon, c'est-à-dire suivant l'épaisseur plus ou moins grande de la couche atmosphérique traversée par les rayons solaires. Ces raies telluriques sont dues surtout à la présence de la vapeur d'eau dans notre atmosphère.

L'analyse spectrale a été poussée encore plus loin, puisqu'elle a permis d'étudier la composition des étoiles fixes, tellement éloignées de nous que les instruments d'optique les plus puissants ne parviennent pas à en grossir les images.

Les planètes qui nous renvoient la lumière du soleil ont naturellement le spectre du soleil, compliqué de raies telluriques plus ou moins intenses. Les étoiles paraissent avoir à peu près la composition du soleil.

Les nébuleuses non résolubles ont un spectre composé de quelques lignes brillantes qui indiquent qu'elles sont entièrement gazeuzes. L'analyse spectrale a décelé dans les nébuleuses l'existence de l'hydrogène et d'un autre gaz, le nébulium.

L'arc-en-ciel. — L'arc-en-ciel est dû à la décomposition des rayons du soleil par les gouttes d'eau en suspension dans l'atmosphère. Si ces gouttes d'eau sont interposées entre le soleil et des nuages, les couleurs du spectre se projettent sur l'écran naturel formé par ces derniers.

On observe parfois deux arcs-en-ciel concentriques dans lesquels les couleurs du spectre sont disposées en ordre inverse. Ce phénomène tient à ce que certains rayons traversent les gouttes de pluie après une simple réfraction ; tandis que d'autres, qui rencontrent les gouttes sous un angle d'incidence trop grand, subissent une ou deux réfractions à l'intérieur de la goutte, avant d'émerger. Dans ces réfractions la position des rayons colorés s'inverse.

La lumière décomposée du soleil revient à l'observateur qui tourne le dos à l'astre du jour.

Radiations invisibles. — Nous avons déjà parlé, à propos de la chaleur, des radiations invisibles du spectre. Si on place un thermomètre dans la région obscure située en deçà du rouge, il accuse une augmentation de température. Il y *a donc des rayons infrarouges qui se manifestent par leurs effets caloriques*. Si on promène le thermomètre dans le spectre on constate que l'augmentation de température est d'autant plus faible qu'on se rapproche du violet ; pour le violet elle est nulle. L'étendue du spectre infra-rouge invisible est à peu près égale à celle du spectre lumineux.

Si, maintenant, on soumet à l'influence des diverses radiations du spectre une substance chimique, sensible à la lumière, une plaque photographique par exemple, on constate que les diverses régions du spectre influent très inégalement sur cette substance. Le rouge et l'infra-rouge sont sans action. Par contre, le violet agit avec une grande intensité. En outre, si on explore, au moyen de cette substance sensible, la région du spectre située au delà du violet, *on constate que l'action chimique se poursuit à une assez grande distance, décelant ainsi l'existence de rayons ultra-violets.*

CHAPITRE X

VITESSE DE LA LUMIÈRE — POLARISATION

Nous avons dit, dans le cours d'astronomie, à propos de Jupiter, qu'on avait pu mesurer la vitesse de la lumière par l'observation des satellites de Jupiter. On a trouvé ainsi que la lumière parcourt *environ* 300.000 *kilomètres par seconde*. En 1849, Fizeau a repris l'étude de la vitesse de la lumière sur une distance de quelques kilomètres seulement, il opérait entre Montmartre et Suresnes. Sa méthode, très ingénieuse, était la suivante : aux deux stations était placée une lentille convergente, et les deux lentilles avaient leurs axes principaux en coïncidence. Dans l'une des stations occupées par l'observateur, on faisait tomber, sur la lentille LL', les rayons d'une source lumineuse S, réfractés par un système de deux lentilles convergentes CC_1, et renvoyés dans la direction de l'axe OO' par un petit miroir plan MM' (fig. 460). Le point S_1 image de la source lumineuse S, se trouvait au foyer de la lentille LL', de sorte que les rayons lumineux après avoir traversé la lentille étaient devenus parallèles à l'axe O O'. A l'autre station ces rayons venant frapper la lentille parallèlement à son axe , donnaient une image de S_1, au foyer D. En ce foyer D était placé un miroir plan perpendiculaire à l'axe qui renvoyait les rayons pour leur faire suivre, en sens inverse, le chemin qu'ils avaient suivi à l'aller. Le miroir MM', était imparfaitement étamé, de sorte qu'un observateur, placé derrière ce miroir, voyait le point S_1, formé par les rayons lumineux, à leur retour de D. Or, au niveau de S_1, était placée une roue dentée R, qui interceptait les rayons ou les laissait passer, suivant qu'une dent ou l'intervalle de deux dents se trouvaient en S_1. L'appareil ainsi construit, supposons qu'on fasse tourner la roue dentée. Au moment où *l'intervalle de deux dents passe en* S_1, la lumière venant de S franchit cette position et voyage jusqu'en D pour revenir en S_1, après réflexion. Mais supposons que durant le temps que la lumière a mis à aller de S_1 en D, et revenir en S_1, l'intervalle de deux dents ait été remplacé par une dent grâce au mouvement de rotation de la roue R, la lumière réfléchie sera interceptée par la dent, et l'observateur placé derrière le miroir MM' ne verra pas le point S_1.

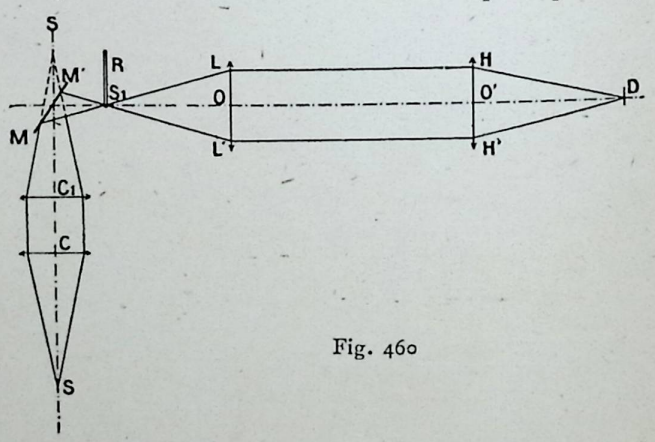


Fig. 460

On conçoit qu'il soit possible de régler la vitesse de la roue dentée de façon que la lumière issue de S, et passant par S_1, *soit toujours interceptée à son retour de D.* Il est facile, d'autre part, de déterminer la vitesse de rotation de la roue, et par suite le temps que met une dent à remplacer l'intervalle de deux dents. Ce temps est justement celui que met la lumière à aller de S_1 en D, et à en revenir. La distance S_1 D étant connue on en déduit la vitesse de la lumière.

Cette expérience détermine la vitesse de la lumière dans l'air. On a trouvé ainsi que la lumière parcourt dans *l'air* 300.333 *kilomètres* par seconde.

A la même époque, Foucault, par la méthode du miroir tournant, qui permettait d'opérer sur une distance de quelque mètres, avait aussi déterminé la vitesse de la lumière. Le résultat qu'il a trouvé est très voisin de celui de Fizeau.

Polarisation de la lumière. — Certains corps transparents qui ne sont pas, au point de vue de la structure élémentaire, identiques à eux-mêmes dans toutes les directions, présentent des propriétés de réfrangibilité différentes de celles que nous avons énoncées pour les corps transparents homogènes, en général. Ils réfractent la lumière dans deux directions distinctes. Autrement dit · un rayon lumineux incident se trouve, après son passage dans le corps, divisé en deux rayons réfractés, différant par leurs propriétés physiques, et plus ou moins inclinés l'un par rapport à l'autre selon la nature du corps en question et la direction du rayon incident. La séparation est parfois très nette, elle peut être aisément observée et mesurée ; mais, dans d'autres cas, elle n'est pas directement perceptible et ne peut être déduite que de certains phénomènes qui sont la conséquence de cette double réfraction.

L'exemple le plus frappant de cette décomposition particulière de la lumière est fourni par la variété de carbonate de chaux cristallisé connue sous le nom de *spath d'Islande*. Ce minerai est parfaitement transparent et généralement incolore, il est susceptible d'un beau poli ; on peut le diviser en cristaux rhomboédriques à six faces égales, parallèles deux à deux, chacun étant un parallélogramme avec des angles de 101° 55′ et 78° 5 ; la diagonale joignant les sommets des angles obtus de ce parallélépipède oblique s'appelle axe du cristal.

L'existence de la double réfraction dans le spath d'Islande a été constatée pour la première fois par *Bartholinus en* 1669. Le phénomène a été expliqué par *Huyghens* en 1678.

Quand on pose un cristal de spath d'Islande sur une feuille de papier blanc portant une fine ligne noire, cette ligne, vue par transparence à travers le cristal, apparaît double dans la plupart des positions du rhomboèdre. En faisant tourner ce dernier sur sa base, on voit les deux images de la ligne se déplacer, l'une par rapport à l'autre, en s'éloignant et en se rapprochant tour à tour. Pour deux positions symétriques opposées, les deux images se confondent en une seule.

Ainsi, lorsqu'un rayon incident frappe le cristal, il se dédouble en deux rayons réfractés. L'un obéit entièrement aux lois ordinaires de la réfraction, c'est le *rayon réfracté ordinaire* ; l'autre est le *rayon réfracté extraordinaire*. La lumière ainsi divisée par son passage dans une substance telle que le spath d'Islande est dite *polarisée*.

La conséquence la plus intéressante de la polarisation de la lumière est l'apparition de couleurs éclatantes par la transmission de la lumière à travers des lames transparentes douées de la double réfrangibilité. Si un rayon de lumière polarisée traverse une mince plaque de mica, parfaitement transparente et incolore à la lumière ordinaire, et vient se réfléchir sur un miroir placé dans une position convenable, ce rayon paraît brillamment coloré de diverses nuances. Le phénomène varie suivant l'épaisseur et l'inclinaison de la lame soumise à l'expérience.

On base là-dessus une méthode d'analyse permettant de déceler la constitution cristalline des minéraux.

La polarisation permet aussi de rendre évidente la différence de constitution de certaines substances de composition chimique élémentaire identique et de propriétés analogues, telles que le glucose et le lévulose, de la famille des sucres.

ÉLECTRICITÉ

CHAPITRE PREMIER

MAGNÉTISME

On trouve dans la nature certains minerais de fer ($Fe^3 O^4$) qui possèdent la propriété *d'attirer le fer pur et l'acier*. En roulant dans de la limaille de fer ces aimants naturels, on voit la limaille se coller à la surface du minerai en petites houppes.

Celles-ci se forment plus particulièrement en deux régions opposées.

Il est *possible de fabriquer* avec ces minerais, des *aimants artificiels*. Pour cela il suffit de frotter un barreau d'acier trempé avec un aimant naturel.

On leur donne habituellement la forme d'un barreau prismatique droit ou recourbé en fer à cheval ou d'un losange aplati (aiguille aimantée), fig. 461, 462 et 463.

Pôles. — Quand on plonge un barreau aimanté dans de la limaille de fer, on constate que celle-ci s'attache aux deux extrémités en houppes qui semblent rayonner de deux points opposés. Ces deux points, situés aux deux extrémités de l'aimant, portent le nom de *pôles*. Entre ces deux pôles, il existe une région qui n'exerce aucune action sur la limaille : c'est la région neutre.

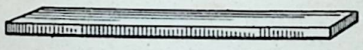


Fig. 461

Action magnétique de la terre. — Suspendons un barreau aimanté, par son centre, à un fil flexible, de manière qu'il soit dans une position horizontale. *Si nous l'abandonnons à lui-même, nous le verrons tourner, osciller de droite à gauche, pendant quelques instants, et s'arrêter enfin dans une direction sensiblement parallèle à la ligne nord-sud, géographique.* Si on écarte l'aimant de cette position d'équilibre, il ne tarde pas à y revenir et *c'est toujours le même pôle de l'aimant, qui se dirige vers le nord.*

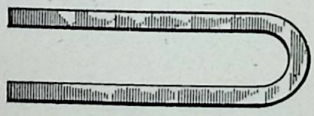


Fig. 462

Si on remplace le barreau aimanté par une aiguille montée sur un pivot, comme dans la boussole, cette aiguille se place toujours dans la direction nord-sud. Pour distinguer plus aisément la pointe qui se dirige vers le nord, on la teint généralement en bleu.

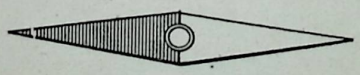


Fig. 463

Nous donnerons le nom de pôle nord d'un aimant à celui qui se dirige vers le nord, et de pôle sud à l'autre.

Actions réciproques de deux aimants. Soumettons une aiguille aimantée, montée sur un pivot, à l'influence d'un barreau aimanté, nous voyons des phénomènes d'attraction et de répulsion qui présentent une grande analogie avec ceux que l'on observe à propos des corps électrisés.

Approchons par exemple du pôle nord de l'aiguille le pôle nord du barreau aimanté, nous observons une répulsion ; mais, si nous approchons du même pôle du barreau, le pôle sud de l'aiguille, nous observons une attraction. Nous pouvons donc énoncer la loi suivante :

Deux pôles de même nom se repoussent, deux pôles de noms contraires s'attirent.

En vertu de cette loi, si on pose le pied qui supporte l'aiguille au milieu d'un barreau aimanté horizontal, l'aiguille s'oriente parallèlement au barreau, son pôle nord étant tourné vers le pôle sud du barreau et son pôle sud vers le pôle nord du barreau.

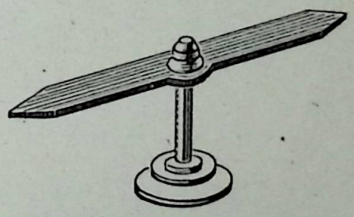


Fig. 464

On est frappé tout de suite par l'analogie de cette influence exercée sur l'aiguille par le barreau aimanté avec celle de la terre. On peut considérer notre globe comme un immense aimant dont les pôles seraient situés au voisinage des pôles géographiques.

Dans cette hypothèse, toutefois, les pôles magnétiques de la terre doivent être orientés en sens inverse de ceux de l'aiguille. Pour conserver les dénominations que nous avons choisies, nous devrions donc dire que le *pôle nord magnétique* de la terre se trouve au *pôle sud géographique*, et que *le pôle sud magnétique* se trouve au *pôle nord géographique*. Pour éviter cette contradiction, on a donné le nom *de pôle boréal* au pôle magnétique situé dans l'hémisphère boréal ou hémisphère nord, et de *pôle austral* à l'autre.

Suivant cette nouvelle convention, le *pôle nord* d'un aimant devra prendre le nom de pôle *austral* et le *pôle sud* de *pôle boréal*. Ce système de dénomination est le plus usité malgré sa contradiction apparente avec l'orientation des pôles de l'aimant sous l'influence du magnétisme terrestre.

Notion de quantité en magnétisme. — Soit un aimant N. S. placé sur l'un des plateaux d'une balance et taré (fig. 465). Si nous approchons du pôle N de ce barreau successivement et à la même distance 2 pôles

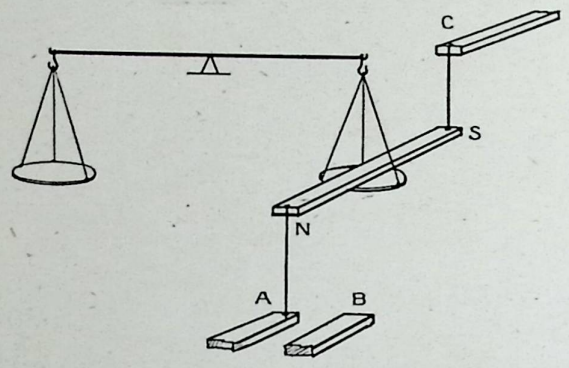


Fig. 465

A et B placés de telle sorte que la *droite qui joint les pôles soit verticale* il y a attraction ou répulsion et cette action peut être mesurée à l'aide de poids nécessaires pour rétablir l'équilibre.

Si les poids qu'il faut ajouter pour A et B sont *égaux, on peut dire que les deux pôles possèdent des masses magnétiques égales.*

S'ils sont 2, 3, *n* fois plus grands pour C que pour A on dit que la masse magnétique de C est 2, 3, *n* fois plus grande que celle de A.

Unité C. G. S. de magnétisme. — *C'est la masse magnétique d'un pôle qui exerce sur un pôle identique placé à la distance* de 1 cm. *une force égale à l'unité C. G. S.* dyne).

On vérifie que :

Lois de Coulomb. — 1° *Les attractions et répulsions s'exerçant entre 2 pôles sont proportionnelles au produit de leurs masses magnétiques.*

2° *Les attractions et répulsions s'exerçant entre 2 pôles sont inversement proportionnelles au carré de leur distance.*

Autrement dit : 2 pôles de masses magnétiques *m* et *m'* placés à la distance *d* s'attirent ou se repoussent avec une force F

$$F = K\frac{m\,m'}{d^2}$$

K est une constante qui dépend du milieu dans lequel s'exercent les attractions et répulsions.

Dans tous les milieux sauf les substances magnétiques

$$K = \text{sensiblement } 1.$$

Si *m* et *m'* sont de *même signe, F* est + *il y a répulsion,* si *m* et *m'* sont de *signe contraire F* est — *il y a attraction. La masse magnétique totale d'un aimant est nulle.*

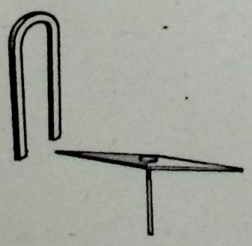


Fig. 466

En effet un aimant flexible en forme de fer à cheval est sans action sur une aiguille aimantée lorsque ses deux pôles sont rapprochés (fig. 466).

Autrement dit les *deux masses magnétiques des deux pôles d'un aimant sont égales et de signes contraires.*

Champ magnétique d'un aimant. — *On appelle ainsi la région de l'espace dans laquelle se font sentir les actions magnétiques dues à un aimant.*

Théoriquement ce champ est infini, pratiquement il est limité à une faible portion de l'espace. Si nous considérons la masse magnétique A = + 1 placée à une distance *d* d'un pôle N, A est soumise à l'action d'une force (fig. 467)

$$f = \frac{M}{d^2}$$

M étant la masse magnétique du pôle N. Cette force *f* mesure l'intensité du champ magnétique au point A.

Fig. 467

Unité C. G. S. d'intensité. — *C'est l'intensité en un point d'un champ magnétique où un pôle N égal à l'unité est soumis à une force d'une dyne.* — *On l'appelle Gauss* (Mathématicien et physicien allemand (1777-1855).

Propriétés du champ magnétique. — *Orientation d'un aimant.* — Considérons un petit aimant *a b* placé dans le champ magnétique d'un gros barreau aimanté N S. (fig. 468). Le point *a* (pôle sud) est soumis à deux forces, l'une attractive *f*, l'autre répulsive *f'* qui ont pour résultante R.

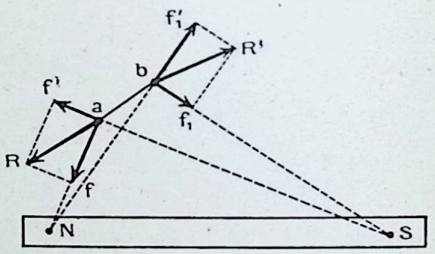


Fig. 468

Le point *b* (p. nord), à deux forces l'une attractive f_1 l'autre répulsive f_1' qui ont pour résultante R'.

R et R' sont égales et opposées ; *le barreau a b soumis à l'action du couple R R' prend la direction R R' qui est celle du champ magnétique de l'aimant.*

Spectre magnétique. — En saupoudrant de limaille de fer un carton qui recouvre un aimant et en le tapotant avec les doigts on voit les particules de limaille se disposer suivant des courbes régulières qu'on appelle *lignes de force* du champ de l'aimant. On réalise ainsi un *spectre magnétique* (fig. 469).

— Les petits grains de limailles de fer sont en effet, comme nous le verrons plus loin, (aimantation par influence) devenus des aimants qui prennent la direction des lignes de force qui les traversent.

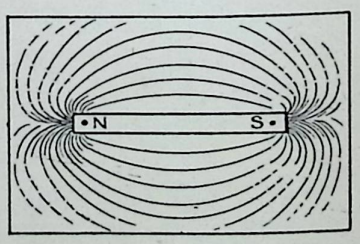


Fig. 469

On voit que les lignes de force vont du pôle N au pôle S. D'après *Faraday, elle se continuent et se ferment à l'intérieur du barreau.*

Lorsque les lignes de force sont *parallèles entre elles,* le champ *est dit uniforme.*

Flux magnétique. — L'ensemble des lignes de force qui constitue le spectre peut être assimilé à un flux qui sort par le pôle nord et rentre par le pôle sud.

Si nous considérons l'ensemble des lignes de force qui traversent normalement une surface *s* très petite

afin que l'intensité du champ puisse être considérée comme constante en tous ses points, le flux qui le traverse est $\Phi = H s$

H étant l'intensité du champ.

L'unité C. G. S. de flux magnétique est le Maxwell (Mathématicien et physicien anglais (1831-1879). *C'est le flux qui traverse normalement une surface de 1 centimètre carré dans un champ magnétique uniforme dont l'intensité est un Gauss.*

Aimantation par influence. — *Un morceau de fer placé dans le champ d'un aimant devient lui-même un aimant présentant un pôle N et un pôle S* (Le pôle S est à l'extrémité qui reçoit les lignes de force du champ, c'est-à-dire en face le pôle N de l'aimant). Ce fait explique l'expérience du spectre magnétique. L'aimantation du fer doux disparaît dès qu'il ne se trouve plus dans le champ magnétique.

Un barreau d'acier placé dans les mêmes conditions conserve en partie une aimantation après la disparition du champ qui l'a produite. Cette aimantation résiduelle s'appelle *magnétisme rémanent.*

C'est grâce à cette propriété que l'on peut fabriquer des *aimants permanents.*

Répartition du magnétisme dans un aimant. — Les observations dont nous avons parlé jusqu'ici semblent indiquer que le magnétisme se trouve localisé en deux régions relativement très petites qu'on

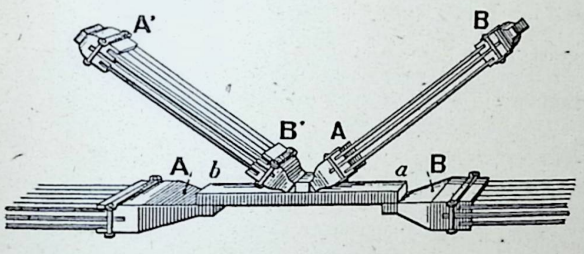


Fig. 470

nomme pôles. Il n'en est rien pourtant, le magnétisme est réparti également dans toute la masse de l'aimant, et s'il ne se manifeste qu'aux extrémités, c'est que les actions et les réactions réciproques des diverses parties de l'aimant neutralisent les forces magnétiques, dans la partie médiane.

On peut le prouver par l'expérience *dite des aimants brisés.*

Prenons une aiguille d'acier aimantée, elle présente à chacune de ses extrémités un pôle capable d'attirer la limaille de fer. La région médiane ne manifeste aucune action magnétique. Brisons cette aiguille par le milieu, nous constatons que chacune des deux moitiés constitue un aimant complet, avec à chaque extrémité, un pôle capable d'attirer la limaille de fer. La région médiane de chacun de ces deux aimants est neutre, comme pour l'aiguille entière. Si on continue à fragmenter l'aiguille en un nombre quelconque de morceaux, chacun de ces derniers constitue toujours un aimant complet, comparable à l'aimant initial et seulement moins puissant que lui.

Procédés d'aimantation. — On procède de diverses façons pour aimanter un barreau d'acier.

On peut se contenter de frotter le barreau à aimanter sur l'un des pôles d'un aimant, et en allant toujours dans la même direction. C'est le *procédé de la touche simple.*

On peut placer le barreau à aimanter entre les pôles de nom contraire de deux aimants puissants, puis frotter ce barreau en allant du milieu aux extrémités (fig. 470), avec les pôles de nom contraire de deux autres aimants. Les pôles de ces derniers doivent correspondre aux pôles des aimants fixes, entre lesquels le barreau à aimanter est placé. Si on applique les deux aimants mobiles au milieu du barreau pour les écarter l'un de l'autre, en les dirigeant, en même temps, vers les extrémités, on emploie le *procédé de la touche séparée.* Si on laisse les deux aimants mobiles appliqués l'un contre l'autre en les promenant alternativement du centre

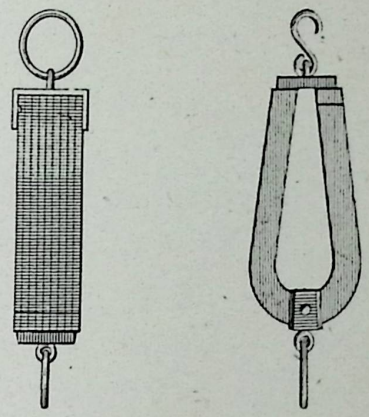


Fig. 471

à l'une des extrémités du barreau, puis à l'autre extrémité, et ainsi de suite, en revenant au centre après être passé, en dernier lieu, par le pôle opposé à celui par lequel on avait commencé, on emploie le *procédé de la double touche.*

Un morceau d'acier soumis perpétuellement à l'action d'un aimant finit par manifester des traces d'aimantation. Celle-ci peut se développer aussi sous l'influence du magnétisme terrestre. On en observe des exemples dans les ateliers où les enclumes et les outils s'aimantent parfois quand ils sont habituellement orientés suivant la ligne nord-sud.

Les aimants qu'on emploie dans l'industrie ont le plus souvent la forme d'un fer à cheval, de façon que les deux pôles puissent agir en même temps sur un même objet (fig. 471).

CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE

Méridien magnétique. — Boussole. — Nous avons dit que si on abandonne à elle-même une aiguille aimantée, libre de se mouvoir autour d'un pivot dans un plan horizontal, cette aiguille prend une direction constante (fig. 472).

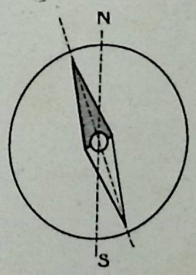


Fig. 472

Le plan défini par cette direction, et par le centre de la terre a reçu le nom de *méridien magnétique.* Ce plan ne se confond pas exactement avec celui du méridien géographique. Il s'ensuit que la direction de l'aiguille de la boussole fait un angle avec la ligne nord-sud géographique. Cet angle a reçu le nom de *déclinaison magnétique.* La déclinaison est orientale ou occidentale, suivant que le pôle austral de l'aiguille se porte à l'est ou à l'ouest de la ligne nord-sud.

Imaginons maintenant qu'on monte une aiguille aimantée autour d'un axe horizontal. Cette aiguille ne pourra plus subir de déplacement, ni à droite, ni à gauche du plan perpendiculaire à son axe, mais elle pourra se mouvoir librement autour de son point de suspension dans le plan vertical où on l'aura placée (fig. 473).

Supposons qu'on oriente la boussole ainsi construite, de manière que l'aiguille se trouve dans le méridien magnétique. Au lieu de conserver la position quelconque dans laquelle elle avait été placée, l'aiguille de la boussole oscille autour de son axe et s'oriente enfin dans une position bien déterminée, approximativement parallèle à la ligne des pôles géographiques (fig. 474).

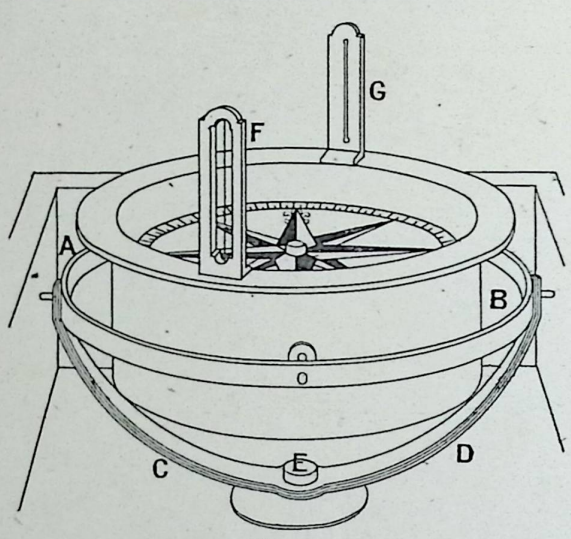


Fig. 473

Toutefois, ce parallélisme n'est pas absolu. *L'angle que fait la direction de l'aiguille avec l'horizon s'appelle inclinaison magnétique du lieu considéré.*

La terre crée donc dans son voisinage un champ magnétique uniforme.

L'intensité de ce champ est faible

$$H = 0 \text{ g. } 46$$

L'action du champ *terrestre est purement directrice.* En effet, il est possible de vérifier que l'aiguille tourne sur elle-même sans subir de translation, de plus on constate à l'aide de pesées précises qu'avant ou après l'aimantation l'aiguille ne pèse ni plus ni moins.

Mesure de la déclinaison. — Elle se fait avec la boussole *marine ou compas de mer.* Elle se compose d'une aiguille de déclinaison fixée sous une lame de mica portant une rose des vents. La boîte est suspendue de façon que l'aiguille soit toujours horizontale, quelle que soit l'inclinaison du navire (suspension à la cardan). Enfin la boite porte une ligne dirigée suivant l'axe du navire appelée *ligne de foi.*

Pour se servir de la boussole il faut connaître la déclinaison magnétique du lieu. On détermine alors le méridien géographique du lieu ; on peut alors mesurer sur la carte l'angle que fait ce méridien avec la direction à suivre et par suite connaître l'angle $(\alpha + d)$ que fait cette dernière avec l'aiguille de la boussole.

La déclinaison n'est pas constante.

Variations diurnes. — Elle subit dans une journée des variations de 12 à 13′ (maximum le jour, minimum la nuit).

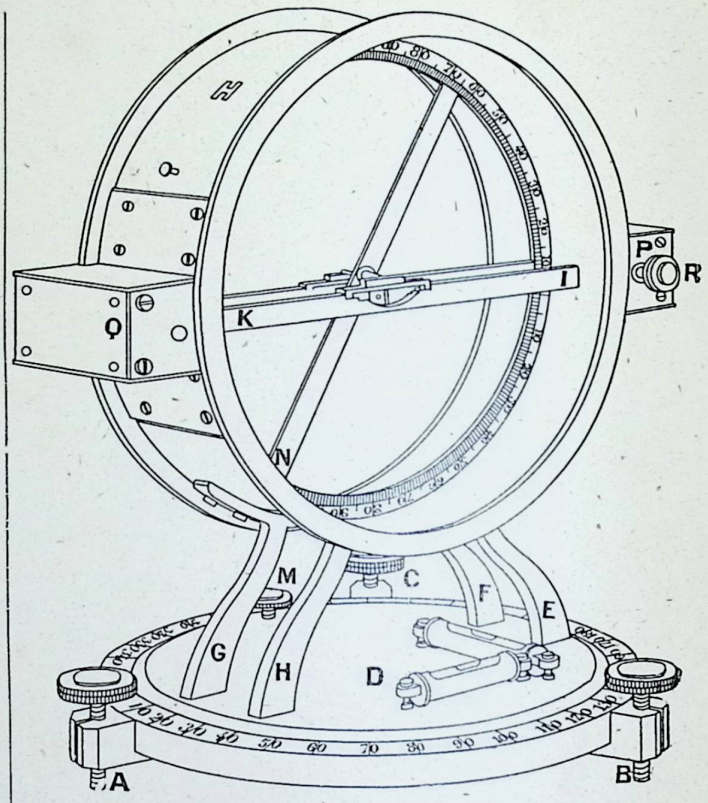


Fig. 474

Variations annuelles. — 15 minutes pendant l'été, 8′ pendant l'hiver, vers l'ouest pendant le printemps, vers l'est pendant le reste de l'année.

Variations séculaires. — En 1580, elle était orientale et de 11° 30′. Elle a été en diminuant jusqu'en 1663 où elle est devenue nulle. Depuis cette date elle est occidentale, elle est parvenue à son maximum en 1814 (22° 34′) et diminue depuis de 10 à 11 minutes par an. Actuellement elle est à Paris de 11° 4′.

Variations avec le lieu. — Au 1er janvier 1927 elle était de 11° 24′ à Paris, de 8° 50′ à Strasbourg et de 9° 25 à Nancy.

A une époque déterminée on peut représenter l'état magnétique de la terre à l'aide de cartes sur lesquelles sont tracées les lignes d'égale déclinaison ou *lignes isogoniques* (fig. 475).

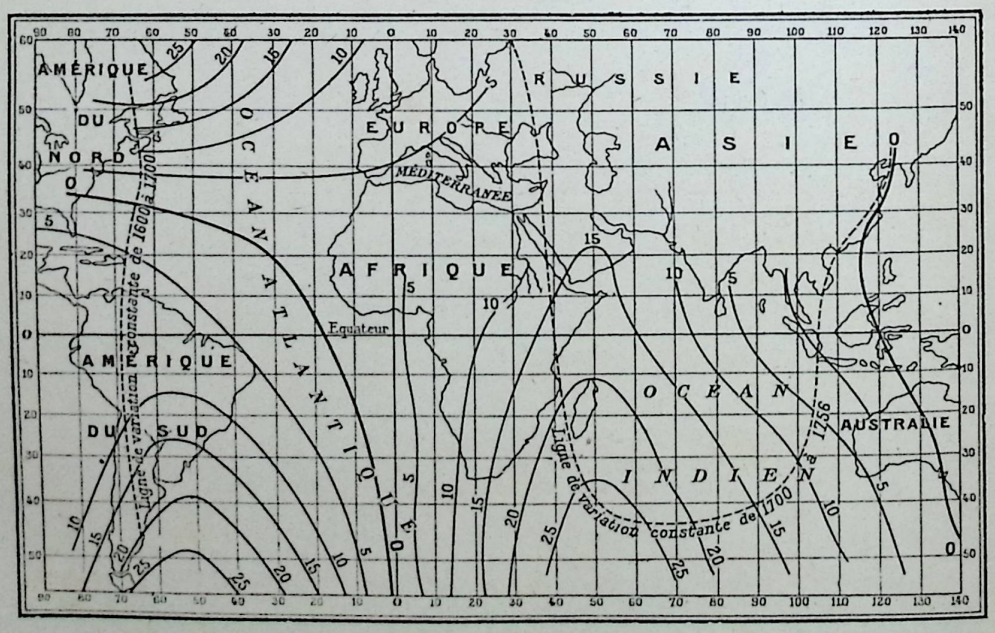


Fig. 475

CHAPITRE II

ÉLECTRICITÉ STATIQUE

Le mot *électricité* est tiré du grec *electron*, ambre jaune, matière qui possède la propriété d'attirer les corps légers quand elle a été frottée avec une peau de chat ou une étoffe de laine. Cette propriété avait été découverte par Thalès, 700 ans avant J.-C. On a reconnu qu'elle se manifeste aussi dans d'autres substances, par exemple dans l'ébonite ou dans le verre qui s'*électrisent par frottement*.

Mais les phénomènes électriques n'apparaissent pas seulement dans les corps lorsqu'on les frotte, Ils se produisent aussi lorsqu'on divise ces corps ou qu'on les met en contact avec d'autres ; lorsqu'on les soumet à certaines actions chimiques ou physiques. On distingue à ce point de vue *cinq modes* de production d'électricité : l'électricité peut être engendrée par *frottement*, par *contact*, par *influence*, par *induction*, par *action thermique* lumineuse ou chimique. Mais il faut bien retenir que la différence ne réside que dans le mode de production, et que l'électricité reste toujours la même.

Electricité par frottement. — Quand on frotte certains corps, ils s'électrisent, et ils ne le font pas tous de la même façon ; il se produit deux sortes d'électricité dites, l'une *positive*, l'autre *négative*.

Les métaux et le verre s'électrisent *positivement* quand on les frotte avec une étoffe de laine ou une peau de chat. L'ambre, la résine, l'ébonite (caoutchouc durci) s'électrisent *négativement*. Pour distinguer ces deux espèces d'électricité, on emploie les signes + et —, au moyen desquels on désigne en algèbre les nombres positifs (+) ou négatifs (—).

Afin de nous familiariser avec les manifestations des deux électricités, ayons recours à deux petits *pendules électriques*. Ces appareils se composent d'une potence de verre supportée par un pied, et à laquelle on suspend, au bout d'un fil de soie, une petite balle de moelle de sureau (fig. 476). Pour produire les deux espèces d'électricité, nous utiliserons une baguette de verre et un bâton d'ébonite ou de cire à cacheter que nous frotterons avec un morceau de laine.

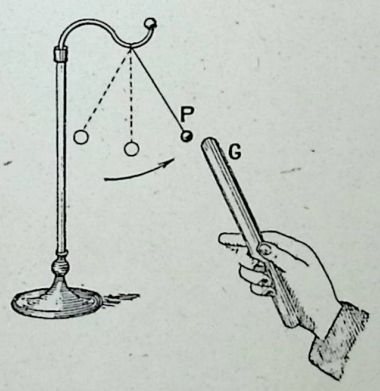


Fig. 476

Si on électrise l'un de ces deux corps de la manière indiquée plus haut, et qu'on l'approche de petits morceaux de papier posés librement sur la table (fig. 477) ceux-ci se précipitent contre le verre ou l'ébonite, y restent adhérents quelques instants, puis retombent. De même, les balles de sureau des pendules sont attirées, retenues un moment, puis abandonnées.

Mettons maintenant en contact les deux balles de sureau, non encore électrisées, des pendules, avec la baguette de verre électrisée : elle se chargent d'électricité, puis elles retombent. Si alors on approche l'une de l'autre les deux balles de sureau, on constate qu'elle se repoussent violemment.

Electrisons de la même façon l'une des balles au moyen de la baguette de verre, et l'autre au moyen du bâton d'ébonite. Quand nous les approcherons l'une de l'autre, elles s'attireront, cette fois-ci, jusqu'à se toucher, resteront un instant en contact, puis s'écarteront.

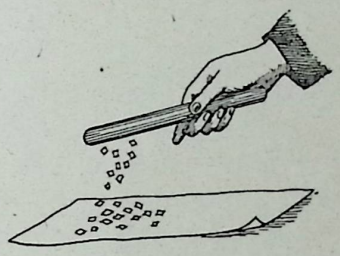


Fig. 477

Voici comment on explique aujourd'hui ces phénomènes :

1° Les atomes de *tous* les corps sont constitués par des grains d'électricité positive appelés *protons* et par des grains d'électricité négative appelés électrons. Ce sont, *en général*, les électrons *seuls* qui interviennent dans les phénomènes électrostatiques, électrodynamiques et magnétiques.

2° Quand on frotte un corps avec un frottoir, on produit un déplacement d'électrons de l'un à l'autre. Par exemple, quand on frotte un bâton de verre avec un morceau de drap, des électrons passent du verre au drap, de sorte que le verre présente un *défaut d'électrons*, une *faible pression* électronique tandis que le morceau de drap possède un *excès d'électrons*, une *forte pression* électronique. Il est aisé à comprendre que, pour que l'équilibre soit rétabli, il faut qu'il y ait attraction des deux corps ainsi électrisés. Si, au contraire, ils présentaient tous deux *simultanément*, soit un excès d'électrons (charge négative), soit un défaut d'électrons (charge positive), l'équilibre ne pourrait avoir lieu par contact des deux corps; donc ils se repousseraient. Il en va de même de la pression atmosphérique entre deux points. L'air se déplace dans le sens de la *dépression* et en sens contraire de la *pression*.

De là, on peut conclure :

1° Il y a deux sortes d'électricités constitutives de l'atome.

2° Les phénomènes électriques résultent d'une différence de pression électronique entre deux corps ou entre deux points d'un même corps.

3° Le nombre d'électrons *cédés* est égal au nombre d'électrons *acquis*. C'est le principe de la conservation de l'électricité.

4° Un *défaut* d'électrons (charge positive) est corrigé par l'apport d'un *excès* d'électrons (charge négative) ce qui signifie que deux corps possédant deux charges d'électricité de signes contraires s'attirent.

5° Deux corps, qui présentent, l'un *par rapport* à l'autre, ni excès, ni défaut d'électrons, sont sans action mutuelle. Ils sont dits à *l'état neutre*.

6° Deux corps, qui présentent *simultanément* un excès ou un défaut *également* grands d'électrons, sont en équilibre *relatif*. Un déplacement d'électrons romprait cet équilibre. C'est pour cela que les deux corps se repoussent. Jusqu'à présent on a traduit ce fait par la loi suivante : deux corps chargés de deux électricités de même signe se repoussent.

7° Sur un corps *bon conducteur* les électrons se déplacement facilement et, difficilement sur un corps *mauvais conducteur*.

8° *Tous* les corps peuvent être électrisés, pourvu qu'ils soient munis d'un manche isolant.

Les métaux, le charbon, les solutions salines, les acides, l'eau, les gaz sont bons conducteurs.

Le verre, la porcelaine, la gutta-percha, le caoutchouc, l'ébonite, les résines, le soufre, la paraffine, la laine, la soie, les plumes, les gaz secs sont mauvais conducteurs.

Il y a des corps qui tiennent le milieu entre ces deux catégories, ils ne conservent pas leur électricité quand on les touche, mais ils ne la perdent pas instantanément : ce sont des conducteurs médiocres, tels que le bois, le papier, l'alcool, etc.

Lorsqu'on frotte un corps mauvais conducteur avec un corps bon conducteur, l'électricité qui se produit dans ce dernier est conduite à la terre par le corps humain. *Il suit de là que, non seulement notre corps est bon conducteur, mais aussi que la terre doit l'être,* puisque l'électricité va s'y perdre aussitôt qu'elle a été produite. Le terre est donc, en fait, un conducteur de dimension énorme, à la surface duquel les faibles quantités d'électricité que nous pouvons créer ne déterminent aucun changement ou, pour parler scientifiquement, ne *modifient pas la densité électrique.*

Lois des actions électriques. — Coulomb a étudié les lois suivant lesquelles varient les actions attractives ou répulsives, qui s'exercent entre deux sphères conductrices chargées d'électricité, quand on fait varier soit la distance qui les sépare, soit les quantités d'électricité qu'on leur a communiquées.

Cette étude suppose qu'on a défini la quantité d'électricité : or, supposons deux sphères conductrices de mêmes dimension. L'une étant chargée d'une certaine quantité q d'électricité, si l'on vient à mettre la seconde en contact avec la première, la quantité q d'électricité se répartit également sur les deux sphères et, si on les sépare, elles restent chargées d'une même quantité d'électricité qui est évidemment égale à $\frac{q}{2}$. Ce raisonnement, très simple, permet de définir une quantité d'électricité double d'une autre. On définira d'une manière analogue des quantités triple, quadruple, etc. Le même raisonnement définit l'addition des quantités d'électricité. Il s'ensuit que la quantité d'électricité est une grandeur mesurable. On choisit pour unité de quantité d'électricité *la quantité dont il faut charger deux sphères de rayon 1 cm. pour qu'elles exercent l'une sur l'autre à un centimètre de distance une force de répulsion égale à une dyne.*

La loi de Coulomb s'énonce ainsi :

Deux sphères électrisées exercent l'une sur l'autre des forces attractives ou répulsives inversement proportionnelles aux carrés des distances, et directement proportionnelles aux produits des quantités d'électricité dont les deux sphères sont chargées.

Cette loi est d'autant plus exacte que les dimensions des sphères sont plus petites par rapport à la distance qui les sépare.

On la vérifie au moyen de la *balance de Coulomb.* Cet appareil se compose (fig. 478) d'une tige horizontale mauvaise conductrice portant à l'une de ses extrémités une petite sphère conductrice, et à l'autre, un contre-poids. La tige est suspendue à un fil d'argent. Dans le couvercle de la boîte isolante qui renferme le système, on peut passer une petite tige isolante à l'extrémité de laquelle est fixée une sphère conductrice identique à la première. Enfin, la sphère suspendue au fil d'argent se trouve à la hauteur d'un cercle divisé gravé sur la boîte de verre et permettant d'apprécier les déplacements angulaires de cette sphère.

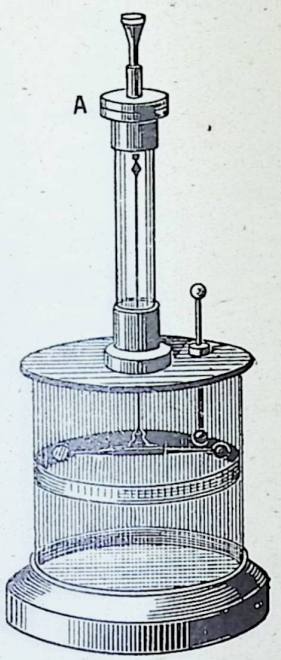


Fig. 478

Pour faire une expérience, on charge la sphère fixe d'une certaine quantité connue q d'électricité. On amène la sphère mobile au contact de la première en tournant en A le bouton auquel le fil est suspendu. Puis, on replace le bouton dans sa position initiale et on mesure la répulsion par la torsion imprimée au fil d'argent, c'est-à-dire par le déplacement angulaire de la sphère mobile. On connaît la quantité d'électricité $\frac{q}{2}$ dont les deux sphères sont chargées, leur distance angulaire initiale et leur distance finale. On peut donc vérifier la loi.

La loi de Coulomb est applicable en particulier aux éléments moléculaires des corps électrisés. Dans notre étude nous pourrons supposer l'électricité répartie sur des molécules mobiles à l'intérieur ou à la surface du corps électrisé. Cette conception nous conduira à parler des actions attractives ou répulsives de l'électricité sur elle-même dans la substance d'un corps.

Répartition de l'électricité dans un corps conducteur électrisé. — Soit une sphère métallique c supportée par un fil isolant (fig. 479). Chargeons-la

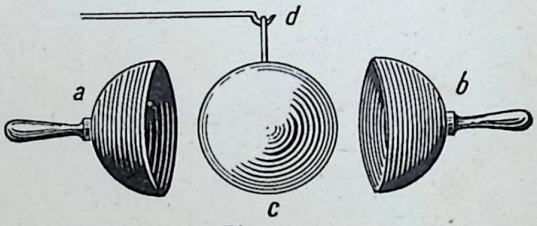


Fig. 479

d'électricité. Imaginons ensuite qu'on enferme cette sphère dans une autre sphère creuse, assez grande pour la contenir, sans la toucher, et formée par la réunion de deux hémisphères conducteurs a et b, supportés par des manches isolants. Après avoir assemblé les hémisphères, touchons la sphère intérieure avec la surface intérieure des hémisphères, puis supprimons le contact que nous venons d'établir et séparons les deux hémisphères. Nous constaterons alors que la boule que nous avions préalablement chargée d'électricité est revenue à l'état neutre, mais que les hémisphères se sont électrisés : toute l'électricité de la boule a passé sur les hémisphères.

Le contact entre ces derniers et la sphère intérieure n'a été établi qu'au moment où ils enfermaient complètement la boule électrisée. Puisque les hémisphères ont pris toute l'électricité, on peut en conclure : 1° *que celle-ci était répartie uniquement à la surface de la sphère;* 2° *qu'elle a passé à la surface extérieure du système formé par la boule et par les hémisphères.*

Une autre expérience corrobore ce résultat : soit une sphère creuse conductrice isolée dans laquelle on a ménagé un petit trou permettant d'introduire dans la sphère une petite plaque métallique circulaire supportée par un manche de verre et qu'on nomme *plan d'épreuve*.

Si la sphère est électrisée et qu'on la touche avec le plan d'épreuve, il est évident que celui-ci ne se chargera d'électricité qu'aux endroits où ce fluide est réparti. Or, si l'on touche la surface extérieure de la sphère avec le plan d'épreuve par le trou pour le mettre en contact avec la surface intérieure de la sphère, il ne se charge pas d'électricité.

On en doit conclure que l'électricité se porte uniquement à la surface de la sphère.

En s'appuyant sur la loi de répulsion des molécules électriques on aurait pu prévoir ce phénomène. En effet, si l'on suppose l'électricité répartie également dans

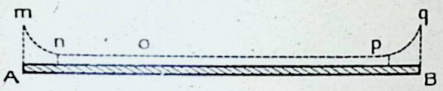


Fig. 480

la masse d'un conducteur sphérique, *les actions réciproques des molécules électriques doivent avoir pour effet de chasser ces dernières du centre à la périphérie.*

Ce phénomène se produit non seulement sur une sphère, mais sur un conducteur de forme quelconque ; on constate toujours que l'électricité se porte tout entière à la surface de ce conducteur.

Au reste, la distribution de l'électricité dépend de la forme du conducteur. En appliquant le raisonnement indiqué plus haut aux répulsions moléculaires, on conçoit que l'électricité tende à s'accumuler sur les parties allongées, minces, en particulier sur les pointes. Une baguette électrisée (fig. 480) présente un maximum de charge en ses extrémités A et B. Si on représente, en chaque point, la quantité d'électricité par un segment de droite perpendiculaire à A B et proportionnelle à cette quantité, et qu'on joigne les extrémités des perpendiculaires ainsi construites, on obtient une courbe *mnopq*. C'est la courbe représentative de la répartition électrique sur la baguette. La *densité électrique en un point donné est représentée par la longueur de l'ordonnée de la courbe en ce point* (*perpendiculaire à* A B).

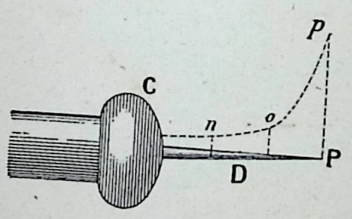


Fig. 481

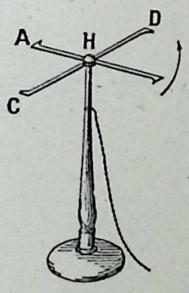


Fig. 482

Quand le corps électrisé présente une pointe telle que D P (fig. 481) les forces répulsives créent un maximum de densité électrique à l'extrémité P de la pointe. On conçoit même que cette densité tende vers l'infini si la pointe est suffisamment mince, et la répulsion qui s'exerce sur les molécules électriques placées en P fait que celles-ci tendent vers l'infini et sont chassées à l'opposé du corps. *Il s'ensuit que l'électricité se perd par les pointes, elle s'écoule dans l'air.* Les molécules d'air s'électrisant par suite de ce phénomène sont repoussées par la pointe chargée d'électricité de même nom. Si cette répulsion est assez vive, il se produit un courant d'air capable de souffler une allumette ou même une bougie allumée.

Si le conducteur est formé de deux baguettes A H, C D terminées par des pointes recourbées, à angle droit, toutes dans le même sans (fig. 482) et que ce système soit monté en H sur un pivot, il tend à se mettre en mouvement, dans le sens de la flèche, quand on l'électrise par suite des répulsions que les pointes A C D exercent sur l'air. Cet appareil est connu sous le nom de *tourniquet électrique*.

Production de l'électricité par influence. — Soit un conducteur de forme quelconque C supporté par un pied isolant (fig. 483). Ce conducteur n'étant pas électrisé, si l'on en approche un corps G électrisé, positivement par exemple, en évitant de mettre G en contact avec C, on constate que le conducteur C s'électrise par influence. *Il se développe du côté de G de l'électricité négative, et du côté opposé à G, de l'électricité positive.* En adoptant l'hypothèse que nous avons déjà énoncée, nous pouvons dire que les molécules électriques ont été repoussées par G. Ainsi la partie de C opposée à G s'est chargée d'électricité plus qu'à l'état d'équilibre normal, tandis que la partie la plus rapprochée de G est moins chargée qu'à l'état normal.

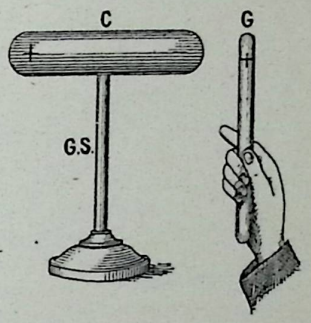


Fig. 483

On peut mettre en évidence l'apparition d'électricités contraires aux deux extrémités de C, en soumettant à leur influence attractive ou répulsive un pendule chargé d'électricité connue. Si on éloigne G, les manifestations électriques de C cessent. Le corps a repris son état normal d'équilibre électrique.

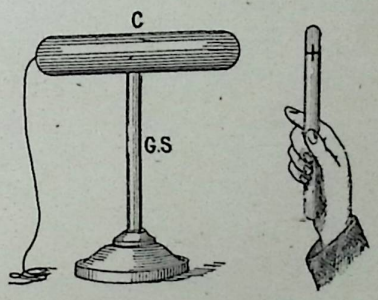


Fig. 484

Imaginons qu'on mette C en communication avec la terre par un fil conducteur (fig. 484), *la présence de G appelle en C de l'électricité négative, et repousse l'électricité positive dans le sol.* Quand on éloigne G sans interrompre la communication de C avec le sol, celui-ci redevient *neutre comme dans le premier cas. Mais si, avant d'éloigner G, on supprime la liaison de C avec le sol, l'électricité positive ne peut plus reparaître en C quand on éloigne G et par conséquent C reste charge d'électricité négative. On voit que, dans ce cas, le corps influencé s'est chargé d'électricité contraire à celle du corps influent.*

Electroscope. — Pour rendre manifeste la présence d'électricité sur un conducteur, on se sert de l'*électroscope*. Cet appareil, très simple en soi-même, se compose d'un ballon de verre dans lequel on a introduit une tige métallique garnie à son extrémité inférieure de deux minces feuilles de clinquant. L'extrémité supé-

rieure de la tige porte une petite sphère métallique ou un plateau qu'on approche du conducteur dont on veut étudier l'état électrique (fig. 485). Dès que dans la sphère ou dans le plateau se développe de l'électricité,

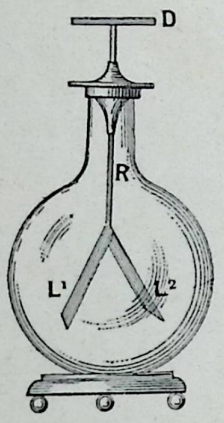


Fig. 485

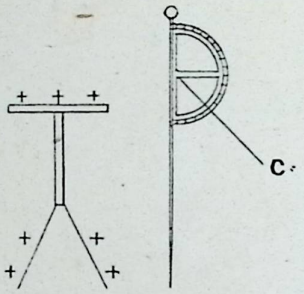


Fig. 486

par influence l'électricité contraire est repoussée dans les feuilles de clinquant ; celles-ci contenant de l'électricité de même nom s'écartent l'une de l'autre. S'il n'y avait pas d'électricité sur le conducteur soumis à l'expérience, les feuilles resteraient au repos dans la position verticale.

L'électromètre est un électroscope perfectionné. Il se distingue de ce dernier en ce que la tige métallique est fixée devant une échelle graduée ; une feuille d'or ou un petit pendule C (fig. 486) adapté à la tige s'en écarte plus ou moins suivant que la quantité d'électricité développée dans la boule est plus ou moins grande. Le pendule mobile devant l'échelle graduée joue le rôle d'aiguille indicatrice.

L'électroscope étant à l'état neutre les feuilles L_1 L_2 sont en contact l'une de l'autre. Si on approche un corps électrisé du plateau D, une certaine quantité d'électricité de même nature que celle du corps en question se trouve repoussé du plateau D dans les feuilles L_1 L_2 par l'intermédiaire de la tige conductrice R. Par suite, les feuilles s'écartent.

Cette expérience décèle donc la présence de l'électricité dans le corps influent ; mais elle n'indique pas la nature de cette électricité. En effet, les feuilles se chargent toujours en même temps d'une même électricité et, par conséquent, elles se repoussent toujours, que le corps influent soit chargé d'électricité positive ou d'électricité négative. Toutefois on peut déterminer, au moyen de l'électroscope, la nature de l'électricité du corps influent.

Pour cela, on commence par charger le plateau D et par suite la tige R et les feuilles L_1 L_2 d'une espèce connue d'électricité. *Supposons par exemple qu'on ait chargé l'appareil positivement* (fig. 486). Les feuilles s'écartent, puisqu'elles sont chargées d'électricité de même nom. Si on approche du plateau un corps influent chargé d'électricité positive (fig. 487), l'électricité positive du plateau est repoussée dans les feuilles augmentant ainsi la charge de ces dernières. Dans ces

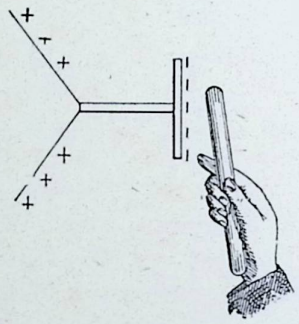


Fig. 487

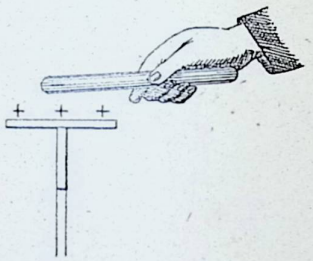


Fig. 488

conditions, *les feuilles s'écartent plus qu'elles ne le faisaient tout d'abord.* Si le corps influent est chargé d'électricité négative (fig. 488), c'est le contraire qui a lieu. L'électricité positive est attirée dans le plateau, *les feuilles reviennent à l'état neutre et retombent.*

L'expérience simple que nous venons d'indiquer permet donc de déterminer la nature de l'électricité dont un corps est chargé.

CHAPITRE III

SOURCES ELECTRIQUES

On appelle source électrique un système capable de produire de l'électricité d'une manière indéfinie. Le bâton de verre ou de résine qu'on frotte avec une étoffe de laine ou une peau de chat sont des sources électriques.

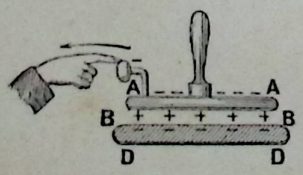


Fig. 489

Le système le plus simple et qui se rapproche le plus de ceci, est la machine électrique connue sous le nom d'*électrophore.* Celui-ci se compose d'un plateau de résine B B′ (fig. 489), qu'on électrise en le frottant avec une peau de chat. Sur le plateau de résine on peut poser un plateau A A′ en bois recouvert d'une feuille d'étain et muni d'un manche isolant. La résine étant chargée *négativement,* si l'on en approche le plateau A A′, celui-ci s'électrise positivement sur la face tournée vers B, et négativement sur l'autre. Si, à ce moment, on touche le plateau A avec le doigt, l'électricité négative se perd dans le sol, elle est remplacée par une nouvelle quantité d'électricité positive. *Quand on enlève le doigt, le plateau reste chargé positivement,* même si on l'éloigne du plateau de résine. On voit alors que A constitue une source d'électricité positive qu'on peut transmettre à un autre corps. Le plateau A, étant déchargé est revenu à l'état neutre, on l'électrise de nouveau, en le soumettant comme la première fois à l'influence de B. Comme la résine ne perd pas son électricité au cours de l'opération, l'électrophore peut fonctionner indéfiniment, théoriquement du moins. Dans la pratique, on ne prend même pas la précaution de maintenir le plateau A à une certaine distance de B.

On l'applique purement et simplement sur ce dernier. En effet, la surface de la résine n'est jamais bien plane ; et le plateau A n'entre en contact avec elle que par un très petit nombre de points, ce qui, étant donnée la mauvaise conductibilité de la résine n'a aucune influence sur la marche de l'opération.

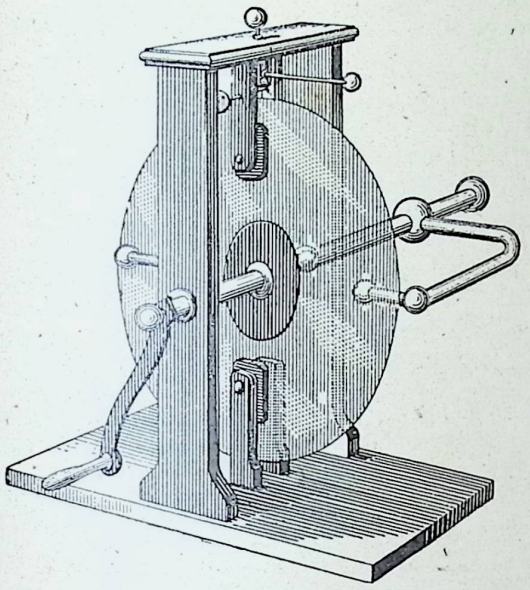


Fig. 490

Machines électriques. — La première machine électrique fut construite par Boyle et Otto de Guéricke. Ces deux physiciens découvrirent, au moyen de cette machine, la lumière électrique. L'appareil consistait en une boule de soufre qu'on faisait tourner d'une main sur son axe, tandis qu'on appuyait l'autre main à sa surface pour exercer une friction qui développait de l'électricité.

Les machines actuelles sont de deux sortes : les machines à frottement et les machines à influence.

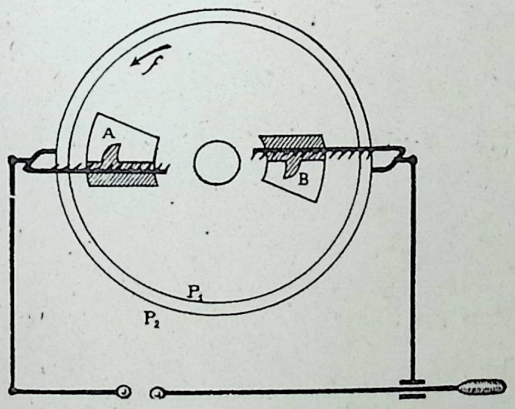


Fig. 491

Le type des machines à frottement est l'ancienne *machine de Ramsden* (fig. 490). Elle se compose d'un plateau en verre ou en ébonite que l'on fait tourner à l'aide d'une manivelle, dans un plan vertical, entre deux montants. Deux paires de coussins de cuir sont disposés sur les deux points diamétralement opposés du plateau. Leur pression se règle au moyen de vis. Le conducteur est généralement disposé de manière à enserrer le plateau aux deux extrémités d'un diamètre perpendiculaire à celui des coussins. Il est muni de deux séries de pointes en peignes qui recueillent l'électricité.

Parmi les machines à influence, celle de Holtz se compose de deux plateaux circulaires, placés parallèlement à une faible distance l'un de l'autre et montés sur le même axe. L'un des plateaux est fixe, l'axe tourne au travers sans frottement. L'autre plateau est mobile, on peut le mettre en mouvement au moyen d'une manivelle et d'une courroie sans fin.

En face du plateau fixe, et de l'autre côté du plateau mobile, sont disposés des peignes métalliques diamétralement opposés et en communication avec des collecteurs métalliques.

Dans le plateau fixe sont pratiquées deux ouvertures à l'intérieur desquelles on a collé deux bandes de carton mince, terminées chacune par une pointe de carton (fig. 491).

Quand on veut faire fonctionner la machine, on touche une des bandes de carton avec un bâton d'ébonite électrisé négativement. C'est ce qu'on appelle amorcer la machine. Puis on fait mouvoir le plateau mobile. La bande de carton, chargée d'électricité négative, agit par influence au travers du plateau mobile, sur le peigne placé en face de lui. Celui-ci laisse écouler de l'électricité positive qui se porte sur la face antérieure du

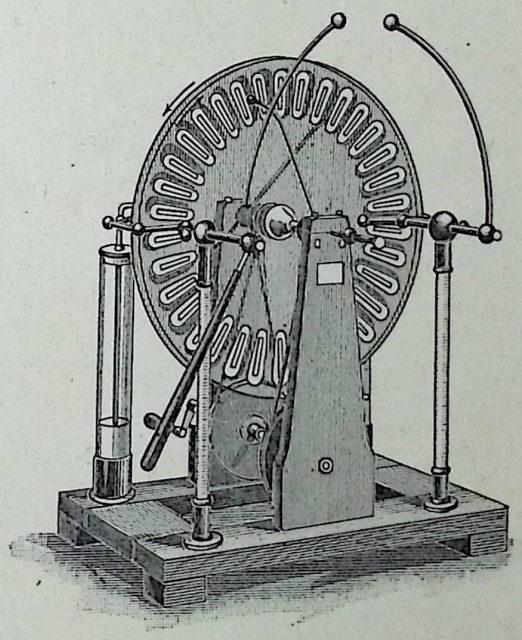


Fig. 492

plateau mobile, tandis que le collecteur relié au peigne se charge négativement. Cette action se répète indéfiniment, puisque les parties du plateau mobile qui y sont exposées changent. Mais les points du plateau mobile qui se sont chargés d'électricité positive arrivent devant l'autre bande de carton, ils agissent sur elles par influence et y développent de l'électricité positive. En même temps, les pointes du peigne situées en face de cette bande de carton laissent écouler sur le plateau de l'électricité négative, qui neutralise l'électricité positive.

La *machine de Wimshurst* est aussi une machine à influence (fig. 492). Elle comporte deux plateaux qui tournent verticalement en sens inverse l'un de l'autre. Chacun d'eux porte une série de petites bandes de papier d'étain qui servent d'armature, et qu'on charge avant de faire fonctionner la machine au moyen d'une baguette de verre ou d'un électrophore. Chacun des plateaux frotte un système de deux petits balais qui remplacent les peignes de la machine de Holtz. Ces balais communiquent avec les collecteurs et se chargent constamment, au contact des petites bandes d'étain.

CHAPITRE IV

POTENTIEL.

Si un conducteur A est mis en communication *lointaine* avec un électroscope E (fig. 493) afin d'éviter les phénomènes d'influence, on constate que la divergence des feuilles d'or reste constante, quel que soit le

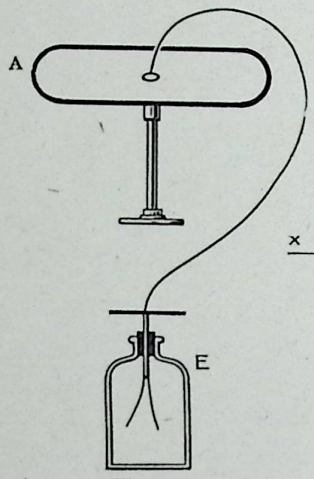


Fig. 493

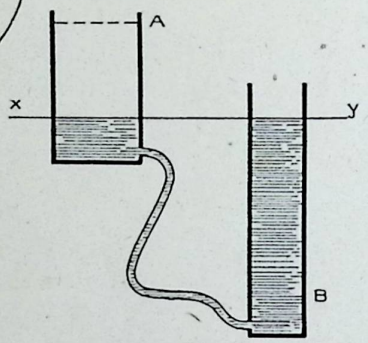


Fig. 494

point touché du conducteur (surface ou même intérieur) malgré que la densité électrique ne soit pas la même en chacun de ces points.

Si la charge devient 2, 3, *n* fois plus grande, l'angle de divergence des feuilles devient 2, 3, *n* fois plus grand.

Enfin, si on approche de A un corps électrisé, l'écartement varie.

On peut donc conclure que l'indication de l'électroscope est indépendante du signe et de la densité aux points touchés, mais qu'elle est proportionnelle à la charge totale du conducteur et qu'elle dépend des corps électrisés voisins.

L'indication de l'électroscope mesure ce qu'on appelle *le potentiel du conducteur* tout comme le thermomètre nous renseigne sur l'état calorifique d'un corps.

On prend comme potentiel o, celui du sol qui donne un écart nul. On appellera potentiel 2, 3, *n* ceux qui communiquent aux feuilles d'or des écarts 2, 3, *n* fois égaux à celui qui aura été choisi comme unité.

Le potentiel est + ou — selon que la charge du conducteur est + ou —.

Dans le cas où deux corps à des potentiels différents sont mis en communication, il y a *mouvement d'électricité de celui qui est au potentiel le plus élevé sur celui qui est au potentiel le moins élevé* et la différence de potentiel agit comme une force appelée *force électromotrice.*

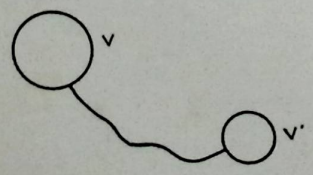


Fig. 495

La transmission de l'électricité d'un corps à l'autre est analogue à l'écoulement d'un liquide entre deux vases situés à des niveaux différents (fig. 494). De même que l'eau s'écoule de A en B jusqu'à ce que les deux niveaux soient sur le même plan horizontal, l'électricité passe d'un corps sur l'autre jusqu'à ce que le niveau électrique des deux corps soit le même.

Travail électrique. — De même qu'une masse d'eau peut produire un travail égal au produit de son poids par la hauteur de chute, une masse *m* d'électricité en effectuant une chute de potentiel (fig. 495,) V — V′ produit un travail :

$$T = k\,m\,(V - V')$$

k est une constante qui dépend de l'unité choisie.

Si *m* = l'unité de quantité électrique pour que T = 1 il faut V — V′ = 1.

Unité pratique de différence de potentiels. — *C'est la chute de potentiel pour laquelle un coulomb effectue le travail de un joule. C'est le volt.*

L'unité C G S *est le potentiel d'une sphère conductrice de rayon* 1 cm. *chargée de l'unité positive de quantité d'électricité.* Si *m* est la masse électrique d'une sphère de rayon R et V son potentiel, on a *m* = V R.

Pour mesurer le potentiel, on fait usage de l'électromètre de Thomson (Lord Kelvin).

Electromètre absolu de lord Kelvin (condensateur plan). — Lord Kelvin appliqua le premier l'attraction produite entre les deux plateaux d'un condensateur plan à la mesure du potentiel. Nous donnons (fig. 496) l'aspect d'un modèle simplifié de l'appareil de lord Kelvin réalisé par MM. Abraham et Lemoine. Ce dispositif, de construction simple, permet la mesure de potentiels compris entre 1.000 et 100.000 volts.

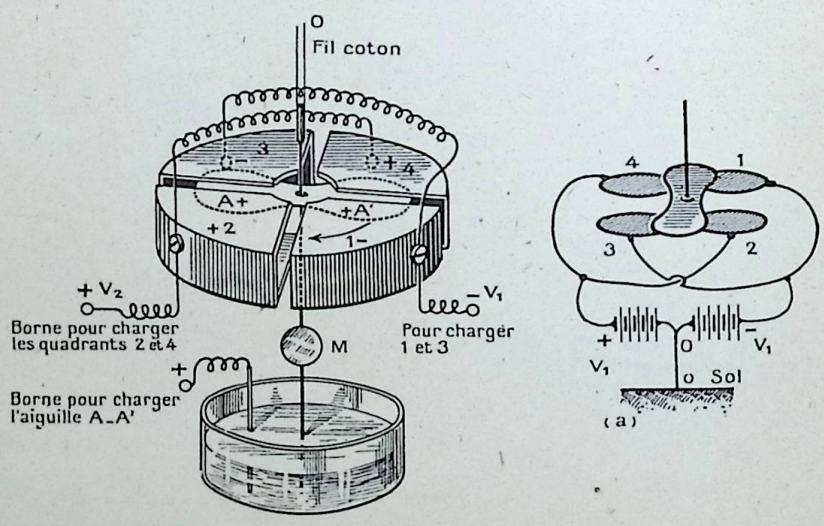


Fig. 496

Une aiguille d'aluminium A en forme de 8 est suspendue à l'intérieur d'une boîte métallique plate circulaire divisée en quatre secteurs. On déduit le potentiel V de l'aiguille de la déviation δ que lui impriment les actions de secteurs diamétralement réunis en deux groupes; secteurs 1 et 3 portés au potentiel connu V_1; secteurs 2 et 4 portés au potentiel connu V_2. Si l'on choisit $V_1 = -V_2$ *(a)*, la déviation δ est proportionnelle au potentiel de l'aiguille.

CHAPITRE V

CAPACITÉ

Si la charge m d'électricité d'un conducteur devient 2, 3, n fois plus grande, l'expérience montre que le potentiel devient lui-même 2, 3, n fois plus grand.

On peut donc écrire que

$$\frac{m}{V} = C$$

Cette constante C est appelée *capacité d'un conducteur*

$$\frac{m}{V} = C$$

peut s'écrire

$$m = VC$$

si $m = 1$ $V = 1$ C devient égal à 1.

d'où : *l'unité de capacité électrique d'un conducteur est la quantité d'électricité qu'il faut lui fournir pour élever son potentiel de une unité.*

On l'appelle **farad.**

C'est la capacité d'une sphère à laquelle 1 coulomb communique un potentiel de 1 volt

$$1 \text{ Farad} = \frac{3 \times 10^9}{1/300} = 3^2 \times 10^{11} \text{ C G S.}$$

C'est une unité beaucoup trop grande, on lui substitue le microfarad qui vaut

$$\frac{1}{1\,000\,000} \text{ farad}$$

Remarques — I. La capacité d'un conducteur n'est pas une quantité intrinsèque de ce conducteur ; l'expérience montre qu'elle dépend non seulement du *volume.* et de la *forme du conducteur, mais aussi des conducteurs voisins et du milieu qui les sépare.*

II. Nous avons vu que si m est la charge d'une sphère de rayon R au potentiel V on a

$$m = VR$$

D'autre part $m = VC$

on a donc $C = R$

La capacité d'une sphère est mesurée par le même nombre que son rayon (1 cm. équivaut à 1 C G S.)

La capacité de la terre est donc de

636 600 000 cm ou 636 600 000 C G S.

ou $$\frac{636\,600\,000}{9 \times 10^{11}} = 708 \text{ microfarad}$$

III. Si deux conducteurs de charges m et m', de capacité C et C′ et de potentiels V et V′ sont réunis par un fil conducteur (fig. 497), ils ne forment plus qu'un seul conducteur de charge $m + m'$ de capacité C + C′ et de potentiel M tel que

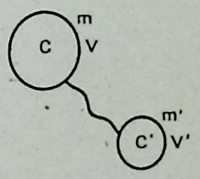


Fig. 497

$$m + m' = M(C + C')$$

d'où $$M = \frac{m + m'}{C + C'} = \frac{VC + V'C'}{C + C'}$$

Autrement dit en généralisant :

$$M = \frac{\Sigma VC}{\Sigma C}$$

CHAPITRE VI

CONDENSATION ÉLECTRIQUE

Mettons en communication une sphère conductrice A isolée avec le pôle positif d'une machine électrique, elle acquiert une charge M qui dépend de sa capacité C, et du potentiel V de la source électrique (fig. 498)

(1) $M = VC$

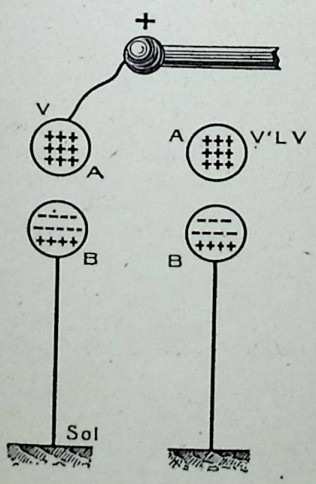


Fig. 498

Cette charge étant acquise, A ne peut plus acquérir d'électricité.

Supprimons alors la communication de A avec la source et approchons de A une autre sphère conductrice B en communication avec le sol, nous constatons que le potentiel de A diminue et devient égal à V′.

Rétablissons la communication de A avec la source d'électricité, nous constatons qu'une nouvelle quantité d'électricité passe sur A pour ramener le potentiel V′ à V.

La charge de A est alors,

(2) $M' = VC'$

Divisons membre à membre (1) et (2) :

il vient : $$\frac{M'}{M} = \frac{V'C'}{VC} = \frac{C'}{C} = F$$

F *s'appelle force condensante.*

Cette expérience a servi de base à la construction des condensateurs électriques.

Condensateurs électriques. — *Un condensateur électrique est un système formé de deux conducteurs permettant de déposer sur l'un d'eux une charge d'électricité plus grande que s'il était seul,* autrement dit de communiquer à l'un d'eux une capacité plus grande que s'il était seul.

Le conducteur A s'appelle *collecteur,* l'autre B, *condenseur* et les deux, *armature.*

Principaux condensateurs. — 1° *Condensateur sphérique* (fig. 499). Le collecteur est une sphère conductrice de rayon R, le condenseur une autre sphère concentrique de rayon R′ > R.

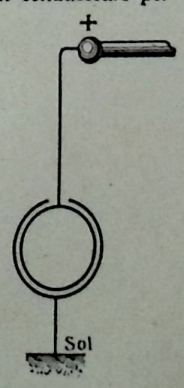


Fig. 499

Le calcul montre et l'expérience vérifie que la capacité d'un tel condensateur est

$$C = \frac{S}{4\pi e}$$

S étant la surface du collecteur et *e* la distance entre le collecteur et le condenseur.

Remarque I. — Cette formule montre que C est d'autant plus grande que S est plus grande et *e* plus faible.

II. — Cette formule est également applicable à *tout condensateur dans lequel les deux armatures sont parallèles et voisines.*

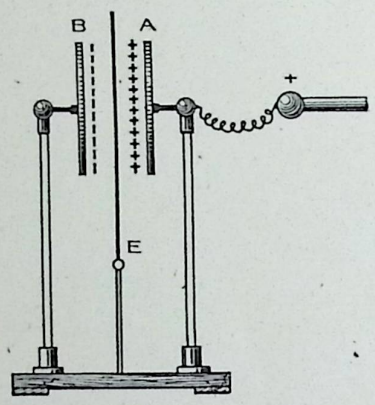


Fig. 500

2° *Condensateur d'Œpinus* (fig. 500). — Il est formé de deux plateaux métalliques A et B soutenus par deux pieds isolants pouvant être déplacés à volonté le long d'une règle graduée.

Remarque. — Si on approche B très près de A afin de rendre *e* plus petit, la force attractive qui s'exerce de A sur B devient si forte qu'une étincelle peut jaillir et décharger en partie le condensateur ; afin de remédier à cet inconvénient on intercale entre A et B une lame isolante E en verre généralement.

Cette lame isolante a aussi pour effet d'augmenter la capacité du condensateur qui devient :

$$C = k\frac{S}{4\pi e}$$

k étant un nombre qui dépend de la nature du *diélectrique.*

Pour le soufre $k = 2$; pour le verre $k = 5$.

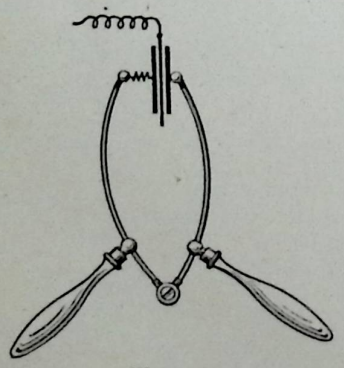


Fig. 501

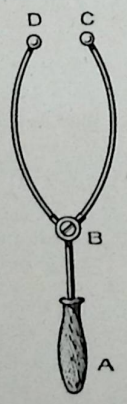


Fig. 502

Décharge. — Elle est instantanée ou lente.

La *décharge instantanée* se fait avec l'*excitateur universel*, c'est une sorte de compas à deux branches en laiton terminées chacune par une boule en laiton et munies d'un manche isolant (fig. 501). On place le condensateur sur un plateau isolant, puis on touche le collecteur A avec une boule et on approche l'autre du condenseur B, une étincelle jaillit qui neutralise deux quantités équivalentes d'électricité ; il reste alors sur B l'excès de la charge B sur A.

Si le condensateur est muni d'une lame isolante, on constate qu'on peut alors tirer une série d'étincelles plus petites dites *étincelles de résidu.*

Décharge lente. —Elle se fait en approchant successivement le doigt de A, puis de B, on obtient ainsi chaque fois une petite étincelle qui enlève une fraction de la charge de A et de B. Théoriquement on doit pouvoir tirer ainsi un nombre infini d'étincelles, pratiquement quelques contacts suffisent (fig. 502).

Bouteille de Leyde. — Une curieuse expérience de décharges successives a été inaugurée par Franklin ; elle consiste à mettre en communication l'armature extérieure d'une bouteille de Leyde avec un timbre supporté par une colonne verticale. L'armature intérieure est en communication avec un autre timbre et, entre les deux, est suspendu un pendule terminé par une petite sphère conductrice isolée. Cette sphère est attirée par l'un des timbres, se charge d'électricité à son contact, et subit aussitôt une répulsion. Elle se précipite alors sur l'autre timbre au contact duquel elle se charge d'électricité contraire, revient vers le premier timbre, et ainsi de suite. *Ces allées et venues produisent un carillon qui cesse lorsque la charge de la bouteille est épuisée.*

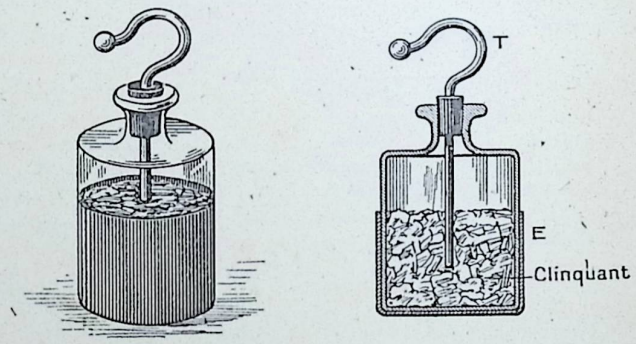


Fig. 503

C'est une bouteille en verre mince munie d'un goulot étroit. A l'intérieur sont des feuilles d'or ou de clinquant dans lesquelles plonge une tige T en laiton recourbée extérieurement et terminée par un bouton (fig. 503). Cette tige est fixée au goulot par un bouchon isolant. Le fond et les deux tiers environ de la surface externe sont recouverts d'une feuille d'étain E. Enfin l'espace compris entre la feuille d'étain et le goulot est recouvert d'un vernis.

La tige de laiton et le clinquant forment le collecteur, le condenseur est constitué par la feuille d'étain. Pour charger la bouteille de Leyde, on tient à la main l'armature externe afin d'établir la communication avec le sol, puis on touche avec le bouton le pôle d'une machine électrique.

La décharge instantanée ou lente s'opère de la même façon que pour le condensateur d'Œpinus.

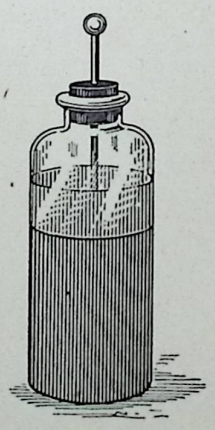


Fig. 504

Jarre. — Une jarre est une bouteille de Leyde de grande dimension obtenue en employant un bocal de verre dont les deux surfaces interne et externe sont tapissées de feuilles d'étain (fig. 504). La tige de cuivre est droite, terminée extérieurement par un bouton et intérieurement par

une chaîne métallique qui assure la relation de la boule avec l'armature interne.

Association des condensateurs. — Si on réunit les armatures externes de plusieurs jarres placées dans une caisse en bois tapissée par une feuille d'étain, on constitue une *batterie* dont la capacité est $C = n\,c$ c'est-à-dire égale au produit de la capacité d'un condensateur par le nombre de condensateurs, mais le potentiel n'est pas plus élevé qu'avec une seule bouteille.

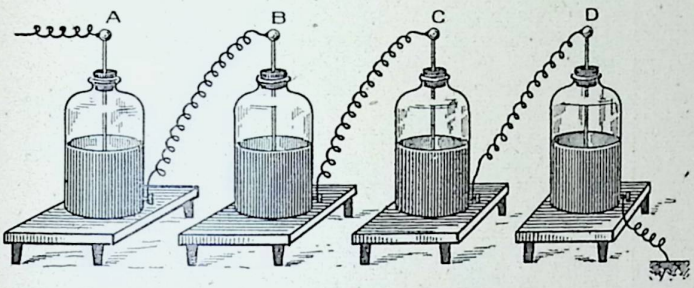


Fig. 505

Cette association est dite encore *association en surface.*

Si on range l'une à la suite de l'autre une série de bouteilles de Leyde, placées sur des supports isolants, et qu'on relie l'armature extérieure de l'une à l'armature intérieure de la suivante, qu'on mette la première en communication avec la machine, et la dernière en communication avec la terre, l'ensemble permet d'atteindre un potentiel plus élevé qu'avec une seule bouteille de Leyde et proportionnel au nombre des éléments. *C'est l'association en série* (fig. 505).

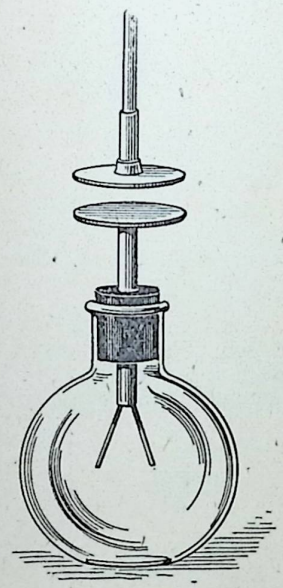


Fig. 506

Electroscope condensateur. — L'électroscope condensateur, inventé par Volta, présente avec l'électroscope que nous avons déjà décrit la seule différence d'être muni, à la partie supérieure de la tige, d'un plateau verni sur lequel on peut poser un second plateau métallique, verni également à sa face inférieure (fig. 506). Quand les deux plateaux sont en contact leur ensemble constitue un condensateur tout à fait comparable au condensateur à lame de verre.

Cet appareil *sert à reconnaître la nature de la charge d'une source électrique dont le potentiel est trop faible pour agir par influence sur un électroscope ordinaire, mais qui possède la propriété de reproduire instantanément l'électricité qu'on lui enlève, de manière à conserver toujours le même potentiel.*

On met la source en communication avec le plateau inférieur de l'électroscope et le plateau supérieur en communication avec le sol. L'électricité fournie par la source s'accumule dans le plateau inférieur, tandis que l'électricité contraire afflue du sol dans le plateau supérieur. Si on supprime les communications avec la source et avec le sol, puis qu'on enlève le plateau supérieur en le saisissant par le manche isolant qui lui est adapté, l'électricité n'est plus retenue par influence dans le plateau inférieur. Elle se répartit également dans le conducteur formé par ce dernier, par la tige et les feuilles de l'électroscope. Aussi les feuilles s'écartent-elles, accusant leur charge. Pour reconnaître la nature de l'électricité fournie par la source, on approche du plateau un corps chargé d'électricité connue.

Problèmes.

1. — Un condensateur, dont le diélectrique a une épaisseur de 1 millimètre a des armatures ayant chacune une surface d'un mètre carré. Sachant que le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique est 4, on demande la capacité en unités pratiques.

Ce condensateur étant chargé au potentiel de 30.000 volts, on demande le travail effectué pendant la décharge.

(Baccalauréat, 1re partie, Caen.)

2. — Deux condensateurs sphériques C D, C' D' ont respectivement pour capacités 0,3 et 0,8 microfarad ; les armatures D et D' sont au sol, les armatures C et C' respectivement chargées au potentiel de 15 et 26 volts.

On demande :

1° les charges de C et C' ;

2° comment se modifient ces charges lorsqu'on relie C à C' par un conducteur de capacité négligeable ;

3° quel potentiel prennent alors C et C'.

(Baccalauréat, 1re partie, Grenoble.)

3. — Une bouteille de Leyde cylindrique, d'un diamètre extérieur de 20 centimètres, est chargée au moyen d'une machine à influence. Les armatures sont constituées par deux feuilles de papier d'étain, collées sur la paroi latérale et sur une hauteur de 30 centimètres ; l'épaisseur du verre est de 1 millimètre, son pouvoir inducteur spécifique est égal à 4.

1° Evaluer en microfarads la capacité de la bouteille, en l'assimilant à un condensateur plan ayant même surface d'armatures (un microfarad est la capacité d'une sphère de 9 km. de rayon).

2° Evaluer en coulombs la charge de la bouteille lorsque la différence de potentiel entre les 2 armatures est de 10.000 volts.

3° Evaluer le nombre de kilogrammètres nécessaires pour actionner la machine à influence pendant la charge de la bouteille jusqu'à 10 volts. On ne tiendra pas compte des déperditions d'électricité, ni du travail absorbé par les frottements.

(Baccalauréat, 2e partie, Montpellier.)

CHAPITRE VII

EFFETS DES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES

Les décharges électriques produisent *des effets mécaniques lumineux et calorifiques.* Quel que soit l'effet produit par la décharge, celle-ci est accompagnée d'une *chute de potentiel* ; c'est-à-dire que les deux corps entre lesquels la décharge se produit tendent à revenir au même niveau électrique.

Les *effets mécaniques* de la décharge électrique peuvent être mis en évidence par l'expérience du perce-verre. On place entre deux pointes conductrices, suffisamment rapprochées l'une de l'autre, une lame de verre ; on met l'une des pointes en communication avec l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde et l'autre avec

l'armature extérieure. Si la charge de la bouteille est suffisante, une *étincelle se produit* entre les deux pointes au travers de la lame de verre qui se *trouve perforée.*

Les *effets calorifiques* sont mis en évidence dans l'expérience du *pistolet de Volta* (fig. 507). Une bouteille de fer, très résistante, D, est fermée avec un bouchon. Dans sa paroi, on a ménagé un trou par lequel pénètre une tige de cuivre terminée par une boule à chacune de ses extrémités A B. Cette tige est isolée de la bouteille par un tube de verre dans lequel elle est mastiquée. On remplit la bouteille d'une partie d'hydrogène pour deux d'oxygène. Le flacon étant bouché, on le pose sur une surface conductrice en communication avec le sol, et on met la boule A en communication avec le collecteur d'une machine électrique, ou avec l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde. Une étincelle jaillit entre la boule B et la paroi D. Elle détermine la combinaison instantanée de l'hydrogène et de l'oxygène. La vapeur d'eau formée, portée à une haute température par la chaleur de combinaison, possède une tension suffisante pour faire sauter le bouchon du flacon avec un bruit de détonation.

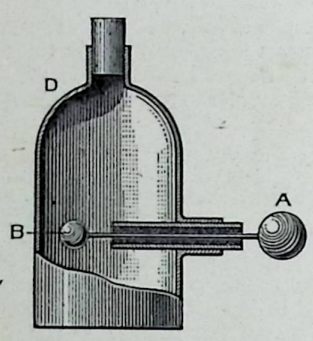


Fig. 507

On peut faire aussi passer une étincelle à travers un *fil métallique très fin.* Si la décharge est assez puissante, *le fil fond*, il peut même être volatilisé.

Les *effets lumineux des décharges* sont les plus faciles à observer. Quand un collecteur acquiert une charge assez élevée, on voit, si on l'observe dans l'obscurité, son extrémité dégager une *aigrette lumineuse* qui est due à la décharge de ce conducteur au contact des poussières de l'air (fig. 508). Si on rapproche les boules des deux collecteurs d'une machine électrique, *une étincelle jaillit* entre eux, elle est *rectiligne* à une faible distance, mais elle est en *zigzag* si les conducteurs sont assez éloignés. Dans ce dernier cas, l'étincelle électrique se propage en effet de proche en proche à la faveur des poussières de l'atmosphère en suivant, non pas le plus court chemin, mais la ligne de moindre résistance (fig. 509 et 510).

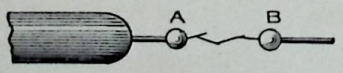


Fig. 508

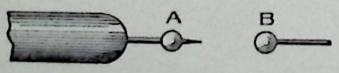


Fig. 509

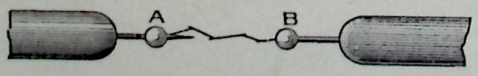


Fig. 510

Les décharges électriques produites dans l'air raréfié ou dans un gaz raréfié quelconque produisent des effets lumineux caractéristiques très curieux. On opère ces décharges dans un appareil connu sous le nom *d'œuf électrique* (figure 511). Celui-ci se compose d'un vase de verre ovoïde, fermé à ses deux extrémités par des montures métalliques. Celles-ci sont traversées par des tiges conductrices terminées par des boules, entre lesquelles doit jaillir l'étincelle. En outre, l'une des montures porte un robinet et peut être adaptée à une machine pneumatique.

On fait le vide partiel dans l'œuf ; si alors on fait passer l'étincelle, on constate que celle-ci affecte l'apparence de lueurs diffuses en forme de fuseaux. La couleur de cette lumière ne dépend que du gaz soumis à l'expérience.

Les décharges électriques ont aussi *des effets chimiques*; nous en verrons maint exemple en chimie.

Enfin, elles ont *des effets physiologiques.* Si on prend une bouteille de Leyde par son armature extérieure, et qu'on approche l'autre main de l'armature intérieure, la décharge électrique se produit à travers le corps et cause une commotion plus ou moins violente.

Si l'on fait monter une personne sur un tabouret isolant (fig. 512), on peut la charger d'électricité à l'aide d'une machine, son corps fonctionnant comme un véritable condensateur. Si cette personne pose ensuite le pied par terre, elle se décharge au contact du sol et éprouve une violente commotion qui peut même être dangereuse, si l'on a trop poussé la charge.

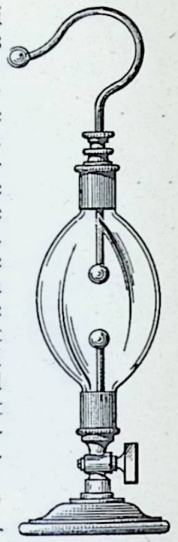


Fig. 511

Electricité atmosphérique. — L'expérience montre que l'atmosphère est *toujours chargée d'électricité* quel que soit l'état du ciel. On peut le constater au moyen de l'*électroscope de Saussure.* C'est un électroscope dans lequel le plateau est remplacé par une tige longue et effilée et les deux feuilles d'or par deux fils de platine munis chacun d'une balle de sureau se déplaçant le long d'un arc gradué. Un disque D protège l'appareil de la pluie (fig. 513).

En étudiant ainsi le potentiel de l'atmosphère on constate que par *temps calme*, elle est chargée d'*électricité positive* et que le potentiel *croît* avec l'*altitude* d'autant plus vite que l'air est *plus sec.* Cet accroissement est à peu près proportionnel à la hauteur et peut varier de 10 à 1000 *volts par mètre.* En temps de pluie cet accroissement est faible et par temps d'orage l'électricité atmosphérique est tantôt *positive et* tantôt *négative.*

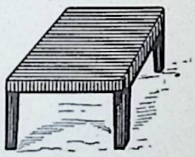


Fig. 512

Electrisation des nuages. — L'atmosphère etant chargée d'électricité positive, on conçoit aisément que les nuages soient chargés d'électricité positive ; reste donc à expliquer la *formation des nuages chargés d'électricité négative.*

Lorsqu'un nuage B faiblement chargé d'électricité + ou neutre vient à passer à proximité d'un autre A chargé d'électricité + ; par influence, il se charge d'électricité — dans la portion (*a*) et d'électricité + dans la portion (*b*). Si donc ce nuage vient à entrer en communication avec le sol par le contact d'une montagne ou d'un arbre, l'électricité + s'écoule dans le sol et le nuage A venant à s'éloigner, B reste chargé d'électricité — (fig. 514).

Foudre, Eclair, Tonnerre. — Quand deux nuages chargés l'un d'électricité + l'autre d'électricité — s'approchent l'un de l'autre, une *étincelle* peut éclater, *c'est l'éclair*, la *décharge* s'appelle *la foudre* et *le bruit* qui l'accompagne *le tonnerre.*

Si l'éclair se produit entre un nuage et la terre (un point saillant généralement) on dit que la *foudre tombe.*

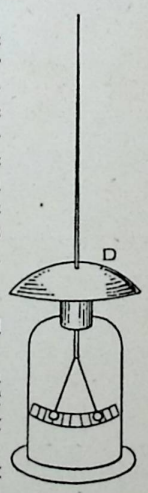


Fig. 513

La durée d'un éclair est très faible $\frac{1}{1000}$ de seconde environ, sa longueur peut être de 15 et 20 kilomètres.

La figure 515 montre qu'un éclair se compose d'un sillon lumineux principal accompagné d'un très grand nombre de ramifications.

Le bruit (ou tonnerre) *se produit généralement un peu après la production de l'éclair*, c'est qu'en effet si nous désignons par *e* l'espace qui nous sépare du nuage ou des nuages on a

$$e = 340 \text{ m.} \times t$$

t étant le nombre de secondes qui s'écoulent entre l'éclair et le tonnerre.

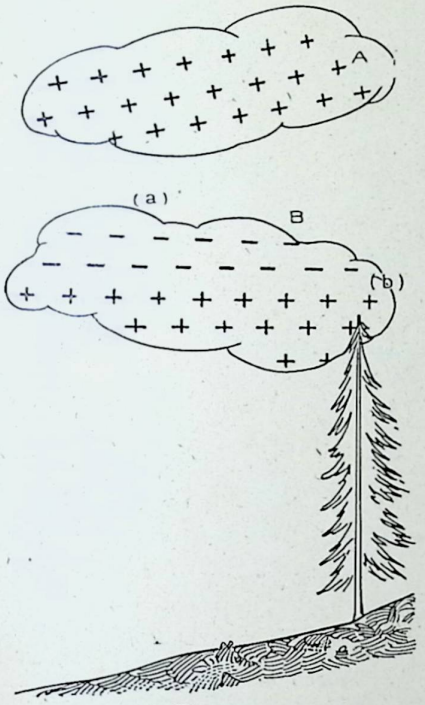


Fig. 514

Le *roulement du tonnerre* est dû à ce que l'éclair mettant en vibration les couches d'air sur un espace de plusieurs kilomètres le son ne nous parvient pas instantanément, mais pendant plusieurs secondes.

Franklin a démontré le premier, la nature électrique de la foudre. C'est en effet sur les indications de Franklin, que Dalibard fit, en France, les premières expériences à ce sujet. Il avait fait élever une tige de fer pointue, de quarante pieds de haut et fixée sur un support isolant Des nuages orageux étant passés au-dessus de la tige il put tirer de la partie inférieure de celle-ci de puissantes étincelles.

Franklin lui-même fit, en Amérique, une expérience analogue au moyen d'un cerf-volant muni d'une pointe métallique. Il put tirer de la corde de longues étincelles et faire diverses expériences concluantes.

Les effets produits par la foudre sont de même nature que ceux qu'on peut réaliser avec les machines électriques, mais ils sont beaucoup plus intenses. C'est ainsi que, si la foudre éclate entre les nuages et les maisons ou les arbres, ceux-ci sont démolis, brisés ou incendiés. Les animaux ou les hommes subissent de violentes commotions qui amènent souvent la mort. Il arrive *même qu'un animal que la foudre n'a pas atteint soit tué néanmoins*. Ce phénomène s'explique de la manière suivante :

Soit un nuage chargé d'électricité positive : la surface du sol, qui se trouve au-dessous, subit de la part de ce nuage, un phénomène d'influence qui a pour effet de produire de l'électricité négative sur le sol. Les objets et les animaux placés à la surface de la terre se chargent aussi d'électricité négative. Supposons maintenant que la foudre éclate soit entre le nuage et un autre, soit entre le nuage et la terre. L'atmosphère et le sol reviennent instantanément à l'état neutre et les animaux, en contact avec la terre, éprouvent un brusque changement de potentiel qui peut être aussi violent qu s'ils avaient été directement atteints. Ce *phénomène est connu sous le nom de choc en retour*.

Paratonnerres. — Nous avons déjà dit que l'électricité s'écoule par les pointes : nous avons vu l'usage qu'on fait des pointes dans les machines électriques. Lorsque le plateau d'une machine électrique passe devant le peigne collecteur, celui-ci déverse de l'électricité qui neutralise celle qui s'était formée sur le plateau.

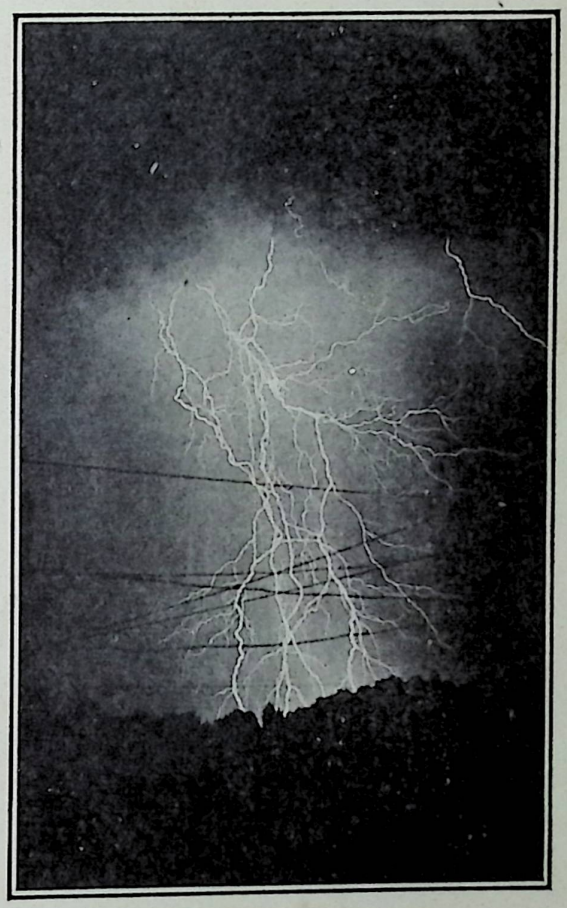


Fig. 515 — Photographie d'éclair pendant un orage violent (Photo F. Quénisset. Observatoire Flammarion de Juvisy)

C'est sur ce phénomène de la déperdition par les pointes et de la neutralisation qui en résulte qu'est fondée la construction des paratonnerres.

Cette invention est due à *Franklin*. Un paratonnerre se compose essentiellement d'une longue tige de fer terminée par une pointe de cuivre doré (fig. 516). Cette tige de fer est mise en relation avec le sol par l'intermédiaire d'un câble ou d'une tringle de fer qui descend le long des murs de l'édifice et se termine dans la terre par de larges surfaces métalliques plongeant dans une *nappe d'eau* (fig. 517). Le paratonnerre lui-même et son câble conducteur sont mis en relation avec les grosses pièces métalliques de la charpente de l'édifice. Dans ces conditions, on voit que, si un nuage chargé d'électricité passe au-dessus de l'édifice, l'électricité du sol s'échappe par la pointe du paratonnerre pour neutraliser celle du nuage. Il

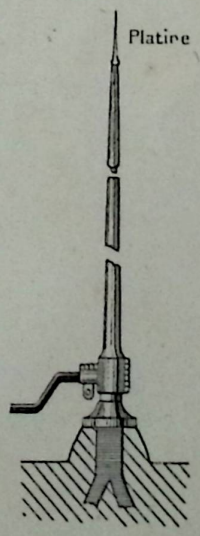


Fig. 516

s'ensuit qu'un édifice muni de paratonnerre est très rarement frappé par la foudre. Il arrive quelquefois, cependant, que l'électricité terrestre sollicitée par un nuage très chargé, ne puisse s'écouler assez vite par la pointe du paratonnerre. Dans ce cas, la foudre tombe sur l'édifice. Mais alors elle frappe le paratonnerre qui

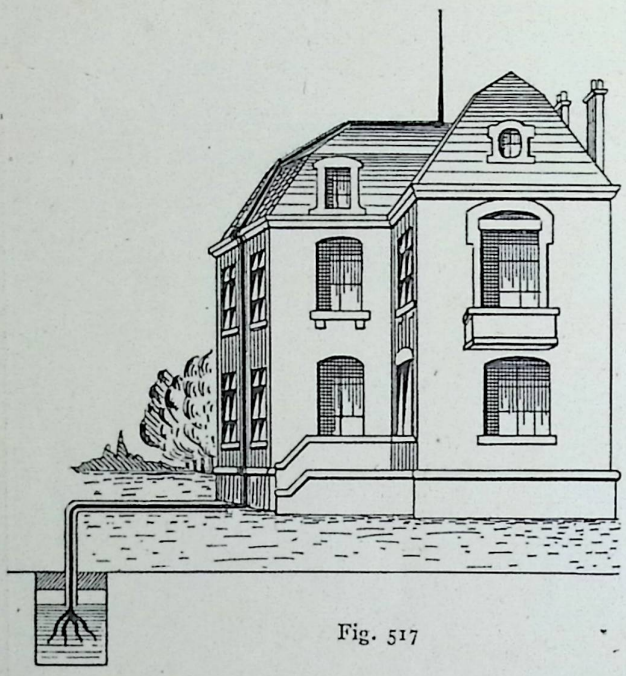


Fig. 517

la conduit dans le sol. La pointe du paratonnerre est alors généralement fondue, et il est nécessaire de la remplacer.

Il est bien entendu que le câble conducteur doit aboutir dans un terrain où l'écoulement de l'électricité peut se faire indéfiniment. Le dispositif qui convient le mieux, c'est, nous l'avons dit, celui où le conducteur plonge dans une nappe d'eau. Mais il faut que cette nappe soit en communication avec tout le terrain avoisinant ; il ne faudrait pas se contenter, par exemple, de faire aboutir le paratonnerre dans une citerne aux parois imperméables, car on aurait créé un véritable condensateur qui serait beaucoup plus dangereux qu'efficace ; *un paratonnerre mal établi est beaucoup plus nuisible qu'utile.*

Paratonnerre de Melsens. — Ce *paratonnerre utilise les propriétés des écrans électriques. Une enceinte métallique alors même qu'elle n'est pas continue, soustrait les corps qu'elle renferme à toute influence électrique.*

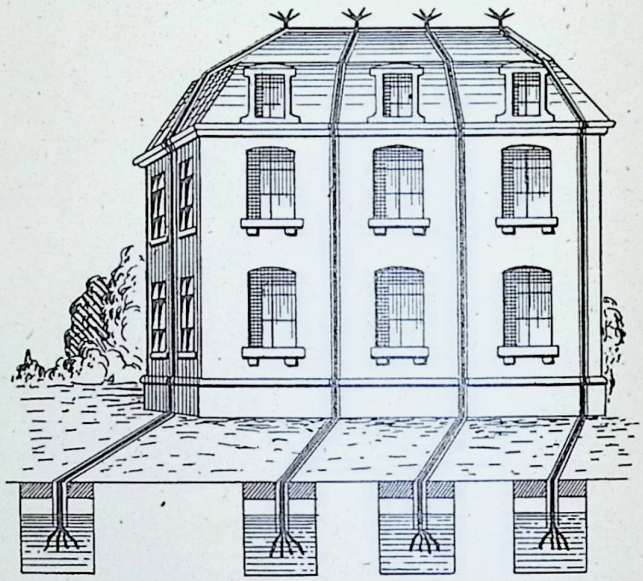


Fig. 518

Si donc, on enserre un édifice dans une sorte de cage formée de conducteurs métalliques comme l'indique la figure 518, à condition que cette cage soit en communication avec le sol, cet édifice sera protégé de la foudre.

En munissant de faisceaux de pointes métalliques les intersections des conducteurs de la cage, on permet l'écoulement des charges électriques développées par influence.

Comme pour le paratonnerre de Franklin *il sera prudent de relier toutes les masses métalliques de l'édifice à la cage.*

CHAPITRE VIII

ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE

ÉTUDE DU COURANT ÉLECTRIQUE

LOI D'OHM

Courant électrique continu. — Si l'on réunit par un fil conducteur 2 corps à des potentiels v et v' tels que $v > v'$ (fig. 519) nous avons vu que l'électricité s'écoule de v sur v'; *si par un procédé quelconque on maintient constant les potentiels v et v'* le mouvement d'électricité est continu ; on dit que le fil est alors parcouru par un *courant électrique continu.*

On appelle générateurs des appareils capables de fournir de tels courants (une pile, une dynamo, une machine de Wimshurst sont des générateurs).

Arbitrairement on convient d'*appeler sens du courant le sens dans lequel circule l'électricité positive* c'est-à-dire le sens dans lequel il faut se déplacer pour aller du *potentiel le plus* élevé au *potentiel le moins élevé.*

Propriétés du courant électrique. — Le courant électrique est assimilable à un courant d'eau dans un tuyau réunissant deux vases à des niveaux différents, le fil conducteur remplace le tuyau. Un tel courant est caractérisé par

1° *son débit,*
2° *la différence des niveaux,*
3° *la résistance qu'oppose le tuyau à l'écoulement de l'eau.*

De même le courant électrique est caractérisé par :

1° *Son intensité ou débit ;*
2° *la différence de potentiel aux extrémités du conducteur ;*
3° *la résistance du fil conducteur.*

Intensité ou débit. — *C'est la quantité d'électricité qui traverse la section d'un conducteur en une seconde, elle s'évalue en ampères.*

L'ampère est l'intensité d'un courant qui débite un coulomb à la seconde.

Exemple. — Si un courant débite 30 coulombs en 6 secondes l'intensité sera :

$$I = \frac{30}{6} = 5 \text{ ampères}$$

Dans l'industrie on fait usage de l'*ampère-heure* (Ah). C'est la *quantité d'électricité débitée par un courant de 1 ampère pendant 1 heure* :

$$1 \text{ Ah} = 3.600 \text{ coulombs}$$

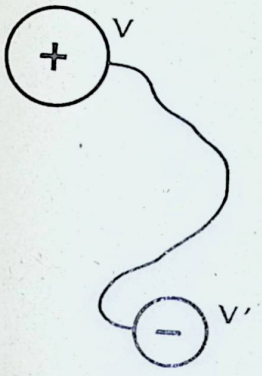


Fig. 519

Différence de Potentiel. La différence de potentiel aux extrémités d'un conducteur se nomme aussi *force électromotrice* et s'évalue en volts.

Nous pourrions démontrer qu'elle varie d'un point d'un conducteur à un autre, mais les générateurs de courant électrique étant généralement à des potentiels constants, nous étudierons les variations de l'intensité et nous pourrons en déduire celles de la différence de potentiel d'après la *loi d'Ohm*.

Loi d'Ohm. — Résistance d'un conducteur. — Prenons un générateur capable de nous fournir un courant électrique de force électromotrice E constante, par exemple un accumulateur de 4 volts et de capacité 20 Ah, c'est-à-dire comme nous le verrons plus loin un appareil renfermant 20 × 3.600 coulombs que nous pourrons faire écouler à volonté sous une chute de potentiel de 4 volts. Réunissons les 2 bornes de l'accumulateur par un fil conducteur *long et fin* et proposons-nous d'étudier les *variations de l'intensité* du courant qui le traverse. A cette fin nous nous servirons d'un *ampèremètre* intercalé sur le circuit ainsi formé (fig. 520).

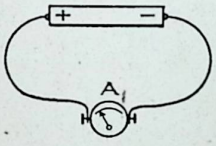


Fig. 520

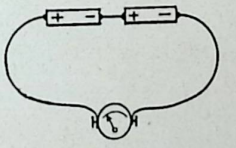


Fig. 521

Influence de E. — Supposons que l'ampèremètre indique dans ces conditions 2 ampères, faisons varier la force électromotrice E en ajoutant un autre accumulateur semblable au premier et monté en *série*, c'est-à-dire en *réunissant le pôle — du premier avec le pôle +* de l'autre (fig. 521), nous étudierons plus loin que dans ce cas la force électromotrice devient 2 *E*, l'ampèremètre montre qu'alors l'intensité du courant devient 4 *ampères*, c'est-à-dire le double de ce qu'elle était.

Première loi d'Ohm. — *Il existe donc un rapport constant entre la force électromotrice* E *d'un conducteur et l'intensité* I *du courant qui en résulte dans ce conducteur* :

$$\frac{E}{I} = C^{te} = R$$

Cette constante est ce que nous appelons *résistance d'un conducteur*.

La résistance R *d'un conducteur est le rapport constant qui existe entre la différence de potentiel aux extrémités du conducteur, autrement dit la force électromotrice et l'intensité du courant qui en résulte* :

$$\frac{E}{I} = R$$

ou

$$E = I R$$

La résistance d'un conducteur filiforme dépend de sa *longueur l*, de sa *section s* et de sa *nature*.

Influence de *l*. — Réunissons successivement les deux bornes de l'accumulateur précédent par 3 fils de cuivre de longueur *l*, 2 *l*, 4 *l* et de section *s*, l'ampèremètre indiquera successivement 2 ampères, 1 ampère, $^1/_2$ ampère (fig. 522). Nous pouvons donc conclure que l'intensité du *courant qui traverse un conducteur est inversement proportionnelle à la longueur de ce conducteur.*

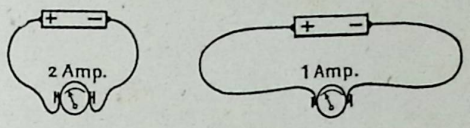


Fig. 522

Influence de *s*. — Remplaçons maintenant successivement le fil de cuivre de longueur *l* et de section *s* par 2 fils de même nature et de même longueur mais de section 2 *s*, 4 *s*, les indications de l'ampèremètre seront 2 ampères, 4 ampères, 8 ampères.

Autrement dit :

L'intensité du courant qui traverse un conducteur est proportionnelle à la section de ce conducteur.

Influence de la nature du conducteur. — Remplaçons enfin le fil de cuivre de longueur *l* et de section *s* par un fil de fer puis par un fil de maillechort de même longueur et de même section que le fil de cuivre. Les indications successives de l'ampèremètre seront 2 ampère, 0 amp. 3, 0 amp. 1.

L'intensité du courant qui traverse un conducteur varie donc avec la nature de ce conducteur.

On peut donc écrire que l'intensité d'un courant qui traverse un conducteur est donnée par la formule :

$$I = \frac{K E s}{l}$$

K étant une constante qui dépend de la nature de ce conducteur et qu'on appelle *coefficient de conductibilité*.

Si on pose $K = \frac{1}{\rho}$ on peut mettre cette formule sous la forme :

$$I = \frac{E}{\frac{\rho l}{s}}$$

et par analogie avec la formule de la loi d'Ohm :

$$I = \frac{E}{R}$$

on a

$$R = \frac{\rho l}{s}$$

si nous faisons l = 1 centimètre et *s* = 1 centimètre carré on a R = ρ.

ρ est la résistance d'un fil de 1 centimètre de longueur et de 1 centimètre carré de section, on l'appelle résistivité du conducteur.

Deuxième loi d'Ohm. — *La résistance électrique d'un conducteur est proportionnelle à sa longueur l, inversement proportionnelle à sa section s et proportionnelle à sa résistance.*

La résistance et par suite la résistivité s'exprime en *ohms*. Dans la formule E = I R faisons E = 1 volt, I = 1 ampère, il vient R = 1 ohm.

Unité de résistance. — *L'unité de résistance ou ohm* (ω) *est la résistance d'un conducteur qui présentant à ses extrémités une différence de potentiel de 1 volt est traversé par un courant d'intensité 1 ampère.*

Pratiquement l'*ohm est la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de* 106 cm. 3 de longueur à 0°.

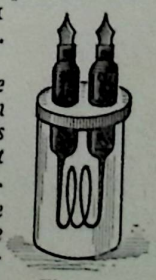


Fig. 523

L'ohm est déposé au Musée International, on le trouve dans le commerce sous la forme d'un *tube recourbé* (fig. 523).

On se sert aussi du microhm qui vaut :

$$\frac{1}{10^6}\ \text{ohm}$$

Remarque. — 1° L'expérience montre que la *résistivité* et par suite la résistance d'un conducteur varie avec la *température* :

$$\text{à}\quad t^\circ\ \rho_t = \rho_0\,(1 + at)$$
$$R_t = R_0\,(1 + at)$$

a étant le coefficient de température.

L'équation $E = I\,R$ nous permet de définir le volt. *Le volt est la différence de potentiel aux extrémités d'un conducteur de résistance 1 ohm traversé par un courant de 1 ampère.*

RÉSISTIVITÉ DES PRINCIPAUX CORPS

NATURE DES CORPS	ρ en μω	Coefficient de température *a*
Cuivre	1,6	0,0043
Aluminium	2,36	0,0043
Platine	9	0,0025
Fer	9,06	0,00625
Maillechort (Cu, Zn, Ni)	20 à 40	0,0003
Constantan (Cu, Ni)	50	négligeable
Manganine (Cu, Ni, Mn)	46	—
Solution de $SO^4\,H^2$ au $\frac{1}{10}$	1 ω,1	—0,015
Verre	$9 \times 10^{13}\omega$	»
Caoutchouc	$7 \times 10^{15}\omega$	»

Groupement de conducteurs. — Courants dérivés. — Rhéostats. — *Conducteurs montés en série.* — Si plusieurs conducteurs de résistance r, r_1, r_2, sont placés bout à bout (fig. 524), c'est-à-dire en série, ils sont traversés par le même courant et la résistance de l'ensemble du conducteur est :

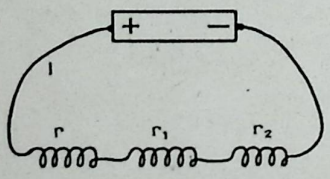


Fig. 524

$$R = r + r_1 + r_2$$

Conducteurs montés en dérivation. — Quand entre deux points A et B d'un conducteur on place plusieurs conducteurs de résistance r, r_1, r_2 on dit que ces conducteurs sont *montés en dérivation* (fig. 525).

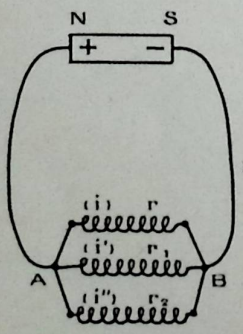


Fig. 525

Ces conducteurs sont alors parcourus par des courants qu'on appelle *courants dérivés* d'intensité i, i', i''. Comme il ne peut y avoir nulle part accumulation d'électricité sur le parcours N A B S, il est *évident que l'intensité* I *du courant principal est égale à la somme des intensités des courants dérivés.* C'est en effet ce que l'expérience vérifie,

on a $\quad I = i + i' + i''$

D'autre part la différence de potentiel entre A et B étant constante et égale à E :

$$E = ir = i'r' = i''r''$$

Autrement dit : *Les intensités des courants divisés sont inversement proportionnelles aux résistances des dérivations.*

Mais cette équation peut s'écrire aussi :

$$E = \frac{i}{\frac{1}{r}} = \frac{i'}{\frac{1}{r'}} = \frac{i''}{\frac{1}{r''}} = \frac{i + i' + i''}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}}$$

ou

$$E = \frac{\Sigma\, i}{\Sigma \frac{1}{r}}$$

mais

$$\Sigma\, i = I$$

donc

$$E = \frac{I}{\Sigma \frac{1}{r}}$$

Si nous posons : $\quad \Sigma \frac{1}{r} = \frac{1}{R}$

on voit que la résistance R est la résistance équivalente aux résistances montées en dérivation, c'est-à-dire la résistance qui remplacerait les résistances en dérivation sans changer l'intensité du courant principal.

L'inverse $\frac{1}{R}$ de la résistance équivalente à plusieurs dérivations est égale à la somme des inverses des résistances de ces dérivations :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$$

Si l'on convient d'appeler *conductance* l'inverse de la résistance équivalente, on peut énoncer :

La conductance d'un conducteur équivalent est égale à la somme des conductances partielles correspondant à chacune des dérivations.

Applications. — Rhéostats. — Un rhéostat est une résistance variable que l'on monte en série dans un circuit, afin de pouvoir faire varier l'intensité du courant qui le traverse, ou même le voltage.

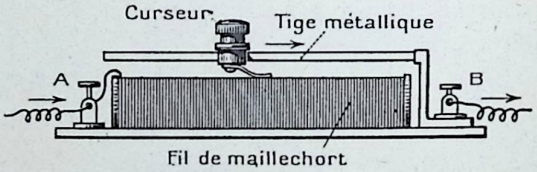


Fig. 526

Un rhéostat se compose d'un fil de maillechort dont le coefficient de température est très faible enroulé en spirale sur un support en amiante ou en porcelaine (fig. 526). Un curseur permet de faire varier le nombre des spires que le courant doit suivre. Les rhéostats industriels sont souvent montés comme l'indique la figure 527.

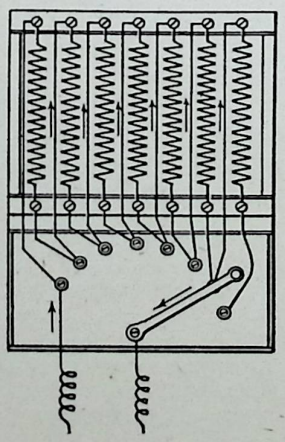


Fig. 527

Shunt. — Un shunt est une résistance que l'on monte en dérivation avec un ampèremètre afin de pouvoir utiliser celui-ci sur une échelle plus étendue.

On établit des shunts au $\frac{1}{10}$, au $\frac{1}{100}$, au $\frac{1}{1000}$. Pour cela, il suffit de donner aux résistances en dérivation des valeurs égales au $\frac{1}{9}$, au $\frac{1}{99}$ ou au $\frac{1}{999}$ de celle de l'ampèremètre.

En effet soit I l'intensité du courant arrivant en A et désignons par i et i' les intensités des courants dérivés passant dans l'ampèremètre de résistance r et dans la résistance $\frac{r}{9}$ (fig. 529).

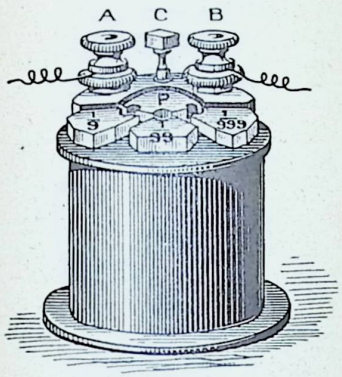


Fig. 528

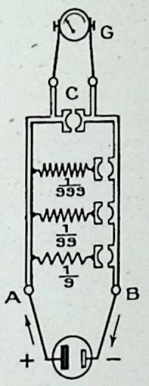


Fig. 529

On a d'après les lois des courants dérivés

$$i\,r = i' \times \frac{r}{9}$$

$$i + i' = \mathrm{I}$$

d'où

$$\frac{i}{i'} = \frac{r}{9 \times r} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{i}{i + 1'} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{i}{\mathrm{I}} = \frac{1}{10}$$

$$i = \frac{\mathrm{I}}{10}$$

Il passe dans l'ampèremètre un courant égal au $\frac{1}{10}$ du courant principal.

Boites de résistances. — Ce sont de petits rhéostats permettant de réaliser des résistances quelconques.

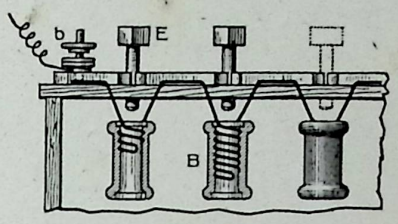


Fig. 530 — Dispositif d'une boîte de résistances
Lorsque la cheville E est en place, le courant passe de la borne b à la bobine B à peu près sans résistance, à cause de la large section des lames et de la cheville. Si on l'enlève, le courant est obligé de suivre le fil de la première bobine, pour aller de b en B.

On construit des résistances étalonnées dont les valeurs sont des multiples ou des sous-multiples décimaux de l'ohm ; on les réunit dans des boîtes appelées boîtes de résistance de la façon suivante : sur un support en ébonite sont fixés des plots en cuivre A, B, C, etc. ; deux plots sont réunis par une résistance étalonnée R, R', etc. En outre, des chevilles métalliques D, E, peuvent être intercalées entre les plots (fig. 530).

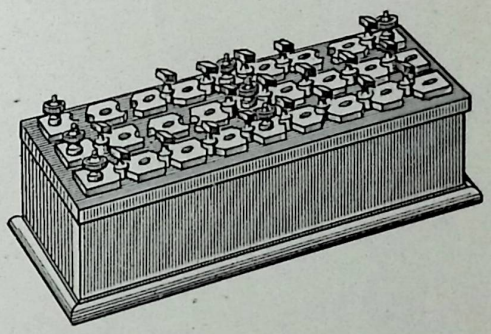


Fig. 531

La résistance de ceux-ci est pratiquement nulle en raison de leur grande section (fig. 531).

Les shunts sont des sortes de boîtes de résistances (fig. 528).

CHAPITRE IX

EFFETS CALORIFIQUES DU COURANT

LOI DE JOULE

L'expérience montre que le courant électrique *échauffe les conducteurs qu'il traverse.*

Exemple. — Si l'on réunit les 2 bornes d'un accumulateur par un fil de cuivre très court, on constate que ce fil est rapidement porté au rouge et qu'il ne tarde pas à fondre.

Loi de Joule. — *Joule* a établi expérimentalement la loi suivante : *La quantité de chaleur* Q *dégagée dans un conducteur est proportionnelle :*

1° *Au carré* I^2 *de l'intensité du courant ;*

2° *à la résistance* R *du conducteur ;*

3° *au temps t pendant lequel passe le courant.*

Autrement dit :

$$Q = A\,I^2\,R\,t$$

Dans cette formule Q est exprimé en petites calories ou *pth.* si I est en ampères, R en ohms, t en secondes et $A = \frac{1}{4{,}17}$.

Vérification expérimentale. — 1° Disposons sur le circuit d'un accumulateur une résistance R plongeant dans un calorimètre très sensible, un ampèremètre A nous permettant de mesurer l'intensité du courant et un rheostat Rh destiné à faire varier à volonté l'intensité du courant (fig. 532).

On constate ainsi que pendant le même temps les quantités de chaleur dégagées dans la résistance par

le passage de courants d'intensités i, $2i$, $3i$ sont Q, 4 Q, 9 Q.

Les quantités de chaleur sont donc proportionnelles aux carrés des intensités.

2° Au lieu d'un calorimètre, plaçons maintenant sur le circuit de l'accumulateur trois résistances R, 2 R, 3 R plongeant chacune dans un calorimètre. Ces résistances sont traversées par le même courant d'intensité I ; on constate qu'au bout du temps t elles ont dégagé des quantités de chaleur Q, 2 Q, 3 Q (fig. 533).

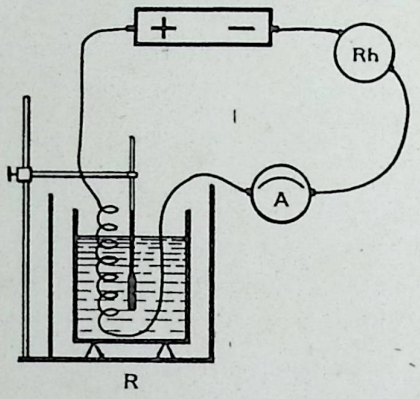


Fig. 532

Les quantités de chaleur sont donc proportionnelles aux résistances.

3° Au bout des temps $2t$, $3t$, etc. on constate qu'elles sont dans le premier calorimètre 2 Q, 3 Q, dans le deuxième, 4 Q, 6 Q, dans le troisième, 6 Q, 9 Q.

Les quantités de chaleur sont donc proportionnelles aux temps t pendant lesquels passe le courant.

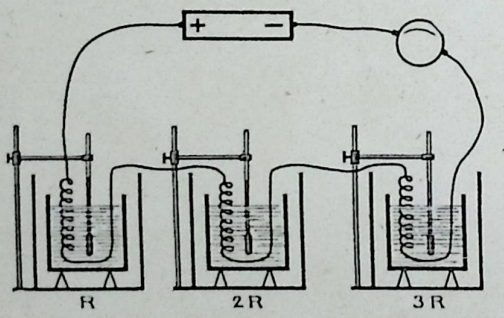


Fig. 533

Puissance d'un courant. — Valeur de A. — Nous avons vu que le travail effectué par une masse d'électricité d'un coulomb, tombant de V — V' volts est :

$$T = m\,(V - V') \text{ joules}$$

Le travail effectué par un courant d'intensité I *et de force électromotrice* E *en une seconde* autrement dit la *puissance de ce courant* ou encore l'énergie fournie par ce courant est :

$$P = E\,I \text{ joules}$$

$$\text{mais } E = I\,R$$

donc $P = I\,R \times I = I^2\,R$ joules.

Il en résulte que le travail accompli par ce même courant pendant le temps t secondes est :

$$T = E\,I\,t$$

$$= I^2\,R\,t \text{ joules.}$$

Si tout ce travail est transformé en chaleur, la quantité de chaleur Q équivalente à ce travail est d'après le principe de l'équivalence

$$Q = \frac{T}{J} = \frac{E\,I\,t}{J} = \frac{I^2\,R\,t}{J}$$

Mais nous avons vu que l'équivalent mécanique de la petite calorie ou microthermie est

$$J = 4{,}17$$

On a donc $\quad Q = \dfrac{E\,I\,t}{4{,}17}$ ou $\dfrac{I^2\,R\,t}{4{,}17}$

Dans la formule $Q = A\,I^2\,R\,t$, A est donc égal à $\dfrac{1}{4{,}17} = 0{,}24$.

Applications de la loi de Joule. — Coupe-circuits. — Ce sont des fils d'un alliage de plomb et d'autres métaux fusibles que l'on intercale dans un circuit. Leur section est telle qu'ils sont portés à leur température de fusion aussitôt que l'intensité du courant devient dangereuse pour les appareils qui se trouvent dans ce circuit.

Section à donner à un fil de canalisation électrique. — Il faut éviter d'employer des fils trop fins qui s'échaufferaient en absorbant une partie de l'énergie électrique du courant qu'ils conduisent. On admet pratiquement qu'un fil de cuivre nu peut supporter 5 *à* 6 *ampères par millimètre² de section,* un fil recouvert d'un isolant pas plus de 2 à 3 ampères.

Eclairage et chauffage électrique. — Lampes à incandescence. — Ce sont des ampoules de verre dans lesquelles on a fait le vide et qui contiennent un fil conducteur très fin, très résistant et peu fusible.

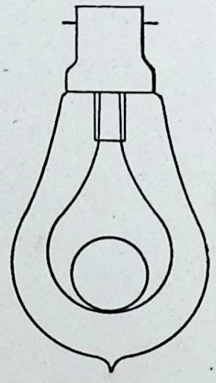


Fig. 534

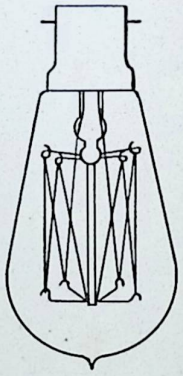


Fig. 535

Le filament est en charbon (fig. 534) ou en osmium (2700°), tantale (2.800°), tungstène (3000°).

Les lampes à *filament métallique* (fig. 535) consomment beaucoup moins que celles à filament de charbon. On améliore encore le rendement en les emplissant d'*argon*, on peut ainsi pousser la température plus haut sans volatiliser le métal, en outre la lumière est plus agréable à l'œil.

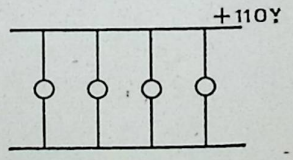


Fig. 536

Ces lampes se *montent en dérivation* (fig. 536), un interrupteur permet de les allumer ou de les éteindre (fig. 537).

La résistance d'une lampe ordinaire de 50 bougies est généralement de 220 ohms. Le courant des villes de 110 volts. L'application de la loi d'ohm nous permet de calculer la consommation de ces lampes.

$$E = I\,R$$

$$110 = I \times 220$$

donc $\quad I = \dfrac{110}{220} = \dfrac{1}{2}$ amp.

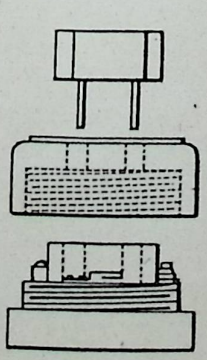


Fig. 537

Puissance de la lampe

$$P = EI = 110 \times \frac{1}{2} = 55 \text{ joules ou watts.}$$

Lampe à arc. — *La lampe à arc* dont la puissance est si grande se compose essentiellement de deux pointes de charbon de cornue mises en communication chacune avec l'extrémité d'un circuit (figure 538).

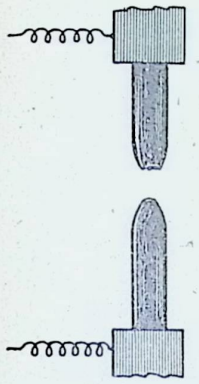


Fig. 538

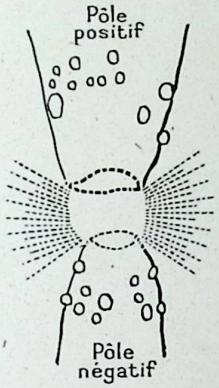


Fig. 539

Quand on fait passer le courant électrique, une traînée lumineuse jaillit entre les deux électrodes de charbon. La chaleur développée dans ce phénomène atteint 3.000 à 4.000°. Les pointes de charbon se volatilisent et des parcelles solides sont constamment arrachées et transportées d'une électrode à l'autre (fig. 539).

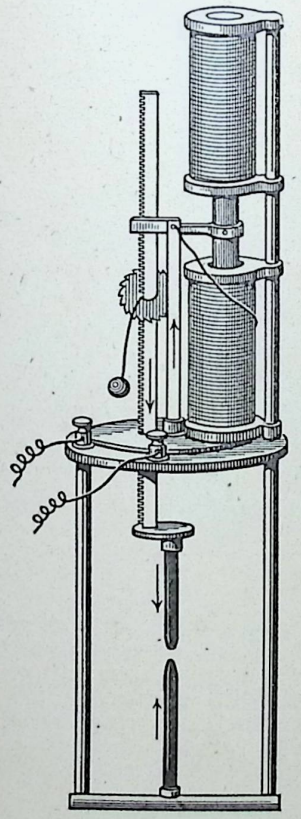


Fig. 540

L'usure des charbons n'est pas la même pour chacun d'eux. L'électrode positive s'use beaucoup plus que l'électrode négative; aussi lorsque chacun des deux charbons reste constamment en relation avec le même pôle, le charbon positif se creuse à la pointe et forme une sorte de cratère, tandis que le charbon négatif reste effilé.

Pour obtenir un arc constant, il est *nécessaire de réaliser un dispositif qui maintienne toujours les charbons à la même distance l'un de l'autre.* Il faut donc adjoindre à la lampe un mécanisme automatique qui rapproche régulièrement les charbons.

Le régulateur peut être actionné par le courant électrique lui-même ou consister en un mécanisme d'horlogerie. De plus, comme l'arc ne peut s'allumer au moment de la fermeture du circuit, que si les deux charbons sont en contact, et qu'il faut, d'autre part, que ceux-ci s'écartent pour que le courant passe, la lampe doit posséder un dispositif déterminant l'écartement des charbons (fig. 540).

FOUR ÉLECTRIQUE

Le *four électrique* de Moissan est une application de l'arc électrique. C'est avec ce four que le célèbre chimiste français a fondu le cristal de roche, et tenté la fabrication du diamant artificiel.

Il consiste en un manchon d'argile assujetti dans une monture de fer. Dans le fond se trouve un bloc réfractaire, sur lequel peut être posé un petit creuset qui, selon les expériences, est en charbon, en carbonate de magnésie, etc. Dans le creuset plongent deux électrodes de charbon par lesquelles passe le courant d'une dynamo. Entre les électrodes se forme un arc lumineux, dont la chaleur agit sur les substances contenues dans le creuset. En avant et en arrière le four est fermé par d'épaisses plaques de mica transparentes, au travers desquelles il est facile de suivre la marche de l'opération (fig. 541).

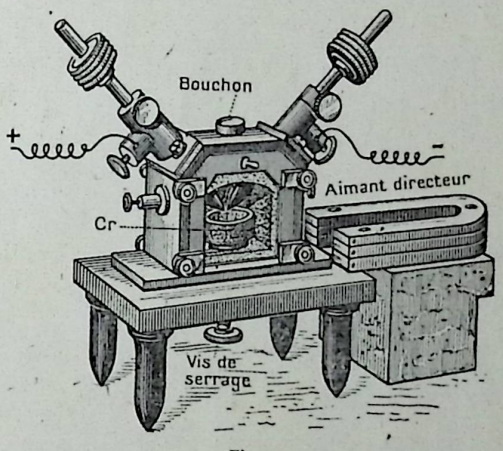


Fig. 541

Selon les observations de Moissan, au moment où l'arc lumineux s'établit entre les plaques de charbon, on sent une forte odeur d'acide cyanhydrique. Il faut attribuer ce phénomène à la combinaison du carbone des charbons avec l'hydrogène de la vapeur d'eau et l'azote de l'air.

La belle flamme rouge du début doit être attribuée aussi à la même cause. Au bout de trois à quatre minutes, les électrodes deviennent incandescentes, et des flammes éclatantes jaillissent des deux côtés du four jusqu'à cinquante centimètres. Bientôt la température atteint son maximum qui est de plus de 3.500°. A la fin de l'opération, on constate que le bloc de chaux servant de couvercle a été fondu.

Il n'y a pas de substances qui soient capables de résister à l'action du four électrique. L'argent bout, le platine fond en quelques secondes, et l'or est volatilisé. Le cristal de roche entre en fusion au bout de quelques minutes, puis il commence à bouillir, et bientôt une grande quantité de fumée violacée se dégage.

CHAPITRE X

EFFETS CHIMIQUES DU COURANT — ÉLECTROLYSE

Quand on fait aboutir deux fils conducteurs en communication avec les 2 pôles d'une pile dans un liquide quelconque, celui-ci peut se comporter de plusieurs façons :

1° Le liquide ne conduit pas le courant, *il est isolant* ; c'est le cas pour l'eau très pure, l'alcool, l'huile, la benzine, etc.

2° Le courant passe sans qu'il se produise de phénomène nouveau, autre qu'une élévation de température ; le liquide est *conducteur* (mercure, métaux fondus, etc.).

3° Le courant passe, mais il se produit des réactions chimiques dans le liquide ; celui-ci est *un électrolyte*. Il en est ainsi pour toutes les dissolutions d'acides, de bases ou de sels dans l'eau ainsi que pour les sels fondus.

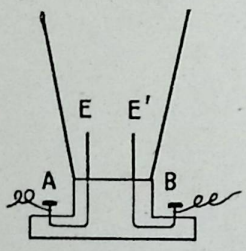


Fig. 542

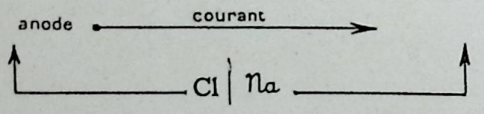
Les conducteurs qui amènent le courant portent le nom d'*électrodes* ; l'électrode amenant le courant est l'*anode*, l'autre la *cathode*.

La cuve électrolytique reçoit souvent le nom de *voltamètre*. On lui donne la disposition d'un verre dont le fond est formé d'une substance isolante et est traversé par deux fils aboutissant d'une part à deux bornes A et B, et d'autre part aux deux électrodes E E' généralement en platine (fig. 542).

Loi qualitative de l'électrolyse. — *Sous l'action d'un courant, les choses se passent comme si le métal d'un électrolyte se séparait du radical qui lui est uni; les produits de la décomposition* (ions), *n'apparaissent que sur les électrodes: le métal à la cathode et le radical à l'anode.*

L'hydrogène des acides se comporte comme un métal.

Electrolysons par exemple du chlorure de sodium (Cl Na) fondu, il est décomposé et le chlore se dégage à l'anode tandis que le sodium apparaît à la cathode :



Cette réaction fondamentale est généralement masquée par des réactions secondaires, surtout lorsque l'électrolyte est une dissolution. Ces réactions peuvent être prévues lorsqu'on connaît les propriétés chimiques des corps qui peuvent apparaître ; elles ne se produisent qu'au voisinage des électrodes ce qui permet souvent de les éviter au moyen de dispositifs spéciaux.

Nous nous bornerons ici à examiner trois exemples :

1° *Réaction des ions sur le dissolvant.* — Electrolysons de l'acide sulfurique $SO^4 H^2$ en solution dans l'eau ; il apparaît de l'hydrogène à l'anode. Au contraire, à la cathode, le radical SO^4 ne peut exister à l'état libre; il réagit sur l'eau en donnant :

$$SO^4 + H^2O = SO^4 H^2 + O$$

En définitive, tout *se passe comme si l'on décomposait l'eau.*

2° *Réaction des ions les uns sur les autres.* — Les ions peuvent réagir les uns sur les autres, c'est ainsi que dans l'électrolyse du chlorure de sodium dissous, le sodium donne en présence de l'eau de la soude suivant la réaction :

$$Na + H^2O = NaOH + H$$

Mais le chlore réagit sur la soude pour donner de l'hypochlorite de sodium :

$$2\,Cl + 2\,Na\,OH = Cl\,O\,Na + H^2O + Na\,Cl$$

3° *Réaction des ions sur les électrodes.* — Si l'on électrolyse une dissolution de sulfate de cuivre (SO^4 Cu) avec une anode en cuivre, il se dépose du cuivre sur la cathode ; à l'anode l'ion SO^4 réagit sur le cuivre :

$$SO^4 + Cu = SO^4\,Cu$$

Tout se passe *comme si le cuivre était transporté de l'anode sur la cathode.* Cette propriété est utilisée industriellement pour le raffinage du cuivre, la galvanoplastie et le cuivrage.

Lois quantitatives de l'électrolyse. — Elles ont été découvertes en 1830 par Faraday.

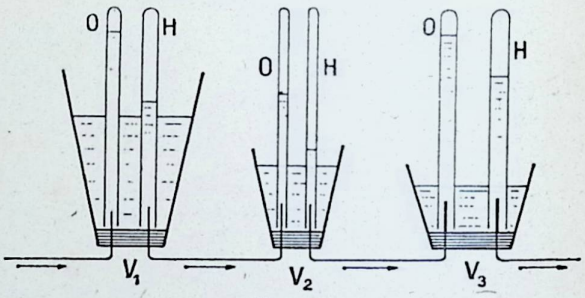


Fig. 543

1° Disposons sur un circuit trois voltamètres a eau acidulée comme l'indique la figure 543 ; ces trois voltamètres ont des électrodes inattaquables mais leurs dimensions sont différentes ; la concentration de l'acide sulfurique varie de l'un à l'autre.

Dans tous le volume de l'hydrogène recueilli est le double du volume d'oxygène et tous les volumes d'hydrogène sont égaux.

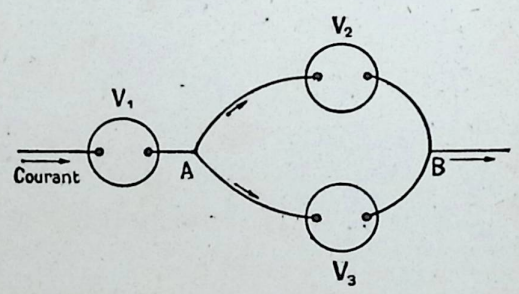


Fig. 544

2° Disposons les trois voltamètres, un sur le circuit principal et les deux autres sur deux dérivations entre A et B, (fig. 544) la quantité d'électrolyte décomposée par le courant total dans V_1 est égale à la somme des quantités d'électrolyte décomposée dans chaque dérivation.

D'où la 1re loi : *La masse d'électrolyte décomposée est proportionnelle à la quantité d'électricité qui traverse cet électrolyte.*

3° Sur le circuit disposons plusieurs voltamètres A, B, C, D, E, contenant de l'eau acidulée, une solution d'azotate d'argent, une solution de sulfate de cuivre, une solution de chlorure d'or et enfin une dernière de chlorure de platine (fig. 545).

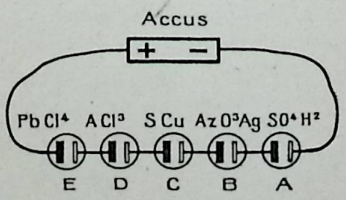


Fig. 545

L'expérience montre que les masses d'H^2O et de sels décomposées pendant le même temps c'est-à-dire

par la même quantité d'électricité sont représentés par les formules.

$$\frac{H^2O}{2},\ AzO^3\,Ag\ ,\ \frac{SO^4\,Cu}{2},\ \frac{Au\,Cl^3}{3},\ \frac{Pl\,Cl^4}{4}$$

En remarquant que Ag est *monovalent*, Cu *bivalent*, Au *trivalent*, Pl *tétravalent*.

On voit que la quantité d'électricité qui met en liberté $\frac{H^2}{2} = H = 1$ gr. = 1 valence met aussi en liberté

$$Ag = 108 \text{ gr.} = 1 \text{ valence}$$

$$\frac{Cu}{2} = \frac{63{,}5}{2} = 1 \text{ valence}$$

$$\frac{Au}{3} = \frac{196}{3} = 1 \text{ valence}$$

$$\frac{Pl}{4} = \frac{194}{4} = 1 \text{ valence}$$

d'où 2° *loi.* : *La quantité d'électricité qui met en liberté une valence ou 1 gramme d'hydrogène met en liberté une valence d'un métal quelconque.*

L'expérience montre qu'il faut 96.600 *coulombs* pour mettre en liberté 1 gr. d'hydrogène

1 ampère met donc en liberté $\frac{1 \text{ g.}}{96.600}$ d'H en 1 seconde.

I ampères mettent donc en liberté $\frac{I}{96.600}$

En *t* secondes I ampères mettent en liberté

$$\frac{I\,t}{96.600} \text{ g. d'H.}$$

ou $\frac{e\,I\,t}{96.600}$ g. d'un métal de valence *e* grammes.

Pour l'argent $e = 108$

I ampères mettent donc en liberté $\frac{108}{96.600} = 1{,}118$ mmg. par seconde d'argent.

Définition pratique de l'ampère. — *L'ampère international est l'intensité d'un courant continu qui traversant un voltamètre à AzO^3 Ag met en liberté* 1,118 mmg. *d'argent en 1 seconde.*

Le coulomb est la quantité d'électricité qui traversant un voltamètre à AzO^3 Ag met en liberté 1,118 mmg. *d'argent.*

L'ampère est donc un courant de 1 coulomb par seconde.

Théorie moderne de l'électrolyse. — Elle est due à Grotthus (1805), et a été modifiée par Clausius. On admet que dans une solution il existe :

1° Des molécules non décomposées ;

2° Des ions en liberté ; les ions provenant du radical sont chargés négativement et les ions métal ou hydrogène chargés positivement.

Par exemple dans une dissolution de chlorure de sodium Cl Na, il existe des molécules Cl Na, des ions Cl— et des ions Na+ ; dès que le courant passe, il crée un champ qui oriente ces ions et les amène sur les électrodes.

Autrement dit la décomposition en ions est antérieure au passage du courant électrique, elle est provoquée par la dissolution de l'électrolyte dans le solvant. Le courant oriente simplement les ions, les uns suivant le sens du courant et apparaissant à la cathode, les autres se dirigeant en sens contraire et apparaissant à l'anode.

Application de l'électrolyse. — Elle comprend la galvanoplastie, la galvanisation, l'électro-métallurgie, l'électro-chimie.

Galvanoplastie. — C'est l'art de modeler le cuivre en le précipitant d'une solution de SO^4 Cu par le courant électrique.

Pour reproduire une médaille par exemple, on fait un moule en gutta percha, puis après avoir métallisé la surface interne de ce moule avec de la plombagine on l'introduit comme électrode négative dans une solution de SO^4 Cu, l'électrode positive étant une lame de cuivre (fig. 546).

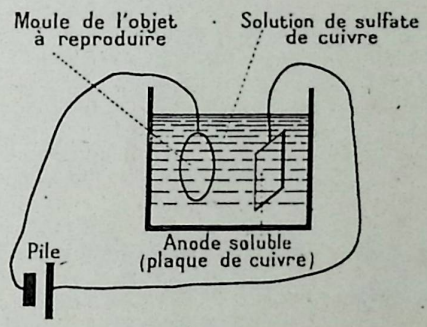


Fig. 546

Galvanisation. — Elle est employée pour recouvrir les objets d'un métal précieux.

Dorure et argenture. — L'objet est placé comme électrode négative dans un bain généralement constitué par du cyanure d'or ou d'argent en solution dans du cyanure de potassium.

L'objet doit être, au préalable, lavé à la potasse et dans un bain acide.

Cuivrage. — Les objets sont plongés dans une solution de SO^4 Cu.

Nickelage. — Les objets sont placés dans une solution de sulfate double de nickel et d'ammoniaque à 8° Baumé.

Electro-métallurgie. — Préparation du cuivre pur dit cuivre électrolytique.

Fabrication de l'aluminium.

Fabrication de l'acier électrique (acier au vanadium, au tungstène, au tétane).

Electro-chimie — Fabrication du carbure de calcium, ou carborundum.

Préparation de l'oxygène, de l'hydrogène extraits de l'eau, du chlore, de l'eau de Javel.

CHAPITRE XI

PILES ET ACCUMULATEURS

Les piles sont des générateurs électriques dans lesquelles l'énergie chimique est transformée en énergie électrique (piles hydro-électriques) ou bien l'énergie calorifique en énergie électrique (piles thermo-électriques) Les piles hydro-électriques comprennent les *piles primaires* (pile de *Volta*) et les *piles secondaires* (accumulateurs).

PILES PRIMAIRES

Loi du contact de Volta. — En 1787, Galvani, professeur à l'Université de Bologne, découvrit par hasard que les muscles d'une grenouille écorchée mis en contact avec deux fils de métaux différents (cuivre et fer) éprouvent des tressaillements.

Volta expliqua le phénomène en énonçant le principe suivant :

Le contact de deux métaux, et plus généralement de deux corps quelconques de nature différente, suffit pour établir entre ces corps une différence de potentiel.

Pour étayer sa théorie, il construisit un appareil qui reçut le nom de *pile* à cause de sa forme. Cette pile se compose d'une série de disques de zinc et de cuivre soudés entre eux et superposés en suivant toujours le même ordre: un disque de cuivre alternant toujours avec un disque de zinc. La réunion de deux disques constitue un couple. Entre le zinc d'un couple et le cuivre du suivant est interposée une rondelle de drap imbibée d'eau acidulée avec de l'acide sulfurique. On forme ainsi une colonne maintenue par des baguettes de verre entre deux plateaux de bois. Aux deux extrémités, on attache des fils métalliques et si l'on réunit ces deux fils, on peut constater qu'il y a un transport d'électricité du cuivre vers le zinc (fig. 547).

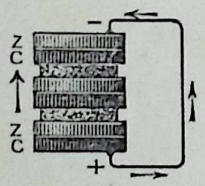


Fig. 547

Expérience de Volta. — Soit un système formé d'une lame de zinc et d'une lame de cuivre soudées bout à bout. En prenant à la main le côté zinc et en appliquant l'extrémité cuivre contre le plateau inférieur d'un électroscope condensateur, à plateau de cuivre, si le cuivre de la lame est à un potentiel différent de celui du zinc, et par suite de celui de la terre, le plateau de cuivre de l'électroscope sera lui-même à ce potentiel. Supposons alors qu'on touche le plateau supérieur de l'électroscope avec le doigt pour le mettre en communication avec le sol, puis qu'on supprime les contacts et qu'on enlève le plateau supérieur, on constate que l'électroscope s'est chargé d'électricité négative.

Si l'on répète l'expérience en tenant la lame par le côté cuivre et en mettant l'extrémité zinc en contact avec le plateau de cuivre de l'électroscope condensateur, on n'observe aucun phénomène électrique. Dans ce cas, en effet, le zinc de la lame est en contact, par ses deux extrémités, avec du cuivre et celui-ci doit être au même potentiel, d'un côté comme de l'autre. Comme on tient l'extrémité cuivre de la lame à la main, elle est à l'état neutre et, par conséquent, l'électroscope lui-même est à l'état neutre.

Supposons qu'on réunisse par un fil de cuivre les deux extrémités cuivre et zinc de la lame dont nous venons de parler. Comme le zinc est en contact avec du cuivre par les deux bouts, il n'y a pas de différence de potentiel entre le fil et l'extrémité cuivre, il n'y a donc pas de raison pour que de l'électricité s'écoule par le fil.

Il n'en est plus de même si l'on sépare le cuivre et le zinc, par un milieu capable d'exercer, sur l'un d'eux, une action chimique. C'est ce qui se produit dans la pile de Volta. Les lames de cuivre et de zinc, séparées par une rondelle de drap imbibée d'eau acidulée, ne sont pas simplement au potentiel que déterminerait leur contact, et, si on les réunit par un fil de cuivre, il passe de l'électricité de l'une sur l'autre. Au fur et à mesure que la différence de potentiel tend à s'annuler, elle se rétablit constamment par suite de l'attaque chimique du zinc par l'acide sulfurique.

Dans ces conditions, on constate que l'extrémité du fil qui est en contact avec le cuivre fournit de l'électricité positive, tandis que l'extrémité en contact avec le zinc fournit de l'électricité négative.

Quand on réunit les deux fils, les deux électricités se combinent. Comme elles se reproduisent indéfiniment, sous l'influence de la réaction chimique, on dit qu'il y a dans le fil un courant électrique.

La pile de Volta (fig. 547) *ne présente plus qu'un intérêt historique* ; on réalise un élément de pile plus commodément en plongeant dans un vase en verre contenant de l'eau acidulée, une lame de cuivre et une lame de zinc. A chacune de ces lames qui constituent les 2 pôles de la pile, on soude un fil de cuivre en relation avec un électroscope à feuilles d'or; on constate que le pôle de cuivre est *électrisé positivement* et le pôle de zinc *négativement* (fig. 548).

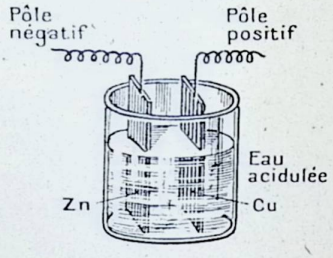


Fig. 548

Avec un électromètre à cadran on constate que le potentiel du pôle + est plus élevé que celui du pôle — et que de plus si on réunit les 2 pôles par un fil conducteur la différence des potentiels *reste constante*, on l'appelle *force électromotrice de la pile* (E).

Par convention, on admet que le courant électrique passe du pôle + sur le pôle — dans le fil conducteur et du pôle — sur le pôle + dans l'intérieur de la pile.

L'énergie de cet élément de pile provient de ce que le courant décompose $SO^4 H^2$ en H^2 qui apparaît sur le pôle + et en SO^4 qui apparaît sur le zinc et forme avec celui-ci du $SO^4 Zn$, cette formation de $SO^4 Zn$ est accompagnée d'un dégagement de chaleur de 38.000 calories ; c'est *cette énergie calorifique* qui est transformée en électricité et qui maintient constante la différence de potentiel.

Les constantes d'un élément de pile sont :

a) *La force électromotrice.*

b) *La résistance intérieure.*

On nomme force électromotrice totale, la différence de potentiel aux pôles de l'élément en circuit ouvert.

La résistance intérieure est celle d'une colonne prismatique liquide qui a pour bases les 2 lames.

Polarisation d'un élément de pile. — Une pile constituée avec des éléments semblables à celui que nous venons de décrire, comme la pile de Volta, présente l'inconvénient de *se polariser*.

En effet, si l'on réunit les 2 pôles de l'élément par un fil conducteur sur lequel est monté un ampèremètre très sensible on constate que le courant qui traverse ce conducteur va en diminuant jusqu'à devenir nul: on dit qu'il se polarise.

Explication de la polarisation. — Le courant décompose $SO^4 H^2$ en SO^4 et H^2, H^2 apparaît sur le cuivre et forme une couche adhérente, SO^4 apparaît sur le zinc et forme $SO^4 Zn$ qui se dissout. Or l'hydrogène et le zinc forment un élément de pile dans lequel l'H est le

pôle — et le Zn le pôle +. Cet élément a une *force électromotrice E'* qui s'oppose à celle qui produit le courant et qu'on appelle *force contre-électromotrice*. C'est bien *l'hydrogène qui produit la polarisation, car si on l'enlève avec un pinceau, la pile recommence à fonctionner.*

Pour éviter la polarisation, il faut donc absorber cet hydrogène, autrement dit il faut *l'oxyder*. On emploie *des dépolarisants*.

D'autre part, le zinc impur du commerce est attaqué par $SO^4 H^2$ même lorsque le courant ne passe pas. Au lieu de zinc ordinaire on utilise souvent *le zinc amalgamé* qui résiste à l'attaque de $SO^4 H^2$ en circuit ouvert (Le zinc amalgamé est du zinc recouvert de mercure).

Piles à courant constant. — Elément Daniell. — La pile Daniell est une pile à deux liquides ; elle est formée d'une lame de zinc et d'une lame de cuivre placées chacune dans un vase séparé. Le zinc roulé en cylindre est mis dans un vase de verre ou de porcelaine plein d'eau acidulée. Dans le liquide, et à l'intérieur du cylindre de zinc, plonge un vase de terre poreuse contenant une dissolution saturée de sulfate de cuivre au centre de laquelle se trouve une lame de cuivre (fig. 549). (*Le sulfate de Cu est le dépolarisant*).

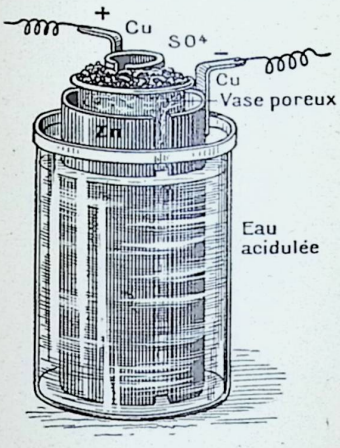


Fig. 549

Dans cette pile, les causes d'affaiblissement sont évitées ; au fur et à mesure que l'acide sulfurique agit sur le zinc et se détruit, le sulfate de cuivre contenu en dissolution dans le vase poreux est décomposé et de l'acide sulfurique est remis en liberté, remplaçant ainsi celui qui s'est combiné au zinc. Le cuivre qui se dépose sur la lame de cuivre ne modifie pas la chaîne de conducteurs. Pour éviter l'appauvrissement en sulfate de cuivre, on entretient la dissolution dans un état constant de saturation, en disposant à la partie supérieure du vase poreux des cristaux de sulfate qui se dissolvent au fur et à mesure que le degré de saturation s'affaiblit.

Cette pile a une force électromotrice de 1, 07.

Sa résistance intérieure est de 7 à 12 ohms.

Elément Bunsen. — *La pile de Bunsen* ne diffère de la pile de Daniell que par la nature du liquide contenu dans le vase poreux, et par le remplacement du cuivre par un cylindre de charbon de cornue. Le vase intérieur contient de l'*acide azotique* (fig. 550). L'hydrogène, produit par la réaction de l'acide sulfurique sur le zinc, est oxydé par l'acide azotique, et le dégagement de ce gaz est supprimé. Toutefois, dans cette pile, on ne prend aucune précaution contre la disparition de l'acide sulfurique; aussi l'intensité du courant ne se conserve-t-elle pas aussi longtemps que dans la pile de Daniell. Ce dispositif a néanmoins l'avantage d'une plus *grande puissance*.

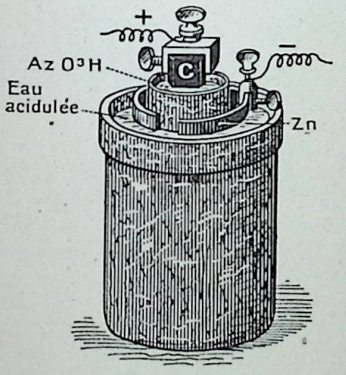


Fig. 550

Le dépolarisant est *l'acide azotique* :

$$E = 1{,}9 \text{ v.}$$
$$p = 1/4 \text{ ohm}$$

Elément Poggendorf ou Grenet. — Il se compose d'une bouteille (de 1 litre le plus souvent) contenant du *bichromate de potasse*. Cette bouteille est munie d'un bouchon en ébonite supportant 2 lames de charbon de cornue en communication avec 2 bornes qui forment le pôle positif. Entre ces 2 lames glisse une *lame de zinc amalgamée* que l'on peut élever ou abaisser à volonté afin qu'elle ne soit pas attaquée par le liquide lorsqu'on n'en fait pas usage (fig. 551).

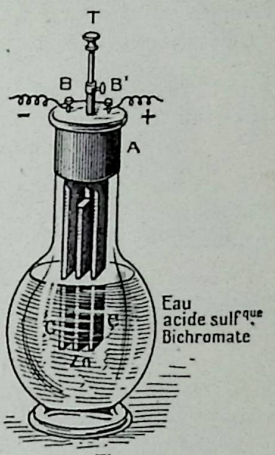


Fig. 551

Le dépolarisant est le bichromate de potassium $Cr^2 O^7 K^2$. Quand on ferme le circuit, le bichromate de potasse réagit sur l'acide sulfurique et se transforme en sulfate de potasse et en sulfate de chrome, en dégageant de l'oxygène ; celui-ci se combine à l'hydrogène, mis en liberté par le courant, et reproduit de l'eau.

$$Cr^2 O^7 K^2 + 4SO^4 H^2 + 6H = SO^4 K^2 + (SO)^3 Cr^2 + 7H^2O$$

L'inconvénient de cette pile est la formation d'un dépôt d'alun de chrome qui encrasse l'appareil.

Néanmoins à cause de ses constantes remarquables :

$$F = 2 \text{ volts}$$
$$p = 1 \text{ ohm}$$

cette pile est la *plus employée dans les laboratoires* malgré le prix élevé du bichromate.

Elément Leclanché. — *La pile de Leclanché* se compose d'un bâton de zinc amalgamé plongeant dans un vase de verre et d'un prisme de charbon de cornue placé dans un vase poreux, lui-même contenu dans le vase de verre. Ce dernier renferme une solution concentrée de *chlorhydrate d'ammoniaque*, le vase poreux est rempli d'un mélange de fragments de coke et bioxyde de manganèse (fig. 552). Quand on ferme le circuit, le chlorhydrate d'ammoniaque réagit sur le zinc et forme du chlorure de zinc, de l'ammoniaque qui se dissolvent dans l'eau et de l'hydrogène. Celui-ci se porte vers le charbon et rencontre le bioxyde de manganèse qu'il réduit pour former de l'eau.

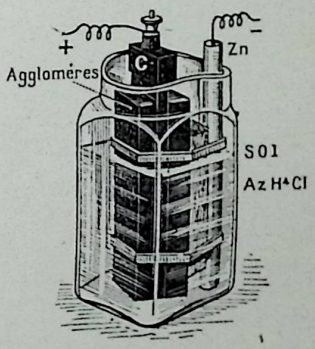


Fig. 552

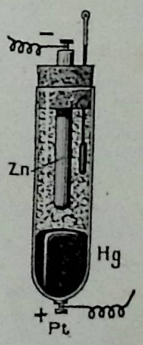


Fig. 553

Cette pile est excellente quand on n'a besoin de s'en servir qu'à de rares intervalles. C'est le cas, par exemple, pour les *sonneries électriques d'appartement*. Une fois chargée, elle fonctionne alors presque indéfiniment. Il suffit de remplacer de temps à autre l'eau qui s'évapore.

$$E = 1{,}7 \text{ v.}$$
$$p = 3 \text{ à } 5 \text{ ohms}$$

Elément étalon Latimer-Clark. — C'est un tube de verre contenant du mercure dans lequel plonge une

lame de platine formant le pôle +. Le mercure est surmonté d'une pâte de *sulfate mercureux* et de *sulfate de zinc* dans laquelle sont placés un bâton de zinc (pôle négatif) et un thermomètre (fig. 553).

Cet élément, d'une *constance remarquable* a une force électrique E = 1,434 v. à 15°.

On emploie comme Volt international la fraction $\frac{1000}{1434}$ *de sa force électromotrice* à 15°. Aujourd'hui, l'étalon est l'élément *Weston.*

Remarque. — Les piles sont des sources coûteuses d'énergie électrique. Elles fournissent le kilowatt heure (36.000.000 watts) à un prix 4 ou 5 fois plus élevé que les machines dynamo-électriques.

Extension de la loi d'Ohm. — Application aux piles. — La formule d'Ohm :

$$E = I R$$

$$\text{ou} \quad V - V' = I R$$

a été établie pour un conducteur homogène. Si nous considérons un circuit A P B M (fig. 554) comprenant une pile AB de force électromotrice totale E et de résistance r dont les pôles sont reliés par un fil de résistance R.

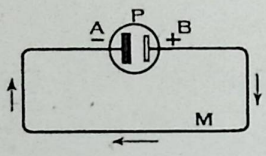


Fig. 554

Si V est le potentiel de A et V′ celui de B le courant allant de A en B dans le fil A M B est tel que :

$$(1) \qquad V - V' = I R$$

La pile de B en A est parcourue par un courant :

$$(2) \qquad E - (V - V') = I r$$

En ajoutant (1) et (2) :

$$V - V' + E - V + V' = I R + I r$$

$$E = I R \times I r = I (R + p)$$

d'où :

$$I = \frac{E}{R + r}$$

L'intensité d'un courant fourni par une pile est proportionnelle à la force électromotrice de la pile et inversement proportionnelle à la résistance totale du circuit.

Si nous posons :

$$E' = V - V' = I R$$

E′ est la différence de potentiel des deux pôles en circuit fourni, on *l'appelle force électromotrice efficace* et on voit que :

$$E' < E$$

Association des piles. — On les associe :

1° *en série ou tension ;*
2° *en batterie ou surface ;*
3° *en accouplement mixte.*

Association en série. — Le pôle + d'un élément est relié au pôle — de l'autre et ainsi de suite.

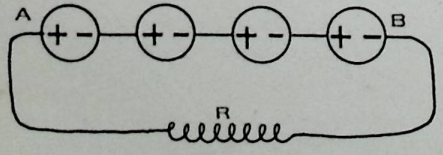


Fig. 555

Si l'on réunit par un fil conducteur de résistance R (fig. 555) les deux pôles extrêmes et restés libres A et B l'intensité I du courant qui parcourt ce fil est donnée par la formule.

$$I = \frac{E}{R + r}$$

dans laquelle $\quad E = ne$

n étant le nombre d'éléments de pile et e la force électromotrice d'un de ces éléments (En effet le courant pour aller de A en B subit *n chutes de potentiel égale chacune à e*). De même la résistance intérieure $r = n\rho$, ρ étant la résistance intérieure d'un élément (nous avons vu que si plusieurs résistances sont disposées en série, leur résistance totale est égale à leur somme).

On a donc :

$$I = \frac{ne}{R + n\rho}$$

Si R est négligeable par rapport à $n\rho$:

$$I = \frac{ne}{n\rho} = \frac{e}{\rho}$$

Un seul élément donnerait la même intensité si R est très grand par rapport à $n\rho$:

$$I = \frac{ne}{\rho}$$

Dans ce cas I *est proportionnelle à n.*

Association en batterie. — Les pôles + réunis entre eux constituent le pôle + de la pile, de même les pôles — réunis en constituent le pôle — (fig. 556).

La résistance intérieure ayant une section n fois plus grande est :

$$r = \frac{\rho}{n}$$

La force électromotrice E est celle d'un élément e.

L'intensité qui parcourt le fil A B est donc :

$$I = \frac{e}{R + \frac{\rho}{n}}$$

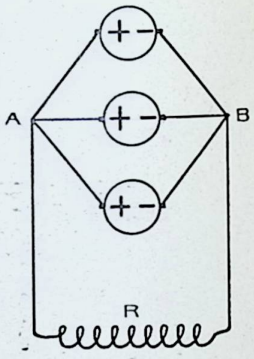


Fig. 556

$$I = \frac{ne}{nR + \rho}$$

Si ρ est négligeable par rapport à n R :

$$I = \frac{ne}{nR} = \frac{e}{R}$$

Si n R est négligeable par rapport à ρ :

$$I = \frac{ne}{\rho}$$

Il y a avantage à associer en batterie.

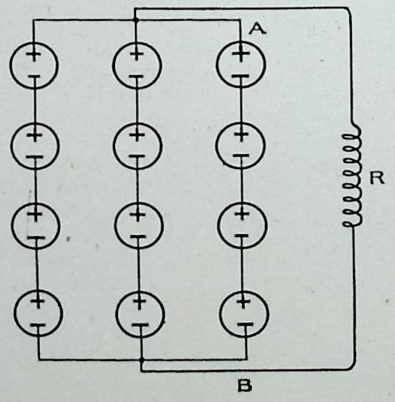


Fig. 557

Accouplement mixte. — Dans ce mode d'association, on réunit en batterie x séries de y éléments chacune (fig. 557).

La résistance intérieure est :

$$r = \frac{y\rho}{x}$$

la force électromotrice :

$$E = y\,c$$

l'intensité :

$$I = \frac{y\,c}{R + \frac{y\,\rho}{x}}$$

ou

$$I = \frac{x\,y\,c}{R\,x + y\,\rho} = \frac{nc}{Rx + y\rho}$$

Dans ce cas I est maximum quand $R\,n + y\,\rho$ est minimum, c'est-à-dire quand :

$$R\,x = y\,\rho$$

Piles thermo-électriques. — *Ce sont des appareils qui transforment l'énergie calorifique en énergie électrique.*

Nous avons vu, à propos de la pile Volta, que, si deux ou plusieurs métaux sont assemblés à la suite les uns des autres de manière à former un circuit fermé, il n'y passait pas de courant électrique. Pour produire le courant, il nous a fallu fournir au système une certaine quantité d'énergie, représentée par le travail chimique du liquide de la pile sur le zinc.

On peut remplacer l'énergie chimique par une énergie de nature différente, par exemple par la chaleur.

L'expérience suivante due à Seebeck a été le point de départ de cette étude.

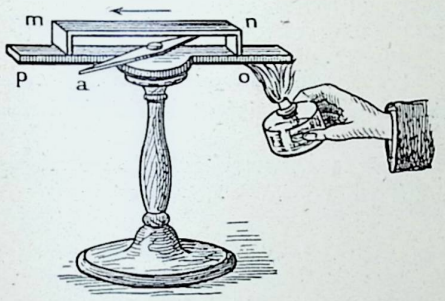


Fig. 558

Imaginons un barreau de bismuth, soudé à ses deux extrémités à une lame de cuivre recourbée, qui forme, avec lui, un rectangle. Si l'on chauffe l'une des soudures, en refroidissant l'autre, on constate, au moyen des appareils d'expérience, qu'il passe dans le système un courant électrique, allant du bismuth au cuivre, à travers la soudure chauffée (fig. 558).

La *force électromotrice* dépend de la *nature des métaux* en contact, de la *température* et de la *soudure*. Elle est très faible : 40 *microvolts pour* 40°. On associe ces piles en série.

Pile de Melloni. — Elle se compose d'une chaîne alternativement formée de chaînons soudés de *bismuth* et d'*antimoine*. Toutes les soudures de rang pair sont pleines d'un même côté, les soudures de rang impair de l'autre côté (fig. 559). On réunit généralement 50 petits barreaux de 5 à 6 centimètres dont l'ensemble forme un parallélépipède assujetti dans un étui métallique. Il suffit de chauffer une des faces du parallélépipède.

Les piles thermo-électriques peuvent servir à mesurer la température.

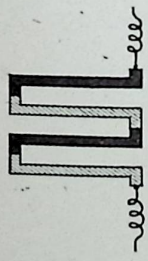


Fig. 559

Aiguilles thermo-électriques. — Imaginées par *Becquerel*, elles permettent de noter des variations de température dans des circonstances où il est impossible de faire usage du thermomètre. Elles se composent de *deux couples thermo-électriques fer et cuivre*.

Les deux lames de cuivre sont reliées aux bornes d'un galvanomètre et les deux lames de fer sont réunies (fig. 560).

PILES SECONDAIRES. — ACCUMULATEURS.

Ce sont des appareils qui emmagasinent de l'énergie électrique sous forme d'énergie chimique pendant la charge et qui la restituent pendant la décharge.

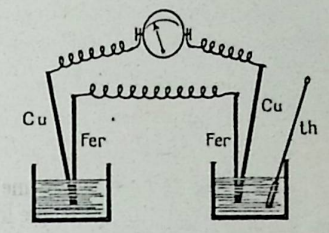


Fig. 560

Principe. — Considérons un voltamètre à eau acidulée dans lequel on fait passer le courant d'une pile : il se dégage de l'hydrogène sur l'électrode — et de l'oxygène sur l'électrode + (fig. 561). D'abord ces gaz restent adhérents aux électrodes et peuvent être même absorbés par elles, mais au bout de quelques minutes, ils se *dégagent abondamment*. A ce moment remplaçons la pile par un galvanomètre, nous constatons que le circuit est *traversé par un courant de sens inverse du précédent*. Autrement dit tout se passe comme si le voltamètre était devenu un *élément de pile*.

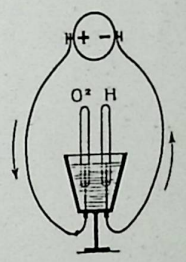


Fig. 561

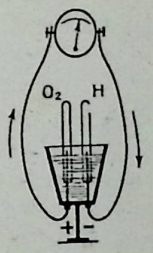


Fig. 562

Si nous remplaçons les lames de platine du voltamètre par des *lames de plomb, dans la première partie* de l'expérience on observe que le temps pendant lequel il ne se dégage aucun gaz est *beaucoup plus long*, mais que l'anode brunit par suite de la formation de bioxyde de plomb :

$$Pb + O^2 = PbO^2$$

tandis que la cathode se recouvre de plomb spongieux d'un gris violacé :

$$PbO + H^2 = Pb + H^2O$$

Les gaz ne se dégagent que lorsque tout l'oxyde de plomb Pb O recouvrant les lames, est entièrement transformé.

Dans la deuxième partie de l'expérience, pendant que les 2 lames fonctionnent comme pile, la plaque positive (anode) se trouve ramenée à son état primitif (fig. 562)

$$PbO^2 + H^2 = PbO + H^2O$$

et la plaque négative (cathode) également

$$Pb + O = PbO$$

A ce moment le courant cesse.

Remarque. — En réalité les réactions qui se produisent pendant la charge et la décharge sont beaucoup plus complexes.

Les charges et les décharges successives produisent *des couches utilisables de* PbO^2 dont l'épaisseur va croissant, c'est *la période de formation* qui dure plusieurs semaines.

La formation naturelle ainsi obtenue est longue et fort coûteuse ; on remédie à cet inconvénient en pratiquant la *formation artificielle* beaucoup *plus rapide*.

Chaque électrode est alors formée de deux parties bien distinctes :

1° *une carcasse* en alliage de plomb et d'antimoine présentant des alvéoles.

2° des *matières actives* placées dans ces alvéoles.

Ces matières actives sont ou bien du *minium* ou bien une pâte épaisse *d'oxyde de plomb*, d'eau et d'acide sulfurique que l'on met à la place du plomb pulvérulent.

Tout l'art consiste a obtenir une adhérence réelle de ces matières actives à la carcasse. Les divers types d'accumulateurs (*Gadot, Tudor, Dinin*) ne diffèrent que par la présentation et la forme des plaques et de leurs alvéoles.

Formation. — Il suffit de faire passer une première fois le courant dans l'accumulateur, pour que les couches actives prennent naissance sous forme *de plomb réduit à la cathode* et de *peroxyde de plomb à l'anode*. Cette première charge plus longue que les suivantes est dite *charge de réduction*. On reconnaît que la formation est complète quand les plaques de la cathode sont *noires* et celles de l'anode *brun-rouge*.

Afin d'éviter la confusion, on a soin de peindre *en rouge* la borne positive et *en noir* la borne négative.

Enfin, lorsque l'accumulateur est formé et chargé, on s'assure que le liquide *marque bien* 28° *Baumé*.

Caractéristiques d'un accumulateur. — 1° *Force électromotrice* : Pendant la charge, la force contre-électromotrice augmente rapidement jusqu'à 2 volts 1, puis très lentement jusqu'à 2 volts 2 et enfin rapidement jusqu'à 2 volts 5. A ce moment le liquide bouillonne par suite de la formation de bulles gazeuses qui montent en abondance à la surface.

Pendant la décharge la force électromotrice baisse rapidement jusqu'à 1,95 volt, puis très lentement jusqu'à 1,85 volt, pour tomber ensuite brusquement.

On n'utilise l'accumulateur qu'entre 1,95 volt et 1,85 volt.

2° *Résistance intérieure* : Elle est très faible 0 ohm, 12 ; il y a donc avantage à associer les accumulateurs *en série*.

3° *Intensité du courant* : Pour la bonne conservation d'éléments, il ne faut jamais dépasser 3 *ampères* par kilogramme de plomb. Autrement l'intensité maximum du courant de charge et de décharge, ne doit pas être supérieure au $\frac{1}{10}$ de la capacité de l'accumulateur. Il ne faut jamais sous aucun prétexte *court-circuiter les bornes*.

4° *Capacité utilisable* : c'est le nombre de coulombs qu'un accumulateur peut restituer pendant la décharge ; elle s'évalue en ampères-heure ; elle est en moyenne de 10 à 13 ampères-heure par kilogramme de plomb.

Energie. — C'est le produit de la force électromotrice E par la capacité C.

$$P = E \times C$$

Pour un accumulateur de 30 ampères, elle est donc de :

$$2 \times 30 = 60 \text{ watts-heure.}$$

Rendement. — Un bon accumulateur doit rendre au moins $\frac{99}{100}$ de sa charge.

Usage des accumulateurs. — *Traction des tramways, des automobiles, éclairage et démarrage des automobiles.*

Les usines électriques possèdent *des batteries régulatrices* du courant qui alimentent le secteur en cas de panne des machines. Enfin leur usage est universellement répandu pour l'alimentation des *lampes des postes de* T. S. F.

Ils ont l'inconvénient d'*être lourds*.

Problèmes.

1. — Une lampe de 16 bougies à incandescence consomme sous 100 volts 2 watts par bougie. Calculez sa résistance à chaud et l'intensité du courant consommé ?

Solution

La lampe consomme 2 w × 16 = 32 watts.

Intensité en ampères : la puissance (exprimée en watts) étant le produit de l'intensité (exprimée en ampères) par la force électromotrice (exprimée en volts), on a :

$$P = I\,E \text{ d'où } I = \frac{P}{E} = \frac{32}{100} = 0{,}32 \text{ ampère}$$

Résistance en ohms : la loi d'Ohm donne :

$$E = I\,R \text{ d'où } R = \frac{E}{I} = \frac{100}{0{,}32} = 312{,}5 \text{ ohms}$$

2. — On veut élever de 10° à 100° la température de 1 litre d'eau en 5 minutes, en y plongeant un fil métallique parcouru par un courant.

1° Quelle devra être la résistance du fil sachant que la différence de potentiel entre ses bornes est 125 volts ?

2° Sachant qu'un fil de même substance et de 1 mm. de diamètre a une résistance de 0,4 ohm par mètre, quelle longueur de fil de 0,4 mm. de diamètre faudra-t-il prendre pour construire la résistance chauffante ?

3° Quelle sera l'intensité du courant circulant dans le fil.

4° Quelle sera la dépense d'énergie électrique sachant que le kilowatt-heure vaut 1,50 fr. ?

Solution

La chaleur dégagée pour échauffer l'eau sera

$$1000 \times 90 = 90\,000 \text{ calories}$$

ou

$$90\,000 \times 4{,}18 \text{ joules}$$

mais la loi de Joule donne

$$eit = 90\,000 \times 4{,}18$$

$e = 125$ volts $t = 5 \times 60 = 300$ secondes.

On a donc :

$$125 \times 300 \times i = 90\,000 \times 4{,}18$$

ou

$$i = 10 \text{ ampères environ.}$$

1° D'après la loi d'Ohm

$$E = I\,R$$

On a

$$125 = 10\,R$$

ou

$$R = \frac{125}{10} = 12{,}5\ \omega$$

2° La résistance est donnée par la formule

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

On a donc :

$$0{,}4 = \rho \frac{1}{\pi \times 0{,}05 \times 0{,}05}$$

$$12{,}5 = \rho \frac{l}{\pi \times 0{,}02 \times 0{,}02}$$

d'où

$$\frac{0{,}4}{12{,}5} = \frac{1 \times 0{,}02 \times 0{,}02}{l \times 0{,}05 \times 0{,}05}$$

d'où

$$l = \frac{12{,}5 \times 2 \times 2}{0{,}4 \times 5 \times 5} = \frac{500}{100} = 5\text{m}$$

Le longueur du fil à prendre est 5m.

La dépense est :

$$90\,000 \times 4{,}18 \text{ joules}$$

ou $\dfrac{90\,000 \times 4{,}18}{3600 \times 1000} = \dfrac{4{,}18}{40}$ kilowatt-heure.

En francs $1{,}5 \times \dfrac{4{,}18}{40} = 0{,}16$ f. environ.

3. — Un élément de pile a une force électromotrice de 2,5 volts et une résistance intérieure de 1 ohm. On réunit ses 2 pôles par un fil gros et court. Quelle est l'intensité du courant obtenu ? Quelle est la différence de potentiel aux 2 bornes de l'élément ? Qu'arrivera-t-il si le fil était très long et très fin ?

Solution

Le fil étant très gros et court, la résistance extérieure de la pile est négligeable. La loi d'Ohm donne :

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2{,}5}{1} = 2{,}5 \text{ A.}$$

La différence de potentiel aux 2 bornes de l'élément est presque nulle.

Si le fil était très long et très fin, l'intensité serait très petite, tandis que la différence de potentiel aux bornes serait très peu inférieure à 2,5 volts.

4. — On fait l'expérience suivante : dans une cuve contenant une dissolution de sulfate de cuivre, on fait plonger une sphère de fonte et une lame de cuivre. La sphère est reliée au pôle négatif d'une pile et la lame de cuivre au pôle positif. Que se passe-t-il dans cette expérience ? Décrivez-la dans tous ses détails et dites ce que vous savez du phénomène général dont elle est une application.

Dans l'expérience précédente la source électrique fonctionne pendant 1 heure et l'intensité du courant qu'elle fournit est de 5 ampères. On demande : 1° le poids de *Cu* déposé ; 2° le poids de sulfate de cuivre décomposé (on sait que $Cu = 63$; $S = 32$; $O = 16$ et que le cuivre est bivalent).

Solution

96.600 coulombs libèrent $\dfrac{63}{2}$ g. de cuivre. Or, un courant de 1 ampère débite 1 coulomb par seconde ; un courant de 5 ampères en 3.600 secondes donnera :

$$\frac{63 \times 5 \times 3.600}{2 \times 96.600} = 5{,}86 \text{ g. de cuivre.}$$

63 g. de cuivre proviennent de la décomposition de :

$$32 + 16 \times 4 + 63 = 159 \text{ g.}$$

de sulfate de cuivre.

5,86 g. proviennent de la décomposition de :

$$\frac{159 \text{ gr.} \times 5{,}86}{63} = 14{,}80 \text{ g. de sulfate.}$$

En réalité, le sulfate de cuivre est reconstitué au fur et à mesure de sa décomposition.

Réponses : 5,86 g.
14,80 g.

5. — Un circuit disposé pour une opération de cuivrage comprend deux éléments de pile au bichromate, groupés en série et une cuve électrolytique à sulfate de cuivre dont l'anode est en cuivre, dont la cathode est l'objet conducteur que l'on veut recouvrir de cuivre.

L'opération, en cours depuis quelque temps, se poursuit régulièrement.

On demande quelle est la masse du cuivre déposé à la cathode pendant une heure.

On sait que 96.600 coulombs mettent en liberté $\dfrac{63}{2}$ grammes de cuivre ; que la force électromotrice d'un élément de pile au bichromate est de 2 volts ; que la résistance intérieure de chacun des deux éléments utilisés est de 0,5 ohm, que la résistance du circuit extérieur à la pile, y compris la résistance de la dissolution de sulfate de cuivre, est de 7 ohms.

Réponse : 2,34 g.

6. — Sachant que $Cu = 63$, $S = 32$, $O = 16$ et que le cuivre est bivalent, trouver le poids de cuivre déposé et celui de sulfate de cuivre décomposé par un courant de 25 ampères pendant 2 heures.

Solution

La quantité d'électricité qui traverse la solution de sulfate de cuivre en 2 heures est de :

$$25 \times 60 \times 60 \times 2 = 180.000 \text{ coulombs}$$

Or, 96.600 coulombs libèrent $\dfrac{63}{2}$ g. de cuivre ; la quantité de Cu déposée est donc :

$$\frac{63 \times 180.000}{2 \times 96.600} = 58{,}75 \text{ g.}$$

La quantité de SO^4Cu décomposée serait (masse moléculaire de $SO^4Cu = 32 + 16 \times 4 + 63 = 159$)

$$\frac{159 \times 180.000}{2 \times 96.600} = 148{,}29 \text{ g.}$$

En réalité, puisque l'anode est en cuivre, tout se passe comme si le sulfate de cuivre n'était pas décomposé.

7. — On veut recouvrir d'une couche de cuivre de 0 mm. 1 une lame de cuivre de 100 cm² de surface. Intensité du courant : 5 ampères. Calculer le temps que durera l'opération. Densité du Cu 8,8. Masse atomique 63. Le Cu est divalent.

Solution

La plaque ayant 100 cm² de surface et la couche de cuivre 0 mm. 1 d'épaisseur, le volume du cuivre déposé est de 1 cm³. Il faut 96.600 coulombs pour déposer $\dfrac{63}{2}$ g. de cuivre. Pour en déposer 8,8 g., il faut $\dfrac{96.600 \times 2 \times 8{,}8}{63}$ coulombs.

L'intensité du courant employé étant 5 ampères, il faudra un temps égal à :

$$\frac{96.600 \times 2 \times 8{,}8}{63 \times 5} = 5.397 \text{ sec. ou 1 h. 29 min. 57 sec.}$$

8. — Les plaques d'un accumulateur pèsent 15 kg. Sachant qu'il peut donner à la décharge 10 ampères-heure par kilogramme de plaque, on demande de calculer en coulombs la quantité d'électricité qu'il peut restituer.

Solution

Un kilogramme de plaque pouvant donner 10 ampères-heure à la décharge, 15 kilogrammes de plaques donneront 150 ampères-heure. Or, l'ampère-heure équivaut à 3.600 coulombs. La quantité que cet accumulateur peut restituer est donc :

$$3.600 \times 150 = 540.000 \text{ coulombs.}$$

9. — Soit un circuit électrique formé d'un fil de cuivre de 2 mm² de section et de 20 km. de longueur ;

on demande de calculer la section que devra posséder un fil d'aluminium de même longueur pour présenter la même résistance au passage du courant. On calculera aussi le poids des deux conducteurs.

Résistivités en microhms-centimètre : cuivre, 1,584 ; aluminium, 2,889. Poids spécifiques : cuivre, 8,95; aluminium, 2,67.

Solution

Soient ρ et ρ' les résistivités du cuivre et de l'aluminium, s la section du fil de cuivre et x celui du fil d'aluminium ; nous avons :

$$R = \rho \frac{l}{s} = \rho' \frac{l}{x}$$

d'où :

$$\frac{\rho}{s} = \frac{\rho'}{x} \text{ et } x = \frac{\rho'}{\rho} s$$

Application numérique : $x = \frac{2.889}{1.584} \times 2 = 3{,}65 \text{ mm}^2$

Poids du conducteur de cuivre :

$l \times s \times d = 20.000.00 \times 0{,}02 \times 8{,}95 = 358.000$ g.

Poids du conducteur d'aluminium :

$l \times x \times d' = 2000000 \times 0{,}0365 \times 2{,}67 = 194.910$ g.

10. — Les pôles d'une batterie de piles sont reliés successivement par deux fils de résistances 4 ohms et 9 ohms. On constate que la quantité de chaleur dégagée par unité de temps dans chacun des deux fils est la même. Quelle est la résistance intérieure de la batterie de piles ?

Solution

Soit x la résistance cherchée, dans le premier cas l'intensité est i et dans le second i', nous avons d'abord :

$$i(x+4) = i'(x+9)$$

Mais puisque la quantité de chaleur dégagée dans les deux fils est la même :

$$i^2 \times 4 = i'^2 \times 9$$

d'où :

$$\frac{(x+4)^2}{(x+9)^2} = \frac{4}{9}$$

et

$$x = 6 \textit{ ohms.}$$

11. — Une pile est reliée par deux conducteurs, de résistance nulle, à deux électrodes de cuivre plongées dans une dissolution de sulfate de cuivre ; la résistance intérieure de cet électrolyte est R ohms. Sachant que le courant dépose P grammes de cuivre en une heure, on demande :

1° La différence de potentiel aux deux bornes de la pile.

2° La f.é.m. de la pile, dont la résistance intérieure est égale à r ohms. On sait d'ailleurs qu'un coulomb dépose 329 millièmes de milligramme de cuivre.

Application au cas où l'on a : R = 7,5 ; r = 2,5 ; P = 0,2369.

Solution

L'intensité du courant est :

$$i = \frac{P}{3600 \times 0.000329} \text{ ampères}$$

La différence de potentiel est donc :

$$V = i \times R = \frac{P \times R}{3600 \times 0.000329} \text{ volts}$$

et la f. é. m. aux deux bornes de la pile :

$$E = i(R + r) = \frac{P \times (R + r)}{3600 \times 0.000329} \text{ volts}$$

Application numérique :

$$V = \frac{0.2369 \times 7{,}5}{3600 \times 0.000329} = 1{,}5 \text{ volt}$$

$$E = \frac{0.2369 \times 10}{3600 \times 0.000329} = 2 \text{ volts}$$

12. — Une pile, dont la force électromotrice est 1 volt 6 et la résistance intérieure 2 ohms, est fermée par un fil cylindrique homogène P A M N dont la résistance est de 1 ohm. On joint l'un des pôles P au milieu M du circuit extérieur par un fil P M dont la résistance est de 1/4 d'ohm. On demande l'intensité du courant qui traverse P M. (fig. 563).

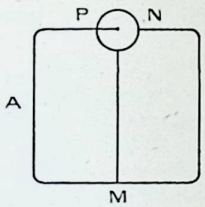


Fig. 563

Solution

Soit i l'intensité du courant qui traverse N M ; nous avons :

$$1{,}6 = i\left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{6}\right)$$

En effet l'intensité R entre M et P est telle que :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 6$$

d'où : $i = 0{,}6$ A

Mais si nous appelons x et y les intensités des courants dans MP et MAD, nous avons :

$$x \times \frac{1}{4} = y \times \frac{1}{2}$$

$$\text{et } x + y = 0{,}6$$

Nous en tirons : $x = 0{,}4$ A.

13. — Un circuit a la forme ci-dessous (fig. 564). Les résistances des différentes parties de ce circuit ramifié ont les valeurs suivantes :

A M B = 1 ω	K B = 2 ω
H A = 1 ω	A N B = 2 ω
A P B = 3 ω	(ω = ohm)

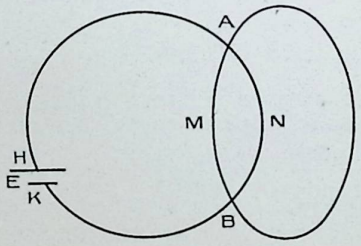


Fig. 564

La f. é. m. E est égale à 2 volts et la résistance inférieure est négligeable. Calculez les intensités des courants qui circulent dans les différentes parties de ce circuit.

Solution

Les trois résistances A MB, A N B et A N P peuvent être remplacées par une résistance unique r telle que :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Si nous appelons i l'intensité du courant dans la partie H A :

$$2 = i \times (1 + 2 + r) = i\left(1 + 2 + \frac{6}{11}\right)$$

Nous en tirons : $i = \frac{22}{39}$ ampère.

La différence de potentiel entre A et B est constante, soit V ; d'où :

$$V = i_1 \times 1 = i_2 \times 2 = i_3 \times 3$$

en appelant i_1, i_2 et i_3 les intensités des courants passant dans A M B, A N B et A PB.

$$\text{Mais :} \quad i_1 + i_2 + i_3 = \frac{22}{39}$$

$$\text{Nous en tirons:} \quad i_1 = \frac{12}{39} \text{ amp.}$$

$$i_2 = \frac{6}{39} \text{ amp.}$$

$$i_3 = \frac{4}{39} \text{ amp.}$$

14. — Une lampe à incandescence de 16 bougies consomme une puissance électrique de 3 watts par bougie. Elle est alimentée par une distribution à 110 volts, c'est-à-dire que la différence de potentiel aux deux bornes = 110 volts. On demande :

1° L'intensité du courant qui traverse le filament.

2° La résistance de ce filament.

3° Combien coûterait par heure une installation électrique comportant 20 lampes de 16 bougies chacune brûlant simultanément.

L'énergie électrique est vendue au prix de 6 centimes l'hectowatt-heure.

Solution

La puissance totale est :

$$P = 16 \times 3 = 48 \text{ watts}$$

$$\text{Mais : } P = E \times i = i^2 R.$$

D'où

$$i = \frac{48}{110} \text{ amp.} = 0,^{\text{amp.}}436$$

$$\text{et } R = \frac{110^2}{48} \text{ ohms} = 252 \text{ ohms environ}$$

Prix de revient par heure :

$$\frac{20 \times 48 \times 0,06}{100} = 0,576 \text{ f.}$$

15. — Entre les armatures d'un condensateur dont la capacité est de 1 microfarad, on établit une différence de potentiel de 110 volts.

1° Quelle est l'énergie électrique du condensateur ?

2° Quelle quantité de chaleur peut dégager la décharge de ce condensateur ?

3° Quelle masse d'argent cette décharge peut-elle mettre en liberté dans un sel d'argent ?

Solution

1° Le condensateur prend une charge de :

$$Q = C \times V = \frac{1}{10^6} \times 110 \text{ coulombs}$$

L'énergie est donc :

$$T = Q \times V = \frac{1}{10^6} \times 110^2 \text{ joules} = 0,0121 \text{ joules}$$

2° Il faut 4 joules 17 pour 1 calorie ; donc la quantité de chaleur dégagée par la décharge du condensateur serait :

$$\frac{0,0121}{4,17} \text{ calorie}$$

3° 96.000 coulombs mettent en liberté 108 g. d'argent ; nous aurons donc :

$$\frac{110 \times 108}{96600 \times 10^6} = 0,000000125 \text{ gramme d'argent}$$

16. — Par deux fils de résistance négligeable, on relie les pôles d'une pile de f.é.m. e à deux points d'un circuit de résistance total R comprenant une pile de f.é.m. E ; on désignera par x la résistance de la portion du circuit extérieur comprise entre les deux points d'attache.

1° On demande à quelles conditions il est possible d'obtenir que la pile de f.é.m. e ne soit traversée par aucun courant.

2° Ce résultat étant supposé réalisé, on substitue à la pile de f. é. m. e une résistance R. Quelle est alors la masse du zinc dissous en une heure dans la pile qui fournit le courant.

Application numérique : E = 4 volts ; e = 1 volt ; R = 28 ohms ; Zn = 65. On sait que 96.600 coulombs dégagent 1 g. d'hydrogène dans l'électrolyse de l'eau.

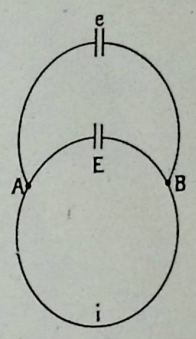


Fig. 565

Solution

1° Nous devons avoir :

$$e - (V_A - V_B) = 0$$

$$\text{d'où : } e = V_A - V_B = i(R - x)$$

Mais nous aurons aussi :

$$E - (V_A - V_B) = i \times x$$

$$\text{d'où : } E - e = i\,x$$

En divisant membre à membre :

$$x = \frac{R(E - e)}{E} = 18 \text{ ohms}$$

2° Remplaçons e par une résistance R ; la résistance sera :

$$18 + r$$

$$\text{telle que} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$$

$$\text{d'où : } E = i' \times \left(18 + \frac{24}{5}\right)$$

$$\text{ce qui donne : } i' = \frac{20}{114} \text{ ampère}$$

D'où le zinc déposé en une heure :

$$P = \frac{65 \times 2 \times 20 \times 3600}{114 \times 96600} = 0,85 \text{ g.}$$

17. — On dispose de 20 éléments de pile Daniell-Becquerel (constantes d'un élément : f.é.m. à circuit ouvert : e volts ; résistance intérieure supposée constante r ohms). On les couple, soit en deux séries parallèles de 10 éléments (fig. 566), soit en 10 séries parallèles de 2 éléments (fig. 567), et, dans chacun des cas, on relie directement les bornes A et B de la batterie à un

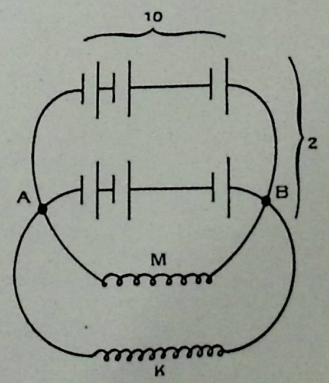


Fig. 566

circuit dérivé formé de deux fils de cuivre A M B, A K B de résistances respectives R ohms et R' ohms. On demande :

1° D'établir la relation qui doit lier les résistances r, R et R' pour que le courant total obtenu avec chacun des couplages ait même intensité.

2° De donner la formule de cette intensité I, en fonction exclusivement de e et r, en supposant remplie la condition 1.

3° D'exprimer, dans le même cas, la puissance utile P aux bornes de la batterie, en fonction, toujours de e et r.

4° De calculer la longueur x, en mètres, du fil A M B (de résistance R) sachant que le fil A M B a une longueur de 1 mètre et une section de s centimètres carrés, et que le diamètre de section droite du fil A K B vaut la moitié de celui du fil A M B. On exprimera x en fonction exclusivement de r, l et s, et on donnera les conditions de possibilité du résultat.

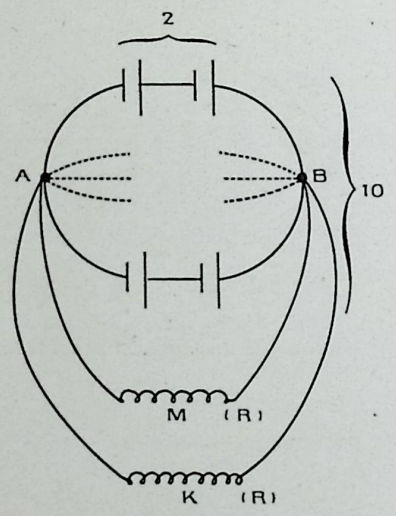


Fig. 567

Applications numériques : e = 1,10 volt ; r = 0,20 ohm ; l = 25 mètres ; s = 0,02 cm² ; résistance spécifique du cuivre 0,02 ohm.

Solution

La résistance du système de deux fils est R_1 telle que :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{R + R'}{R\,R'}$$

La résistance R_2 pour la première association est :

$$R_2 = \frac{r}{5}$$

La résistance R_3 pour la troisième : $R_3 = 5\,r$

D'où les deux équations :

$$2e = \left(\frac{R\,R'}{R + R'} + \frac{r}{5}\right) \times i$$

$$10e = \left(\frac{R\,R'}{R + R'} + 5r\right) \times i$$

et en divisant membre à membre, il vient :

$$r = \frac{R\,R'}{R + R'}$$

2° De la deuxième équation, nous tirons :

$$10\,e = 6\,ri$$

$$\text{d'où :} \quad i = \frac{5e}{3r}$$

3° La puissance P est égale à : $i^2 R_1$

$$\text{d'où :} \quad P = \frac{25\,e^2}{9\,r^2} \times r = \frac{25\,e^2}{9\,r}$$

4° La résistance R est : $R = \rho \dfrac{l}{s}$

$$\text{Nous avons :} \quad R' = \rho \frac{x}{\frac{s}{4}} = 4\,\rho \frac{x}{s}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{\frac{4\,\rho\,x}{s} \times \rho \frac{l}{s}}{\frac{4\,\rho\,x}{s} + \rho \frac{l}{s}} = r$$

$$\text{il vient :} \quad x = \frac{r\,l\,s}{4\,(\rho\,l - r\,s)}$$

Applications numériques :

R = 0,25 ω R' = 1 ω
i = 9,16 amp. P = 16,80 ω
x = 25 mètres

CHAPITRE XII

ÉLECTROMAGNÉTISME

L'électromagnétisme étudie les actions réciproques des aimants et des courants.

Action d'un courant sur un aimant. — Expérience d'Œrsted. — C'est Œrsted qui pour la première fois observa l'action exercée par un courant sur une aiguille aimantée placée au-dessus ou au-dessous d'un fil conducteur. L'aiguille est déviée de sa position d'équilibre et tend à se mettre en croix avec le courant (fig. 568). Œrsted ne parvint pas cependant à tirer de ce phénomène une loi générale.

C'est Ampère qui, en reprenant les études d'Œrsted, a donné l'énoncé très simple que voici :

Un courant rectiligne agissant sur un aimant tend toujours à le placer dans une position perpendiculaire à la sienne et de manière que le pôle austral soit à la gauche du courant.

Pour définir la gauche du courant, *Ampère suppose un observateur placé dans le courant qui le traverse en allant des pieds à la tête* ; dans cette position, l'observateur regarde l'aiguille ; sa *gauche est par définition la gauche du courant.*

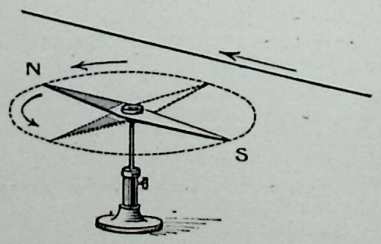


Fig. 568

Supposons que le courant passe dans le conducteur *p n* dans le sens indiqué par la flèche, l'aiguille étant au-dessous. L'observateur aura les pieds en *p*, la tête en *n* s'il regardel'aiguille, sa gauche sera en avant du papier, le pôle austral devra donc venir en avant du plan de la figure (fig. 569). Si le fil est placé au-dessous de l'aiguille, l'observateur devra se renverser sur le dos. Sa gauche sera en arrière du plan de la figure, et c'est de ce côté que le pôle austral de l'aiguille sera dévié.

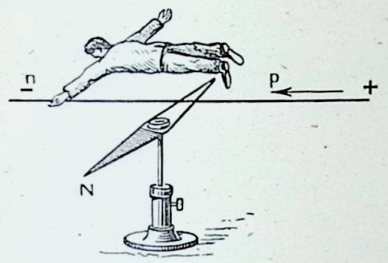


Fig. 569

Tout se passe comme si chaque pôle de l'aiguille était soumis à l'action d'une force *dite électromagnétique*

Cette force est normale au plan qui contient la direction du courant et les pôles. Sans l'action de la terre, l'aiguille se mettrait en croix avec la direction du courant.

Un courant crée donc un champ magnétique analogue à celui d'un aimant.

Champ d'un courant rectiligne. — Un carton horizontal saupoudré de limaille de fer est traversé par un fil conducteur *a b* perpendiculaire dans lequel circule un courant allant de *a* vers *b*, l'expérience montre que la limaille de fer se dispose suivant des circonférences concentriques qui forment *les lignes de forces* (fig. 570).

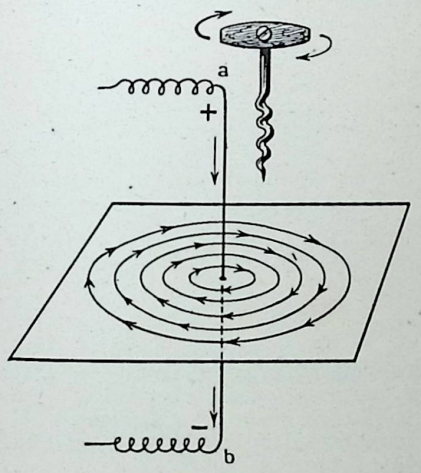


Fig. 570

Le sens de ces lignes de force est donné par la règle du *tire-bouchon de Maxwell.*

C'est le sens dans lequel il faut faire tourner un tire-bouchon pour qu'il avance dans le sens du courant.

Champ d'un courant circulaire. — Si on dispose verticalement, un courant circulaire *a b* sur un carton saupoudré de limaille de fer, on constate, que les lignes de force sont des circonférences concentriques légèrement déformées vers le milieu du carton (fig. 571). Le sens de ces lignes de force est encore donné par la règle de Maxwell.

Champ d'un solénoïde. — *On appelle solénoïde, un ensemble de courants égaux, parallèles et de même sens, très rapprochés et perpendiculaires à une même ligne appelée axe du solénoïde.*

On l'obtient en enroulant un grand nombre de fois un fil de cuivre isolé à la cire sur un cylindre de bois ou de verre (fig. 572).

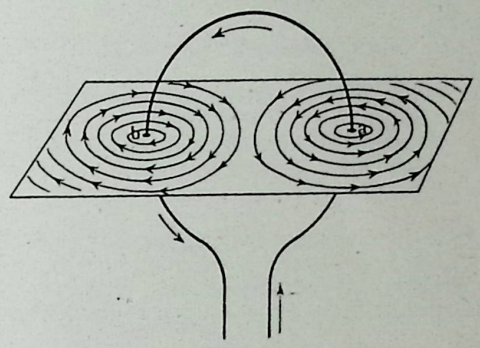


Fig. 571

On réalise un *solénoïde mobile* en armant chacune des deux extrémités d'une pointe d'acier plongeant dans un godet contenant du mercure (fig. 573. Les deux godets sont sur un même axe vertical.

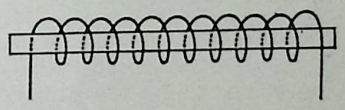


Fig. 572

Si on fait traverser un carton saupoudré de limaille de fer par les spires d'un solénoïde, on constate que les lignes des forces offrent une *ressemblance frappante avec celles du spectre magnétique d'un aimant* ; ces lignes de force se forment à l'intérieur du solénoïde où elles sont parallèles entre elles (fig. 574).

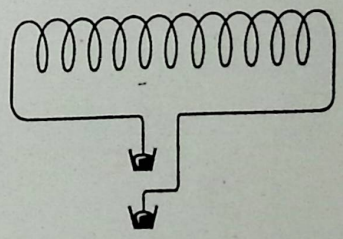


Fig. 573

On appelle face gauche du solénoïde la face B qui se trouve à *gauche de l'observateur d'Ampère* placé dans le sens du courant et face droite la face A. En remarquant que les lignes de force d'un aimant partent du pôle N pour aller vers le pôle S, on voit que le pôle N

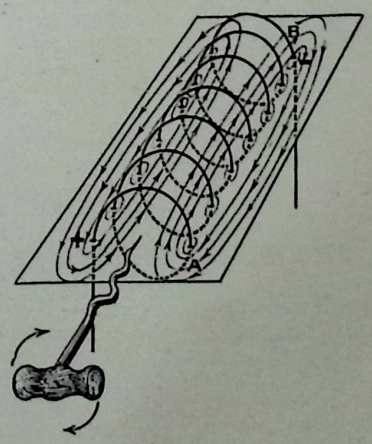


Fig. 574

sera *la face gauche B* et le pôle sud *la face droite A*. On voit que le pôle N est le pôle dans lequel le courant circule dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Un solénoïde a les mêmes propriétés générales qu'un aimant.

1° *Il s'oriente sous l'action du champ magnétique terrestre.*

2° *Les pôles de même nom se repoussent, les pôles de noms contraires s'attirent.*

3° *Le pôle nord d'un solénoïde est attiré par le pôle sud d'un aimant.*

4° *Un courant électrique disposé parallèlement à l'axe du solénoïde tend à le mettre en croix, le pôle N étant dévié à gauche.*

Intensité du champ magnétique d'un solénoïde. La forme des lignes de forces montre que ce champ est *uniforme* sauf aux extrémités du solénoïde.

L'intensité de ce champ est donnée par la formule

$$H = \frac{4\pi n_1 I}{10} \text{ gauss}$$

ou

$$H = 1{,}25\, n_1 I \text{ gauss}$$

n_1 étant le nombre de spires au centimètre et I l'intensité du courant en ampères.

Action d'un champ magnétique sur un courant mobile. — L'aiguille aimantée étant déviée de sa position par le courant, il est naturel de penser que réciproquement *l'aimant étant fixe le courant mobile sera déplacé.* C'est en effet ce que l'expérience vérifie. On réalise un courant mobile à l'aide d'un cadre dont les extrémités plongent dans deux godets remplis de mercure comme l'indique la figure 575, ou plus simplement avec un fil de cuivre dont les deux extrémités aboutissent à deux lames (cuivre et zinc) fixées sur un flotteur placé à la surface de l'eau acidulée (fig. 576). On constate qu'un tel courant mobile s'oriente *perpendiculairement au méridien magnétique terrestre.*

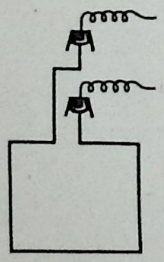


Fig. 575

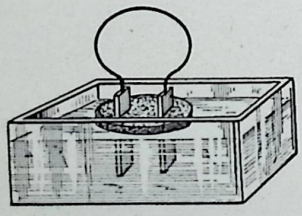


Fig. 576

Si on introduit obliquement un aimant dans le cadre on voit ce dernier se *mettre en croix* avec l'*aimant*, de façon que le pôle nord se trouve à gauche du courant.

C'est la loi générale de l'électromagnétisme.

Loi : *Un circuit mobile dans un champ magnétique s'oriente normalement aux lignes de force de façon que le flux pénètre par la face sud et soit maximum.*

Application. — Rotation de la *Roue de Barlow* (fig. 577)

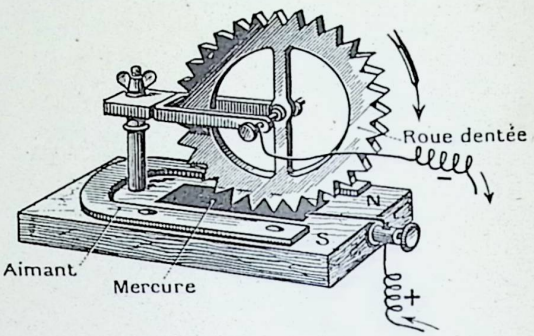


Fig. 577

Rotation du disque de Faraday

Un disque métallique mobile autour d'un axe *x y* parallèle aux lignes de force d'un champ uniforme se met à tourner dans le sens, de la flèche lorsque le courant passe suivant *a, b* (fig. 578).

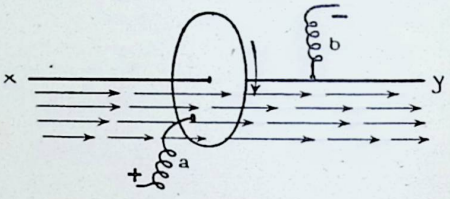


Fig. 578

Actions réciproques des conducteurs parcourus par des courants.

Loi des courants parallèles. — *Deux courants parallèles et de même sens s'attirent.*

Deux courants parallèles et de sens contraires se repoussent.

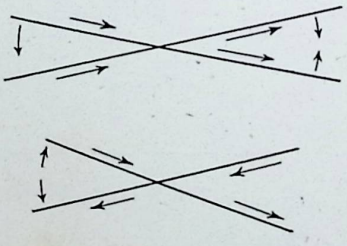


Fig. 579

Loi des courants angulaires. — Deux courants angulaires, s'attirent, s'ils *s'approchent ou s'éloignent tous les deux de leur point de croisement.*

Ils se repoussent si l'un s'approche et l'autre s'éloigne (fig. 579).

CHAPITRE XIII

AIMANTATION PAR LES COURANTS

SONNERIES — TÉLÉGRAPHE

Aimantation par les courants. — Pour aimanter une aiguille d'acier, une épingle à tricoter par exemple, on peut la placer dans un tube de verre autour duquel on a enroulé, en forme de solénoïde, un fil métallique traversé par un courant (fig. 580). L'aiguille s'aimante et le *pôle austral* se développe suivant la loi d'Ampère à l'extrémité du solénoïde qui, si on le regarde en face, semble parcouru par le courant *dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.*

Electro-aimant. — Un électro-aimant est constitué par une bobine de bois sur laquelle on enroule un fil métallique isolé pouvant être traversé par un courant, et dans laquelle on introduit un noyau de fer doux. Chaque fois que le courant passe celui-ci s'aimante fortement.

En général, on réunit deux bobines disposées parallèlement, le sens de l'enroulement étant tel que, si l'on redressait le système en mettant les deux barreaux bout à bout par leur extrémité inférieure, le fil tournerait toujours dans le même sens, en passant d'une bobine à l'autre.

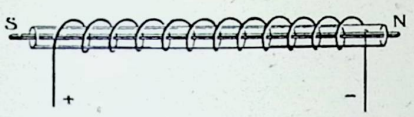


Fig. 580

Souvent on recourbe le barreau en fer à cheval, et on place chacune des extrémités dans une bobine (fig. 582). Les électro-aimants *ont une grande puissance*; celle-ci est proportionnelle à l'intensité du courant. Les noyaux de fer doux doivent avancer légèrement en dehors des bobines.

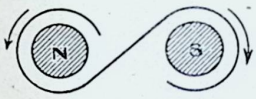


Fig. 581

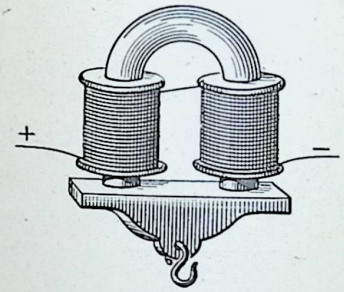


Fig. 582

Applications des électro-aimants. — Les électro-aimants ont reçu des applications multiples, dont l'une des plus importantes est le télégraphe. Une autre application usuelle est celle de la *sonnette électrique*. Supposons qu'un électro-aimant soit relié au pôle positif d'une pile et d'autre part à une tige A à l'extrémité de laquelle est fixée un ressort faible qui à l'état de repos reste appliqué contre l'extrémité d'une vis réglable V en communication avec le pôle négatif de la pile (fig. 583).

Une lame de fer doux prolonge le ressort R disposé devant l'électro-aimant. Elle est terminée par une tige B à l'extrémité de laquelle se trouve un petit marteau M devant lequel un timbre est placé à une petite distance. Le système est complété par un interrupteur de courant placé quelque part sur le circuit (fig. 584).

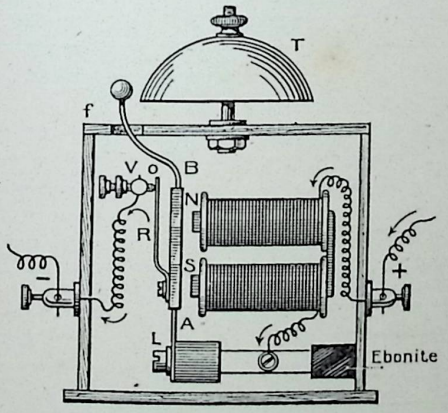


Fig. 583

Supposons qu'on appuie sur le bouton de l'interrupteur, on ferme le circuit et le courant passe dans l'électro-aimant. La petite pièce de fer doux du ressort de cuivre est attirée par l'électro-aimant, elle entraîne le ressort, et le contact de ce dernier avec le bouton de cuivre auquel se rattache l'extrémité du fil de la bobine se trouve rompu. Le courant cesse de passer dans le circuit et par suite dans l'électro-aimant. Ce dernier perd sa puissance d'attraction et le ressort de cuivre, n'étant plus sollicité par lui, revient par élasticité en contact avec le cuivre de la bobine. Le courant est aussitôt rétabli. L'électro-aimant rentre en activité et attire de nouveau le ressort de cuivre. Celui-ci exécute donc, entre l'électro-aimant et le contact de cuivre, une série d'allées et venues à chacune desquelles le petit marteau qu'il supporte, vient heurter le timbre et le fait résonner.

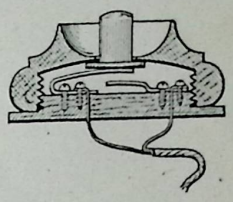


Fig. 584

Télégraphe électrique. — C'est un appareil qui a pour but d'utiliser l'énergie électrique pour transmettre à distance la pensée humaine au moyen de signaux conventionnels.

L'appareil Morse se compose :

1° d'une *pile* qui engendre le courant ;

2° d'un *fil de ligne* qui transmet le courant, le retour du courant s'effectue par la terre ;

3° d'un *interrupteur* ou *manipulateur* qui permet de régler la durée du passage du courant ;

4° d'un *récepteur* qui enregistre les signaux ;

5° de divers appareils accessoires.

Pile. — On se sert d'éléments Daniell, Leclanché et Callaud ; dans les grands centres on fait usage d'accumulateurs.

Fil conducteur. — C'est un fil de fer galvanisé de 4 millimètres d'épaisseur fixé, par l'intermédiaire d'isolateurs en verre ou porcelaine, à des poteaux en bois (fig. 585).

Pour la télégraphie sous-marine, on se sert de câbles composés d'un fil conducteur appelé âme, d'une couche isolante en gutta-percha et d'une armature en fils d'acier recouverte de chanvre goudronné (fig. 586).

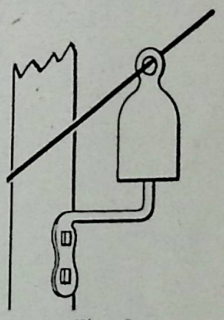


Fig. 585

Manipulateur. — Il consiste en un levier métallique L mobile autour d'un axe horizontal O. L'une des extrémités, à l'état de repos, est appliquée contre un petit butoir ou potelet P, en communication avec le récepteur. L'autre bras du levier porte une pointe, qui peut s'appliquer sur un second potelet P'. Quand on appuie sur un bouton B fixé à l'extrémité du levier, ce second potelet est en relation avec le pôle positif de la pile, tandis que le levier est en communication avec la ligne qui, après avoir traversé le récepteur, aboutit à la terre (fig. 587). Le pôle négatif de la pile est lui-même en communication avec la terre. Si on appuie sur le bouton du levier, le circuit se trouve fermé par la ligne et par la terre qui constitue un conducteur de résistance nulle. Quand on lâche le bouton, le levier est ramené à sa position première par un ressort ou par un contrepoids et le courant cesse de passer.

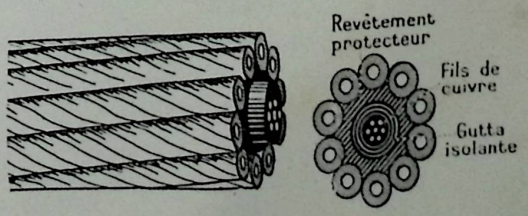


Fig. 586

Récepteur. — Il consiste essentiellement dans un *levier* A O B mobile autour d'un axe O, la branche O B porte une pièce de fer doux qui forme l'armature d'un électro-aimant E en communication avec la ligne et

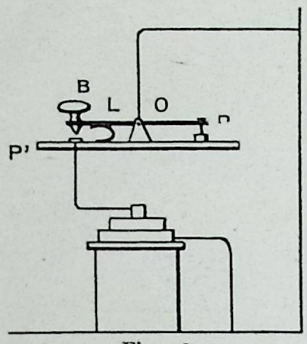


Fig. 587

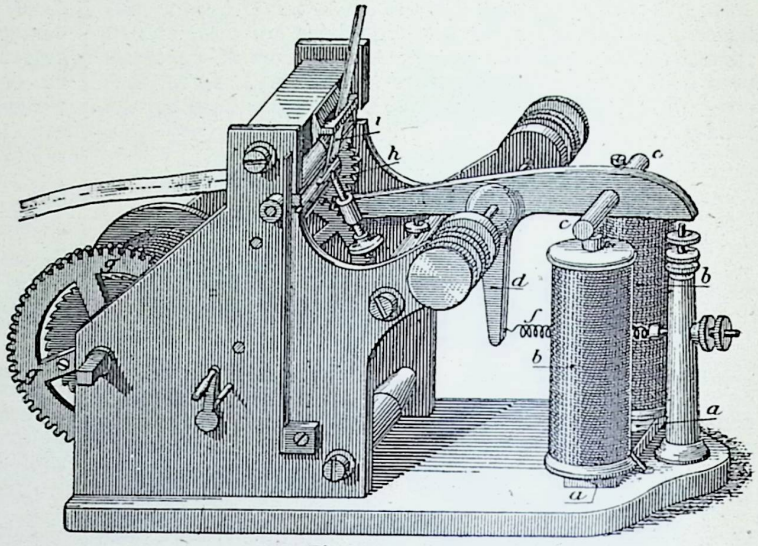


Fig. 588 a

le sol, la branche O A est terminée par une pointe recourbée A pouvant soulever une bande de papier qui se déroule d'un mouvement uniforme. Une molette garnie d'encre est disposée au-dessus de A (fig. 588).

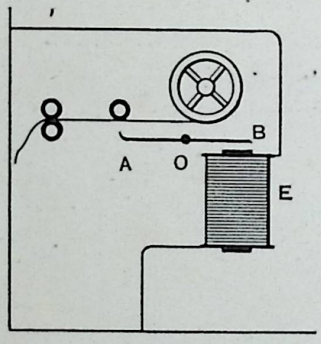


Fig. 588

Fonctionnement. — Quand le courant ne passe pas dans l'électro-aimant, B est maintenu éloigné de E par un ressort.

Dès que le courant passe, B est attiré par E qui est aimanté et la pointe A fait appuyer la bande de papier sur la molette qui trace ainsi un *point* ou un *trait* selon la *durée* de *passage* du courant.

En combinant les points et les tirets, Morse a formé un alphabet à l'aide duquel on peut correspondre (fig. 590).

Appareils divers. — Chaque poste comprend une *sonnerie*, un *galvanomètre*, un *paratonnerre* et un *relai*.

Appareil de Hughes. — On fait maintenant usage de l'appareil Hughes qui fournit la réception du télégramme sous forme d'une bande imprimée en caractères typographiques (fig. 589).

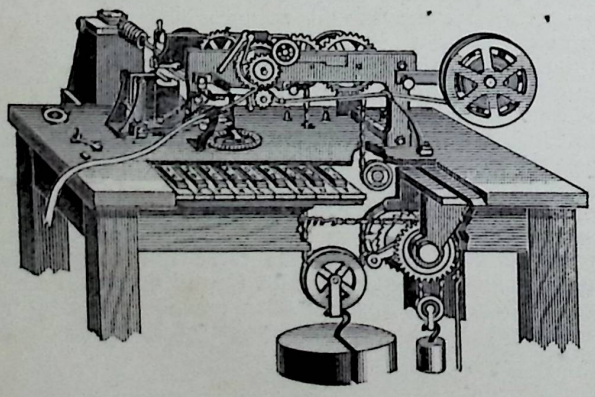


Fig. 589

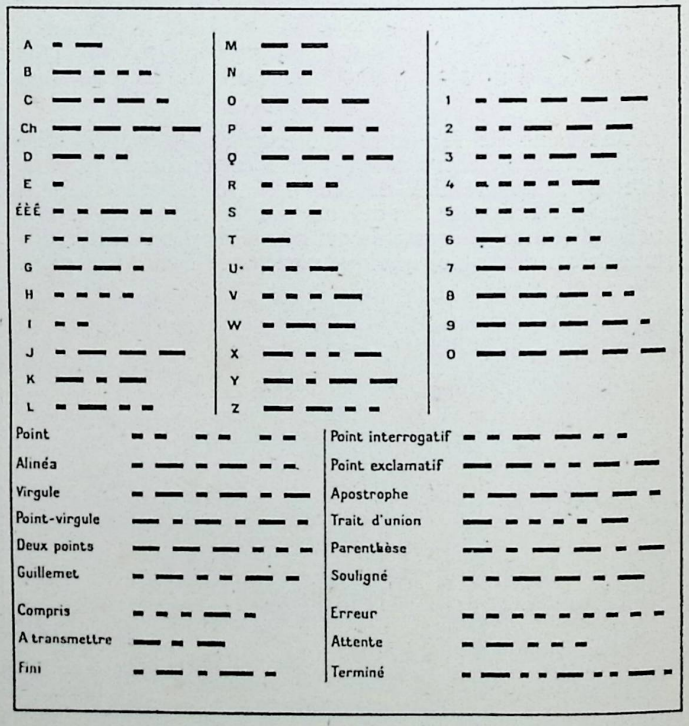


Fig. 590 — Alphabet Morse

CHAPITRE XIV

GALVANOMÈTRES ET AMPÈREMÈTRES

VOLTMÈTRES

Les galvanomètres sont des instruments qui servent à mesurer l'intensité d'un courant.

On distingue :

1° Les galvanomètres à *aimant mobile* ;
2° les galvanomètres à *courant mobile* ;
3° l'ampèremètre ou *galvanomètre industriel.*

Le galvanomètre à *aimant mobile le plus parfait* est celui de *Lord Kelvin* (fig. 591 et 592).

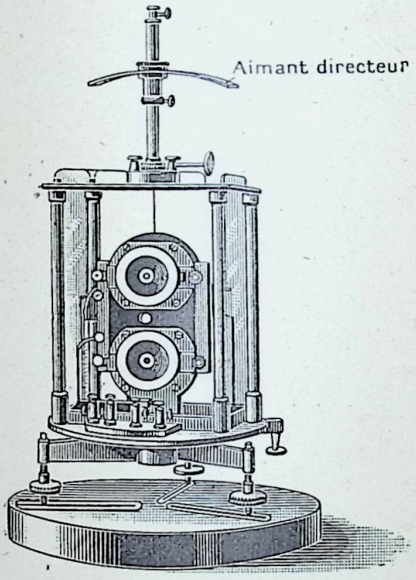


Fig. 591

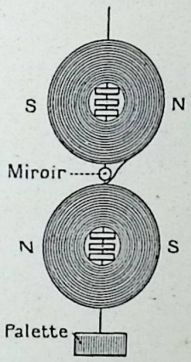


Fig. 592

Nous nous bornerons à en indiquer le principe.

Une aiguille aimantée ou mieux un *système astatique* (fig. 593) composé de deux aiguilles aimantées ou de plusieurs barreaux aimantés est disposé au centre d'un multiplicateur. Un *multiplicateur* est un cadre de bois sur lequel on enroule un certain nombre de fois un fil de cuivre isolé à la soie (fig. 594).

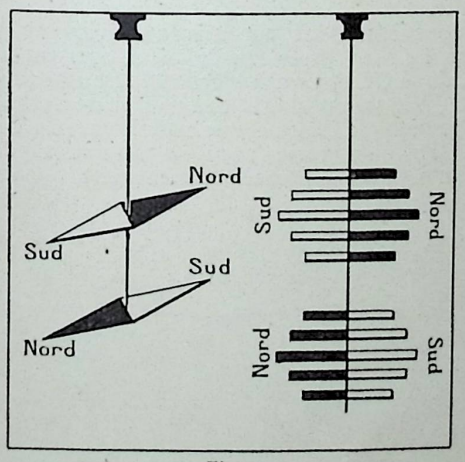


Fig. 593

Sous l'action du courant passant dans le multiplicateur le système astatique dévie :

La déviation accuse le passage d'un courant.

Le sens de la déviation indique le sens de courant.

L'angle de déviation permet de calculer l'intensité du courant.

Parmi les galvanomètres à courant mobile nous prendrons pour type celui de *Deprez* et *d'Arsonval* (fig. 595).

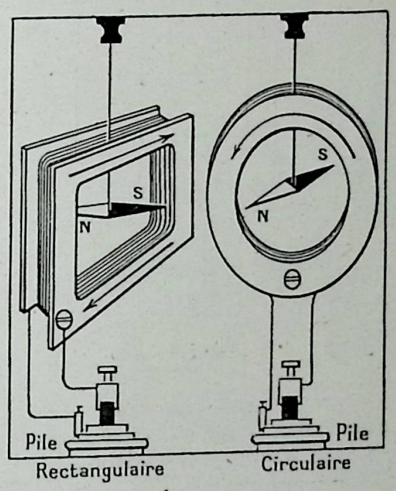


Fig. 594

Il repose sur le principe suivant :

Si on dispose un cadre mobile A B C D entre les deux pôles N et S d'un aimant en fer à cheval et qu'on fasse passer un courant dans ce cadre, les côtés A C et B D traversés par des courants *de sens contraires sont soumis à l'action de deux forces égales et de signes contraires qui forment un couple* et tendent à placer le cadre perpendiculairement aux lignes de forces (fig. 596).

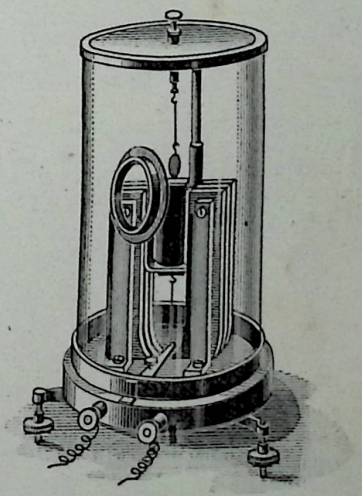


Fig. 595

Remarque. — Afin de mesurer avec précision la déviation du système astatique ou du cadre dans les galvanomètres, les axes de suspension sont munis d'un *petit miroir solidaire* de cet axe (fig. 597).

On démontre que si on envoie normalement à la surface d'un tel miroir un rayon lumineux S I, il se réfléchit suivant I R en faisant un *angle* $S\hat{I}R = 2\alpha$ lorsque le miroir a tourné d'un *angle* α (fig. 598).

Les ampèremètres industriels sont nombreux et variés ; nous prendrons pour type celui de *Duprez-Carpentier* (fig. 599).

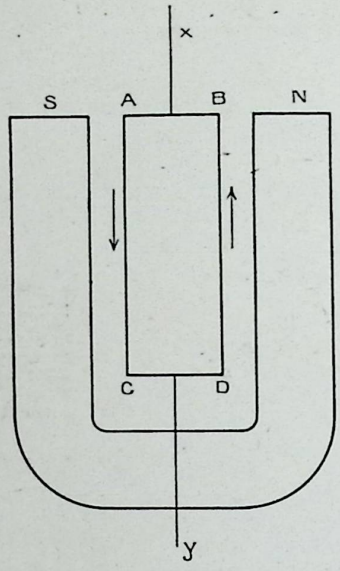


Fig. 596

Il se compose d'un petit barreau aimanté *a b* mobile autour d'un axe O perpendiculaire à sa direction et portant une aiguille longue et fixe pouvant se déplacer devant un cadran gradué.

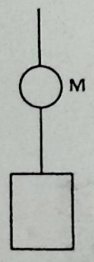


Fig. 597

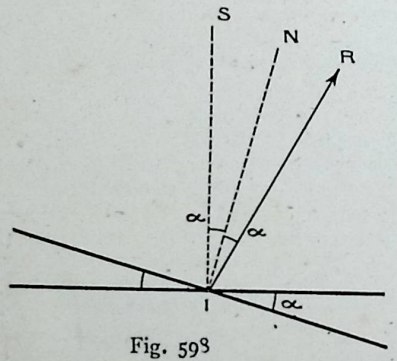


Fig. 598

Le barreau *a b* est soumis d'une part à l'action du champ de deux aimants puissants N S, N′ S′ qui rendent négligeable l'action de la terre, d'autre part à l'action du champ d'un double solénoïde parcouru par le courant à mesurer (fig. 600).

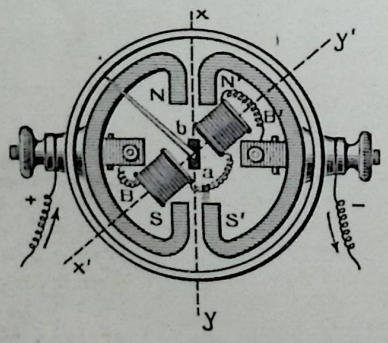


Fig. 599

Sous l'action de ce courant le barreau aimanté soumis à la double action des aimants et la bobine prennent une position intermédiaire entre les deux axes *x y* et *x′ y′*, position d'autant plus rapprochée de *x′ y′* que le courant est plus fort.

Remarques. — Les appareils de ce genre destinés à mesurer l'intensité d'un courant sont appelés *ampèremètres*, ils sont à *faible résistance*, c'est-à-dire que le

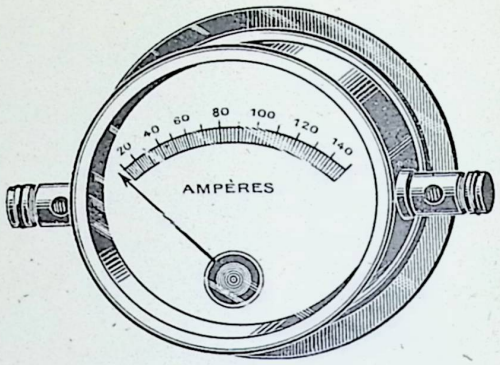


Fig. 600

fil de la bobine *est court et gros*. On les monte *directement* sur le circuit (fig. 601).

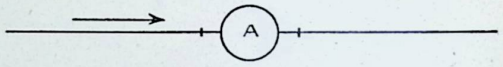


Fig. 601

Au contraire ceux qui sont destinés à mesurer la force électromotrice sont appelés des *voltmètres*, ils sont à *grande résistance*, c'est-à-dire que le fil de la bobine est *long et fin*. On les monte en *dérivation* (fig. 602).

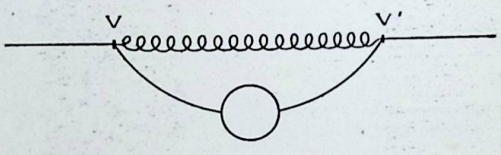


Fig. 602

A cause de leur grande résistance, ils modifient peu l'intensité du courant du circuit et la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la différence des potentiels aux points touchés V et V′.

Lorsqu'on doit mesurer de grandes intensités, on monte l'ampèremètre avec un shunt que nous avons décrit dans un précédent chapitre.

On fait usage également dans l'industrie d'appareils thermiques.

Leur fonctionnement est mis en évidence par la figure 603. Ils sont basés sur la dilatation qu'éprouve un fil tendu A C B lorsqu'il s'échauffe sous l'action du courant électrique. Un fil C D tiré par un ressort R passe sur une poulie P solidaire d'une aiguille a. Le déplacement de l'aiguille varie avec la dilatation de A B autrement dit avec l'intensité ou courant

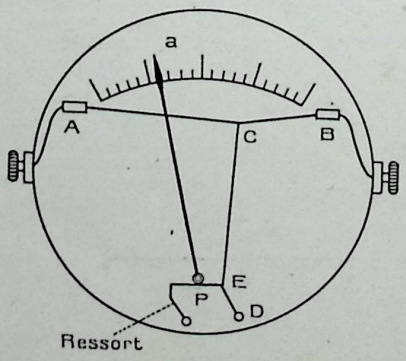


Fig. 603

CHAPITRE XV

INDUCTION

On appelle **courants d'induction** des *courants temporaires* qui prennent naissance dans un *circuit fermé* et *conducteur* soumis à l'action d'un *champ magnétique* lorsque le *flux* qui traverse ce circuit *varie*.

L'induction peut être produite :

1° par un courant (*induction voltaïque*) ;

2° par un aimant (*induction magnétique*) ;

3° par la terre (*induction tellurique*) ;

4° par le courant lui-même (*self-induction*).

Induction voltaïque. — Les lois se déduisent d'un certain nombre d'expériences faites avec *l'appareil de Faraday*, lequel se compose de deux bobines, l'une A à spires nombreuses de fil long et fin, l'autre B à spires peu nombreuses de fil gros et court (fig. 604).

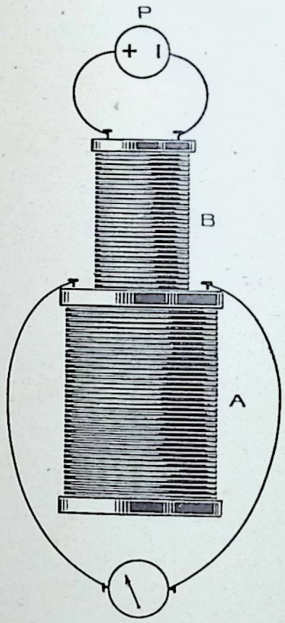


Fig. 604

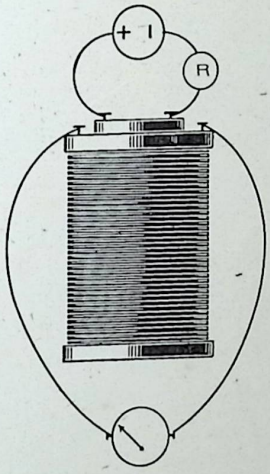


Fig. 605

Les extrémités de la bobine A sont reliées aux borne d'un galvanomètre G, celles de la bobine B aux pôle d'une pile P.

1° La bobine B appelée *bobine inductrice* étant placée dans la bobine A appelée *bobine induite*, on fait passer le courant de la pile P dans B ; on constate que l'aiguille du galvanomètre est déviée pendant un temps très court, de plus la déviation accuse le passage d'un courant de *sens inverse* du courant inducteur. Si maintenant, on supprime le courant de la pile, le galvanomètre accuse le passage d'un *courant induit* de courte durée et de *même sens* que le courant inducteur.

2° Les deux bobines étant l'une dans l'autre (fig. 605) ; on *augmente*, à l'aide d'un rhéostat, l'intensité du courant inducteur, on constate l'existence d'un courant induit de faible durée et de *sens inverse* du courant inducteur. Si au contraire on *diminue* l'intensité du courant inducteur, le galvanomètre indique le passage de courte durée d'un courant de *sens direct*.

3° Les deux bobines étant séparées, on *introduit* la bobine B dans la bobine A. L'aiguille indique le passage d'un courant de *sens inverse* et de durée égale à celle du mouvement ; *Si on retire* B de A l'aiguille indique un courant de *sens direct* de durée égale à celle du mouvement (fig. 606).

Conclusions. — *Un courant inducteur qui naît, qui s'approche ou dont l'intensité augmente, développe un courant induit de sens inverse.*

Un courant qui cesse, qui s'éloigne ou dont l'intensité diminue, développe un courant induit de même sens.

Induction magnétique. — On démontre de la même façon avec une *bobine* et un *barreau aimanté* que *tout barreau dont l'aimantation commence, augmente ou qui s'approche, développe dans un circuit conducteur fermé un courant inverse du courant du solénoïde équivalent à l'aimant. Réciproquement tout barreau dont l'aimantation cesse, diminue ou qui s'éloigne développe dans un circuit conducteur fermé, un courant induit direct de même sens que celui du solénoïde équivalent à l'aimant* (fig. 607 et 608).

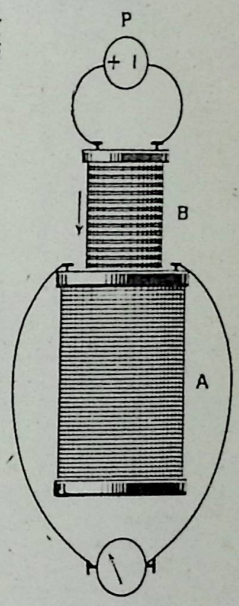


Fig. 606

Induction tellurique. — Le champ *magnétique terrestre* est susceptible, lui aussi, de produire un *courant induit*.

C'est ainsi qu'on constate que si on retourne *bout pour bout* un solénoïde dont *l'axe coïncide* avec la direction *nord-sud* on fait naître dans les spires un courant induit qu'un galvanomètre sensible décèle, (fig. 609). Ce courant change de sens à chaque retournement.

En faisant tourner le solénoïde on fait varier le nombre des lignes de force qui pénètrent les spires.

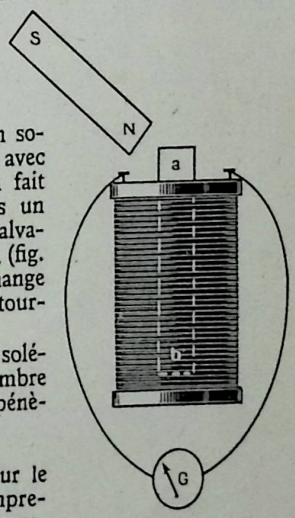


Fig. 607

Self-induction. — Sur le circuit d'une pile comprenant un *solénoïde* on dispose, comme l'indique la figure 610, un galvanomètre en dérivation. Quand on *ouvre le circuit*, il y a production d'un *courant induit* dit *extra-courant d'ouverture*. Il est de *même sens* que le courant principal et continue celui-ci.

Quand on *ferme* le circuit il y a production d'un *courant induit* dit *extra-courant de rupture* de sens inverse du courant principal et qui tend à diminuer son intensité.

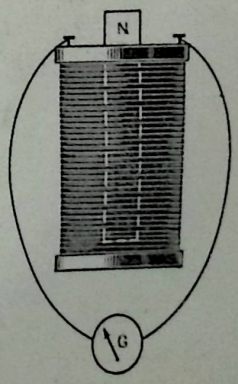


Fig. 608

Remarque. — On peut remplacer le galvanomètre par une lampe électrique que le courant principal éclaire faiblement ; on cons-

tate que son intensité augmente au moment de l'ouverture et de la rupture.

Ce phénomène s'observe au moment de *l'allumage* et de l'*extinction* dans une salle éclairée à l'électricité.

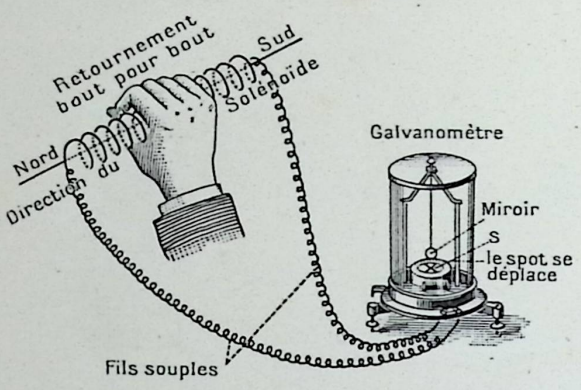


Fig. 609

Lois générales de l'induction (Loi de Lenz) :

1° *Toute variation du flux magnétique qui traverse un circuit fermé, développe dans celui-ci un courant induit.*

2° *La durée du courant induit est égale à celle de la variation du flux.*

3° *Le sens du courant induit est tel que par son action électro-magnétique il s'oppose à la variation du flux qui lui donne naissance.*

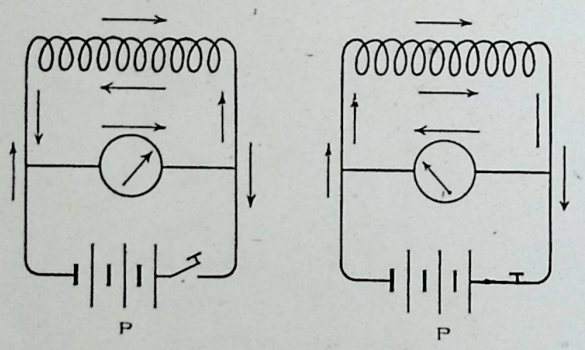


Fig. 610

Règle de Maxwell. — La loi de l'induction peut encore être exprimée par la règle *mnémonique* suivante due à *Maxwell*.

Quand le flux qui traverse le circuit diminue, le courant induit a le sens positif et réciproquement quand il augmente le courant induit a le sens négatif.

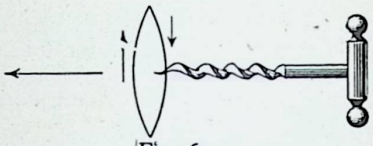


Fig. 611

On convient d'appeler *sens positif* celui dans lequel il faut *tourner le tire-bouchon* pour qu'il progresse suivant la direction du champ *et sens négatif le sens inverse* (fig. 611).

Loi de Neuman. — *La force électromotrice induite est égale au rapport de la variation de flux magnétique* $\Delta\varphi$ *à la durée* Δ t.

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ CGS.}$$

ou

$$E = \frac{\Delta\varphi}{s\,t}\,10^{-8} \text{ volts}$$

L'intensité du courant induit développé par une variation de flux magnétique est donnée par la formule :

$$I = \frac{E}{R} = \frac{1}{R}\,\frac{\Delta\varphi}{s\,t}\,10^{-8} \text{ amp.}$$

La quantité d'électricité développée est :

$$Q = I \times \Delta t = \frac{1}{R}\,\Delta\varphi \times 10^{-8}$$

Courant induit de Foucault. — Les courants induits de Foucault sont des courants qui prennent naissance dans des masses *métalliques* soumises à des *variations* de flux.

Ces courants ont l'inconvénient de *dégager beaucoup de chaleur*. Il y a donc perte d'énergie. Pour éviter ces pertes d'énergie dans les dynamos, alternateurs et transformateurs, on remplace les masses métalliques par des *faisceaux de fils* ou des *lames de fer*.

CHAPITRE XVI

APPLICATION DES COURANTS D'INDUCTION

TÉLÉPHONE

Le téléphone est un appareil destiné à transmettre la parole par l'intermédiaire de l'électricité.

On distingue :

1° *le téléphone magnétique de Bell* ;
2° *le téléphone à piles.*

Téléphone magnétique de Bell. — C'est un appareil magnéto-électrique, composé essentiellement de *deux électro-aimants* placés aux deux extrémités d'une ligne électrique et actionnés par le fil de cette ligne. Devant chaque électro-aimant se trouve une *plaque métallique vibrante* (fig. 612 et 613) devant laquelle on parle, ou près de laquelle on place l'oreille pour écouter. Sous l'action de la parole, cette plaque entre en mouvement, elle vibre, et, dans ses *oscillations, tantôt s'approche et tantôt s'écarte de l'électro-aimant.* L'énergie magnétique de ce dernier se trouve influencé par ces changements de position et il en résulte, par réaction, que le courant de la ligne lui-même est influencé. Chaque fois que la plaque vibrante se *rapproche*, l'intensité du courant *augmente*, chaque fois qu'elle *s'éloigne*, l'intensité du courant *diminue* (fig. 614).

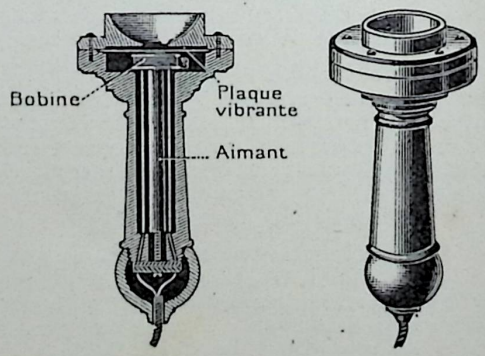


Fig. 612 — Téléphone type Bell

A l'autre bout de la ligne, le second électro-aimant subit l'influence de ces modifications du courant. Sa puissance augmente ou diminue d'une façon correspondante et, par suite, il agit avec une force attractive

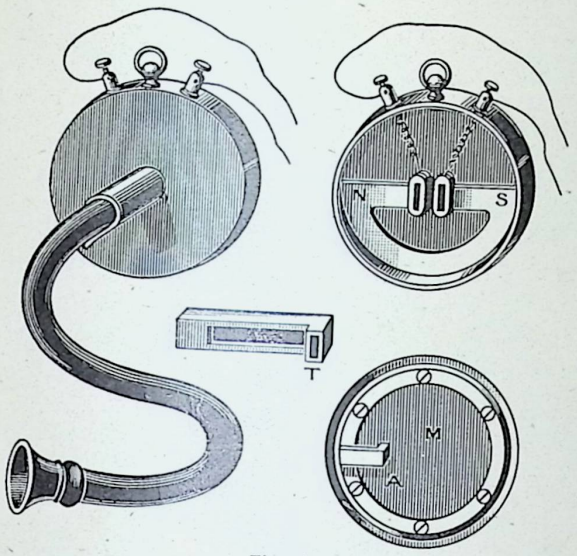


Fig. 613

plus ou moins énergique sur la plaque élastique vibrante placée devant lui. En conséquence, cette plaque entre elle-même en mouvement et répète, sinon avec la même intensité, du moins dans le même ordre, les oscillations de la première plaque. Comme ces vibrations se transmettent à l'air, et de là au tympan de l'auditeur, il

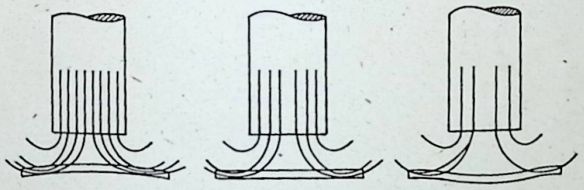


Fig. 614

suffit d'approcher l'oreille de l'appareil pour entendre l'interlocuteur placé à l'autre bout de la ligne. D'après cet exposé, il est évident que l'appareil, d'abord employé comme récepteur, pourra servir de transmetteur, et inversement.

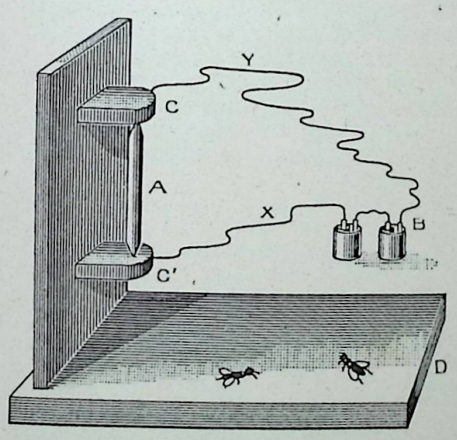


Fig. 615

Téléphone à pile. — Le téléphone de Bell ne donne pas naissance à des courants induits assez intenses pour que l'audition soit possible à de grandes distances, dans de bonnes conditions. L'invention du *microphone* a donné au téléphone toute sa valeur pratique (fig. 615).

Le téléphone à piles comprend :

une *pile*, un *microphone* et un *récepteur Ader* (fig. 616).

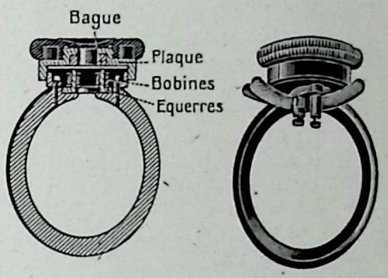


Fig. 616

Le microphone de Hugues consiste en une plaque vibrante à laquelle sont assujettis de petits supports de *charbon* servant de bornes au fil de ligne. Entre deux de ces supports est intercalé un petit *cylindre de charbon, taillé en pointe* à ses deux extrémités. Le cylindre est maintenu par pression, ses deux pointes reposant dans deux petites cuvettes creusées dans les supports. Le courant électrique doit passer par ceux-ci et par la série des petits cylindres de charbon ainsi disposés. Lorsque la plaque vibre, la pression exercée par les supports sur les cylindres subit des variations qui se traduisent par une augmentation ou par une diminution de l'intensité du courant et le récepteur, constitué par un récepteur Ader transforme ces variations en vibrations sonores.

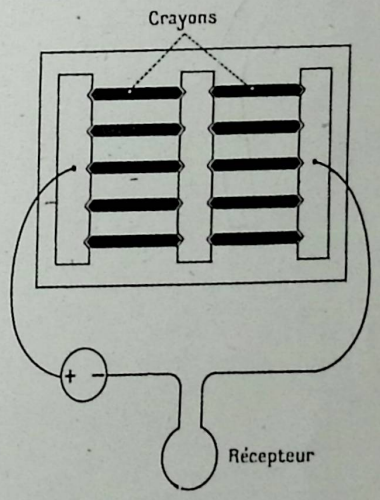


Fig. 617

Dans la pratique le crayon est remplacé par un ensemble de 10 *crayons* disposés, comme l'indique la figure 617, sous la face inférieure d'un pupitre de bois mince devant lequel on parle.

Le récepteur Ader est constitué par un aimant circulaire dont chacun des pôles est entouré d'une bobine (fig. 616).

C'est le même fil qui s'enroule en sens inverse pour constituer les deux bobines comme dans les électro-aimants. En avant des pôles se trouve la plaque vibrante.

CHAPITRE XVII

APPLICATIONS DES COURANTS D'INDUCTION

MACHINES ÉLECTRIQUES

Machines électriques, machines magnéto-électriques et dynamo-électriques. — Les lois de l'induction ont reçu leur application dans la construction des électro-moteurs.

Tout électro-moteur se compose, en principe, d'une *partie inductrice composée d'un système d'aimant ou d'électro-aimant*, et d'une partie *induite* comprenant le *fil* dans lequel on se propose de créer un courant, ainsi que le support de ce fil. La nécessité de faire mouvoir les deux parties, l'une par rapport à l'autre, oblige à recourir à une force motrice quelconque, naturelle ou artificielle, telle qu'une chute d'eau ou une machine à vapeur. L'énergie mécanique, engendrée par la chute ou par la machine, correspond mécaniquement (déduction faite de la partie absorbée par le frottement et par les organes de transmission) à l'énergie développée par le courant électrique. La machine électrique ne fait donc que *transmettre l'énergie*. Elle ne la crée pas comme certaines personnes ont tendance à se l'imaginer.

La machine est dite *magnéto-électrique* si l'inducteur est un *aimant*, et *dynamo-électrique* si l'inducteur est un *électro-aimant*.

Le système inducteur peut être mobile, et le circuit induit fixe ; ou, inversement, l'induit mobile et l'inducteur fixe ; enfin, l'inducteur et l'induit peuvent se mouvoir en sens inverse l'un de l'autre. A un autre point de vue, l'inducteur peut être extérieur à l'induit, il peut l'envelopper pour ainsi dire, ou il peut être intérieur à l'induit, c'est-à-dire être enveloppé par lui.

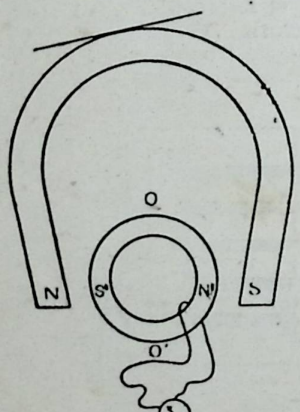


Fig. 618

Considérons un *aimant en fer à cheval* (fig. 618) et supposons qu'entre les branches de cet aimant se trouve placé *un anneau en fer doux*. Le pôle austral de l'aimant étant en N et le pôle boréal en S, l'anneau subira une aimantation par influence et manifestera un *pôle boréal* en face de N et un *pôle austral* en face de S. Supposons qu'un circuit fermé, roulé autour de l'anneau en l'un de ses points, se déplace rapidement sur cet anneau en tournant par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre. S'il part d'un point situé en face de N, en S' pour gagner le point O' en face, il se développe dans ce circuit un courant qui tourne de l'intérieur à l'extérieur de l'anneau, en avant de la figure : quand le circuit dépasse le point O' pour se rapprocher de N', c'est l'influence de ce dernier qui l'emporte, le courant induit doit donc changer de sens et tourner cette fois en avant du plan de la figure, de l'extérieur à l'intérieur de l'anneau. Le même raisonnement s'applique au passage de N' en O et de O en S'. En somme, quand le circuit passe de O en O', le courant tourne en avant de la figure, de l'intérieur à l'extérieur de l'anneau et, quand il passe de O' en O, le courant tourne en sens inverse.

La *machine de Gramme*, une des machines magnéto-électriques les plus anciennes, se compose d'un anneau de fer doux, monté par des rayons isolés sur un axe central (fig. 619). Cet anneau tourne entre les deux pôles d'un aimant et une série de spirales sont enroulées sur lui. Ces spirales au nombre d'une dizaine, sont séparées les unes des autres par de petits intervalles. Leurs extrémités sont réunies, deux à deux, à des pièces de cuivre disposées suivant les rayons de l'anneau : deux lames métalliques, appelées *collecteurs*, sont installées dans une position fixe de part et d'autre de l'axe, et dans la ligne diamétrale perpendiculaire à la ligne des pôles de l'aimant inducteur, c'est-à-dire dans la ligne neutre O O'.

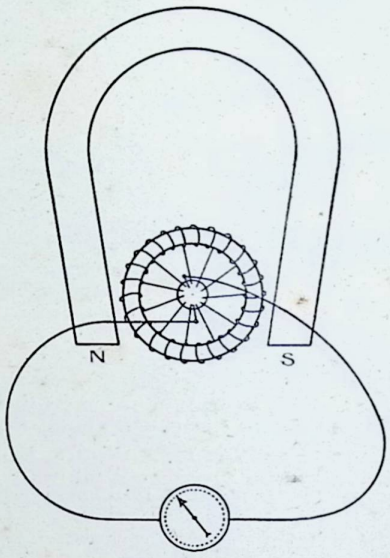


Fig. 619

Pendant la rotation, les collecteurs sont toujours en contact respectivement avec les pièces de cuivre rayonnantes, qui arrivent dans la ligne neutre de l'anneau. Or, le courant *étant de sens inverse* dans chacune des moitiés, séparées par la ligne O O' si on réunit les deux collecteurs par un fil, le courant de chacune des deux moitiés rentre par l'un des collecteurs, en O par exemple et ressort par l'autre en O'. La machine *fournit donc un courant continu tant que l'anneau est en mouvement*.

On remplace souvent dans la machine de Gramme *l'aimant par un électro-aimant*. Mais il est inutile, pour faire fonctionner cet électro-aimant, de lui fournir un courant indépendant de celui de la machine : en général, c'est au courant de la machine lui-même qu'on emprunte l'énergie nécessaire pour exciter l'électro-aimant. Dans ce cas, on dit que la machine *est auto-excitatrice*. Ce dernier dispositif est à peu près le seul qu'on utilise actuellement. L'auto-excitation peut avoir lieu de différentes façons. Le courant, en partant du collecteur positif (fig. 620), peut parcourir le fil de *l'électro-aimant avant de se rendre dans la ligne*. Ce dispositif, très simple, présente l'inconvénient suivant : l'intensité de l'aimantation, et par suite du courant développé dans l'induit, est en raison directe de l'intensité du courant de la ligne. Si donc, à un moment donné, le courant éprouve une résistance imprévue, une *surcharge*, il s'affaiblit, l'aimantation de l'inducteur s'affaiblit elle-même, et l'intensité du courant développé dans l'induit diminue en entraînant, par retour, la diminution du courant de la ligne. Au moment où la machine devrait, pour répondre à un plus grand effort, fournir un courant plus puissant, elle donne donc, au contraire, un courant moins intense.

Pour obvier à cet inconvénient, on monte généralement l'*excitateur en dérivation*, c'est-à-dire qu'on ne fait passer, par un fil fin, qu'une faible partie du courant de la ligne autour des pôles de l'électro-aimant (fig. 621). Dans ce cas, s'il se produit une surcharge, le courant de la ligne se trouve bien affaibli momentanément par

une résistance inaccoutumée, mais momentanément aussi, une partie du courant de la ligne reflue dans la dérivation de l'excitateur, augmente la puissance de celui-ci et, par suite, l'action de l'inducteur, l'intensité du courant induit, et celle du courant de la ligne, qui peut alors vaincre la résistance provenant de la surcharge.

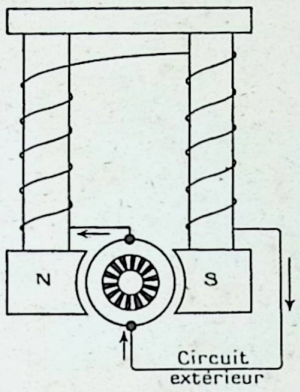


Fig. 620

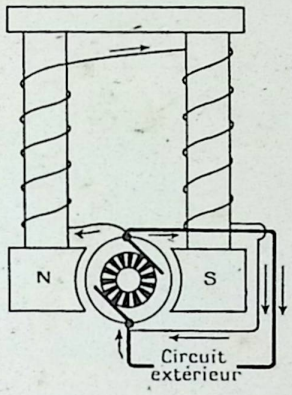


Fig. 621

COURANTS ALTERNATIFS

Le **courant alternatif** est un courant dont le *sens et l'intensité* varient pendant des périodes *régulières*, de telle façon qu'il passe par diverses phases se renouvelant à intervalles égaux. Si nous représentons graphiquement les variations de l'intensité du courant en fonction du temps, nous obtiendrons une courbe rappelant *une sinusoïde* (fig. 622).

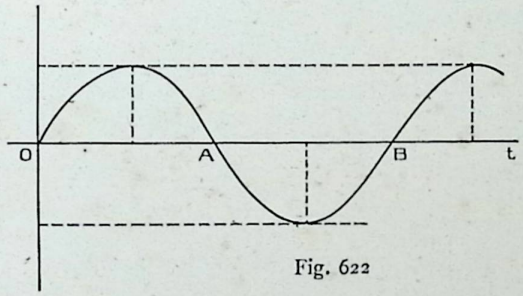


Fig. 622

Les intervalles qui séparent deux valeurs nulles du courant sont égaux, de même que les durées qui séparent deux maxima quelconques.

On appelle *période* du courant la durée qui sépare deux instants pour lesquels le courant a même intensité et même sens.

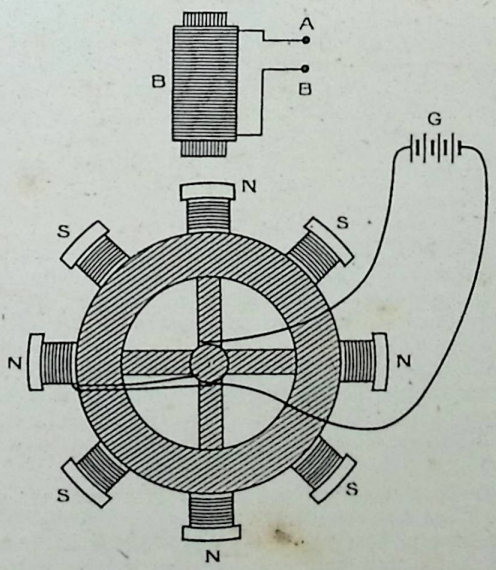


Fig. 623

La *fréquence* est le nombre de périodes par seconde.

Dans un grand nombre d'appareils la fréquence est de 50.

Alternateurs. — Soit une jante en acier mobile autour d'un axe horizontal O. On fixe sur cette jante un certain nombre d'électro-aimants, par exemple 8 comme l'indique la figure 623. On lance dans ces bobines le courant d'une génératrice G (*excitatrice*). Les bobines sont enroulées dans un sens tel que les pièces polaires de la couronne correspondent alternativement à des pôles nord et à des pôles sud.

Au-dessus de la roue, on dispose une bobine B ; lorsque la jante tourne, il va se créer dans B des courants induits qui changeront de sens suivant que B sera en face d'un pôle nord ou d'un pôle sud.

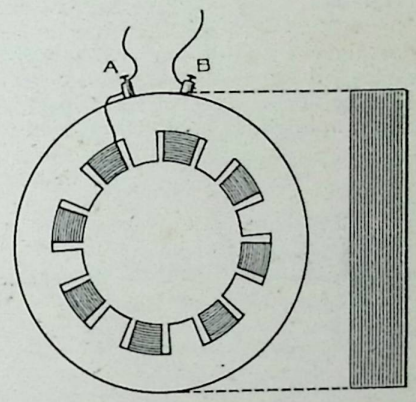


Fig. 624

Il se produit donc un courant alternatif. Le système de bobines est l'*inducteur*, la bobine B l'*induit*. L'induit se compose dans les alternateurs industriels d'un anneau de fer doux formé par des feuilles de tôle de faible épaisseur ; on dit que le fer de l'induit est feuilleté. Dans cet anneau sont percées des encoches dans lesquelles sont logées les bobines (fig. 624). Toutes ces bobines sont montées en série.

On pourrait laisser l'inducteur immobile et faire tourner l'induit, mais cette dernière solution est très peu adoptée. En général le mouvement de l'*inducteur* (*rotor*) est commandé par une turbine à vapeur (turbo-alternateur).

Dans ce cas l'inducteur tourne très vite (8.000 tours par minute), mais il n'y a qu'un petit nombre de pôles.

On construit également des appareils (*alternateurs-volants*) qui tournent lentement mais ont un grand nombre de pôles. L'inducteur doit alors avoir un grand rayon (fig. 625).

Entre les deux types extrêmes, il y a toute une série de machines différentes.

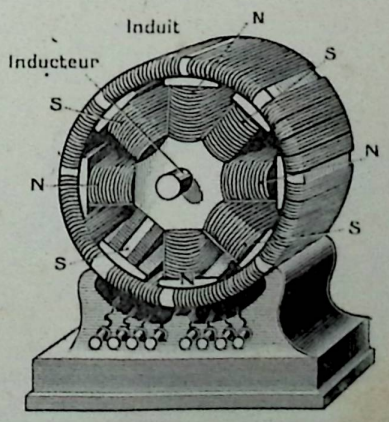


Fig. 625 — Alternateur de Gramme

Les machines à courant alternatif sont dites *biphasées, triphasées, polyphasées* lorsque le nombre des groupes électrogènes est de *deux*, de *trois* ou de *plus de trois*. Dans ce cas les courants alternatifs correspondent à chacun des groupes qui se succèdent conformément à l'ordre dans lequel les segments sont disposés (fig. 626).

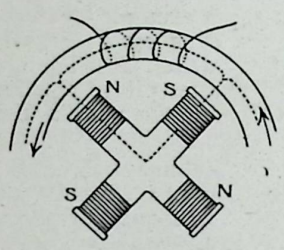


Fig. 626

Réversibilité des machines électriques. — Toutes les machines électriques sont réversibles, c'est-à-dire qu'elles sont capables d'entrer en mouvement sans le secours d'aucun moteur agissant directement sur son axe, lorsqu'on fait parcourir l'induit par un courant. C'est une conséquence de la réciprocité d'action des aimants et des courants. Grâce aux moteurs réversibles, il est possible d'utiliser, par exemple, dans une usine, l'énergie engendrée par une chute d'eau située à plusieurs kilomètres de cette usine (fig. 627).

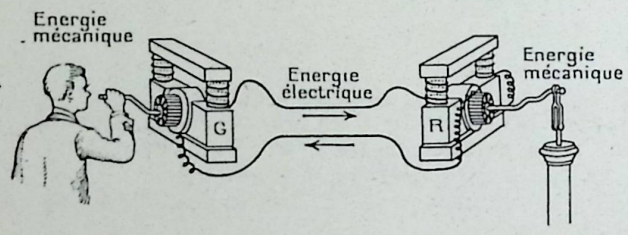


Fig. 627

Le Métropolitain de Paris fonctionne au moyen de petites dynamos installées dans les voitures motrices, et mises en mouvement par le courant du rail électrique. Les tramways électriques fonctionnent d'après le même principe.

Utilisation des courants alternatifs. — Les courants alternatifs ne peuvent être utilisés pour l'électrolyse. Ils servent pour l'éclairage comme les courants continus.

Le filament de la lampe à incandescence passe par des variations de température ; mais les maxima et les minima de température du fil et par suite d'incandescence sont assez rapprochés pour n'avoir aucun effet sur l'œil.

On les utilise aussi pour produire la force motrice dans les moteurs à courant alternatif.

Le moteur se compose d'une partie mobile (*rotor*) et d'une partie fixe (*stator*).

Transport de l'énergie électrique. — Nous avons vu que la puissance électrique d'un générateur de force électro-motrice E débitant un courant d'intensité I est : $W = E \times I$.

Le transport d'une puissance électrique donnée est autant moins coûteux que le voltage est plus élevé (courants à haute tension) (fig. 628).

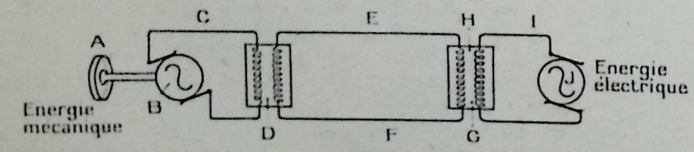


Fig. 628

L'usine génératrice comprend généralement une turbine A actionnant un générateur B (un alternateur de voltage moyen). Le courant de faible voltage et de grande intensité passe alors dans un transformateur à haute tension D pour être transformé en courant de haut voltage et de faible intensité. C'est ce courant qui est envoyé dans la ligne EF. Sur le lieu d'utilisation, il est reçu dans un transformateur H G qui le transforme de nouveau en courant de voltage normal (110 volts ou 220 volts) mais de forte intensité. pour être utilisé à actionner des moteurs J.

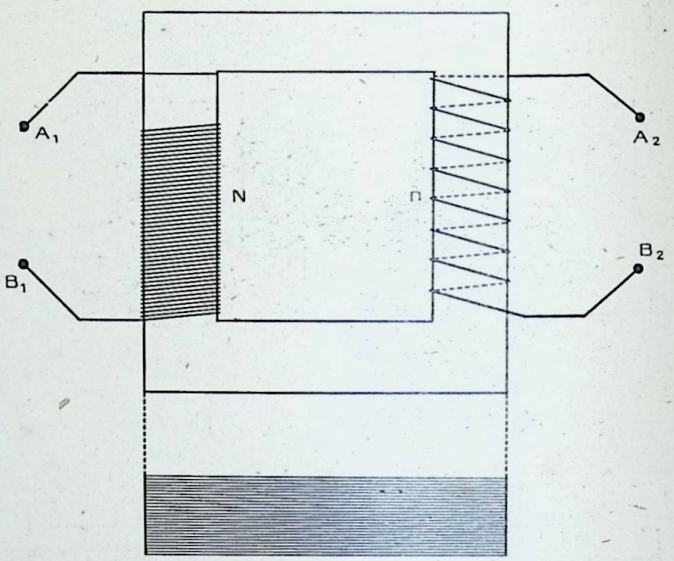


Fig. 629

Un *transformateur* se compose essentiellement de tôles minces empilées de façon à former un cadre (fig. 629) ; d'un circuit A_1B_1 présentant de nombreuses spires N (circuit primaire) et d'un circuit A_2B_2 présentant un petit nombre de spires *n* (circuit secondaire).

Soient V_1 la différence de potentiel alternative aux bornes A_1B_1 et V_2 celle qui existe aux bornes A_2 B_2 ; on démontre que l'on a :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N}{n}$$

$\frac{N}{n}$ est le rapport de transformation.

En général un transformateur bien construit fonctionne avec un rendement de 95%.

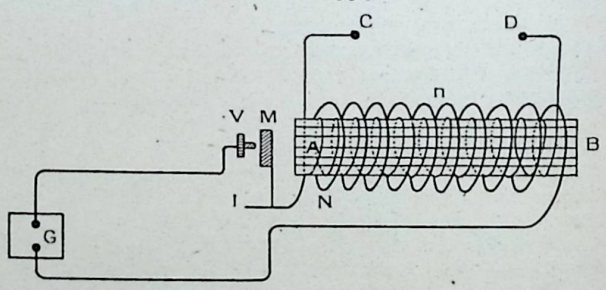


Fig. 630

Bobine d'induction. — La bobine d'induction ou bobine de Ruhmkorff est un transformateur spécial permettant à l'aide d'un courant continu à faible tension d'obtenir un courant alternatif à tension très élevée.

Elle comprend : 1° Un paquet de fil de fer doux autour duquel sont enroulées : un petit nombre de spires de gros fil et un grand nombre de spires de fil mince (courant primaire et courant secondaire) ;

2° Sur le courant primaire sont intercalés un générateur à courant continu G, par exemple quelques accumulateurs, et un interrupteur I constitué par une vis V et un ressort portant une lame de fer doux M en regard de l'extrémité A de la bobine (fig. 630).

Lorsqu'on lance le courant, le fer doux s'aimante et attire la lame M ; aussitôt le courant est interrompu : la lame revient à sa position primitive, le courant se rétablit et ainsi de suite. Chaque fois que le courant passe dans le primaire, il s'établit un courant dans le secondaire, et on a comme pour le transformateur des différences de potentiel sensiblement proportionnelles au nombre de spires de chaque enroulement.

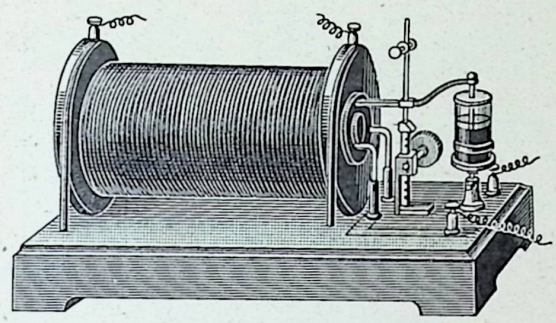


Fig. 631

La bobine de Ruhmkorff (fig. 631) est utilisée pour étudier les effets des décharges électriques dans l'air et les gaz raréfiés, pour la radiographie, la télégraphie sans fil, l'inflammation du mélange explosif dans les moteurs à explosion, etc.

Problème

Un laboratoire dispose de 50 accumulateurs groupés de façon à donner un courant de 20 volts. Dans ces condition, l'ensemble débite chaque nuit 250 ampères-heure. On procède chaque jour à la charge de la batterie, de façon à compenser la consommation de la nuit, au moyen d'une dynamo actionnée par un moteur. On demande :

1° La façon dont doivent être groupés les accumulateurs pour que la *f.é.m.* de la batterie soit de 20 volts sachant que chaque accumulateur a une f.é.m. moyenne de 2 volts.

2° La quantité d'électricité débitée la nuit par chaque accumulateur.

3° La f.é.m. de la dynamo qui sert à la charge du groupe ; on supposera la charge terminée lorsque la f.é.m. de chaque accumulateur est de 2,5 v.

4° La force du moteur nécessaire pour actionner la dynamo ; on admettra que la dynamo n'utilise que les 8/10 de la puissance mécanique qu'on lui fournit.

Solution

1° Il faut grouper les accumulateurs d'une façon mixte, en réunissant en série les accumulateurs 10 par 10, puis en groupant en parallèles les 5 séries ainsi formées.

Chaque série a une f. é. m. de $10 \times 2 = 20$ volts.

2° La quantité totale d'électricité débitée est de : $3600 \times 250 = 900.000$ coulombs.

Tous les accumulateurs débitent la même quantité ; donc chacun débitera :

$$\frac{900.000}{50} = 18.000 \text{ coulombs}$$

3° La charge est terminée lorsque la f. é. m. de la batterie d'accumulateurs est égale à celle de la dynamo.

Cette f. é. m. est de $2,5 \times 10 = 25$ volts.

4° Le travail fourni par la dynamo est :
$T = E\,I\,t$ joules ; mais $E = 25$ volts et $I\,t = 900.000$ coulombs.

D'où $T = 25 \times 900.000 = 22.500.000$ joules.

Le travail fourni par le moteur est $\frac{22.500.000 \times 10}{8}$

et si le moteur travaille 12 heures, sa puissance est de : $\frac{22.500.000 \times 10}{8 \times 12 \times 366} = 6.500$ Watts.

CHAPITRE XVIII

DÉCHARGES DANS LES GAZ RARÉFIÉS

RAYONS X

Décharge dans les gaz raréfiés. — L'air oppose au passage de l'électricité une certaine résistance qu'on peut vaincre en employant des *courants de haute tension*. Pour faire jaillir dans l'air une étincelle entre deux pôles distants de 5 millimètres il faut une tension de près de 3.000 volts; une étincelle de 10 millimètres exige 25.000 volts et une de 20 millimètres 30.000 volts environ.

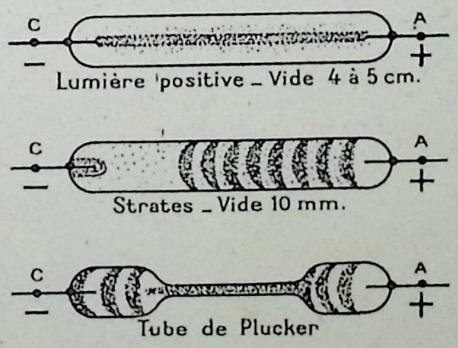


Fig. 632

Cette *résistance diminue avec la pression* de l'air, ainsi que l'ont démontré Gassiot et surtout Plücken.

En se servant du souffleur de Geissler, Plücken obtint des tubes de verre où le vide presque absolu est réalisé. La pression atmosphérique normale faisant équilibre à une colonne de mercure de 760 millimètres de hauteur, la pression de l'air dans les *tubes de Geissler* correspond seulement à 1 millimètre de mercure. Des fils, scellés par fusion dans le verre, pénètrent dans le tube et constituent les électrodes qu'on peut mettre en relation avec une source électrique. L'électrode positive prend le nom *d'anode* ; la négative, celui de *cathode*. La distance de l'anode à la cathode est à peu près égale à la longueur du tube et peut atteindre une valeur relativement considérable. Si l'on fait passer dans un tube de Geissler un courant à haute tension, on voit se former entre les deux électrodes une zone lumineuse violacée, d'autant plus large et diffuse que l'air est plus raréfié. Cette zone n'est pas homogène, elle est composée de bandes lumineuses qui alternent avec des bandes sombres ainsi que l'indique la figure 632. Les décharges suivent toutes les sinuosités du tube, ce qui permet d'obtenir de très beaux effets.

Les tubes de Geissler peuvent être préparés avec d'autres gaz que l'air, par exemple avec de l'hydrogène.

de l'azote, de l'hélium, du chlore, etc. ; la teinte de la zone lumineuse obtenue au passage du courant électrique *varie avec la nature du gaz* ; mais il va sans dire que la raréfaction doit toujours *être poussée très loin.*

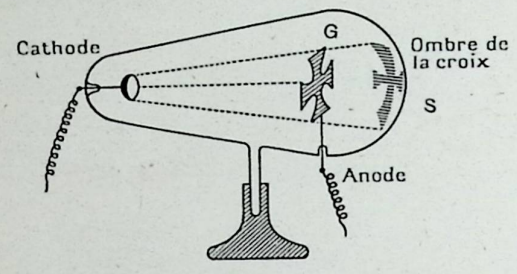


Fig. 633

Rayons cathodiques. — Lorsque la pression dans les tubes de Geissler n'atteint plus que *quelques centièmes de millimètres de mercure* nous voyons se former, près de la cathode un espace noir, et de cette cathode s'échappe une sorte de radiation qui a l'aspect d'une *traînée lumineuse faible.* Elle chemine en ligne droite et semble émaner du miroir que forme la cathode dans le tube spécial de *Crookes* (fig. 633).

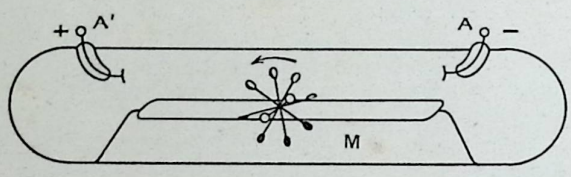


Fig. 634

Ces rayons sont appelés *rayons cathodiques.*

1° Ils se propagent en lignes droites. (C'est ainsi qu'ils projettent une silhouette S de la croix G. fig. 633).

2° Ils transportent de l'*électricité négative.*

3° Ils sont *déviés par l'aimant.*

4° Ils sont capables de *produire du travail.* (Ils fon rouler le moulinet M, fig. 634).

5° Ils *ionisent* les gaz c'est-à-dire les *rendent conducteurs.*

6° Les obstacles frappés par ces rayons deviennent la source de *radiations nouvelles appelées Rayons* X.

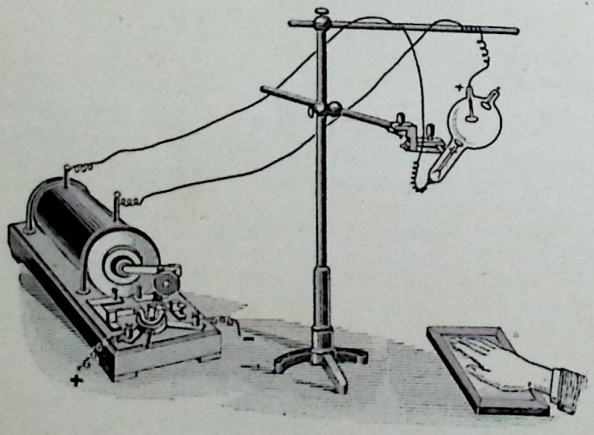


Fig. 635

Rayon X. — Les rayons X, découverts par Röntgen, sont *invisibles,* mais jouissent des propriétés suivantes :

1° *Ils impressionnent les plaques photographiques et excitent la fluorescence* (platinocyanure de baryum).

Fig. 636

2° Ils traversent l'air et les gaz ainsi que certaines substances : l'*aluminium, le bois, le carton, la chair* ; mais le *plomb, le verre, les os,* sont opaques aux Rayons X sous de faibles épaisseurs.

3° Ils se *propagent en ligne droite.*

4° Ils peuvent *être polarisés.*

5° Ils ne sont déviés *ni par l'aimant,* ni par *un corps électricisé.*

6° Ils *ionisent l'air.*

La figure 637 donne le schéma d'une ampoule pour rayons X, la figure 635 indique comment on utilise ces rayons pour la radiographie et la figure 636 nous montre la photographie obtenue.

Le radium, extrait de la pechblende par Monsieur et Madame Curie, possède la propriété d'émettre *spontanément des* rayons X et des rayons cathodiques.

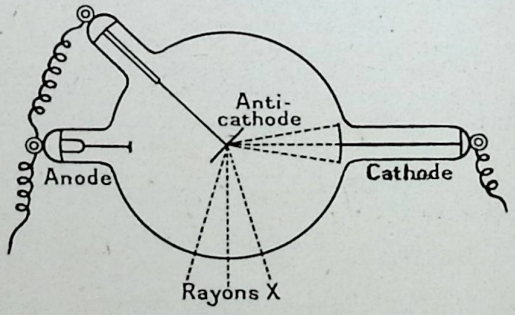


Fig. 637

CHAPITRE XIX

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

Oscillations électriques. — Courants de Tesla. — Lorsque la période d'un courant alternatif devient très courte, la propagation de ce courant peut donner lieu à des manifestations électriques et électro-magnétiques.

Tesla en envoyant un courant à haute fréquence produit par la décharge oscillante d'un condensateur dans le circuit primaire d'une bobine de Ruhmkorff a pu obtenir des courants de 100.000 volts et d'une fréquence de 10 à 100. 000. Le transformateur doit alors être isolé dans un bain d'huile minérale.

Ces courants peuvent traverser le corps sans électrolyser les tissus.

Ondes hertziennes. — Hertz a employé le dispositif suivant (fig. 638) : les deux bornes d'une bobine

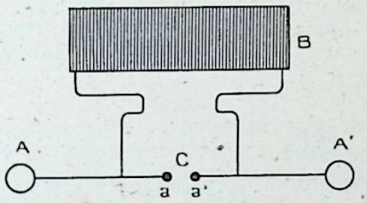


Fig. 638

de Ruhmkorff R sont reliées à un excitateur formé de deux sphères A et A′ portant chacune une tige terminée par une petite sphère *a* et *a′*.

On peut régler la distance de *a* et *a′*. Lorsqu'on fait fonctionner la bobine les deux sphères A et A′ se chargent d'électricité et au moment où l'étincelle éclate entre *a* et *a′* elles se déchargent.

La décharge est oscillante et peut avoir une fréquence de 4×10^8 par seconde.

Ces oscillations provoquent un champ magnétique alternatif ; tous les conducteurs plongés dans le champ sont le siège de *f. é. m.* d'induction. On a ainsi les *ondes hertziennes.*

M. Branly a montré qu'on peut les recevoir au moyen d'un tube de verre contenant de la limaille de fer (*detecteur*) ; la résistance du détecteur diminue considérablement dès que passe la décharge.

D'autres dispositifs ont, depuis, remplacé le détecteur Branly.

Télégraphie sans fil. — L'appareil transmetteur est analogue à celui de Hertz : une clef de Morse permet à l'opérateur de lancer le courant dans la bobine pendant des temps plus ou moins longs.

Pour les grandes distances on met une boule de l'oscillateur en communication avec le sol ; l'autre boule communique avec un long fil vertical ou *antenne.*

Le récepteur d'ondes comprend un détecteur intercalé dans le circuit d'une pile ; il communique également avec la terre et avec une antenne.

Le détecteur le plus employé est constitué par de la *galène* (sulfure de plomb naturel).

Le principe de la *téléphonie sans fil* est le même que celui de la télégraphie, mais les ondes doivent être entretenues et elles ont une fréquence beaucoup plus grande.

On ajoute le plus souvent au récepteur des amplificateurs comportant des lampes *hétérodynes* chauffées par deux accumulateurs et dont le voltage est de 40 à 80 V.

SYSTÈMES D'UNITÉS

Nous avons donné dans les pages qui précèdent, la définition des expressions *grandeur, mesure d'une grandeur, unité* et avons donné les principales unités employées.

Le lecteur trouvera ici une vue d'ensemble sur les différents systèmes d'unités et en particulier un extrait du décret du 26 juillet 1919 qui fixe les caractéristiques du système M. T. S. actuellement légal en France.

Nous insistons tout particulièrement sur l'intérêt pratique de ce chapitre. Le lecteur sait que ni les mathématiques ni la physique ne doivent être pour lui un but mais un moyen. Autrement dit les pages qui précèdent ne doivent pas lui permettre seulement d'apprendre des démonstrations plus ou moins savantes, de pouvoir les reproduire et de savoir par cœur un certain nombre de formules.

Le rôle des sciences mathématiques ou physiques est pour le plus grand nombre tout différent. Il s'agit de résoudre pratiquement et par le calcul certaines questions (l'emploi des lettres est absolument nécessaire) mais finalement de remplacer ces lettres par des chiffres, c'est-à-dire de faire une application numérique et pratique. Or, et le contrôle des examens le montre sans discussion possible, la plupart des élèves ou des candidats qui, par ailleurs, ont parfaitement résolu le problème proposé, sont incapables d'en effectuer sans fautes l'application numérique ; non seulement les calculs arithmétiques ne sont pas exacts, l'élève est incapable d'extraire par exemple la racine carrée la plus simple, mais, pour les problèmes de physique le choix des unités est défectueux. On comprend par exemple que si les côtés d'un triangle sont exprimés en centimètres, l'application de la formule donnant la surface donnera cette dernière en centimètres carrés et non en mètres carrés.

Nous savons qu'un travail est le produit d'une force par une longueur et que l'une des unités de travail est le kilogrammètre. Dans une application il faudra bien se garder d'exprimer la force en kilogramme et le déplacement en centimètres ou en millimètres. Eviter au lecteur de semblables erreurs est le but que nous nous proposons.

Le choix des unités a été fait en tenant compte des propriétés géométriques ou physiques, de manière à établir une certaine dépendance entre les diverses unités. Pour rendre les calculs plus aisés, on a cherché à rendre aussi cohérents que possible les systèmes employés, c'est-à-dire, à choisir un petit nombre *d'unités types* ou *fondamentales* et à en déduire des unités *secondaires* ou *dérivées* sous la forme la plus simple. En particulier, on cherche à écarter le plus possible les coefficients numériques ou *parasites*. On y arrive au moyen *d'équations de définitions*.

Par exemple on prendra comme unité de surface celle d'un carré ayant comme côté l'unité de longueur. Dans la loi de Coulomb que nous avons vue en Electricité $f = k \frac{mm'}{d^2}$, on s'arrange de façon que le coefficient numérique $K = 1$ et la formule devient $f = \frac{mm'}{d^2}$.

On ne peut réduire à moins de 3 le nombre des unités fondamentales dont le choix varie avec le système :

1° Choix proprement dit : force, masse, temps, longueur etc.

2° Choix des grandeurs : mètre, centimètre, kilogramme, tonne etc..

3° Choix des unités secondaires : pour l'unité de surface, on peut prendre à volonté celle d'un carré ou celle d'un triangle équilatéral.

Dans tous les systèmes usités en France, on emploie des multiples ou des sous-multiples des unités qui sont tous *décimaux* sauf ceux relatifs au temps et aux angles qui sont *sexagésimaux*.

Le plus souvent on exprime les nombres en les affectant du facteur 10 muni d'un exposant positif ou négatif suivant que le nombre est plus grand ou plus petit que 1.

Ex. : 650 000 000 s'écrira 650×10^6 et 0,000 650 s'écrira 650×10^{-6}. Dans le cas des puissances positives l'exposant de 10 indique combien de zéros il faut ajouter au nombre, dans le cas des puissances négatives le rang du dernier chiffre du nombre après la virgule.

Exactitude des mesures. — On désigne sous les noms de *nombre exact* et *nombre approché*, la valeur exacte et une valeur approchée d'un nombre quelconque. Un nombre approché l'est par *défaut* ou par *excès* suivant qu'il est plus petit ou plus grand que le nombre exact.

L'erreur absolue est la différence entre le nombre approché et le nombre exact et *l'erreur relative* est le rapport entre l'erreur absolue et le nombre exact. Soit A un nombre exact, A' une de ses valeurs approchées, l'erreur absolue est $A - A'$ ou $A' - A = e$ et l'erreur relative est $\frac{e}{A}$.

Un nombre décimal approché a m chiffres exacts lorsque l'erreur absolue est inférieure à une unité de l'ordre du m^e chiffre du nombre exact, les rangs étant comptés à partir du premier chiffre significatif de gauche.

Ex. : Si 7,15454 a trois chiffres exacts, c'est que l'erreur absolue est inférieure à 0,01.

Si sur une mesure d'une longueur de 1 mètre, on fait une erreur de 1 millimètre, l'erreur absolue = 1 mm et l'erreur relative $= \frac{1}{1000}$ par défaut ou excès.

Une erreur de mesure de 1 m. sur 1 km., de 1 mm. sur 1 m. ou de $\frac{1}{100}$ mm. sur 1 cm donnent des erreurs absolues très différentes mais des erreurs relatives égales $\left(\frac{1}{1000}\right)$. On dit que ces mesures sont également *précises*.

Si l'on mesure une longueur de 320 km. à 1 km. près, l'erreur relative $= \frac{1}{320}$, si l'on mesure une longueur de 15 cm. à 0,5 mm. près, l'erreur relative $= \frac{0,5}{150} = \frac{1}{300}$. Cette dernière mesure est moins précise que la première car $\frac{1}{300} > \frac{1}{320}$ bien que l'erreur absolue soit beaucoup plus petite.

On appelle *erreur accidentelle*, une erreur due à l'imperfection relative des procédés de mesure ou de nos sens. Dans la mesure d'un phénomène (mesure de température par exemple) les résultats se partagent à peu près également en mesures trop grandes et en mesures trop petites. En faisant la somme des résultats

et en prenant la moyenne, les erreurs se compensent en partie si on a soin d'opérer sur un nombre d'expériences assez grand.

On appelle *erreur systématique* une erreur due à l'inexactitude réelle d'un appareil de mesure, une règle fausse, un poids non exact, un thermomètre dont le zéro s'est déplacé, une liqueur mal titrée en analyse chimique etc. La moyenne d'un très grand nombre de mesures est toujours fausse.

Système métrique ou du kilogrammètre ou M. K. S. — A été adopté le 18 germinal An III (7 avril 1795). Le *mètre*, unité de longueur et le *kilogramme*, unité de force furent définis comme étant respectivement la $\frac{1}{10\,000\,000}^{e}$ partie du 1/4 du méridien terrestre et le poids du dcm³ d'eau à 4° C. Des *étalons* en platine furent établis le 22 juin 1799 et considérés par une loi comme définitifs.

Le Bureau International des Poids et Mesures créé à Sèvres en 1875 établit des copies de ces étalons types qui furent remises aux puissances ayant adopté ce système (mètre n° 8 et kilogramme n° 35 pour la France).

Dans ce système les trois unités fondamentales sont :

l'unité de *longueur* : le mètre, m.;

l'unité de *temps* : la seconde, s ou $\frac{1}{86\,400}^{e}$ partie du jour solaire moyen,

l'unité de *force* : le kilogramme-poids, kg, d'où le nom de M. K. S. donné à ce système.

Les principales unités dérivées sont les suivantes :

Surface : le mètre carré, m²,

Volume : le mètre cube, m³.

Vitesse : le mètre par seconde m/s. ou vitesse d'un mobile animé d'un mouvement uniforme qui parcourt 1 mètre en une seconde.

Accélération : Le mètre par seconde par seconde m/s/s. ou accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré dont la vitesse augmente de 1 mètre par seconde à chaque seconde.

A Paris, l'accélération de la pesanteur est g = 9,81 m.

Masse : De la formule $P = mg$ on tire $m = \frac{P}{g}$.

Si $P = gm = 1$.

L'unité de masse est donc celle d'un corps qui pèse à Paris 9,81 kg.

Travail : le kilogrammètre kgm ou travail correspondant au déplacement de 1 kg. à 1 m. dans la direction de la force.

Puissance : le kilogrammètre par seconde ou puissance d'une machine qui produit 1 kgm. en une seconde.

Le cheval-vapeur H.P., C.V., ou ch. = 75 kgm./s.

Le Poncelet = 100 kgm./s.

Remarquons que le cheval-heure est un travail (produit d'une puissance par un temps) 1 ch. h. = 75 × 3600 = 270 × 10³ kgm.

Chaleur : La grande calorie ou kilocalorie ou quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° C la température de 1 kg. d'eau pure sous la pression atmosphérique normale.

Froid : La frigorie fg ou quantité de chaleur qu'il faut enlever à 1 kg d'eau pure sous la pression atmosphérique normale pour abaisser sa température de 1° C.

L'inconvénient du système M. K. S. est d'avoir pour unité de force, une grandeur variable d'un point à un autre du globe. (Voir chapitre de la pesanteur).

Système International C. G. S. — Etabli par l'Association Britannique en 1864, adopté et complété par le Congrès des Electriciens en 1881 et 1893.

Les trois unités fondamentales sont :

L'unité de *longueur*, le centimètre cm. ou $\frac{1}{100}$ du mètre étalon.

L'unité de *masse*, le gramme-masse g. ou $\frac{1}{1000}$ de la masse du kg-étalon.

C'est une grandeur invariable en tous lieux.

L'unité de *temps*, la seconde s, définie comme plus haut.

Les principales unités dérivées sont :

Surface : le centimètre carré cm².

Volume : le centimètre cube cm³.

Vitesse : le centimètre par seconde cm./s.

Accélération : Le centimètre par seconde par seconde cm./s./s.

A Paris l'accélération de la pesanteur est g = 981 cm.

Force : La formule $F = m\,a$ dans laquelle F est la force, m la masse et a l'accélération donne si $m = a = 1$ $F = 1$. L'unité de force est donc la force qui agissant sur l'unité de masse ou g. lui communique une accélération de 1 cm. par seconde par seconde. C'est la dyne.

Le gramme force communiquant à Paris à une masse de 1 g. une accélération de 981 cm., on voit que 1 dyne $= \frac{1}{981}$ g. force

1 kg. = 981 000 dynes = 981 × 10³ dynes.

Travail : L'unité de travail est le travail d'une dyne dont le point d'application se déplace de 1 cm. dans la direction de la force.

C'est l'erg ou dyne-centimètre.

$$1 \text{ erg} = \frac{1}{981} \times \frac{1}{100} \text{ grammes-mètres.}$$

$$= \frac{1}{98\,100\,000} \text{ kilogrammètres} = \frac{1}{9{,}81 \times 10^7} \text{ kgm.}$$

Pratiquement on emploie le joule $J = 10^7$ ergs $= \frac{1}{9{,}81}$ kgm. ou le kilojoule $kJ = 10^{10}$ ergs.

Puissance : L'unité est l'erg par seconde ou le joule par seconde ou watt W qui vaut 10^7 ergs par seconde ou le kilojoule par seconde ou kilowatt kW qui vaut 10^{10} ergs par seconde.

On a donc $1 \text{ watt} = \frac{1}{9{,}81}$ kgm./s.

Or 1 ch. = 75 kgm/s., donc

$$1 \text{ watt} = \frac{1}{9{,}81} \times \frac{1}{75} \text{ ch.} = \frac{1}{736} \text{ ch.}$$

1 Poncelet = 100 kgm/s. = 100 × 9,81 joules par seconde = 981 watts = 0,981 kilowatt.

On voit donc que le Poncelet qui est préférable au cheval-vapeur, puisque c'est un multiple décimal, est très voisin du kilowatt utilisé en électricité.

Pression : l'unité est la barye ou dyne par cm².

La pression atmosphérique = 76 × 13,6 g. par cm² = 76 × 13,6 × 981 dynes par cm² = 1,013 × 10⁶ dynes par cm²,

= 1,013 mégadynes par cm² = 1,013 mégabarye.

Chaleur : L'unité est la petite calorie ou quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° C la température de 1 g. d'eau pure sous la pression atmosphérique normale.

Système M. T. S. — A été rendu légal en France par le décret du 26 juillet 1919.

Les trois unités fondamentales sont :

Unité de *longueur* : le mètre m. défini plus haut.

Unité de *masse* : la tonne-masse t. ou 1000 kg. ou 10⁶ g.

Unité de temps : la seconde s.

Les unités dérivées sont :

Surface : le mètre carré m².

Pour le mesurage des surfaces agraires on peut employer le décamètre carré ou are.

Volume : le mètre cube m^3.

Pour le mesurage du bois le m^3 porte le nom de stère et pour celui des liquides, des céréales ou de certaines matières pulvérulentes on peut employer le décimètre cube ou litre.

Vitesse : le mètre par seconde, m/s.

Le nœud marin est la vitesse d'un navire qui parcourt 1 mille marin ou 1852 m. en 1 heure.

Accélération : le mètre par seconde par seconde.

Force : L'unité de force est la force constante qui agissant sur une masse de 1 tonne lui communique un accroissement de vitesse de 1 mètre par seconde. C'est le sthène, sn.

1 sn = 10^8 dynes.
1 kg = 0,98 centisthène = 0,98 csn.

Travail. — L'unité est le travail produit par 1 stène dont le point d'application se déplace de 1 m. dans la direction de la force. C'est le kilojoule kJ qui vaut 10^{10} ergs. Le joule J = 10^{-3} kilojoule ou 10^7 ergs.

1 kgm = 9,81 J.

Puissance. — L'unité est le kilowatt kW. 1 watt W = 10^{-3} kW.

1 Poncelet = 0,98 kW
1 ch. = 0,736 kW

Pression. — C'est la pression uniforme qui répartie sur 1 m^2 produit 1 sthène.

C'est la pièze, pz . 1 barye = 10^{-1} pz.

L'hectopièze = 10^2 pz porte le nom de bar et sert à la mesure des pressions atmosphériques, il correspond à 75 cm. de mercure.

1 atmosphère = 1,033 kg. par cm^2 = 1,013 bar.

Chaleur. — C'est la thermie th ou quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° C la température d'une tonne d'eau pure.

1 grande calorie = 1 millithermie, mth. = $\frac{1}{1000}$ th.

1 petite calorie = 1 microthermie µth. = $\frac{1}{1.000.000}$ th.

Angle. — L'unité d'angle est l'angle droit ou angle formé par deux droites qui se coupent sous des angles adjacents égaux. La centième partie porte le nom de grade, la 90e le nom de degré, la 60e partie du degré celui de minute d'angle et la 60e partie de la minute celui de seconde d'angle.

Pour distinguer les minutes et secondes d'angle des minutes et secondes de temps, on emploie les notations suivantes :

$$\begin{cases} 3\text{ h, } 15\text{ m, } 45\text{ s temps.} \\ 3^\circ,\ 15',\ 45'' \text{ angles.} \end{cases}$$

Différence de potentiel, force électromotrice ou tension. — L'unité est le volt ou différence de potentiel existant entre les extrémités d'un conducteur dont la résistance est 1 ohm, traversé par un courant invariable de 1 ampère. Le volt V est représenté par la fraction $\frac{1}{1.01830}$ de la force électromotrice prise à 20° C de la pile Weston au sulfate de cadmium.

Quantité d'électricité. — C'est le coulomb C ou quantité d'électricité transportée en 1 seconde par un courant de 1 ampère. Il correspond au dépôt électrolytique de 0,001 11 800 grammes d'argent.

L'ampère-heure = 3600 coulombs et représente la quantité d'électricité transportée en une heure par un ampère.

Intensité électrique. — C'est l'ampère A ou intensité d'un courant qui dépose, par seconde 0,001.118.00 gramme d'argent par électrolyse d'une solution aqueuse de nitrate d'argent.

Résistance électrique. — C'est l'ohm O ou résistance offerte à un courant par une colonne de mercure de section uniforme, à 0° C, ayant une longueur de 106,300 centimètres et une masse de 14,4521 grammes.

Intensité lumineuse. — C'est la bougie décimale bd ou étalon Violle, constituée par une surface égale à celle d'un carré de 1 cm. de côté, prise à la surface d'un bain de platine rayonnant normalement, à la température de solidification.

Flux lumineux. — C'est le Lumen lu. ou flux lumineux, émané d'une source uniforme, de dimensions infiniment petites et d'intensité égale à une bougie décimale et rayonné en 1 seconde dans l'angle solide qui découpe une aire égale à 1 m^2 sur la sphère de 1m. de rayon ayant pour centre la source.

Eclairement. — C'est le Lux lx, ou éclairement d'une surface de 1 m^2 recevant un flux de 1 lumen.

Le phot = 10 000 lx.

Puissance des verres. — C'est la dioptrie ou puissance (inverse de la distance focale) d'un système optique de distance focale = 1 mètre.

Remarque. — M. Paul Janet, Directeur de l'Ecole supérieure d'Electricité a donné un certain nombre de règles de nomenclature que nous indiquons ci-dessous.

1° Dans le cas d'un nombre fractionnaire, on fait toujours suivre ce dernier du symbole de l'unité qu'il désigne : 4,45 f ; 3,450 m^3.

2° Dans un nombre de plusieurs chiffres, on sépare, par un espace blanc, les tranches de 3 chiffres.

Ex. : 1 740 300 m. ; 50 000 V.

3° Lorsqu'une grandeur est le produit de deux autres, on forme le nom de cette unité en accolant les noms des unités des deux autres et dans le langage écrit en accolant les noms ou les symboles, soit sans séparation, soit séparés par un point.

Ex. : 1 kilogramme mètre ou 1 kilogrammètre, kg. m ou kgm.

1 erg = 1 dyne centimètre ou 1 dyne.centimètre.

4° Lorsqu'une grandeur est le quotient de deux autres, on forme le nom de cette unité en accolant les noms des unités des deux autres séparées par le mot par et dans le langage écrit, en séparant les noms ou les symboles, soit par deux points : , soit par un trait horizontal ou par un trait oblique.

Ex. : l'unité de vitesse est le mètre par seconde = mètre : seconde = $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ = mètre/seconde = m : s = $\frac{m}{s}$ = m/s.

IMPRIMÉ ET RELIÉ
POUR LA
LIBRAIRIE ARISTIDE QUILLET
PAR
L'IMPRIMERIE DES DERNIÈRES NOUVELLES
DE STRASBOURG